

1. Понятие за $\mathbf{R}$ – множество от реалните числа

Множеството на естествените числа $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ означаваме с $\mathbf{N}$;

Множеството на целите числа $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ означаваме с $\mathbf{Z}$;

Множеството на рационалните числа $\{p/q; p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ означаваме с $\mathbf{Q}$;

Множеството на реалните числа означаваме с $\mathbf{R}$.

Множеството на комплексните числа $\{a+bi; a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$ означаваме с $\mathbf{C}$;

За тези множества имаме: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$;

Аксиоми на Пеано за естествените числа:

1. Всяко естествено число n има наследник $n+1$;
2. На всеки две естествени числа m, n се съпоставя еднозначно сумата им $m+n$, която е естествено число;
3. На всеки две естествени числа m, n се съпоставя еднозначно произведението им $m \cdot n$, което е естествено число;
4. Множеството $\mathbf{N}$ на естествените числа е наредено; съществува релация $\leq$ - сравнение на естествени числа;

Рационалните числа представляват крайни и безкрайни периодични дроби; едно рационално число m/n може да се представи като крайна десетична дроб тогава и само тогава, когато $n = 2^k \cdot 5^m$, където k и m са естествени или нули; в такъв случай това число може да се запише по следния начин:

$m/n = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ - ако числото е записано в десетична бройна система, то $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_0 \in \mathbf{Z}$;

Ако $n = 2^k \cdot 5^m \cdot s$, където $s \in \mathbf{N}$, $s \neq 1$, тогава числото m/n се записва като безкрайна периодична дроб; дължината на периода е минималното число s за което $10^s - 1$ се дели на n , а преди периода стоят точно $l = \max(k, m)$ цифри; обикновено записът е следният:

$m/n = \overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_l (a_{l+1} a_{l+2} \dots a_{l+s})}$; $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_0 \in \mathbf{Z}$;

Крайните десетични дроби могат да се разглеждат като безкрайни периодични дроби с период 0.

Пример, че съществуват безкрайни непериодични дроби: да разгледаме числото $1, 010010001\dots$

то не е рационално, тъй като не е периодична дроб (очевидно не е крайна); това е пример, че съществуват **иррационални** числа;

Реалните числа се дефинират като обединение на рационалните и ирационалните, т.е. всички безкрайни периодични или непериодични дроби:

$$\mathbf{R} = \{ \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots} \mid a_0 \in \mathbf{Z}, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \};$$

В дефиницията за реални числа ще добавим следното - за всяко $k \in \mathbf{N}$, съществува индекс $n > k : a_n \neq 9$; това го добавяме, за да не допускаме едни и същи числа да се записват по различни начини чрез безкрайни дроби – например $1, (0) = 0, (9)$ и $-2.25(0) = -2.24(9)$;

Аксиоми за реалните числа $\mathbf{R}$.

Аксиоми за събирането:

1. $a+b = b+a$;
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$;
3. съществува число 0: $a + 0 = a$;
4. за всяко число a , съществува $-a$: $a + (-a) = 0$; елементът $-a$ се нарича противоположен

Тези четири свойства на събирането определят структура на група по отношение на събирането;

Аксиоми за умножението:

5. $a.b = b.a$;
6. $(a.b).c = a.(b.c)$;
7. съществува число 1: $a.1=a$;
8. за всяко число $a \neq 0$, съществува a^{-1} : $a.a^{-1} = 1$;

Дистрибутивен закон:

9. $(a+b).c = a.c + b.c$;

Релации за наредба:

10. Ако $a \leq b$, $b \leq c \rightarrow a \leq c$;
11. Ако $c \geq 0$ и $a \geq b \rightarrow a.c \geq b.c$;

Аксиома на Архимед:

За всяко число a съществува естествено число n : $n.1 > a$;

Нека имаме две реални числа:

$$a = \overline{a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots}$$

$$b = \overline{b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots}$$

$$a_0, b_0 \in \mathbf{Z}; a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

Казваме, че $a > b$, ако съществува индекс $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, такъв че $a_0 = b_0; a_1 = b_1; \dots; a_k > b_k$

Дефиниция: Нека $X \subset \mathbf{R}$. Казваме, че M е **горна граница** на X , ако за всяко $x \in X$ е в сила, че $x \leq M$; в такъв случай множеството X се нарича **ограничено отгоре**.

Дефиниция: Най-малката горна граница на X се нарича супремум на X или **точна горна граница**. Бележи се $\sup X$.

Дефиниция: Нека $X \subset \mathbb{R}$. Казваме, че m е **долна граница** на X , ако за всяко $x \in X$ е в сила, че $x \geq m$; в такъв случай множеството X се нарича **ограничено отдолу**.

Дефиниция: Най-голямата долна граница на X се нарича инфимум на X или **точна долна граница**. Бележи се $\inf X$.

Дефиниция: Едно множество е **ограничено**, ако то е ограничено отдолу и отгоре, т.е. съществува $M > 0$, че за всяко $x \in X : |x| < M$;

Твърдение: За всяко множество, което е ограничено отгоре, съществува точна горна граница $\bar{x}$ (супремум) $\Leftrightarrow$

1. Ако $x \in X$, то $x \leq \bar{x}$

2. Ако $x' < \bar{x}$, то съществува $x \in X : x > x'$

Доказателство: Разглеждаме два случая – дали в x има или няма положителни числа; ще докажем твърдението за първия случай, във втория е аналогично;

Нека $X_0 = \{ x \in X, x \geq 0 \}$;

$[x]$ означаваме цялата част на x ;

Нека $A_0 = \{ [x], x \in X_0 \}$; тъй като X_0 е ограничено $\rightarrow$ съществува горна граница M на X_0 , за нея е изпълнено $0 \leq [x] \leq M \rightarrow A_0$ е ограничено, но то се състои само от цели числа $\rightarrow A_0$ е крайно множество, означаваме най-големият елемент от A_0 с $\bar{x}_0$;

Нека $X_1 = \{ x \in X_0, [x] = \bar{x}_0 \}$; нека A_1 е множеството от цифрите, които стоят на първо място след десетичната запетая в числата от X_1 ; A_1 е крайно, означаваме с $\bar{x}_1$ най-големият елемент на A_1 ;

По този начин получаваме числото $\bar{x} = \overline{\bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots}$; твърдим, че $\bar{x}$ е супремумът на X .

Първо: ще докажем, че за всяко $x \in X, x \leq \bar{x}$;

Без ограничение на общността можем да разглеждаме единствено елементите на X_0 ;

Допускаме, че съществува $x > 0, x \in X : x > \bar{x}$;

Нека $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$, тогава съществува индекс $k \in \{ 0, 1, \dots, n, \dots \}$, такъв че (1) $x_0 = \bar{x}_0; x_1 = \bar{x}_1 \dots; x_{k-1} = \bar{x}_{k-1}$;

(2) $x_k > \bar{x}_k$;

от (1) $\rightarrow x \in X_k$, освен това $\bar{x}_k$ е максималното число, което стои на k -то място след десетичната запетая в числата $\in X_k$, което е в противоречие с (2) $\rightarrow$ допускането не е вярно $\rightarrow$ за всяко $x \in X, x \leq \bar{x}$;

Второ: ще докажем, че ако $x' < \overline{x}$ съществува $x \in X$, такава че $x > x'$;

Нека $x' = \overline{x_0', x_1'x_2'\dots x_n'\dots}$, тогава съществува индекс $k \in \{0, 1, \dots, n, \dots\}$,
такъв че $x_0' = \underline{x_0}$; $x_1' = x_1 \dots$; $x_{k-1}' = x_{k-1}$;
(1) $x_k' < \underline{x_k}$;

Нека $x \in X_{k+1} \subseteq X$, $x = \overline{x_0, x_1x_2\dots x_n\dots}$, тогава:
 $x_0 = \underline{x_0}$; $x_1 = x_1 \dots$; $x_{k-1} = x_{k-1}$;
(2) $x_k = \underline{x_k}$;

от (1), (2) $\rightarrow x > x'$

С това доказателството е завършено;

Аналогично се доказва:

Всяко числово множество, което е ограничено отдолу има точна долна граница (инфимум);

Понятия свързани с изброимост

Нека X е множество; казваме, че X е **изброимо** множество, ако съществува биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow X$;

условия за биекция: ако $n_1 \neq n_2$, то $f(n_1) \neq f(n_2)$ (инекция) и

за всяко $x \in X$ съществува $n \in \mathbb{N}$, такава че $f(n) = x$ (сюрекция);

X е изброимо, ако елементите му могат да се наредят в редица, в която няма повтарящи се елементи;

Твърдение: Множеството $\mathbb{Q}$ е изброимо.

Доказателство: Нека за определеност p и q са взаимно прости, $q > 0$, нулата е представена еднозначно като $(0/1)$. Дефинираме височина на рационално число $p/q = |p| + q$; $|p| + q > 0$; очевидно съществуват краен брой рационални числа с фиксирана височина; номерираме последователно числата, като започваме от тези с височина 1 $(0/1)$, след това с височина 2 $(-1/1, 1/1)$ и т.н.; с това доказахме, че съществува биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$;

Дефиниция: На всяко множество съпоставяме **мощност (кардинално число)**; ако мощностите на две множества A и B са равни, то съществува взаимноеднозначно съответствие между елементите им (те са еквивалентни; $A \sim B$); ако мощността на едно множество A е по-голяма от мощността на друго множество B , следва че A е еквивалентно на множество C , което съдържа като нетривиално подмножество множеството B ($A \sim C \subset B$);

Твърдение: $\mathbb{R}$ не е изброимо;

Доказателство:

Допускаме, че реалните числа могат да се подредят в редица:

$$x_0 = \overline{x_0^0, x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 \dots};$$

$$x_1 = \overline{x_0^1, x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1 \dots};$$

$$x_2 = \overline{x_0^2, x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 \dots};$$

...

$$x_n = \overline{x_0^n, x_1^n x_2^n \dots x_n^n \dots};$$

...

Нека $\overline{x} = \overline{x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots}$, освен това нека:

$$\overline{x_0} \neq x_0^0; \overline{x_1} \neq x_1^1, 9; \overline{x_2} \neq x_2^2, 9; \dots; \overline{x_n} \neq x_n^n, 9; \dots$$

Твърдим, че числото $\overline{x}$ не фигурира в редицата; това е така, тъй като то съдържа безброй много цифри и се различава от всяко число в редицата поне по една цифра; избягваме девятките, за да не се получи двусмислието, коментирано по-горе;

От твърдението $\rightarrow$ Ирационалните числа имат по-голяма мощност от рационалните.

Семинарни занятия

Математическа индукция

Дадена е безкрайна редица от твърдения:

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots;$$

Дадено е, че:

1. T_1 е вярно;
2. За всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено: ако T_n е вярно, то T_{n+1} също е вярно;

От тези две условия $\rightarrow T_n$ е вярно за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Пример: Да се докаже, че всички химикали пишат с един и същи цвят; Доказателство: T_1 е вярно, защото един химикал пише с един и същи цвят; Нека T_n е вярно, т.е. всеки n химикала пишат с един и същи цвят; тогава T_{n+1} също е вярно - нека имаме $n+1$ химикала; вземаме n от тях, те пишат еднакво по допускане; остава 1 химикал, нека вземем него и още $n-1$ от останалите, тогава и те пишат еднакво от допускането $\rightarrow$ всичките $n+1$ пишат еднакво; по индукция $\rightarrow$ всички химикали пишат с един и същи цвят;

Абсурдността на това наглед добре доказано твърдение идва от факта, че условие 2 е изпълнено за всяко n , освен за $n=2$; т.е. ако имаме два химикала не можем да изпълним гореописаната операция; този пример има за цел да покаже необходимостта на условията 1. и 2.;

Неравенство на Коши: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$;

Доказателство:

Лема: Нека са дадени k положителни числа $A_1, A_2, \dots, A_k$, такива че:

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 + \dots + A_k \geq k$;

Доказателство:

Индукция по k ;

1. База: при $k = 1 - A_1 = 1 \geq 1 = k$; твърдението е вярно;
при $k = 2 - A_1 \cdot A_2 = 1$; $A_1 + A_2 = A_1 + 1/A_1 = 2 + (A_1^2 - 2 \cdot A_1 + 1)/A_1 = 2 + (A_1 - 1)^2/A_1 \geq 2$; твърдението е вярно;

2. Стъпка: Нека твърдението е изпълнено за k ; т.е.
ако $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k = 1$, то $A_1 + A_2 + \dots + A_k \geq k$; При $k+1$ получаваме:
Нека A_i са положителни числа и $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot A_{k+1} = 1$;

$A_1 + A_2 + \dots + A_k \cdot A_{k+1} \geq k$ (по допускане) $\Rightarrow$

$A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1} \geq k - A_k \cdot A_{k+1}$;

$A_1 + A_2 + \dots + A_k + A_{k+1} \geq k - A_k \cdot A_{k+1} + A_k + A_{k+1} =$
 $= k + 1 + A_k - 1 + A_{k+1} - A_k \cdot A_{k+1} = k + 1 + (A_k - 1) \cdot (1 - A_{k+1})$;

Без ограничение на общността можем да смятаме, че A_k е най-голямото число, а A_{k+1} е най-малкото число от $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$;
тъй като $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{k+1} = 1 \Rightarrow A_k \geq 1, A_{k+1} \leq 1 \Rightarrow (A_k - 1) \cdot (1 - A_{k+1}) \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_1 + A_2 + \dots + A_k + A_{k+1} \geq k + 1 + (A_k - 1) \cdot (1 - A_{k+1}) \geq k + 1 \Rightarrow$
твърдението е изпълнено за $k+1$; от метода на математическата индукция $\Rightarrow$ твърдението е изпълнено за всяко $k \in \mathbf{N}$;

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \Leftrightarrow$

$a_1/\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} + a_2/\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} + \dots + a_n/\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq n$;

Полагаме $a_i/\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = A_i \Rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = 1$; използваме лемата:
и получаваме $A_1 + A_2 + \dots + A_n \geq n$, а това е точно горното неравенство;

Неравенство на Бернули: $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$; $n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}, x \geq -1$

Други неравенства:

$(1 + 1/n)^k \leq 1 + k/n + k^2/n^2$

Доказателство: Индукция по k (n го мислим фиксирано);

$(n/3)^n < n! < (n/2)^n, n \geq 6$

Доказателство: Индукция по n ;

Полиноми. Принцип за сравняване на коефициентите.

Приложение.

Дефиниция: Полином от степен n се нарича функция от вида:

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_1 \cdot x + a_0; n \in \mathbf{N}_0; x, a_k \in \mathbf{R}; a_n \neq 0;$$

1. Произведението на два полинома от степен n и m е полином от степен $n+m$;
2. Сумата на два полинома от степен n и степен m е полином от степен $\leq \max(n, m)$, когато полиномите не са с еднакви степени и с противоположни коефициенти;
3. Разлика на два полинома от степен n и степен m е полином от степен $\leq \max(n, m)$, когато полиномите не са с еднакви степени и еднакви коефициенти;

Твърдение (лема на Безу): Даден е полином $P_n(x)$ от степен n ; ако $x = \alpha$ е корен на $P_n(x)$, т.е. $P(\alpha) = 0$, то съществува полином $Q_{n-1}(x)$ от степен $n-1$, такъв че $P_n(x) = (x - \alpha) \cdot Q_{n-1}(x)$ или $P_n(x)$ се дели без остатък на $x - \alpha$;

Твърдение: Нека $P_n(x)$ е полином от степен n ; тогава $P_n(x)$ има не повече от n различни корена;

Доказателство: Индукция по n + лема на Безу;

Принцип за сравняване на коефициентите:

Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми от степен $\leq n$;

Ако $P(x_k) = Q(x_k)$ за $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$; $k = 1, 2, \dots, n, n+1$

$\Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$;

Доказателство: Допускаме, че $P(x)$ не съвпада с $Q(x)$; тогава полиномът $R(x) = P(x) - Q(x)$ е от степен $\leq n$; но $R(x)$ е от степен $\leq n$ и се анулира за $n+1$ стойности, което е в противоречие с горното твърдение $\Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$;

Следствие: Ако два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ от степен $\leq n$ съвпадат за $n+1$ стойности на $x \Rightarrow$ те съвпадат за всички стойности на x ;

Твърдение: Дадени са точките (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, n, n+1$;

$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$; тогава съществува точно един полином $P(x)$,

такъв че $P(x_k) = y_k$ за $k = 1, 2, \dots, n, n+1$;

Доказателство: Единствеността е пряко следствие от принципа за сравняване на коефициентите;

Съществуване: **Интерполационна формула на Лагранж:**

$$P(x) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{n+1})}$$

2. Редици. Аритметични действия със сходящи редици.

Дефиниция: Редица е множество от числа, елементите на което са снабдени с индекси (естествени числа), като съответствието е биективно; означение: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;

Една редица може да бъде зададена чрез формула относно индекса (пример: $a_n = n^2$); чрез рекурентна връзка между елементите ($b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$), тук задължително трябва да се посочат началните елементи ($b_0 = 0, b_1 = 1$); чрез неявна дефиниция (например $c_n = n$ -тата цифра в десетичният запис на числото π ;

Дефиниция:

Ако са дадени две редици a_n и b_n ;

1. Сбор на двете редици е редицата $c_n = a_n + b_n$;
2. Разлика на двете редици е редицата $c_n = a_n - b_n$;
3. Произведение на двете редици е редицата: $c_n = a_n \cdot b_n$;
4. Частно на двете редици (при положение, че $b_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$) е редицата $c_n = a_n / b_n$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена отгоре**, ако съществува $M \in \mathbf{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq M$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена отдолу**, ако съществува $m \in \mathbf{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $m \leq a_n$;

Дефиниция: Редицата a_n е **ограничена**, ако съществува $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$, такова че за всяко $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq M$;

Дефиниция: Редицата a_n е **неограничена**, ако за всяко число $M \in \mathbf{R}$ съществува $n \in \mathbf{N}$, такова че $|a_n| > M$;

Твърдение: Ако a_n е неограничена, то за всяко $M > 0$, $M \in \mathbf{R}$, съществуват безброй много членове на редицата a_n , за които $|a_n| > M$;

Доказателство: с допускане на противното;

Дефиниция: Редицата a_n е **безкрайно голяма**, ако за всяко $M > 0$, $M \in \mathbf{R}$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N$: $|a_n| > M$;

Разлика с определението за неограниченост – пример е редицата:
1 0 2 0 3 0 ... тя е неограничена, но не е безкрайно голяма;

Дефиниция: Редицата a_n е **безкрайно малка**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N : |a_n| < \varepsilon$;

Дефиниция: Интервалът $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ се нарича **ε -околност** на точката a ($\varepsilon > 0$);

Една редица е безкрайно малка ако във всяка околност на нулата попадат всички елементи на редицата от определено място нататък;

Твърдение: Ако a_n е ограничена и b_n е безкрайно малка $\rightarrow a_n \cdot b_n$ е безкрайно малка;

Доказателство: Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$, където $M > 0$ е такова, че $|a_n| < M$; тогава $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon_1 \cdot M = \varepsilon \rightarrow a_n \cdot b_n$ е безкрайно малка;

Твърдение: Ако a_n е безкрайно малка $\rightarrow a_n$ – ограничена;

Доказателство: Избираме $\varepsilon > 0$; съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N: |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$; нека $M = \max(\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_N)$; $m = \min(-\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_N) \rightarrow$ за всяко $n \in \mathbf{N}: m \leq a_n \leq M \rightarrow a_n$ – ограничена;

Твърдение: Произведение на краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица;

Доказателство: използваме предните две твърдения;

Твърдение: Нека a_n е безкрайно голяма и $a_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Нека $b_n = 1 / a_n \rightarrow b_n$ е безкрайно малка;

Доказателство: Нека $M > 0$, $M = 1 / \varepsilon$; съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N: |a_n| > M \Leftrightarrow 1 / |a_n| < 1 / M \Leftrightarrow |b_n| < \varepsilon \rightarrow b_n$ е безкрайно малка;

Твърдение: Нека a_n е безкрайно малка и $a_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Нека $b_n = 1 / a_n \rightarrow b_n$ е безкрайно голяма;

Доказателство: аналогично на предното твърдение;

Дефиниция: Казваме, че редицата a_n е **сходяща** и има за граница числото A (a_n клони към A), ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N: |a_n - A| < \varepsilon$;

Следствие: Ако a_n е сходяща и клони към числото $A \rightarrow a_n = A + \alpha_n$, където α_n е безкрайно малка;

Означения: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$;

Дефиниция: Ако a_n не е сходяща, то тя е **разходяща**;

Дефиниция: Казваме, че редицата a_n клони към $\pm \infty$,

ако за всяко число $M \in \mathbf{R}$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$ е в сила $a_n > M$ ($a_n < M$);

Твърдение: Ако a_n е сходяща, то тя е ограничена;

Доказателство:

Нека границата на a_n е A .

Избираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такава че при $n > N$,

$$|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon;$$

нека $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_N, A - \varepsilon)$; $M = \max(a_1, a_2, \dots, a_N, A + \varepsilon)$;

тогава $m \leq a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Твърдение: Ако a_n и b_n са сходящи и с граници съответно A и B , тогава:

1. $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $A + B$;
2. $a_n - b_n$ е сходяща и клони към $A - B$;
3. $a_n \cdot b_n$ е сходяща и клони към $A \cdot B$;
4. при $b_n \neq 0$, $B \neq 0$ – a_n/b_n е сходяща и клони към A/B ;

Доказателство на 1.:

Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2 > 0$; тогава съществуват $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$, такива че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_1$;

в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n + b_n$ е сходяща и клони към $A + B$;

Доказателство на 2.:

Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2 > 0$; тогава съществуват $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$, такива че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_1$;

в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:

$$|(a_n - b_n) - (A - B)| = |a_n - A + B - b_n| \leq |a_n - A| + |B - b_n| < 2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n - b_n$ е сходяща и клони към $A - B$;

Доказателство на 3.:

a_n – сходяща $\Rightarrow a_n$ – ограничена $\Rightarrow$ съществува $M > 0$: $|a_n| < M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon / |2 \cdot B| > 0$; тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такава че при $n > N_1$, $|a_n - A| < \varepsilon_1$;

Избираме $\varepsilon_2 = \varepsilon / (2 \cdot M) > 0$; тогава съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такава че при $n > N_2$, $|b_n - B| < \varepsilon_2$;

в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B + a_n \cdot B - A \cdot B| \leq \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a_n \cdot B| + |a_n \cdot B - A \cdot B| = |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot |B| < \\ &M \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |B| = \varepsilon; \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_n \cdot b_n$ е сходяща и клони към $A \cdot B$;

Доказателство на 4.:

a_n – сходяща $\Rightarrow a_n$ – ограничена $\Rightarrow$ съществува $M > 0$: $|a_n| < M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

нека $\varepsilon_0 = |B|/2 > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такава че при $n > N$,
 $|b_n - B| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow B - \varepsilon_0 < b_n < B + \varepsilon_0 \Rightarrow |B|/2 < |b_n| < 3 \cdot |B|/2$
 $\Rightarrow c = \min(|b_1|, |b_2|, \dots, |b_N|, |B|/2)$ е долна граница на $|b_n|$; освен
това $c > 0$, тъй като $b_n \neq 0, B \neq 0$;
Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot |B|/2 > 0$; тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такава че при
 $n > N_1, |a_n - A| < \varepsilon_1$;
Избираме $\varepsilon_2 = (|B| \cdot c / (2 \cdot M)) \cdot \varepsilon > 0$; тогава съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такава
че при $n > N_2, |b_n - B| < \varepsilon_2$;
в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:
 $|a_n/b_n - A/B| = |a_n \cdot B - b_n \cdot A| / |b_n \cdot B| =$
 $|a_n \cdot B - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n - b_n \cdot A| / |b_n \cdot B| \leq |a_n \cdot B - a_n \cdot b_n| / |b_n \cdot B| +$
 $|a_n \cdot b_n - b_n \cdot A| / |b_n \cdot B| = |a_n| \cdot |B - b_n| / |b_n \cdot B| + |a_n - A| / |B| <$
 $< M \cdot \varepsilon_2 / c \cdot |B| + \varepsilon_1 / |B| = \varepsilon$;
 $\Rightarrow a_n/b_n$ е сходяща и клони към A/B ;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A , $a_n < M$ за всяко $n > k$,
където $k \in \mathbf{N} \Rightarrow A \leq M$;

Доказателство:

Допускаме противното - нека $A > M$.

Избираме $\varepsilon = (M - A)/2 > 0$; тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такава
че при $n > \max(N, k)$, $|a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow a_n > A - \varepsilon = (3 \cdot A - M)/2 > M$ –
противоречие $\Rightarrow A \leq M$;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A , $a_n > M \Rightarrow A \geq M$;

Доказателство:

Аналогично на горното твърдение;

Твърдение: Ако a_n е сходяща и има граница A , b_n е сходяща и има
граница B и за безброй много стойности на n имаме $a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$;

Доказателство:

Допускаме, че $A > B$;

Нека $\varepsilon = (A - B)/2$;

a_n - сходяща и има граница $A \Rightarrow$ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че
при $n > N_1$ имаме $|a_n - A| < \varepsilon$;

b_n - сходяща и има граница $B \Rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че
при $n > N_2$ имаме $|b_n - B| < \varepsilon$;

тогава при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:

$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$, но $A - \varepsilon = B + \varepsilon \Rightarrow$

$b_n < B + \varepsilon = A - \varepsilon < a_n$, т.е. $b_n < a_n$ – противоречие (излиза че само за
краен брой е възможно $a_n \leq b_n$) $\Rightarrow$ допускането не е вярно $\Rightarrow A \leq B$;

Теорема за полицанте: Ако a_n е сходяща и има граница D , c_n е
сходяща и има граница D , $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow b_n$ – сходяща
и има граница D ;

Доказателство:

Избираме $\varepsilon > 0$;

тогава съществува $N_1 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_1$, $|a_n - D| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$D - \varepsilon < a_n < D + \varepsilon$;

освен това съществува $N_2 \in \mathbf{N}$, такова че при $n > N_2$, $|c_n - D| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$D - \varepsilon < c_n < D + \varepsilon$;

в такъв случай при $n > \max(N_1, N_2, k)$ имаме:

$D - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < D + \varepsilon \rightarrow b_n$ е сходяща и има граница D ;

Семинарни занятия

Дефиниция: $n! = 1.2....n$, $n \in \mathbf{N}$; чете се n факториел;

Дефиниция: $0! = 1$;

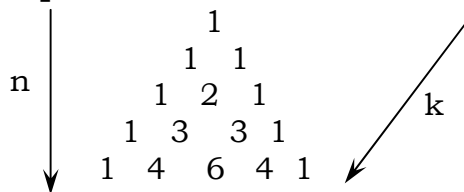
Дефиниция: Биномни коефициенти – числа;

означение: $\binom{n}{k}$, C_n^k ; $\binom{n}{k} = n! / (k!. (n-k)!) = n.(n-1)...(n-k+1)/k!$;

$n, k \in \mathbf{N}_0$;

Основни свойства: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$;

Триъгълник на Паскал:



Елементът на върха на триъгълника е $\binom{0}{0}$; елементът, който се намира на ред n и на ляв диагонал k е точно $\binom{n}{k}$; триъгълникът на Паскал илюстрира основните свойства на биномните коефициенти; елементите в краищата са единици, а всеки един от останалите елементи е получен като сума от двата елемента стоящи над него (това е точно второто свойство);

Бином на Нютон:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b + \dots + \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k + \dots + \binom{n}{n-1}.a.b^{n-1} + \binom{n}{n}.b^n;$$

Някои тъждества с биномни коефициенти:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k};$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0;$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n};$$

Доказателство на последното:

Използваме равенството $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ и принципа за сравняване на коефициентите;

Обобщени биномни коефициенти

$$\binom{\alpha}{k} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1) / k!, \alpha \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}_0;$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ за всяко } \alpha \in \mathbf{R};$$

Твърдение: $\binom{\alpha}{k} = 0$ ако $\alpha \in \mathbf{N}, \alpha < k$;

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k;$$

Забележка: $\binom{\alpha}{k}$ е полином от степен k на α .

$$\binom{x}{0} - \binom{x}{1} + \binom{x}{2} \dots + (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^k \cdot \binom{x-1}{k};$$

Доказателство: Нека дясната страна означим с $P(x)$, лявата с $Q(x)$; това са полиноми от степен k на x ; нека l е естествено число между 1 и k ; тогава от горните твърдения $P(l) = 0$; $Q(l) = 0$, тъй като $l-1 < k$;

$\Rightarrow P(l) = Q(l)$ за $l = 1, 2, \dots, k$;

$P(0) = 1$; $Q(0) = (-1)^k \cdot \binom{-1}{k} = (-1)^{2k} = 1 \Rightarrow P(0) = Q(0)$; P, Q съвпадат за $k+1$ стойности $\Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$;

3. Монотонни редици. Дефиниране на числото e .

Дефиниция: Редицата a_n е **монотонно растяща**, ако за всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$;

Дефиниция: Редицата a_n е **монотонно намаляваща**, ако за всяко $n \in \mathbf{N}$ е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$;

Дефиниция: Редицата a_n е **монотонна**, ако тя е монотонно намаляваща или монотонно растяща;

Теорема: Нека a_n е растяща и ограничена отгоре. Тогава a_n е сходяща и клони към точната си горна граница.

Доказателство: Нека A е точната горна граница на редицата a_n .

Тъй като A е горна граница са в сила следните твърдения:

1. $a_n \leq A$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

2. за всяко $A' < A$, съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че $a_N > A'$ или за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че $a_N > A - \varepsilon$;

Нека $n > N$. Тогава за произволно избраното ε имаме:

$A - \varepsilon < a_N < a_n \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow a_n$ е сходяща и клони към числото A ;

Теорема: Нека a_n е растяща и ограничена отдолу. Тогава a_n е сходяща и клони към точната си долна граница.

Доказателство:

Аналогично на горната теорема;

Разглеждаме редицата $a_n = (1 + 1/n)^n$; ще покажем, че тази редица е сходяща;

По бинома на Нютон получаваме:

$$(1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot 1/n + \binom{n}{2} \cdot 1/n^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot 1/n^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1/n^n =$$

$$1 + (n/1!) \cdot 1/n + (n \cdot (n-1)/2!) \cdot 1/n^2 + \dots + (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)/k!) \cdot 1/n^k + \dots + (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-1))/n!) \cdot 1/n^n = 1 + 1 + 1/2! \cdot (1 - 1/n) + 1/3! \cdot (1-1/n) \cdot (1-2/n) + \dots + 1/k! \cdot (1 - 1/n) \cdot (1 - 2/n) \cdot \dots \cdot (1 - (k-1)/n) + \dots + 1/n! \cdot (1 - 1/n) \cdot (1 - 2/n) \cdot \dots \cdot (1 - (n-1)/n);$$

Очевидно

$$a_n \leq 1 + 1 + 1/2! \cdot (1 - 1/(n+1)) + 1/3! \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot (1 - 2/(n+1)) + \dots + 1/k! \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot (1 - 2/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1 - (k-1)/(n+1)) + \dots + 1/n! \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot (1 - 2/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1 - (n-1)/(n+1)) = a_{n+1} - 1/(n+1)! \cdot (1 - 1/(n+1)) \cdot (1 - 2/(n+1)) \cdot \dots \cdot (1 - n/(n+1)) < a_{n+1};$$

→ редицата a_n е монотонно растяща; (1)

Очевидно

$$(1 - 1/n) \cdot (1 - 2/n) \cdot \dots \cdot (1 - (k-1)/n) < 1$$

$$\rightarrow a_n \leq 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n!;$$

$$\text{от друга страна } k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1};$$

$$\rightarrow a_n \leq 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots + 1/2^{n-1} = 1 + (1 - 1/2^n)/(1 - 1/2) = 3 - 1/2^{n-1} < 3; \text{ освен това } a_n \geq a_1 = 2 \rightarrow$$

$$2 \leq a_n < 3 \rightarrow a_n - \text{ограничена}; (2)$$

от (1) и (2) → a_n – сходяща;

Дефиниция: Неперовото число e се дефинира като граница на редицата $a_n = (1 + 1/n)^n$; $e \approx 2, 718281828\dots$;

Ще докажем, че a_n е сходяща по друг начин;

$$\text{нека } b_n = (1 + 1/n)^{n+1};$$

$$\text{очевидно } a_n \cdot (1 + 1/n) = b_n \rightarrow a_n < b_n;$$

Разглеждаме числата $\underbrace{1+1/n, 1+1/n, \dots, 1+1/n}_n, 1$;

тези числа са строго положителни; освен това не могат да бъдат всичките еднакви ($1 \neq (1 + 1/n)$); прилагаме неравенството за средно аритметично и средно геометрично;

получаваме:

$$(n \cdot (1+1/n) + 1)/(n+1) > \sqrt[n+1]{(1 + 1/n)^n} \Leftrightarrow (1 + 1/(n+1))^{n+1} > (1+1/n)^n \text{ или}$$

което е все същото $a_{n+1} > a_n$; равенство не може да има, тъй като числата не могат да бъдат едновременно еднакви;

аналогично избираме числата $\underbrace{1 - 1/(n+1), \dots, 1 - 1/(n+1)}_{n+1 \text{ числа}}, 1;$

тези числа са строго положителни; освен това не могат да бъдат всичките еднакви ($1 \neq (1 + 1/(n-1))$); прилагаме неравенството за средно аритметично и средно геометрично;

получаваме:

$$\begin{aligned} ((n+1) \cdot (1 - 1/(n+1)) + 1)/(n+2) &> \sqrt[n+2]{(1 - 1/(n+1))^{n+1}} \Leftrightarrow \\ ((n+1) - 1 + 1)/(n+2) &> (1 - 1/(n+1))^{n+1} \Leftrightarrow \\ ((n+1)/(n+2))^{n+2} &> (n/(n+1))^{n+1} \Leftrightarrow ((n+2)/(n+1))^{n+2} < ((n+1)/n)^{n+1} \Leftrightarrow \\ (1 + 1/(n+1))^{n+2} &< (1 + 1/n)^{n+1} \text{ или което е все същото } b_{n+1} < b_n; \end{aligned}$$

равенство не може да има, тъй като числата не могат да бъдат едновременно еднакви;

получаваме: $2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4 \Rightarrow a_n$ – ограничена, b_n – ограничена $\Rightarrow a_n$ – сходяща и клони към числото A , b_n – сходяща и клони към числото B ;

освен това $a_n \cdot (1 + 1/n) = b_n \Rightarrow A = B$ (границата на $1 + 1/n$ е 1);

числото е дефинираме като общата граница на двете редици a_n и b_n ;

Теорема на Кантор за свиваща система от интервали

Определение: Нека е дадена безкрайна редица от интервали

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$; казваме, че $\{\Delta_n\}$ е свиваща система от интервали, ако:

1. Всички интервали са затворени, т.е. $\Delta_i = [a_i, b_i]$;
2. Всеки интервал Δ_n съдържа следващия Δ_{n+1} , т.е. за всяко $n \in \mathbf{N}$,
 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$;
3. При $n \rightarrow \infty$, $b_n - a_n \rightarrow 0$

Теорема на Кантор: Нека е дадена една свиваща система от интервали $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$. Тогава съществува единствена точка C , такава че $C \in [a_n, b_n]$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Доказателство:

$a_n \leq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\{a_n\}$ е растяща редица;

$b_n \geq b_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, т.е. $\{b_n\}$ е намаляваща редица;

освен това $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \Rightarrow a_n, b_n$ са ограничени редици $\Rightarrow$

a_n – сходяща, нека $a_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$;

b_n – сходяща, нека $b_n \rightarrow B$ при $n \rightarrow \infty$;

$\Rightarrow b_n - a_n \rightarrow B - A$ при $n \rightarrow \infty$, но по определение $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow B - A = 0$, т.е. $A = B$;

Нека $C = A = B$;

a_n – монотонна растяща и клони към $C \Rightarrow a_n \leq C$;

b_n – монотонна намаляваща и клони към $C \Rightarrow C \leq b_n$;

$\Rightarrow a_n \leq C \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Да допуснем, че съществува друга точка C' , такава че

$a_n \leq C' \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; нека за определеност $C' < C$;

в такъв случай $a_n \leq C' < C \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;
 a_n – сходяща и има граница C ;
нека $\varepsilon = (C - C') / 2 > 0$;
тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $n > N$;
 $|a_n - C| < \varepsilon \Leftrightarrow C - \varepsilon < a_n < C + \varepsilon \Rightarrow a_n > C - \varepsilon = (C + C') / 2 > C'$ -
противоречие ($a_n \leq C'$ за всяко $n \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow$ точката C е единствена;

Твърдение: Нека a_n – сходяща; тогава границата е единствена.

Доказателство:

Да допуснем, че a_n има две граници $A < A'$;

избираме $\varepsilon = (A' - A)/2$;

a_n – сходяща и има граница $A \Rightarrow$ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че
при $n > N_1$: $|a_n - A| < \varepsilon$, т.е. $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;

a_n – сходяща и има граница $A' \Rightarrow$ съществува индекс $N_2 \in \mathbf{N}$, такъв че
при $n > N_2$: $|a_n - A'| < \varepsilon$, т.е. $A' - \varepsilon < a_n < A' + \varepsilon$;

тогава при $n > \max(N_1, N_2)$ имаме:

$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$;

$A' - \varepsilon < a_n < A' + \varepsilon$;

но $A + \varepsilon = A' - \varepsilon = (A + A')/2 \Rightarrow A - \varepsilon < a_n < (A + A')/2 < a_n < A' + \varepsilon$ -

противоречие $\Rightarrow$ границата наистина е единствена;

4. Точки на сгъстяване. Подредици. Теорема на Болцано – Вайерщрас.

Определение: Нека е дадена редица $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; казваме, че редицата $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$ е **подредица** на $\{a_n\}$, ако целите положителни числа $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ удовлетворяват неравенствата: $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$;

Твърдение: Ако редицата a_n е сходяща и има граница A , тогава всяка нейна подредица $\{a_{n_k}\}$ е сходяща и има същата граница;

Доказателство:

Фиксираме $\varepsilon > 0$;

a_n – сходяща и има граница $A \Rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че
при $n > N$ имаме $|a_n - A| < \varepsilon$;

избираме индекс k_0 , такъв че при $n_{k_0} > N$; това е възможно, тъй като редицата $\{n_k\}$ е безкрайна, а само краен брой естествени числа са по-малки от N ;

тогава при $k > k_0$ имаме: $n_k > n_{k_0} > N \Rightarrow$

$|a_{n_k} - A| < \varepsilon \Rightarrow \{a_{n_k}\}$ е сходяща и има граница A ;

Определение 1: Казваме, че A е **точка на сгъстяване** за редицата $\{a_n\}$, ако съществува подредица $\{a_{n_k}\}$, която е сходяща и има за граница числото A ;

Определение 2: Казваме, че A е **точка на съгъстяване** за редицата $\{a_n\}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват безброй много членове на $\{a_n\}$, които се намират в интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$;

Ще докажем, че двете определения са еквивалентни;

Очевидно от определение 1 $\rightarrow$ определение 2, тъй като за всяко $\varepsilon > 0$ в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ са всички елементи с достатъчно голям индекс ($> N$, където N – фиксирано);

Ще докажем, че от определение 2 $\rightarrow$ определение 1;

Нека $\varepsilon_1 = 1$; тогава съществува индекс n_1 , такъв че

$a_{n_1} \in (A - 1, A + 1)$;

Нека $\varepsilon_2 = 1/2$; тогава в околността $(A - \varepsilon_2, A + \varepsilon_2)$ има безброй много елементи на редицата, тогава ще има и такива с индекс $n_2 > n_1$;

$a_{n_2} \in (A - 1/2, A + 1/2)$, $n_2 > n_1$;

...

Нека $\varepsilon_k = 1/k$; тогава в околността $(A - \varepsilon_k, A + \varepsilon_k)$ има безброй много елементи на редицата, тогава ще има и такива с индекс $n_k > n_{k-1}$;

$a_{n_k} \in (A - 1/k, A + 1/k)$, $n_k > n_{k-1}$;

...

По този начин получихме една подредица $\{a_{n_k}\}$ на редицата $\{a_n\}$, за която $A - 1/k < a_{n_k} < A + 1/k$ за всяко $k \in \mathbf{N} \rightarrow$ от теоремата за полицайте, че $\{a_{n_k}\} \rightarrow A$;

Теорема на Болцано – Вайерщрас: Всяка ограничена редица притежава поне една точка на съгъстяване; друга еквивалентна формулировка е, че от всяка ограничена редица може да се избере сходяща подредица;

Означение: Най-голямата точка на съгъстяване се бележи с $\limsup a_n$ и се чете ‘лимес супериор’;

Означение: Най-малката точка на съгъстяване се бележи с $\liminf a_n$ и се чете ‘лимес инфериор’;

Ще докажем по-силното твърдение:

Твърдение: Всяка ограничена редица $\{a_n\}$ притежава най-голяма и най-малка точка на съгъстяване;

Доказателство:

Нека m и M са съответно една долна и една горна граница за редицата $\{a_n\}$, т.е. $m \leq a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Разглеждаме следното множество A :

A се състои от всички реални числа x , за които съществуват краен брой членове от редицата, които са по-големи от x ;

в такъв случай $M \in A$, тъй като има 0 (краен брой) членове, които са по-големи от $M \rightarrow A \neq \emptyset$;

освен това всяко $y \leq m \notin A$, тъй като безброй много членове (всичките) са по-големи от $y \Rightarrow$ за всяко $x \in A$, $x > m \Rightarrow m$ е долна граница на A , освен това A е непразно $\Rightarrow A$ притежава точна долна граница; нека $\inf(A) = x$;

Ако $x \in A \Rightarrow$ всяко $y > x \in A$;

Ако $x \notin A \Rightarrow$ всяко $y < x \notin A$;

ще докажем, че x е най-голямата точка на съгъстяване за редицата $\{a_n\}$, т.е.:

1. x е точка на съгъстяване;

2. всяко $x' > x$ не е точка на съгъстяване на редицата;

доказателство на 1:

фиксираме $\varepsilon > 0$;

тогава $x + \varepsilon > x$; ако допуснем, че $x + \varepsilon \notin A \Rightarrow$ всяко $y < x + \varepsilon \notin A \Rightarrow$ за всяко $y \in A : y > x + \varepsilon \Rightarrow x + \varepsilon$ е долна граница на A – противоречие с факта, че x е най-голямата долна граница $\Rightarrow x + \varepsilon \in A \Rightarrow$ само краен брой членове на редицата са по-големи от $x + \varepsilon$;

$x - \varepsilon < x \Rightarrow x - \varepsilon \notin A \Rightarrow$ безброй много членове на редицата са по-големи от $x - \varepsilon \Rightarrow$ в околността $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ има безброй много членове на редицата $\{a_n\} \Rightarrow x$ е точка на съгъстяване;

доказателство на 2:

нека $x' > x$, по-горе доказахме, че в такъв случай $x' \in A$;

нека $\varepsilon = (x' - x)/2$, $\varepsilon > 0$;

$\Rightarrow x' - \varepsilon = (x' + x)/2 > x \Rightarrow x' - \varepsilon \in A$, $x' + \varepsilon \in A \Rightarrow$

в околността $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)$ има краен брой членове $\Rightarrow x'$ не е точка на съгъстяване $\Rightarrow x$ е най-голямата точка на съгъстяване;

За сходящи редици имаме: $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$;

Твърдение: Нека редицата $\{a_n\}$ е неограничена; тогава или съществува подредица $\{a_{n_k}\} \rightarrow +\infty$ или подредица $\{a_{n_k}\} \rightarrow -\infty$;

Доказателство:

$\{a_n\}$ – неограничена $\Rightarrow$ за всяко $M \in \mathbf{R}^+$ съществува индекс n , такъв че $|a_n| > M$;

избираме $M_1 = 1 \Rightarrow$ съществува индекс $n_1 : |a_{n_1}| > M_1 = 1$;

избираме $M_2 = \max(2, |a_{n_1}|) \Rightarrow$ съществува индекс $n_2 : |a_{n_2}| > M_2$;

...

избираме $M_k = \max(k, |a_{n_{k-1}}|) \Rightarrow$ съществува индекс $n_k : |a_{n_k}| > M_k$;

...

за избраната подредица на $\{a_{n_k}\}$ имаме:

$|a_{n_1}| < |a_{n_2}| < \dots < |a_{n_k}| < \dots; |a_{n_k}| > k \Rightarrow |a_{n_k}| \rightarrow +\infty$;

безброй много членове от редицата са със знак '+' (или със знак '-');

избираме съответната подредица и тя клони към $+\infty$ ($-\infty$);

Като обобщение от всяка редица можем да изберем сходяща подредица, ако прибавим несобствените точки $+\infty$, $-\infty$;

Семинарни занятия

Функции

Дефиниция: Дадени са две множества X и Y . Ако на всеки елемент $x \in X$ е съпоставен точно един елемент $y \in Y$, $y = f(x)$, казваме че е дефинирана **функцията** $f: X \rightarrow Y$;

y е **образ** на x , а x е **прообраз** на y под действие на функцията f ;

X – **дефиниционно множество**;

Y – **множество от стойности**;

Означаваме с $f(X) = \{y \in Y \mid y \text{ е образ на някое } x\}$;

Дефиниция: Функцията $f: X \rightarrow Y$ се нарича '**върху**' или **сюрективна**, ако за всяко $y \in Y$ съществува $x \in X: f(x) = y$, т.е. $f(X) = Y$;

Дефиниция: Функцията $f: X \rightarrow Y$ се нарича **еднозначна** или **инективна**, ако от $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

Дефиниция: Функцията $f: X \rightarrow Y$ се нарича **взаимноеднозначна** или **биективна**, ако е едновременно сюрективна и инективна;

Дефиниция: Дадени са две функции $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$; в такъв случай $h: X \rightarrow Z$, дефинирана с $h(x) = g(f(x))$ за всяко $x \in X$ се нарича **композиция** на функциите f и g ;

Дефиниция: Дадена е функция $f: X \rightarrow Y$; в такъв случай $g: f(X) \rightarrow X$ се нарича **обратна функция** на f , ако $f(g(y)) = y$ за всяко $y \in f(X)$;

Твърдение: Ако $f: X \rightarrow Y$ е биекция, тогава f притежава точно една обратна функция и тя се означава с f^{-1} ;

5. Фундаментални редици. Условие на Коши за сходимост.

Определение: редицата $\{a_n\}$ е **фундаментална**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $m > N$, $n > N$: $|a_m - a_n| < \varepsilon$;

Твърдение: Ако $\{a_n\}$ е фундаментална, то a_n е ограничена;

Доказателство: Нека $\varepsilon = 1$; съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че при $m > N$, $n > N$: $|a_m - a_n| < 1$;

нека $m = N + 1$; тогава за всяко $n > N$: $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$

$\Rightarrow M = \max(a_{N+1} + 1, a_1, a_2, \dots, a_N)$ е горна граница на редицата;

$m = \min(a_{N+1} - 1, a_1, a_2, \dots, a_N)$ е долна граница на редицата;

→ $\{a_n\}$ е ограничена;

Критерий на Коши за сходимост: редицата $\{a_n\}$ е фундаментална
⇔ редицата $\{a_n\}$ е сходяща;

Доказателство:

Нека $\{a_n\}$ е сходяща и има граница A ;

Избираме $\varepsilon > 0$; нека $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$;

→ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, че за всяко $n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon_1$;

нека $m > N \rightarrow |a_m - A| < \varepsilon_1$;

нека $p > N \rightarrow |a_p - A| < \varepsilon_1$;

→ $|a_m - a_p| = |a_m - A + A - a_p| \leq |a_m - A| + |a_p - A| < 2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon$

→ $\{a_n\}$ – фундаментална;

Нека $\{a_n\}$ е фундаментална → $\{a_n\}$ – ограничена → $\{a_n\}$ притежава точка на съгъстяване (по Болцано-Вайерщрас);

Допускаме, че съществуват две различни точки на съгъстяване $A < B$;

Избираме $\varepsilon = (B - A)/3$;

A – точка на съгъстяване → съществуват безброй много елементи на редицата в околността $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$;

B – точка на съгъстяване → съществуват безброй много елементи на редицата в околността $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$;

$\{a_n\}$ – фундаментална → съществува $N \in \mathbf{N}$, че за $n > N$, $m > N$:

$|a_n - a_m| < \varepsilon$;

Избираме $n > N$: $|a_n - A| < \varepsilon$;

Избираме $m > N$: $|a_m - B| < \varepsilon$;

това е възможно, защото само краен брой елементи имат индекси $\leq N$, а ε - околностите на A и B съдържат безброй много елементи;

Получаваме:

$3 \cdot \varepsilon = B - A = |B - a_m + a_m - a_n + a_n - A| \leq |B - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - A| < 3 \cdot \varepsilon$ - противоречие → съществува единствена точка на съгъстяване на редицата $\{a_n\}$ → $\{a_n\}$ е сходяща;

Примери:

Нека $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$;

тогава $a_{2n} - a_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/2n > (1/2n) \cdot n = 1/2$

→ редицата не е фундаментална → не е сходяща;

Дадена е ограничената редицата $\{a_n\}$;

Нека $b_n = a_0 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + \dots + a_n \cdot q^n$, $|q| < 1$;

Избираме $m = n+p$; нека $0 \leq |a_n| < M$

$|b_{n+p} - b_n| = |a_{n+1} \cdot q^{n+1} + a_{n+2} \cdot q^{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot q^{n+p}| = |q|^{n+1} \cdot (a_{n+1} + q \cdot a_{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot q^{p-1}) \leq |q|^{n+1} \cdot (|a_{n+1}| + |q| \cdot |a_{n+2}| + \dots + |q|^{p-1} \cdot |a_{n+p}|) < < |q|^{n+1} \cdot M \cdot (1 - |q|^p)/(1 - |q|) < M \cdot |q|^{n+1}/(1 - |q|) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ → $\{b_n\}$ – фундаментална → $\{b_n\}$ – сходяща;

Семинарни занятия

Твърдение: Ако $\{a_n\}$ е сходяща и има граница числото $a \neq 0$;
 $\{b_n\} \rightarrow +\infty$, тогава $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$, ако $a > 0$ и $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow -\infty$, ако $a < 0$;
Доказателство: Нека $a > 0$; избираме $\varepsilon = a/2$;
 $\{a_n\}$ – сходяща $\rightarrow$ съществува индекс $N_1 \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N_1$,
 $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a/2 < a_n < 3 \cdot a/2$;
избираме произволно положително число M ; нека $M_1 = 2 \cdot M/a$;
тогава съществува индекс N_2 , такъв че за всяко $n > N_2$, $b_n > M_1$;
нека $N = \max(N_1, N_2)$; получаваме, че за всяко $n > N$,
 $a_n \cdot b_n > a/2 \cdot b_n > a/2 \cdot 2 \cdot M/a = M \rightarrow \{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$;
за $a < 0$ аналогично;

Следствие: Нека $P(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$,
където $a_k \neq 0$, $a_s \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ – фиксирани;
границата на $P(n)$ при $n \rightarrow \infty$ е:
 $+\infty$, ако $a_k > 0$;
 $-\infty$, ако $a_k < 0$;

Задача: Да се докаже, че съществува полином $P_{k+1}(x)$ от степен $k+1$,
където $P_{k+1}(x) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$; освен това старшият коефициент на
 $P_{k+1}(x)$ е $1/(k+1)$;

Дефиниция: Ще казваме, че две редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са
еквивалентни, ако редицата $\{a_n/b_n\}$ има граница число, което е
различно от 0; означаваме $a_n \sim b_n$;

Дефиниция: Казваме, че **спрегнато** на $a - b$ от ред k , където $a, b \in \mathbf{R}$,
 $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ е $a^{k-1} + a^{k-2} \cdot b + \dots + a \cdot b^{k-2} + b^{k-1}$;

Граница на редицата $a_n = q^n$ при $n \rightarrow \infty$:
 $+\infty$, ако $q > 1$;
 1 , ако $q = 1$;
 0 , ако $|q| < 1$;
не съществува, ако $q \leq -1$;

Твърдение: Ако $\{a_n\} \rightarrow 0$, тогава $\{|a_n|\} \rightarrow 0$;

Твърдение: Ако $\{a_n\} \rightarrow a$, тогава $\{|a_n|\} \rightarrow |a|$;

Твърдение: Нека $a_n \leq b_n$ за всяко $n > k$;
1. Ако $a_n \rightarrow +\infty \rightarrow b_n \rightarrow +\infty$;
2. Ако $b_n \rightarrow -\infty \rightarrow a_n \rightarrow -\infty$;

Границата на редицата $\{n^k/a^n\}$, където $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}^+$ - фиксирани:
 $+\infty$, ако $0 < a < 1$;
 $+\infty$, ако $a = 1$;
 0 , ако $a > 1$;

Етапи при изследване на рекурентни редици:

1. Намиране на евентуални граници – замества с едно и също число във връзката;
2. Изследване за интервали на монотонност – $n = ?$, ако $a_n < a_{n+1}$;
3. Изследване за ограниченост – $n = ?$, ако $a_n \leq l$, където l са някакви числа, получени от предните два етапа;

Твърдение: Нека $a_{n+2} = p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n$, $a_0 = A$, $a_1 = B$,
където A, B, p, q – фиксирани; тогава ако уравнението $x^2 = p \cdot x + q$
има два реални корена α, β съществуват константи c_1, c_2 , такива че:
ако $\alpha \neq \beta$, $a_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot \beta^n$;
ако $\alpha = \beta$, $a_n = (c_1 + n \cdot c_2) \cdot \alpha^n$;

6. Граници на функции. Еквивалентност на дефинициите на Хайне и Коши.

Дефиниция на Хайне: Казваме, че числото A е **граница** на функцията $f(x)$ в точката a , ако за всяка редица $\{x_n\}$ със свойствата:
 $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$ да е в сила:
 $\{f(x_n)\} \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$;

Дефиниция на Коши: Казваме, че числото A е **граница** на функцията $f(x)$ в точка a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x , такова че $0 < |x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Означения: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$;

Теорема: Дефинициите на Хайне и на Коши са еквивалентни.

Доказателство:

от Коши $\rightarrow$ Хайне:

Избираме произволна редица $\{x_n\} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x , такова че $0 < |x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - A| < \varepsilon$; тъй като $\delta > 0$ е фиксирано, $\{x_n\}$ има граница $a \rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$, $|x_n - a| < \delta$; тъй като $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbf{N} \rightarrow$
 $0 < |x_n - a| < \delta \rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$ за всяко $n > N \rightarrow$ редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница $A \rightarrow f(x)$ има граница по Хайне в точката a ;

от Хайне $\rightarrow$ Коши:

допускаме противното: нека съществува число $\varepsilon_0 > 0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува x , такова че $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$;

Нека $\delta_1 = 1$; тогава можем да намерим $x_1 \neq a$, такова че

$$|x_1 - a| < \delta_1 \text{ и } |f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0;$$

Нека $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да намерим $x_2 \neq a$, такова че

$$|x_2 - a| < \delta_2 \text{ и } |f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0;$$

...

Нека $\delta_k = 1/k$; тогава можем да намерим $x_k \neq a$, такова че

$$|x_k - a| < \delta_k \text{ и } |f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0;$$

...

Получихме една редица от числа $\{x_n\}$, за която е изпълнено:

$$0 < |x_n - a| < 1/n \text{ за всяко } n \in \mathbf{N}, |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0;$$

очевидно $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ (например по теорема за полиците) $\rightarrow$

$f(x_n) \rightarrow A$, което е в противоречие с $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \rightarrow$ допускането не е вярно $\rightarrow f(x)$ има граница по Коши в точката A ;

Примери:

Ще покажем, че $x \cdot \sin 1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$;

Фиксираме $\varepsilon > 0$;

$$|x \cdot \sin 1/x| = |x| \cdot |\sin 1/x| \leq |x|;$$

ако изберем $\delta = \varepsilon \rightarrow |x \cdot \sin 1/x| \leq |x| < \delta = \varepsilon \rightarrow x \cdot \sin 1/x$ има граница 0 при $x \rightarrow 0$;

Ще покажем, че $\sin 1/x$ няма граница при $x \rightarrow 0$;

за целта избираме редицата $\{x_n\}$ по следния начин:

$$x_1 = 2/\pi, x_2 = 2/(3\pi), \dots, x_n = 2/((2n+1)\pi), \dots;$$

за съответната редица $\{f(x_n)\}$ получаваме:

$$f(x_1) = \sin \pi/2 = 1$$

$$f(x_2) = \sin 3\pi/2 = -1$$

...

$$f(x_n) = \sin (2n+1)\pi/2 = (-1)^n;$$

както знаем редицата $(-1)^n$ е разходяща $\rightarrow$ по дефиниция на Хайне,

$f(x) = \sin 1/x$ не притежава граница при $x \rightarrow 0$;

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ клони към $\pm \infty$ при $x \rightarrow a$, ако при всеки избор на редицата $\{x_n\}$, със свойствата $\{x_n\} \rightarrow a$, $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, съответната редица $\{f(x_n)\} \rightarrow \pm \infty$;

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ има граница A при $x \rightarrow \pm \infty$, ако при всеки избор на редицата $\{x_n\}$ клоняща към $\pm \infty$, съответната редица $\{f(x_n)\} \rightarrow A$;

7. Свойства на граници на функции. Намиране на границите $\sin x/x$ при $x \rightarrow 0$ и $(1+x)^{1/x}$ при $x \rightarrow 0$;

Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **ограничена** в интервал Δ , който е подмножество на дефиниционното множество, ако съществува $M \in \mathbf{R}^+$, такова че $|f(x)| < M$;

Свойство 1:

Нека са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които имат една и съща дефиниционна област Δ ; тогава, ако $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ и $g(x) \rightarrow B$ при $x \rightarrow a$:

1. $(f+g)(x) \rightarrow A+B$ при $x \rightarrow a$;
2. $(f-g)(x) \rightarrow A-B$ при $x \rightarrow a$;
3. $(f \cdot g)(x) \rightarrow A \cdot B$ при $x \rightarrow a$;
4. $(f/g)(x) \rightarrow A/B$ при $x \rightarrow a$ при условие, че $B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$;

Свойство 2:

Нека са дадени две функции $f(x)$ и $g(x)$, които имат една и съща дефиниционна област Δ ; тогава, ако $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ и $g(x) \rightarrow B$ при $x \rightarrow a$ и $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in \Delta \Rightarrow A \leq B$;

Свойство 3:

Нека са дадени три функции $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ които имат една и съща дефиниционна област Δ ; ако $f(x) \rightarrow C$ при $x \rightarrow a$, $g(x) \rightarrow C$ при $x \rightarrow a$ и $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in \Delta \Rightarrow h(x) \rightarrow C$ при $x \rightarrow a$;

Доказателство на трите свойства: Непосредствено по дефиниция на Хайне и свойства на сходящи редици;

Свойство 4:

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции с една и съща дефиниционна област Δ ; тогава ако $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $g(x)$ е ограничена в някоя околност на a , $(f \cdot g)(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$;

Доказателство:

Нека $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ е околност на a , в която $g(x)$ е ограничена ($\delta_1 > 0$) $\Rightarrow$ съществува $K \in \mathbf{R}^+$, такова че $|g(x)| < K$ за всяко

$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \Leftrightarrow |x - a| < \delta_1$;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $\varepsilon/K > 0$;

$f(x)$ има граница 0 $\Rightarrow$ съществува $\delta_2 > 0$, такова че за всяко x , такова че $0 < |x - a| < \delta_2$ е в сила $|f(x)| < \varepsilon/K$;

тогава ако $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon/K \cdot K = \varepsilon \Rightarrow$

$f(x) \cdot g(x)$ има граница 0 при $x \rightarrow a$;

Свойство 5:

Нека $f(x)$ е дефинирана в Δ . Ако $f(x)$ има граница при $x \rightarrow a$, то съществува околност на a , в която $f(x)$ е ограничена;

Доказателство: Фиксираме $\varepsilon = 1$;

нека $f(x)$ има граница A при $x \rightarrow a \Rightarrow$ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow A - 1 < f(x) < A + 1 \Rightarrow$ функцията $f(x)$ е ограничена в $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$;

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ има **дясна граница** числото A при $x \rightarrow a$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < x - a < \delta$ следва $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Дефиниция: Казваме, че $f(x)$ има **лява граница** числото A при $x \rightarrow a$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $0 < a - x < \delta$ следва $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Означения за дясна граница: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A$; $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$;

Означения за лява граница: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-0} A$; $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$;

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на a ; $f(x)$ има граница A при $x \rightarrow a$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ има лява и дясна граница при $x \rightarrow a$ и те са равни;

Доказателство:

Ако $f(x)$ има граница A при $x \rightarrow a$;

избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че от $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$; тогава от $0 < x - a < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$

$f(x)$ има дясна граница A при $x \rightarrow a$; аналогично от $0 < a - x < \delta \Rightarrow$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ има лява граница A при $x \rightarrow a$;

Нека $f(x)$ има дясна граница A и лява граница A при $x \rightarrow a$;

избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta_1 > 0$ е такова, че от $0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow$

$|f(x) - A| < \varepsilon$; нека $\delta_2 > 0$ е такова, че от $0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow$

$|f(x) - A| < \varepsilon$; тогава за $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ имаме:

от $0 < x - a < \delta, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. от $0 < |x - a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ има граница A при $x \rightarrow a$;

Твърдение: $\sin x / x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$;

Доказателство:

Чрез единичната окръжност и сравняване на лица можем да докажем следното неравенство:

$\sin x < x < \tan x$ за $0 < x < \pi/2$;

от него $\Rightarrow 1 < x / \sin x < 1 / \cos x \Rightarrow 1 > \sin x / x > \cos x \Rightarrow$

$0 < 1 - \sin x / x < 1 - \cos x \Rightarrow 0 < 1 - \sin x / x < 2 \cdot \sin^2 x / 2 \Rightarrow$

$0 < 1 - \sin x / x < x^2 / 2$;

това неравенство очевидно е вярно и при $-\pi/2 < x < 0$, тъй като $\sin x/x$ и x^2 запазват знаците си;
ясно е, че $x^2/2 = x \cdot x \cdot 1/2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$;
по теорема на полицайте получаваме, че $1 - \sin x/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0 \rightarrow \sin x/x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$;

Твърдение: $(1 + x)^{1/x} \rightarrow e$ при $x \rightarrow 0$;

Доказателство:

Ще докажем, че дясната граница е e ;

по – долу предполагаме, че $x > 0$;

Известно е, че редиците $a_n = (1 + 1/(n+1))^n$ и $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ са сходящи и клонят към e ;

избираме $\varepsilon > 0$;

тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N$ е в сила:

$|a_n - e| < \varepsilon$, $|b_n - e| < \varepsilon$ или $e - \varepsilon < a_n < e + \varepsilon$, $e - \varepsilon < b_n < e + \varepsilon$;

избираме $\delta = 1/(N + 1)$;

нека x е такова, че $x < \delta \Leftrightarrow x < 1/(N+1) \rightarrow N + 1 < 1/|x|$;

Нека $\lceil 1/x \rceil = n + 1 \rightarrow \lfloor 1/x \rfloor = n$;

освен това $n + 1 = \lceil 1/x \rceil \geq 1/x > N + 1 \rightarrow n > N$;

от неравенствата:

$n + 1 \geq 1/x \geq n \rightarrow 1/(n+1) \leq x \leq 1/n \rightarrow 1 + 1/(n+1) \leq 1 + x \leq 1 + 1/n$

$\rightarrow (1 + 1/(n+1))^n \leq (1+x)^{1/x} \leq (1 + 1/n)^{n+1}$; последното неравенство

следва от това, че основите са по-големи от 1 и се повдига в степени

$n \leq 1/x \leq n+1$; тъй като $n > N$ от последното неравенство получаваме:

$e - \varepsilon < (1+x)^{1/x} < e + \varepsilon \rightarrow (1+x)^{1/x} \rightarrow e$ при $x \rightarrow 0$;

За да докажем, че лявата граница е e полагаме $x = -t$; тогава t клони към 0 с положителни стойности;

$(1 + x)^{1/x} = (1 - t)^{-1/t} = (1/(1 - t))^{1/t} = (1 + t/(1 - t))^{(1-t)/t + 1} =$

$= (1 + t/(1-t))^{(1-t)/t} \cdot (1 + t/(1 - t)) = e$,

тъй като $t/(1-t)$ клони към 0 с положителни стойности $\rightarrow$ първият

множител клони към e (от по-горе), а вторият клони към 1 (от

свойството за събиране);

Условие на Коши за граници на функции

Определение: Функцията $f(x)$ удовлетворява **условието на Коши** в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всеки две точки x' и x'' , такива че $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ е в сила $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$;

Твърдение: Функцията $f(x)$ има граница в точката a тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши;

Доказателство:

Нека $f(x)$ има граница A при $x \rightarrow a$; избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че от $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon/2$;

нека x' е такова, че $0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - A| < \varepsilon/2$;
 нека x'' е такова, че $0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x'') - A| < \varepsilon/2$;
 $\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| = \varepsilon$
 $\Rightarrow$ функцията удовлетворява условието на Коши в точката a ;
 Нека $f(x)$ удовлетворява условието на Коши в точката a ;
 избираме $\varepsilon > 0$; нека $\delta > 0$ е такова, че за всяко x', x'' , такива че
 $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ е в сила $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$; избираме
 произволна редица $\{x_n\} \rightarrow a, x_n \neq a$; съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв
 че за всяко $n > N, 0 < |x_n - a| < \delta$; нека $n_1 > N, n_2 > N \Rightarrow$
 $0 < |x_{n_1} - a| < \delta, 0 < |x_{n_2} - a| < \delta \Rightarrow |f(x_{n_1}) - f(x_{n_2})| < \varepsilon \Rightarrow$ редицата
 $\{f(x_n)\}$ е фундаментална $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ сходяща $\Rightarrow$ функцията има
 граница при $x \rightarrow a$;

8. Непрекъснатост на функции в точка.

Еквивалентни определения. Свойства.

Дефиниция на Хайне: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката a ; казваме, че $f(x)$ е **непрекъснатата** в точката a , ако за всяка редица $\{x_n\} \rightarrow a$ е в сила $f(x_n) \rightarrow f(a)$;

Дефиниция на Коши: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката a ; казваме, че $f(x)$ е **непрекъснатата** в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

Теорема: Дефинициите на Хайне и Коши за непрекъснатост са еквивалентни.

Доказателство:

от Коши $\Rightarrow$ Хайне:

Избираме произволна редица $\{x_n\} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$;
 фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x , такова че $|x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; тъй като $\delta > 0$ е фиксирано, $\{x_n\}$ има граница $a \Rightarrow$ съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че за всяко $n > N, |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ за всяко $n > N \Rightarrow$ редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница $f(a) \Rightarrow f(x)$ е непрекъснатата по Хайне в точката a ;

от Хайне $\Rightarrow$ Коши:

допускаме противното: нека съществува число $\varepsilon_0 > 0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува x , такова че $|x - a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;
 Нека $\delta_1 = 1$; тогава можем да намерим x_1 , такова че $|x_1 - a| < \delta_1$ и $|f(x_1) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;
 Нека $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да намерим x_2 , такова че $|x_2 - a| < \delta_2$ и $|f(x_2) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;

...

Нека $\delta_k = 1/k$; тогава можем да намерим x_k , такова че $|x_k - a| < \delta_k$ и $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;

...

Получихме една редица от числа $\{x_n\}$, за която е изпълнено:

$|x_n - a| < 1/n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$;

очевидно $x_n \rightarrow a$ (например по теорема за полицайте) $\rightarrow$

$f(x_n) \rightarrow f(a)$, което е в противоречие с $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0 \rightarrow$ допускането не е вярно;

Една функция е непрекъсната в числово множество, ако тя е непрекъсната за всяка точка от това множество;

Пример: Ще покажем, че $\sin x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

нека $a \in \mathbf{R}$; избираме $\varepsilon > 0$;

$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \sin |(x-a)/2| \cdot \cos |(x+a)/2| \leq 2 \cdot |(x-a)/2| = |x-a|$;

използвами сме неравенството $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$, което е вярно за $\alpha \in \mathbf{R}$;

нека изберем $\delta = \varepsilon \rightarrow |\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon \rightarrow$ функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката a ;

Дефиниция: Една функция е **прекъсната** в точката a , ако тя не е непрекъсната в точката a ;

Пример: Ще покажем, че функцията $\operatorname{sgn}(x)$ дефинирана с:

$-1, x < 0$; $1, x > 0$; $0, x = 0$ е прекъсната в точката 0 ;

Избираме произволна редица $\{x_n\} \rightarrow 0, x_n \neq 0$; тогава съответната редица $\{\operatorname{sgn}(x_n)\}$ е сходяща и клони към $1 \neq \operatorname{sgn}(0) \rightarrow$ по Хайне функцията е прекъсната в точката 0 ;

Ще покажем, че функцията на Дирихле $De(x)$ дефинирана с:

$0, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; $1, x \in \mathbf{Q}$ е прекъсната за всяко $x \in \mathbf{R}$;

Нека $a \in \mathbf{R}$; в произволна околност на a има безброй много рационални и ирационални числа; избираме една редица $x_n' \rightarrow a$ и $x_n' \in \mathbf{Q}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; избираме друга редица $x_n'' \rightarrow a$ и $x_n'' \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ за всяко $n \in \mathbf{N} \rightarrow$ редиците $\{De(x_n')\}, \{De(x_n'')\}$ клонят съответно към 1 и към $0 \rightarrow$ по Хайне функцията е прекъсната в точката a ;

Твърдение: $f(x)$ е непрекъсната в точката $a \Leftrightarrow f(x)$ има лява и дясна граница в точката a и те са равни на $f(a)$;

Доказателство: Непосредствено от определенията;

Свойство 1: Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката a и ако $f(a) \neq 0$, то съществува околност $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a , в която $f(x)$ не си мени знака;

Доказателство:

Нека $f(a) > 0$; случаят $f(a) < 0$ се разглежда аналогично;

Нека $\varepsilon = f(a)/2 > 0$; тъй като $f(x)$ е непрекъсната в точката a , тогава съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \Leftrightarrow f(a)/2 < f(x) < 3.f(a)/2 \Rightarrow$

за всяко $x \in (a - \delta, a + \delta)$ имаме $f(x) > 0$;

Свойство 2: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в някакво множество Δ и нека $a \in \Delta$; ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a , тогава:

1. $f(x) + g(x)$ е непрекъсната в точката a ;
2. $f(x) - g(x)$ е непрекъсната в точката a ;
3. $f(x) \cdot g(x)$ е непрекъсната в точката a ;
4. $f(x) / g(x)$ е непрекъсната в точката a , ако $g(a) \neq 0$;

Доказателство: Използваме дефиниция на Хайне; например за делението: тъй като $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ от горното твърдение, съществува околност $(a - \delta_0, a + \delta_0)$ в която $g(x) \neq 0$; нека $\{x_n\} \rightarrow a$; тъй като $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a , $\{f(x_n)\} \rightarrow f(a)$, $\{g(x_n)\} \rightarrow g(a) \Rightarrow \{f(x_n)/g(x_n)\} \rightarrow f(a)/g(a) \Rightarrow f(x)/g(x)$ е непрекъсната в точката a ;

Дефиниция: Нека $f(x): \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$; нека $g(t): \Delta_3 \rightarrow \Delta_4$, където $\Delta_4 \subseteq \Delta_1$; дефинираме функцията $F(t) = f(g(t)): \Delta_3 \rightarrow \Delta_2$; функцията F наричаме **композиция** на двете функции g и f ; означаваме: $F = f \circ g$;

Свойство 3: Нека $f(x): \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ е непрекъсната в точката x_0 ; нека $g(t): \Delta_3 \rightarrow \Delta_4$, където $\Delta_4 \subseteq \Delta_1$, е непрекъсната в точката t_0 и $g(t_0) = x_0$; тогава $F = f \circ g: \Delta_3 \rightarrow \Delta_2$ е непрекъсната в точката t_0 ;

Доказателство: Нека $\{t_n\}$ е произволна редица от стойности, която клони към t_0 и за всяко $n \in \mathbf{N}$, $t_n \in \Delta_3$; тъй като $g(t)$ е непрекъсната в точката $t_0 \Rightarrow$ съответната редица $\{g(t_n)\} \rightarrow g(t_0) = x_0$;

тъй като $t_n \in \Delta_3$ за всяко $n \in \mathbf{N} \Rightarrow g(t_n) \in \Delta_4 \Rightarrow$

$g(t_n) \in \Delta_1$; тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $g(t_n) \rightarrow x_0 = g(t_0) \Rightarrow$ редицата $\{f(g(t_n))\}$ е сходяща и клони към $f(x_0)$, но $F(t_n) = f(g(t_n))$, $F(t_0) = f(g(t_0)) = f(x_0) \Rightarrow \{F(t_n)\}$ клони към $F(t_0) \Rightarrow$ функцията $F(t)$ е непрекъсната в точката t_0 ;

Свойство 4: Нека $f(x)$ е непрекъсната в точката a ; тогава съществува околност $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a , в която функцията $f(x)$ е ограничена;

Доказателство: Фиксираме $\varepsilon = 1$;

тъй като $f(x)$ е непрекъсната в точката $a \rightarrow$ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < 1 \rightarrow f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1 \rightarrow$ функцията $f(x)$ е ограничена в $(a - \delta, a + \delta)$;

9. Теорема за непрекъснати функции в краен затворен интервал.

Роля на затворения интервал: Нека $\{x_n\} \rightarrow A$ е произволна сходяща редица и всичките и елементи са в интервала $[a, b]$; тогава като използваме теоремите за граничен преход получаваме, че $a \leq A \leq b$, което означава, че граница остава в затворения интервал;

Теорема 1 (Болцано – Коши): Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; нека $f(a)$ и $f(b)$ имат различни знаци, т.е.

$f(a) \cdot f(b) < 0 \rightarrow$ съществува $c \in [a, b]$, такова че $f(c) = 0$;

Доказателство: Нека за определеност $f(a) < 0, f(b) > 0$;

Нека $c_1 = (a + b)/2$; ако $f(c_1) = 0$, теоремата е доказана;

ако $f(c_1) > 0$, тогава $a_1 = a, b_1 = c_1$; ако $f(c_1) < 0$, тогава $a_1 = c_1, b_1 = b$; получаваме $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$;

Нека $c_2 = (a_1 + b_1)/2$; ако $f(c_2) = 0$, теоремата е доказана;

ако $f(c_2) > 0$, тогава $a_2 = a_1, b_2 = c_2$; ако $f(c_2) < 0$, тогава $a_2 = c_2, b_2 = b_1$; получаваме $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$;

...

Нека $c_{n+1} = (a_n + b_n)/2$; ако $f(c_{n+1}) = 0$, теоремата е доказана;

ако $f(c_{n+1}) > 0$, тогава $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_{n+1}$; ако $f(c_{n+1}) < 0$, тогава $a_{n+1} = c_{n+1}, b_{n+1} = b_n$; получаваме $f(a_{n+1}) < 0, f(b_{n+1}) > 0$;

...

Получаваме една свиваща се система от интервали $[a_n, b_n]$; това е така, защото дължината на един интервал е $(b_n - a_n)/2^n \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$ и всеки интервал се съдържа в следващия; по теоремата на Кантор $\rightarrow$ съществува единствена точка c , която принадлежи на всеки един от тези интервали $\rightarrow a_n \rightarrow c, b_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$;

тъй като $f(x)$ е непрекъсната, по Хайне $\rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c)$; тъй като $f(a_n) < 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, след граничен преход получаваме: $f(c) \leq 0$;

тъй като $f(x)$ е непрекъсната, по Хайне $\rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c)$; тъй като $f(b_n) > 0$ за всяко $n \in \mathbf{N}$, след граничен преход получаваме: $f(c) \geq 0$;
 $\rightarrow f(c) = 0$;

Следствие 1: Всеки полином от нечетна степен има поне един реален корен;

Следствие 2: Нека $f(x)$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ са всички нули на $f(x)$; тогава $f(x)$ не си променя знака в интервалите $(-\infty, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_n, +\infty)$;

Теорема 2 (за междинните стойности): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; нека λ е число между $f(a)$ и $f(b)$; тогава съществува $c \in [a, b]$, такова че $f(c) = \lambda$;

Доказателство: Разглеждаме помощната функция $\varphi(x) = f(x) - \lambda$;
имаме: $\varphi(a) = f(a) - \lambda < 0$, $\varphi(b) = f(b) - \lambda > 0$, $\varphi(x)$ – непрекъсната в $[a, b]$ $\rightarrow$ съществува x_0 , такова че $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda$;

Теорема 3 (на Вайерщрас): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; тогава $f(x)$ е ограничена в $[a, b]$;

Доказателство: Допускаме противното; нека за определеност $f(x)$ е неограничена отгоре в интервала $[a, b]$; в такъв случай за всяко $M \in \mathbf{R}$ съществува $x \in [a, b]$, такова че $f(x) > M$;

Нека $M_1 = 1$; избираме x_1 , такова че $f(x_1) > M_1$;

Нека $M_2 = 2$; избираме x_2 , такова че $f(x_2) > M_2$;

...

Нека $M_n = n$; избираме x_n , такова че $f(x_n) > M_n$;

...

Разглеждаме редицата $\{x_n\}$; за нея $a \leq x_n \leq b$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; по теоремата на Болцано – Вайерщрас, съществува сходяща подредица $\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in [a, b]$; получаваме, че $f(x_{n_k}) > n_k$ за всяко $k \in \mathbf{N} \rightarrow$ редицата $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$; от друга страна $f(x)$ е непрекъсната $\rightarrow$ по Хайне $\{f(x_{n_k})\} \rightarrow f(x_0)$ – получаваме противоречие $\rightarrow f(x)$ наистина е ограничена в $[a, b]$;

Теорема 4 (на Вайерщрас): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; тогава тя достига най-голяма стойност (супремум) и най-малка стойност (инфимум);

Доказателство: $f(x)$ непрекъсната в $[a, b]$ $\rightarrow f(x)$ е ограничена $\rightarrow$ множеството $X = \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ притежава точна горна граница; нека $M = \sup \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$; тогава за всяко $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ не е горна граница на X ;

Нека $\varepsilon_1 = 1$; тогава съществува $x_1 \in [a, b]$, такова че $f(x_1) > M - \varepsilon_1$;

Нека $\varepsilon_2 = 1/2$; тогава съществува $x_2 \in [a, b]$, такова че $f(x_2) > M - \varepsilon_2$;

...

Нека $\varepsilon_n = 1/n$; тогава съществува $x_n \in [a, b]$, такова че $f(x_n) > M - \varepsilon_n$;

...

Получаваме една редица $\{x_n\}$, за която $x_n \in [a, b]$ и $f(x_n) > M - 1/n$ за всяко $n \in \mathbf{N}$; тъй като $\{x_n\}$ е ограничена, тогава по теоремата на Болцано-Вайерщрас съществува сходяща подредица

$\{x_{n_k}\} \rightarrow x_0 \in [a, b]$; тъй като $f(x)$ е непрекъсната $\rightarrow$ по Хайне

$\{f(x_{n_k})\} \rightarrow f(x_0)$ за $k \rightarrow \infty$;

от друга страна $M - 1/n_k < f(x_{n_k}) \leq M$; от теоремата за полиците $\rightarrow$

$$f(x_{nk}) \rightarrow M \Rightarrow f(x_0) = M;$$

по същия начин се установява, че $f(x)$ достига най-малка стойност;

10. Непрекъснатост на елементарните функции. Непрекъснатост на монотонни функции.

Непрекъснатост на рационалните функции

Нека функцията $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ е константа, т.е. $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Тогава $f(x)$ е непрекъсната;

Доказателство:

Нека $a \in \mathbf{R}$; Избираме $\varepsilon > 0$; $|f(x) - f(a)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$; т.е. каквото и да бъде δ , условието на Коши е удовлетворено $\Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в a ;

Нека функцията $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ е дефинирана с $f(x) = x$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Тогава $f(x)$ е непрекъсната;

Доказателство:

Нека $a \in \mathbf{R}$; Избираме $\varepsilon > 0$; $|f(x) - f(a)| = |x - a|$; ясно е, че ако изберем $\delta = \varepsilon$, от $|f(x) - f(a)| < |x - a| < \delta = \varepsilon$, получаваме, че $f(x)$ е непрекъсната в a ;

Като използваме горните функции и свойствата за аритметичните операции, получаваме, че всеки полином на x е непрекъсната функция, а от там и всяка рационална функция на x е непрекъсната в дефиниционната си област (няма смисъл да се говори за прекъсване в точките където се анулира знаменателя);

Непрекъснатост на тригонометричните функции

Ще покажем, че $\sin x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

нека $a \in \mathbf{R}$; избираме $\varepsilon > 0$;

$$|\sin x - \sin a| = 2 \cdot \sin |(x - a)/2| \cdot \cos |(x + a)/2| \leq 2 \cdot |(x - a)/2| = |x - a|;$$

използвайки сме неравенството $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$, което е вярно за $\alpha \in \mathbf{R}$;

нека изберем $\delta = \varepsilon \Rightarrow |\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow$ функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката a ;

Почти аналогично се доказва, че $\cos x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

от свойството за частно на непрекъснати функции $\Rightarrow \operatorname{tg} x$ е

непрекъсната в $\mathbf{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$ и $\operatorname{cotg} x$ е непрекъсната в $\mathbf{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$;

Непрекъснатост на показателната, логаритмичната и степенната функция

Ще покажем, че $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ дефинирана с $f(x) = a^x$, $a > 0$ е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

Първо ще покажем, че a^x е непрекъсната в 0;

ще използваме, че $\{a^{1/n}\}$ и $\{a^{-1/n}\}$ клонят към 1 при $n \rightarrow \infty$;

нека $a > 1$; тогава $a^{1/n} > a^{-1/n}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

избираме $\varepsilon > 0$;

тогава съществува индекс $N \in \mathbf{N}$, такъв че

$|a^{1/N} - \varepsilon| < 1$ и $|a^{-1/N} + \varepsilon| < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^{1/N} < 1 + \varepsilon$;

избираме $\delta = 1/N$; тогава при $|x| < \delta$ като използваме, че

a^x е растяща за $a > 1$ получаваме:

$1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |a^x - a^0| < \varepsilon$; с това показахме, че

a^x е непрекъсната в точката 0 за $a > 1$; аналогично се показва при

$a < 1$, а при $a = 1$ функцията a^x е константа;

нека $x_0 \in \mathbf{R}$; тогава $a^x = a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} \rightarrow a^{x_0}$ при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow$

a^x е непрекъсната в $\mathbf{R}$;

Ще покажем, че функцията $f(x) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ дефинирана с

$f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

Ще покажем, че $\ln x = \log_e x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

нека $x_0 \in \mathbf{R}$;

използваме неравенството $(1 + 1/n)^n < e$; като използваме, че $\ln x$ е растяща получаваме:

$(1 + 1/n)^n < e \Rightarrow n \cdot \ln(1 + 1/n) < 1 \Rightarrow \ln(1 + 1/n) < 1/n$;

$(1 + 1/(n-1))^{n-1} < e \Rightarrow (n-1) \cdot \ln(1 + 1/(n-1)) < 1 \Rightarrow \ln(n/(n-1)) < 1/(n-1) \Rightarrow \ln(1 - 1/n) > -1/(n-1)$;

тогава $-1/(n-1) < \ln(1 - 1/n) < \ln(1 + 1/n) < 1/n \Rightarrow$ по теорема на полицайте, че $\ln(1 - 1/n)$ и $\ln(1 + 1/n)$ клонят към 0 при $n \rightarrow \infty$;

избираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $N \in \mathbf{N}$, такова че:

$-\varepsilon < \ln(1 - 1/N) < \ln(1 + 1/N) < \varepsilon$;

избираме $\delta = x_0/N$;

тогава от $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$

$1 - 1/N < x/x_0 < 1 + 1/N \Rightarrow -\varepsilon < \ln(1 - 1/N) < \ln x - \ln x_0 <$

$< \ln(1 + 1/N) < \varepsilon \Rightarrow |\ln x - \ln x_0| < \varepsilon \Rightarrow$ функцията $\ln x$ е непрекъсната в точката $x_0 \Rightarrow$ по свойство за частно на непрекъснати функции

$\Rightarrow \ln x / \ln a = \log_a x$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

Ще покажем, че функцията $f(x) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, дефинирана с $f(x) = x^\alpha$, α - произволно е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

използваме, че $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$; по свойството за композиция на

непрекъснати функции $\Rightarrow x^\alpha$ е непрекъсната в $\mathbf{R}^+$;

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ и тя е монотонно растяща (намаляваща); тогава $f(x)$ е непрекъсната тогава

и само тогава, когато множеството от стойностите $f(\Delta)$ също е интервал;

Доказателство: Нека $f(x)$ е растяща; случаят, когато е намаляваща се разглежда аналогично;

Ще докажем, че ако $f(x)$ е непрекъснатата, то $f(\Delta)$ е интервал;

Нека $x_1, x_2 \in \Delta$; нека y е такава, че $f(x_1) < y < f(x_2)$;

ще покажем, че съществува $x \in \Delta$, такава че $f(x_0) = y$;

образуваме си функцията $g(x) = f(x) - y$;

$g(x_1) = f(x_1) - y < 0$, $g(x_2) = f(x_2) - y > 0 \rightarrow$ съществува $x_0 \in (x_1, x_2)$,

такова че $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow y = f(x_0)$; с това показахме, че $f(\Delta)$ също е интервал;

Ще докажем, че ако $f(\Delta)$ е интервал, то $f(x)$ е непрекъснатата;

Нека x_0 е вътрешна точка за Δ ;

тъй като функцията е монотонно растяща, числовото множество

$M = \{ f(x) \mid x > x_0 \}$ е ограничено отдолу $\rightarrow$ то притежава точна долна граница $A \in f(\Delta)$; аналогично множеството $m = \{ f(x) \mid x < x_0 \}$

притежава точна горна граница $B \in f(\Delta)$; ако допуснем, че $f(x_0) < A$,

тогава $(f(x_0) + A)/2 < A \in f(\Delta) \rightarrow$ съществува $x' > x_0$, такава че

$f(x') = (f(x_0) + A)/2 \rightarrow f(x') < A \rightarrow A$ не е точна долна граница на $M \rightarrow$

$A = f(x_0)$, аналогично $B = f(x_0)$; фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $f(x_0) - \varepsilon$ не е

горна граница на $m \rightarrow$ съществува $x_1 < x_0 \in \Delta$, такава че

$f(x_0) - \varepsilon < f(x_1) < f(x_0)$; избираме $\delta = (x_0 - x_1)/2 \rightarrow$ за всяко x , такава че

$x_0 - x < \delta$ имаме $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \rightarrow f(x_0)$ е лява граница

на функцията $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$; аналогично получаваме, че $f(x_0)$ е

дясна граница при $x \rightarrow x_0 \rightarrow f(x)$ има граница $f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0 \rightarrow f(x)$

е непрекъснатата в точката x_0 ;

11. Равномерна непрекъснатост.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ ;

казваме, че $f(x)$ е **равномерно непрекъснатата** в Δ , ако за всяко $\varepsilon > 0$

съществува $\delta > 0$, такава че от $|x' - x''| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$;

Пример:

Нека $f(x) = a \cdot x + b$; ще покажем, че $f(x)$ е равномерно непрекъснатата в $\mathbf{R}$;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $|f(x') - f(x'')| = |a| \cdot |x' - x''|$; ясно е, че

ако изберем $\delta = \varepsilon / |a|$, ще получим $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta$;

Нека $f(x) = \sin x$; ще покажем, че $f(x)$ е равномерно непрекъснатата в $\mathbf{R}$;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $|f(x') - f(x'')| = 2 \cdot |\sin((x' - x'')/2)|$.

$|\cos((x' + x'')/2)| \leq 2 \cdot |x' - x''|/2 \cdot 1 = |x' - x''|$; ясно е, че ако изберем

$\delta = \varepsilon$, ще получим $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta$;

Нека $f(x) = x^2$; ще покажем, че $f(x)$ не е равномерно непрекъсната в $\mathbf{R}$;

Допускаме, че $f(x)$ е равномерно непрекъсната;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че от $|x' - x''| < \delta$ да следва: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \Leftrightarrow |x'^2 - x''^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x' - x''| \cdot |x' + x''| < \varepsilon \rightarrow \delta \cdot |x' + x''| < \varepsilon$; това неравенство очевидно се нарушава за достатъчно големи стойности за x' и $x'' \rightarrow f(x)$ не е равномерно непрекъсната;

Теорема (на Кантор): Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$; тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната;

Доказателство:

Допускаме противното; нека $\varepsilon > 0$ е такова, че за всяко $\delta > 0$ съществуват x', x'' такива че, $|x' - x''| < \delta$ и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$;

избираме $\delta_1 = 1$; тогава можем да изберем x_1', x_1'' , такива че $|x_1' - x_1''| < \delta_1$ и $|f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon$;

избираме $\delta_2 = 1/2$; тогава можем да изберем x_2', x_2'' , такива че $|x_2' - x_2''| < \delta_2$ и $|f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon$;

...

избираме $\delta_n = 1/n$; тогава можем да изберем x_n', x_n'' , такива че $|x_n' - x_n''| < \delta_n$ и $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$;

...

Получаваме две редици $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, които са ограничени ($\in [a, b]$)

$\rightarrow$ по Болцано-Вайерщрас можем да изберем сходящи подредици

$\{x_{nk}'\}$ и $\{x_{nk}''\}$; нека $\{x_{nk}'\} \rightarrow C$; известно е, че

$|x_{nk}' - x_{nk}''| < 1/n_k \Leftrightarrow x_{nk}' - 1/n_k < x_{nk}'' < x_{nk}' + 1/n_k$;

тъй като $1/n_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, по теоремата за полиците получаваме, че $\{x_{nk}''\} \rightarrow C$; тъй като $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b] \rightarrow \{f(x_{nk}')\} \rightarrow f(C)$ и $\{f(x_{nk}'')\} \rightarrow f(C) \rightarrow \{f(x_{nk}') - f(x_{nk}'')\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, което очевидно е в противоречие с $|f(x_{nk}') - f(x_{nk}'')| \geq \varepsilon$ за всяко $k \in \mathbf{N} \rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a, b]$;

12. Производна на функция – определение, геометричен и механичен смисъл.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност Δ на точката x_0 ; изразът $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, където $x \in \Delta$, $x \neq x_0$ се нарича **диференчно частно** на функцията $f(x)$ в точката x_0 ; друг начин на записване е $(h = x - x_0) (f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност Δ на точката x_0 ; казваме, че функцията $f(x)$ е **диференцируема** в точката x_0 , ако съществува границата на диференчното частно при $x \rightarrow x_0$;

тази граница се бележи с $f'(x_0)$ и се нарича **производна** на функцията $f(x)$ в точката x_0 ;

Примери: Нека $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = 0 \Rightarrow$ границата му при $x \rightarrow x_0$ е $0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Нека $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;
тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = (x - x_0) / (x - x_0) = 1 \Rightarrow$ граница му при $x \rightarrow x_0$ е $1 \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;
Нека $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$; ще покажем, че $f(x)$ не е диференцируема в точката 0 ; разглеждаме диференчното частно $(|x| - |0|) / (x - 0) = |x| / x$; при $x > 0$ границата му е 1 , а при $x < 0$ границата е $-1 \Rightarrow$ границата при $x \rightarrow 0$ не съществува $\Rightarrow f(x)$ няма производна в точката 0 ;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 ; ако $f(x)$ е диференцируема в точката $x_0 \Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в x_0 ;

Доказателство:

нека $\{x_n\}$ е произволна редица, която клони към x_0 ; тогава $f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0) \cdot (f(x_n) - f(x_0)) / (x_n - x_0)$; първият множител клони към 0 , а вторият клони към $f'(x_0) \Rightarrow f(x_n) - f(x_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ по Хайне $f(x)$ е непрекъсната;

Теорема: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на точката x_0 и са диференцируеми в x_0 ; тогава:

1. $f(x_0) + g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $f(x_0) - g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $f(x_0) \cdot g(x_0)$ е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
4. Ако $g(x_0) \neq 0$, то $f(x)/g(x)$ е дефинирана в околност на x_0 и е диференцируема в точката x_0 и нейната производна е $(f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) / (g(x_0)^2)$;

Доказателство на 1.:

$$((f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))) / (x - x_0) = (f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) + (g(x) - g(x_0)) / (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) + g'(x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0;$$

Доказателство на 2.:

$$((f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))) / (x - x_0) = (f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) - (g(x) - g(x_0)) / (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) - g'(x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0;$$

Доказателство на 3.:

$$\begin{aligned} &\text{тъй като } f(x) \text{ е диференцируема в } x_0 \Rightarrow f(x) \text{ е непрекъсната в } x_0; \\ &((f(x) \cdot g(x)) - (f(x_0) \cdot g(x_0))) / (x - x_0) = (f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)) / (x - x_0) = \\ &= f(x) \cdot (g(x) - g(x_0)) / (x - x_0) + (f(x) - f(x_0)) \cdot g(x_0) / (x - x_0) \end{aligned}$$

$g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) \rightarrow f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 ;

Доказателство на 4.:

$g(x)$ е диференцируема в точката $x_0 \rightarrow g(x)$ е непрекъсната в точката x_0 ; тъй като $g(x_0) \neq 0$ и $g(x)$ – непрекъсната в $x_0 \rightarrow$ съществува околност на x_0 , в която $g(x) \neq 0$;

Лема: производната на $1/g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ е $-g'(x_0)/(g(x_0))^2$;

Доказателство: $(1/g(x) - 1/g(x_0)) / (x - x_0) =$

$(g(x_0) - g(x)) / ((x - x_0) \cdot g(x) \cdot g(x_0)) \rightarrow -g'(x_0)/g(x_0)^2$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x_0 ;

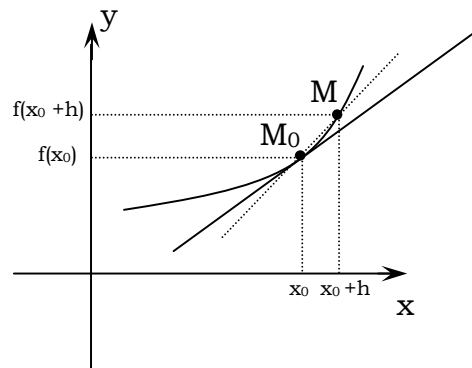
по свойство 3. получаваме, че производната на $f(x)/g(x) = f(x) \cdot 1/g(x)$ в точката x_0 е $f'(x_0)/g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)/g(x_0)^2 = (f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) / g(x_0)^2$;

Геометричен смисъл на производната

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0 ; ще си поставим за задача да намерим уравнение на секуща през точката $M_0(x_0, f(x_0))$ към графиката на функцията;

Нека $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ е друга точка от графиката на функцията; тогава уравнението на секущата е:

$y = k \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, където с (x, y) бележим текущите координати, а k е точно диференчното частно в точката x_0 ;



Допирателна в точката M_0 дефинираме като гранично положение на секущата MM_0 , когато $M \rightarrow M_0$; функцията има допирателна в точката M_0 , ако коефициентите в уравнението на секущата притежават граници когато $x \rightarrow x_0$; но това е така точно тогава, когато функцията е диференцируема в точката x_0 ; в такъв случай ъгловият коефициент на секущата ще клони към стойността на производната в точката x_0 ; получаваме, че уравнението на допирателната в точката x_0 е:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, при условие че функцията има производна в точката x_0 ;

окончателно: функцията е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато към графиката на функцията може да се прекара единствена допирателна в точката $(x_0, f(x_0))$;

Механичен смисъл на производната

Разглеждаме една материална точка M , която се движи по права линия; да изберем начало на координатната система върху правата; считаме, че абцисата на точка M в момент t се определя от някаква функция $f(t)$ на времето t ;

Да разгледаме два момента t и t_0 ; в такъв случай както знаем от механиката изразът $(f(t) - f(t_0)) / (t - t_0)$ се нарича средна скорост в интервала от време (t_0, t) ; границата на $(f(t) - f(t_0)) / (t - t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ се нарича средна скорост в момента t_0 , т.е. средната скорост в момента t_0 е точно $f'(t_0)$;

Последователни производни

Нека е дадена функция $f(x)$, която е диференцируема в някакъв интервал Δ ; в такъв случай при фиксирано x производната е някакво число, което зависи от x и е еднозначно определено от x ; тогава можем да считаме, че производната е също функция на x ; ако функцията $f'(x)$ е диференцируема, казваме че $f(x)$ е два пъти диференцируема и производната на $f'(x)$ наричаме **втора производна** на $f(x)$ и бележим с $f''(x)$; аналогично се дефинират производни от по висок ред; **n -та производна** бележим с $f^{(n)}$; в сила е следната **формула на Лайбниц** за n -та производна на произведение на две функции:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \binom{n}{0} \cdot f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} \cdot f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \dots + \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n} \cdot f(x) \cdot g^{(n)}(x);$$

доказателството се извършва с индукция по n ;

13. Диференциране на съставни функции.

Теорема: Нека функцията $f(u)$ е дефинирана в околност на точката u_0 и $f(u)$ е диференцируема в точката u_0 ; нека функцията $g(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 , $g(x_0) = u_0$ и $g(x)$ е диференцируема в точката x_0 ; тогава функцията $F(x) = f(g(x))$ е дефинирана в околност на точката x_0 , диференцируема в точката x_0 и $F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$;

Доказателство:

Функцията $F(x)$ е дефинирана в тази околност на x_0 , за която $g(x)$ е от дефиниционната област на $f(u)$, т.е. $g(x)$ приема стойности в достатъчно малка околност на u_0 ; такава околност съществува, тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x_0 и $g(x_0) = u_0$;

$(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = (f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)))/h$;
 полагаме $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$, т.е. $g(x_0 + h) = k + u_0$;
 получаваме:
 $(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = (f(u_0 + k) - f(u_0))/k \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))/h$;
 нека $h \rightarrow 0$, тогава $k = g(x_0 + h) - g(x_0)$ също клони към 0, тъй като $g(x)$ е диференцируема в точката $x_0 \rightarrow$ непрекъсната в точката x_0 ;
 тогава диференциалното частно на $F(x)$ в точката x_0 клони към
 $f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$;

доказателството има един пропуск: то не третира случаят, когато $k = 0$; в такъв случай деленето на k не е дефинирано;
 дефинираме помощната функция $\varphi(k) = (f(u_0 + k) - f(u_0))/k$ при $k \neq 0$
 и $\varphi(k) = f'(u_0)$ при $k = 0$; тогава $\varphi(k)$ е дефинирана в околност на нулата, тъй като f е дефинирана в околност на u_0 ; освен това $\varphi(k)$ е непрекъсната в точката 0, тъй като $\varphi(k)$ клони към $f'(u_0) = \varphi(0)$ при $k \rightarrow 0$;
 получаваме:
 $(F(x_0 + h) - F(x_0))/h = \varphi(k) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))/h$;
 при $k \neq 0$ това равенство очевидно е изпълнено; при $k = 0$ имаме
 $g(x_0 + h) = g(x_0) \rightarrow F(x_0 + h) - F(x_0) = 0$, $\varphi(k) = f'(u_0)$,
 $g(x_0 + h) - g(x_0) = 0 \rightarrow$ равенството отново е изпълнено;
 след граничен преход при $h \rightarrow 0$ получаваме:
 $F'(x_0) = \varphi(0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$, тъй като $\varphi(k)$ е непрекъсната в точката 0;

14. Теорема на Рол. Теорема за крайните нараствания. Обобщена теорема за крайните нараствания.

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 ;
 казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0 , ако
 съществува околност U на x_0 , такава че $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 ;
 казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0 , ако съществува
 околност U на x_0 , такава че $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Локалните минимума и максимуми се наричат **локални екстремуми**;

Теорема (на Ферма): Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 ; тогава ако $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0 , $f'(x_0) = 0$;
 Доказателство:

Нека за определеност $f(x_0)$ е локален максимум за $f(x)$;
 разглеждаме диференчното частно $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;
 нека $h \rightarrow 0$ с положителни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h > 0$
 $\rightarrow$ диференчното частно $\leq 0 \rightarrow$ след граничен преход $f'(x_0) \leq 0$; (1)
 нека $h \rightarrow 0$ с отрицателни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$, $h < 0$
 $\rightarrow$ диференчното частно $\geq 0 \rightarrow$ след граничен преход $f'(x_0) \geq 0$; (2)
 от (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0) = 0$;

Теорема (на Рол): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; освен това $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$; в такъв случай съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, за която $f'(\xi) = 0$;

Доказателство:

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b] \rightarrow$ по теоремата на Вайерщрас $f(x)$ е ограничена в $[a, b]$; нека m е най-малката стойност и M е най-голямата стойност на $f(x)$;

Ако $m = M$, от $m \leq f(x) \leq M \rightarrow f(x)$ е константа за всяко $x \in [a, b] \rightarrow f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и теоремата е доказана;

Ако $m < M$, тогава по теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2 , такива че $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$; поне една от тези две точки е вътрешна за интервала $[a, b]$ – в противен случай ще получим, че $m = M = f(a) = f(b)$, което е противоречие; ако $x_1 \in (a, b)$, тогава x_1 е локален екстремум $\rightarrow f'(x_1) = 0$ по теоремата на Ферма; ако $x_1 = a$ или $x_1 = b$, тогава $x_2 \in (a, b)$ е локален екстремум и $f'(x_2) = 0$ по теоремата на Ферма; с това теоремата е доказана;

Теоремата на Рол има следния геометричен смисъл: ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$, то върху графиката на функцията $f(x)$ има поне една точка, в която допирателната е успоредна на Ox ;

Теорема за крайните нараствания (на Лагранж): Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b) ; тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$;

Доказателство:

Да отбележим, че при $f(a) = f(b)$ получаваме теоремата на Рол, която е частен случай на теоремата на Лагранж;

Разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - k \cdot x$, където

$k = (f(b) - f(a))/(b - a)$;

в такъв случай $g(a) = g(b)$; действително

$g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - k \cdot a = f(b) - k \cdot b \Leftrightarrow f(b) - f(a) = k(b - a)$, което очевидно е изпълнено;

освен това $g(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и $g(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b) ; налице са условията в теоремата на Рол $\Rightarrow$ съществува $\xi \in (a, b)$, такава че $g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - k = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$;

Теоремата на Лагранж има следния геометричен смисъл: ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b) , то върху графиката на функцията $f(x)$ има поне една точка, в която допирателната е успоредна на правата, която съединява точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$;

Следствие 1 (основна теорема на интегралното смятане): Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ ; тогава ако $f'(x) = 0$ за всяко $x \in \Delta \Rightarrow f(x)$ е константа в този интервал; Доказателство: Фиксираме две точки $x_1 < x_2 \in \Delta$; в затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж $\Rightarrow$ съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, но $f'(\xi) = 0$ за всяко $\xi \in \Delta \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$; точките x_1 и x_2 са избрани произволно $\Rightarrow f(x)$ е константа в Δ ;

Следствие 2: Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ ; ако $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е растяща в Δ ; ако $f'(x) > 0$ за всяко $x \in \Delta$, то $f(x)$ е монотонно растяща в Δ ; Доказателство:

Фиксираме две точки $x_1 < x_2 \in \Delta$; в затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж $\Rightarrow$ съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, но $f'(\xi) \geq 0$ за всяко $\xi \in \Delta \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$; точките $x_1 < x_2$ са избрани произволно $\Rightarrow f(x)$ е растяща в Δ ; ако неравенството е строго, т.е. $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ и функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща;

Следствие 3: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ ; ако $f'(x)$ е ограничена в Δ , тогава $f(x)$ е равномерно непрекъсната в Δ ;

Доказателство: Тъй като $f'(x)$ е ограничена в $\Delta \Rightarrow$ съществува $C \in \mathbf{R}^+$, такава че $|f'(x)| < C$ за всяко $x \in \Delta$; фиксираме две точки $x_1, x_2 \in \Delta$; тогава за затворения интервал $[x_1, x_2]$ очевидно са изпълнени условията на теоремата на Лагранж $\Rightarrow$ съществува $\xi \in (x_1, x_2)$, такава че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$, но $|f'(\xi)| < C \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < C \cdot |x_2 - x_1|$; фиксираме $\varepsilon > 0$; избираме $\delta = \varepsilon/C$; тогава $|f(x_2) - f(x_1)| < C \cdot |x_2 - x_1| < C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon \Rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъсната в Δ ;

Аналогично твърдение имаме и за монотонно намаляващи функции;

Обобщена теорема за крайните нараствания (на Коши): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируеми в отворения интервал (a, b) ; нека освен това $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$; в такъв случай, съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(\xi) / g'(\xi)$;

Доказателство:

Теоремата на Лагранж е частен случай на теоремата на Коши, при нея $g(x) = x$;

Ще покажем, че $g(a) \neq g(b)$; действително, ако $g(a) = g(b)$, тогава за функцията $g(x)$ ще са изпълнени условията на теоремата на Рол $\rightarrow$ съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $g'(\xi) = 0$, което е противоречие;

Разглеждаме функцията $\varphi(x) = f(x) - k \cdot g(x)$, където

$$k = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a));$$

в такъв случай $\varphi(a) = \varphi(b)$; действително

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow f(a) - k \cdot g(a) = f(b) - k \cdot g(b) \Leftrightarrow f(b) - f(a) = k \cdot (g(b) - g(a)),$$

което очевидно е изпълнено;

освен това $\varphi(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и $\varphi(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b) ; налице са условията в теоремата на Рол $\rightarrow$ съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $\varphi'(\xi) = 0 \rightarrow f'(\xi) - k \cdot g'(\xi) = 0 \rightarrow (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$;

15. Обратни функции. Диференциране на обратни функции.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ ; $f(x)$ е **обратима**, ако тя притежава единствена обратна функция; $f(x)$ е обратима $\Leftrightarrow f(x)$ е инекция; в такъв случай случай обратната функция на $f(x)$ е $f^{-1}(y) : f(\Delta) \rightarrow \Delta$;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ и $f(x)$ е строго монотонно растяща (намаляваща); тогава тя е обратима и нейната обратна функция също е строго монотонно растяща (намаляваща); Доказателство: Нека за определеност $f(x)$ е монотонно растяща; тъй като $f(x)$ е строго монотонно растяща $\rightarrow$ за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$ е изпълнено $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow f(x)$ е инекция $\rightarrow f(x)$ е обратима; нека нейната обратна функция е $f^{-1}(y) : f(\Delta) \rightarrow \Delta$; избираме две произволни числа $y_1 < y_2 \in f(\Delta) \rightarrow y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$; в такъв случай $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$; ако допуснем, че $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ ще получим, че $x_1 \geq x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow y_1 \geq y_2$, което е противоречие $\rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ за всеки $y_1 < y_2 \in f(\Delta) \rightarrow f^{-1}$ е монотонно растяща;

Твърдение: Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервал Δ и

$f(x)$ е строго монотонно растяща (намаляваща); тогава $f(x)$ е обратима и нейната обратна функция е непрекъсната за всяко $x \in f(\Delta)$;

Доказателство: Нека за определеност $f(x)$ е строго монотонно растяща; Тъй като $f(x)$ е непрекъсната и Δ е интервал $\rightarrow$ по твърдение за непрекъснатост на монотонни функции $\rightarrow f(\Delta)$ е интервал; от горното твърдение получаваме, че $f(x)$ е обратима и обратната и функция $f^{-1}: f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е строго монотонно растяща; използваме твърдение за непрекъснатост на монотонни функции: f^{-1} е строго монотонно растяща дефинирана в интервала $f(\Delta)$ и приемаща стойности в интервала $\Delta \rightarrow f^{-1}$ е непрекъсната;

Теорема: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ , $f(x)$ е диференцируема в Δ и $f'(x) > (<) 0$ за всяко $x \in \Delta$; в такъв случай $f(x)$ е обратима и нейната обратна функция $g(y): f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е диференцируема и $g'(f(x)) = 1/f'(x)$ за всяко $x \in \Delta$;

Доказателство: Нека за определеност $f'(x) > 0$;

Тъй като $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ е строго монотонно растяща в Δ , освен това $f(x)$ е диференцируема в $\Delta \rightarrow f(x)$ е непрекъсната в Δ ; от горното твърдение $\rightarrow f(x)$ е обратима и нейната обратна функция $g(y): f(\Delta) \rightarrow \Delta$ е непрекъсната в $f(\Delta)$;

Ще покажем, че $g(y)$ е диференцируема в $f(\Delta)$;

разглеждаме диференчното частно на $g(y)$: $(g(y+h) - g(y))/h$;

полагаме $k = g(y+h) - g(y) \rightarrow g(y+h) = k + g(y) = k + x$, където $x \in \Delta$;

$\rightarrow y + h = f(x+k) \rightarrow h = f(x+k) - y \rightarrow h = f(x+k) - f(x)$;

тогава $(g(y+h) - g(y))/h = k / (f(x+k) - f(x))$; нека $h \rightarrow 0$; като

използваме, $g(y)$ е непрекъсната, получаваме, че $k = g(y+h) - g(y) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0 \rightarrow g'(y) = 1/f'(x)$, т.е. $g'(f(x)) = 1/f'(x)$;

16. Производни на елементарните функции.

Производна на константа

Нека $f(x) = C$ за всяко $x \in \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;

тогава диференчното частно е $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = 0 \rightarrow$ границата му при $x \rightarrow x_0$ е $0 \rightarrow f'(x_0) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;

и така $(C)' = 0$;

Производна на степенна функция с цял показател

Нека $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;

тогава диференчното частно е $(x^n - x_0^n) / (x - x_0) = x^{n-1} + x^{n-1}.x_0 + \dots + x.x_0^{n-1} + x_0^{n-1} \rightarrow n.x_0^{n-1}$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като x^n е непрекъсната;

и така $(x^n)' = n.x^{n-1}$ за всяко $n \in \mathbf{N}$;

нека $n = 0$; тогава $f(x) = 1$ за всяко $x \rightarrow f'(x) = 0$, т.е. формулата

остава в сила;

нека $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$ и $x \neq 0$; тогава $x^n = 1/x^{-n}$, където $-n \in \mathbf{N}$; като използваме формулата за диференциране на частно получаваме:
 $(1/x^n)' = (1' \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})') / (x^{-2n}) = n \cdot x^{-n-1+2n} = n \cdot x^{n-1}$, т.е. формулата остава в сила и за цели показатели и при $x \neq 0$;

Производни на тригонометричните функции

Нека $f(x) = \sin x$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;

тогава диференчното частно е $(\sin x - \sin x_0) / (x - x_0) = \sin((x - x_0)/2) \cdot \cos((x + x_0)/2) / ((x - x_0)/2)$; когато $x \rightarrow x_0$, $\sin((x - x_0)/2) / ((x - x_0)/2) \rightarrow 1$ (основна граница) и $\cos((x + x_0)/2) \rightarrow \cos x_0$, тъй като $\cos x$ е непрекъснатата; така получихме, че $(\sin x)' = \cos x$;

Нека $f(x) = \cos x$; нека $x_0 \in \mathbf{R}$;

тогава диференчното частно е $(\cos x - \cos x_0) / (x - x_0) = -\sin((x - x_0)/2) \cdot \sin((x + x_0)/2) / ((x - x_0)/2)$; когато $x \rightarrow x_0$, $\sin((x - x_0)/2) / ((x - x_0)/2) \rightarrow 1$ (основна граница) и $\sin((x + x_0)/2) \rightarrow \sin x_0$, тъй като $\sin x$ е непрекъснатата; така получихме, че $(\cos x)' = -\sin x$;

От тук лесно получаваме, че $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $(\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x$;

Нека $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$;

ако $\arcsin x = y$, то $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\sin y = x$;

тъй като функцията $\arcsin x$ е обратна на $\sin x \rightarrow$
 $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1 - \sin^2 y} = 1/\sqrt{1 - x^2}$;

Ще покажем че $\arcsin x$ няма производна в точките ± 1 ;

да допуснем противното; имаме равенството $\sin(\arcsin x) = x$;

като диференцираме, получаваме, че $\sin'(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1 \rightarrow \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$, но $\arcsin \pm 1 = \pm \pi/2 \rightarrow \cos(\arcsin \pm 1) = 0$ – противоречие $\rightarrow$ функцията $\arcsin x$ наистина не е диференцируема в ± 1 ;

по аналогичен начин се показва, че

$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$ за $x \in (-1, 1)$;

$(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2)$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;

$(\operatorname{arccotg} x)' = -1/(1 + x^2)$ за всяко $x \in \mathbf{R}$;

Производна на логаритмичната функция

Нека $f(x) = \ln x$, $f(x) : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$; нека $x_0 \in \mathbf{R}^+$;

разглеждаме диференчното частно $(\ln(x_0 + h) - \ln(x_0))/h = 1/x_0 \cdot \ln(1 + h/x_0)^{x_0/h}$; полагаме $z = h/x_0$;

тогава диференчното частно е $1/x_0 \cdot \ln(1+z)^{1/z}$;
 нека $h \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow 0 \Rightarrow (1+z)^{1/z} \rightarrow e$ (основна граница) $\Rightarrow$
 $\ln(1+z)^{1/z} \rightarrow \ln e = 1$, тъй като $\ln x$ е непрекъснатата функция;
 и така получихме формулата $(\ln x)' = 1/x$;
 като използваме, че $\log_a x = \ln x / \ln a$, получаваме че $(\log_a x)' = 1/(\ln a \cdot x)$;

Производна на показателната функция

Нека $f(x) = e^x$, $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$; както знаем $f(x)$ е обратна функция на $g(y) = \ln y$; ако $x_0 \in \mathbf{R}$, тогава $e^{x_0} = y_0$ и $\ln y_0 = x_0$;
 получаваме:
 $f'(x_0) = 1/g'(y_0) = 1/(1/y_0) = y_0 = e^{x_0}$;
 и така получихме, че $(e^x)' = e^x$;
 като използваме, че $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ получаваме:
 $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = a^x \cdot (x \cdot \ln a)' = \ln a \cdot a^x$;

Производна на степенната функция с реален показател

Нека $f(x) = x^\alpha$, където $x > 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}$;
 тогава $f'(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \cdot \ln x})' = x^\alpha \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot 1/x = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
 и така формулата, която получихме за степенната функция с цял показател важи и за реални показатели;

17. Правило на Лопитал за намиране на граници.

Теорема (първа на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > a$ ($x < a$); нека $g'(x) \neq 0$ при $x > a$ ($x < a$); нека $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) и тези две граници са равни;

Доказателство: Нека за определеност $x > a$;

Доопределяме функциите $f(x)$ и $g(x)$ в точката a по този начин:

$f(a) = g(a) = 0 \Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в точката a ;

изпълнено е равенството:

$f(x)/g(x) = (f(x) - f(a))/(g(x) - g(a))$ ($f(a) = g(a) = 0$);

изпълнени са условията на теоремата на Коши $\Rightarrow$

$(f(x) - f(a))/(g(x) - g(a)) = f'(\xi)/g'(\xi)$, където $\xi \in (a, x)$;

нека $x \rightarrow a+0 \Rightarrow \xi \rightarrow a+0 \Rightarrow$ границата на $f'(x)/g'(x)$ е равна на границата $f'(\xi)/g'(\xi)$ при $x \rightarrow a+0$; тъй като $f(x)/g(x) = f'(\xi)/g'(\xi)$, то границите $f(x)/g(x)$ и $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$ са равни;

Теорема (втора на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > a$ ($x < a$);

нека $g'(x) \neq 0$ при $x > a$ ($x < a$) и функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$ растат неограничено при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) и тези две граници са равни;

Доказателство: Нека за определеност $x > a$;

Означаваме с L границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$;

Фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме $\delta > 0$, такова че ако $0 < x - a < \delta$,

$$|f'(x)/g'(x) - L| < \varepsilon/2;$$

можем да считаме, че сме избрали δ достатъчно малко, че

$g(x) \neq 0$ при $0 < x - a < \delta$; това е възможно, тъй като $|g(x)|$ расте неограничено при $x \rightarrow a+0$;

нека $x < x_0$ са две произволни числа, такива че

$$0 < x - a < \delta \text{ и } 0 < x_0 - a < \delta;$$

за затворения интервал $[x, x_0]$ са налице условията на теоремата на Коши $\rightarrow (f(x) - f(x_0))/(g(x) - g(x_0)) = f'(\xi)/g'(\xi)$, където $\xi \in (x, x_0) \rightarrow$

$$\xi - a < \delta \rightarrow |f'(\xi)/g'(\xi) - L| < \varepsilon/2 \rightarrow$$

$$|(f(x) - f(x_0))/(g(x) - g(x_0)) - L| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0) - L(g(x) - g(x_0))| < |g(x) - g(x_0)| \cdot \varepsilon/2;$$

делим това неравенство на $|g(x)| \neq 0$ и получаваме:

$$|f(x)/g(x) - f(x_0)/g(x) - L + L \cdot g(x_0)/g(x)| < |1 - g(x_0)/g(x)| \cdot \varepsilon/2 \rightarrow$$

$$|f(x)/g(x) - L| - |f(x_0)/g(x)| - |L \cdot g(x_0)/g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \cdot |g(x_0)/g(x)|$$

$$\rightarrow |f(x)/g(x) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \cdot |g(x_0)/g(x)| + |f(x_0)/g(x)| +$$

$$+ |L \cdot g(x_0)/g(x)|;$$

фиксираме x_0 ; тъй като $|g(x)|$ е неограничена при $x \rightarrow a+0$, ние

можем да изберем $\delta_1 < 0$, $\delta_1 < \delta$, такова че ако $x - a < \delta_1$ да имаме:

$$\varepsilon/2 \cdot |g(x_0)/g(x)| + |f(x_0)/g(x)| + |L \cdot g(x_0)/g(x)| < \varepsilon/2;$$

$\rightarrow$ за $x - a < \delta_1$ получаваме $|f(x)/g(x) - L| < \varepsilon \rightarrow$ границата на $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a+0$ е числото $L =$ границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow a+0$;

Теорема (трета на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > p$ ($x < p$); нека $g'(x) \neq 0$ при $x > p$ ($x < p$); нека освен това $f(x)$ и $g(x)$ клонят към 0 при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) и тези две граници са равни;

Доказателство: Нека за определеност $x > p$;

полагаме $t = 1/x$; когато $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0+0$; тогава границата на

$f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ е равна на границата на $f(1/t)/g(1/t)$

при $t \rightarrow 0+0$; от друга страна границата $(f(1/t))'/(g(1/t))' =$

$$((-1/t^2) \cdot f'(1/t))/((-1/t^2) \cdot g'(1/t)) = f'(1/t)/g'(1/t) = f'(x)/g'(x), \text{ т.е.}$$

границата $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \rightarrow 0+0$ съществува; като използваме

първа теорема на Лопитал ($a = 0$) получаваме, че съществува

границата $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \rightarrow 0+0$ и тя е равна на границата на

$(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \rightarrow 0+0$, т.е. съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и тя е равна на границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$;

Теорема (четвърта на Лопитал): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми за $x > p$ ($x < p$); нека $g'(x) \neq 0$ при $x > p$ ($x < p$) и функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$ растат неограничено при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$); тогава ако съществува границата $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) и тези две граници са равни;

Доказателство:

Нека за определеност $x > p$;

полагаме $t = 1/x$; когато $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow 0+0$; тогава границата на $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ е равна на границата на $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \rightarrow 0+0$; от друга страна границата $(f(1/t))'/(g(1/t))' = ((-1/t^2).f'(1/t))/((-1/t^2).g'(1/t)) = f'(1/t)/g'(1/t) = f'(x)/g'(x)$, т.е. границата $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \rightarrow 0+0$ съществува; като използваме втора теорема на Лопитал ($a = 0$) получаваме, че съществува границата $f(1/t)/g(1/t)$ при $t \rightarrow 0+0$ и тя е равна на границата на $(f(1/t))'/(g(1/t))'$ при $t \rightarrow 0+0$, т.е. съществува границата $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и тя е равна на границата на $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$;

18. Изпъкнали функции. Необходими и достатъчни условия за изпъкналост.

Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **изпъкнала** в интервал Δ , ако за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$ и всеки две числа $p_1, p_2 > 0$,

такива че $p_1 + p_2 = 1$ е изпълнено $f(p_1.x_1 + p_2.x_2) \leq p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2)$;

Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **вдлъбната** в интервал Δ , ако за всеки $x_1, x_2 \in \Delta$ и всеки две числа $p_1, p_2 > 0$,

такива че $p_1 + p_2 = 1$ е изпълнено $f(p_1.x_1 + p_2.x_2) \geq p_1.f(x_1) + p_2.f(x_2)$;

Геометричният смисъл на понятията изпъкналост и вдлъбнатост – функцията $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ , ако за всяка точка от този интервал можем да намерим околност в която графиката на функцията е над (под) допирателната в точката;

Дефиниция: Казваме, че $x = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \dots + p_n.x_n$ е **изпъкнала комбинация** на $x_1, x_2, \dots, x_n$, ако числата $p_1, p_2, \dots, p_n$ са положителни и сумата им е 1;

Твърдение: Ако $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, то всяка изпъкнала комбинация $x = p_1.x_1 + p_2.x_2 + \dots + p_n.x_n \in [a, b]$;

Доказателство: Имаме $a \leq x_i \leq b \Rightarrow (p_i > 0) p_i.a \leq p_i.x_i \leq p_i.b$;

Събираме тези неравенства за $i = 1, 2, \dots, n$ и получаваме:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot a \leq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n \leq (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot b$$

$$\Rightarrow a \leq x \leq b;$$

Твърдението остава в сила когато интервала е отворен или полуотворен;

Твърдение: Всяка точка $x \in [a, b]$ може да се представи като изпъкнала комбинация на a и b ;

Доказателство:

Нека $x \in [a, b]$; тогава в сила е равенството:

$$a \cdot (b - x)/(b - a) + b \cdot (x - a)/(b - a) = x;$$

действително, ако умножим и двете страни с $(b - a) \neq 0$ получаваме:

$$a \cdot b - a \cdot x + b \cdot x - b \cdot a = x \cdot (b - a), \text{ което очевидно е изпълнено;}$$

$$\text{освен това } (b - x)/(b - a) + (x - a)/(b - a) = 1 \Rightarrow$$

$$a \cdot (b - x)/(b - a) + b \cdot (x - a)/(b - a) \text{ е изпъкнала комбинация на } a \text{ и } b;$$

Твърдение (неравенство на Йенсен): Нека $f(x)$ е изпъкнала в интервал Δ ; ако $p_1, p_2, \dots, p_n, n \in \mathbf{N}$ са произволни положителни числа, такива че $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, тогава е изпълнено:

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n) \leq p_1 \cdot f(x_1) + p_2 \cdot f(x_2) + \dots + p_n \cdot f(x_n);$$

Доказателство:

Ще извършим доказателството с индукция по n ;

База: при $n = 2$ неравенството очевидно е изпълнено по определението за изпъкнала функция;

Стъпка: нека неравенството е изпълнено за $n-1$;

ще докажем, че то е изпълнено за n ;

нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ са произволни положителни числа,

такива че $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$; нека $S = p_2 + \dots + p_n$;

$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n) = f(p_1 \cdot x_1 + S \cdot (p_2 \cdot x_2/S + p_3 \cdot x_3/S + \dots + p_n \cdot x_n/S))$; нека $p_2 \cdot x_2/S + p_3 \cdot x_3/S + \dots + p_n \cdot x_n/S = x_1'$; ясно е, че x_1' е изпъкнала комбинация на $x_2, x_3, \dots, x_n \Rightarrow x_1' \in \Delta$;

тогава $f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n) = f(p_1 \cdot x_1 + S \cdot x_1') \leq p_1 \cdot f(x_1) + S \cdot f(x_1')$ по дефиницията за изпъкналост; от индукционното предположение получаваме, че:

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n) \leq p_1 \cdot f(x_1) + S \cdot p_2/S \cdot f(x_2) + S \cdot p_3/S \cdot f(x_3) + \dots + S \cdot p_n/S \cdot f(x_n) = p_1 \cdot f(x_1) + p_2 \cdot f(x_2) + \dots + p_n \cdot f(x_n);$$

по метода на математическата индукция е вярно за всяко $n \in \mathbf{N}$;

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал Δ ; тогава $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) $\Leftrightarrow f'(x)$ е монотонно растяща (намаляваща) функция;

Доказателство: Ще докажем теоремата за изпъкналост; за вдлъбнатост е абсолютно аналогично;

Нека $f'(x)$ е монотонно растяща функция;

Нека $x_1 < x_2 \in \Delta$ и $p_1, p_2 \in \mathbf{R}^+, p_1 + p_2 = 1$;

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) - p_1 \cdot f(x_1) - p_2 \cdot f(x_2) = p_1 \cdot (f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) - f(x_1)) -$$

$$p_2 \cdot (f(x_2) - f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2));$$

по теоремата на Лагранж получаваме:

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) - f(x_1) = f'(t_1) \cdot (p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - x_1) = p_2 \cdot f'(t_1) \cdot (x_2 - x_1),$$

където $t_1 \in (x_1, p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2)$;

$$f(x_2) - f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) = f'(t_2) \cdot (x_2 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2) = p_2 \cdot f'(t_2) \cdot (x_1 - x_2),$$

където $t_2 \in (p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2, x_2)$; да отбележим, че $t_1 < t_2$;

получаваме:

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) - p_1 \cdot f(x_1) - p_2 \cdot f(x_2) = p_2 \cdot (x_2 - x_1) \cdot (f'(t_1) - f'(t_2)) \leq 0, \text{ тъй}$$

като $f'(x)$ е монотонно растяща и $t_1 < t_2 \Rightarrow$

$$f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) \leq p_1 \cdot f(x_1) + p_2 \cdot f(x_2) \Rightarrow f(x) \text{ е изпъкнала функция;}$$

Нека $f(x)$ е изпъкнала функция;

Нека $0 < h < x_2 - x_1$;

тогава $x_1 + h \in [x_1, x_2] \Rightarrow$ от горното твърдение

$$x_1 + h = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2, \text{ където } p_1 > 0, p_2 > 0 \text{ и } p_1 + p_2 = 1;$$

$$\text{в такъв случай } (f(x_1 + h) - f(x_1))/h = f(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) - f(x_1)/(x_1 - p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2) \leq (p_1 \cdot f(x_1) + p_2 \cdot f(x_2) - f(x_1))/(p_2 \cdot (x_2 - x_1)) = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1);$$

от друга страна:

$x_2 - h \in [x_1, x_2] \Rightarrow$ от горното твърдение

$$x_2 - h = q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2, \text{ където } q_1 > 0, q_2 > 0 \text{ и } q_1 + q_2 = 1;$$

$$\text{в такъв случай } (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h) = (f(x_2) - f(x_2 - h))/h = (f(x_2) - f(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2))/(x_2 - q_1 \cdot x_1 - q_2 \cdot x_2) \geq (f(x_2) - q_1 \cdot f(x_1) - q_2 \cdot f(x_2))/(q_1 \cdot (x_2 - x_1)) = q_1 \cdot (f(x_2) - f(x_1))/(q_1 \cdot (x_2 - x_1)) = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1);$$

и така получихме, че за всяко h , такова че $0 < h < x_2 - x_1$ е изпълнено:

$$(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \leq (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) \leq (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h);$$

ако сега $h \rightarrow 0+0$ при граничния преход получаваме:

$$f'(x_1) \leq f'(x_2) \Rightarrow f'(x) \text{ е монотонно растяща функция;}$$

Следствие: Ако $f(x)$ е дефинирана и поне два пъти диференцируема в интервал Δ , тогава $f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната) в $\Delta \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ (≤ 0) за всяко $x \in \Delta$;

Доказателство: Тъй като $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) $\Rightarrow$ от следствие 2 на теоремата на Лагранж, че $f'(x)$ е монотонно растяща (намаляваща) функция $\Rightarrow f(x)$ е изпъкнала (вдлъбната);

Приложение на изпъкналост

Ще докажем, че e^x е изпъкнала в $\mathbf{R}$; действително

$$f''(e^x) = e^x > 0 \text{ за всяко } x \in \mathbf{R};$$

по друг начин това може да се запише така:

$$e^{p \cdot x + q \cdot y} \leq p \cdot e^x + q \cdot e^y, \text{ където } p, q > 0, p + q = 1; x, y \in \mathbf{R};$$

Твърдение (неравенство на Юнг): Ако $a, b > 0$; $\alpha, \beta > 1$ и

$$1/\alpha + 1/\beta = 1 \Rightarrow a \cdot b \leq a^\alpha/\alpha + b^\beta/\beta;$$

Доказателство:

полагаме $p = 1/\alpha$, $q = 1/\beta$, $x = \ln a^\alpha = \alpha \cdot \ln a$, $y = \ln b^\beta = \beta \cdot \ln b$;

тогава от изпъкналостта на e^x получаваме:

$$e^{p \cdot x + q \cdot y} \leq p \cdot e^x + q \cdot e^y \Leftrightarrow e^{\alpha \cdot \ln a \cdot 1/\alpha + \beta \cdot \ln b \cdot 1/\beta} \leq a^\alpha/\alpha + b^\beta/\beta \Leftrightarrow a \cdot b \leq a^\alpha/\alpha + b^\beta/\beta;$$

Твърдение (неравенство за средно аритметично и средно

геометрично): Нека $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$; в сила е неравенството:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n};$$

Доказателство:

Използваме неравенство на Йенсен и изпъкналост на e^x ;

полагаме $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$; $x_1 = \ln a_1$, $x_2 = \ln a_2$, ..., $x_n = \ln a_n$;

тогава:

$$e^{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n} \leq p_1 \cdot e^{x_1} + p_2 \cdot e^{x_2} + \dots + p_n \cdot e^{x_n} \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln a_1/n + \ln a_2/n + \dots + \ln a_n/n} \leq e^{\ln a_1/n} + e^{\ln a_2/n} + \dots + e^{\ln a_n/n} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n;$$

Твърдение (неравенство на Хьолдер за суми): Нека

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}$; освен това $p, q > 0$ и

$1/p + 1/q = 1$; в сила е неравенството:

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n \leq \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p} \cdot \sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q};$$

Доказателство:

Полагаме $A = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}$, $B = \sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q}$;

Полагаме $a_i = x_i/A$, $b_i = y_i/B$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$;

ясно е, че $a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p = 1$ и $b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q = 1$;

прилагаме неравенство на Юнг за $a_i, b_i > 0$ и p, q ; получаваме:

$a_i \cdot b_i \geq a_i^p/p + b_i^q/q$; събираме тези неравенства за $i = 1, 2, \dots, n$;

получаваме:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)/p + (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)/q$$

$$= 1/p + 1/q = 1 \rightarrow$$

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n \leq A \cdot B = \sqrt[p]{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p} \cdot \sqrt[q]{y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q};$$

19. Формула на Тейлор.

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана и $(n+1)$ пъти диференцируема в

интервал $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$), $n \in \mathbf{N}$; тогава за всяко $p \neq 0$ имаме:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)/1! + f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2/2! + \dots +$$

$$+ f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n/n! + R_n, \text{ където } R_n = (x - x_0)^p \cdot (x - t_0)^{n-p+1} \cdot f^{(n+1)}(t_0)/(p \cdot n!),$$

където $t_0 \in (x_0, x)$ ((x, x_0));

Доказателство: Нека за определеност $x_0 < x$;

Разглеждаме функцията:

$$\varphi(t) = f(x) - (f(t) + f'(t) \cdot (x - t)/1! + f''(t) \cdot (x - t)^2/2! + \dots + f^{(n)}(t) \cdot (x - t)^n/n!) -$$

$$- \lambda \cdot (x - t)^p;$$

ясно е, че $\varphi(x) = 0$;

избираме λ така, че $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $R_n - \lambda \cdot (x - x_0)^p = 0 \Leftrightarrow \lambda = R_n/(x - x_0)^p$;

непосредствено се вижда, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната и диференцируема в интервала $[x_0, x]$;

сега за функцията $\varphi(x)$ можем да приложим теоремата на Рол в интервала $[x_0, x] \rightarrow$ съществува $t_0 \in (x_0, x)$, такова че $\varphi'(t_0) = 0$;

$$\varphi'(t_0) = - (f'(t_0) - f'(t_0) + f''(t_0) \cdot (x - t_0)/1! - f''(t_0) \cdot (x - t_0)/1! + f'''(t_0) \cdot (x - t_0)/2! - \dots + f^{(n+1)}(t_0) \cdot (x - t_0)^n/n!) + p \cdot (x - t_0)^{p-1} \cdot R_n / (x - x_0)^p = 0 \rightarrow$$

$$f^{(n+1)}(t_0) \cdot (x - t_0)^n/n! = p \cdot (x - t_0)^{p-1} \cdot R_n / (x - x_0)^p \rightarrow$$

$$R_n = (x - t_0)^{n-p+1} \cdot (x - x_0)^p \cdot f^{(n+1)}(t_0) / (p \cdot n!);$$

R_n се нарича **остатъчен член** във формулата на Тейлор;

при $p = n + 1$ получаваме **форма на Лагранж** за остатъчния член и тя е: $R_n = (x - x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t_0) / (n+1)!$;

при $p = 1$ получаваме **форма на Коши** за остатъчния член и тя е:

$$R_n = (x - x_0) \cdot (x - t_0)^n \cdot f^{(n+1)}(t_0) / n!;$$

показаната формула дава най-добрият полином, който приближава дадена функция $f(x)$ в точката x_0 ;

при $x_0 = 0$, формулата на Тейлор се нарича **формула на Маклорен**:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x/1! + f''(0) \cdot x^2/2! + \dots + f^{(n)}(0) \cdot x^n/n! + R_n, \text{ където}$$

$$R_n = f^{(n+1)}(t_0) \cdot x^{n+1} / (n+1)! \text{ във формата на Лагранж или}$$

$$R_n = f^{(n+1)}(t_0) \cdot x \cdot (x - t_0)^n / n! \text{ във формата на Коши};$$

Приложение на формулата на Тейлор

Нека $f(x) = e^x$; известно е, че $f^{(n)}(x) = e^x$ за всяко $n \in \mathbf{N} \rightarrow$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1;$$

по формулата на Маклорен получаваме:

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n! + R_n, \text{ където}$$

$$R_n = x^{n+1} \cdot e^{t_0} / (n+1)! \text{ във формата на Лагранж, } 0 < t_0 < x;$$

Ще покажем, че $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

действително имаме неравенствата $0 < R_n \leq x^{n+1} \cdot e^x / (n+1)!$;

нека $n_0 = [x]$;

$$\rightarrow 0 < R_n \leq (x/1) \cdot (x/2) \cdot \dots \cdot (x/n_0) \cdot (x/(n_0+1)) \cdot (x/(n_0+2)) \dots (x/(n+1)) <$$

$< c_0 \cdot x / (n+1)$, където c_0 е фиксирано число; по теоремата за полиците, получаваме, че $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; в такъв случай

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$$

от дясната страна на равенството стои степенен ред на x ;

един ред е сходящ, ако редицата от частичните му суми е сходяща;

тогава сума на реда се дефинира като граница на тази редица;

равенството по-горе означава, че редът е сходящ и неговата сума за

всяко $x \in \mathbf{R}$ е e^x ;

прилагайки формулата на Маклорен за $\sin x$ и $\cos x$ получаваме:

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots + (-1)^n \cdot x^{2 \cdot n + 1} / (2 \cdot n + 1)! + \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots + (-1)^n \cdot x^{2 \cdot n} / (2 \cdot n)! + \dots$$

ще изведем следната формула на Ойлер:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x;$$

и наистина:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix/1! + (ix)^2/2! + (ix)^3/3! + (ix)^4/4! + (ix)^5/5! + \dots = \\ &= 1 + ix/1! - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! - ix^5/5! + \dots = (1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots) \\ &+ i(x - x^3/3! + x^5/5! - \dots) = \cos x + i \sin x; \end{aligned}$$

Дефиниция: Ще записваме, че $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, ако $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в околност на x_0 и $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$;

Твърдение: Ако $f(x)$ е дефинирана и диференцируема поне $(n+1)$ пъти в интервала $[x_0, x]$ и ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъснатата в точката x_0 , то $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)/1! + f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2/2! + \dots + f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n/n! + R_n$, където $R_n = f^{(n+1)}(x) \cdot (x - x_0)^{n+1}/(n+1)! + o((x - x_0)^{n+1})$; R_n се нарича **остатъчен член във вида на Пеано**;

Доказателство:

Записваме остатъчния член във формата на Лагранж:

$$R_n = (x - x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t_0)/(n+1)! = (x - x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x_0)/(n+1)! - ((f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)) \cdot (x - x_0)^{n+1}/(n+1)!);$$

но $f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, тъй като $x_0 < t_0 < x$ и функцията $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъснатата в точката $t_0 \rightarrow$

$$(f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)) \cdot (x - x_0)^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0 \rightarrow$$

$$(f^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(t_0)) \cdot (x - x_0)^{n+1}/(n+1)! = o((x - x_0)^{n+1});$$

20. Локални максимуми и минимуми – необходими и достатъчни условия.

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 ; казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0 , ако съществува околност U на x_0 , такава че $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Дефиниция: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 ; казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0 , ако съществува околност U на x_0 , такава че $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in U$;

Локалните минимуми и максимуми се наричат **локални екстремуми**;

Теорема (на Ферма): Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 ; тогава ако $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0 , $f'(x_0) = 0$;

Доказателство:

Нека за определеност $f(x_0)$ е локален максимум за $f(x)$;

разглеждаме диференчното частно $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$;

нека $h \rightarrow 0$ с положителни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h > 0$

→ диференчното частно е ≤ 0 → след граничен преход $f'(x_0) \leq 0$; (1)
 нека $h \rightarrow 0$ с отрицателни стойности; тогава $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$, $h < 0$
 → диференчното частно е ≥ 0 → след граничен преход $f'(x_0) \geq 0$; (2)
 от (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0) = 0$;

Теоремата на Ферма е необходимо, но не и достатъчно условие за локален екстремум;

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на x_0 и притежава производни до ред n включително; нека са изпълнени условията:

1. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$;
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$;
3. $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката x_0 ;

Тогава ако n е четно, f има локален екстремум в точката x_0 ; той е минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$ и максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$;

Ако n е нечетно, f няма локален екстремум в точката x_0 ;

Доказателство:

По формулата на Тейлър за функцията $f(x)$ в точката x_0 получаваме:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)/1! + f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2/2! + \dots + f^{(n-1)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}(t_0) \cdot (x - x_0)^n/n!, \text{ където } x < t_0 < x_0 \text{ или } x_0 < t_0 < x;$$

остатъчният член е във формата на Лагранж;

$$\text{тъй като } f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \rightarrow$$

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(t_0) \cdot (x - x_0)^n/n!;$$

тъй като $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката t_0 , тогава по едно

твърдение за непрекъснати функции, съществува околност U на точката x_0 , където $f^{(n)}(x)$ не си мени знака, т.е. има знака на $f^{(n)}(x_0)$;

нека $x \in U$; тогава $t_0 \in U$;

нека n е нечетно; тогава $(x - x_0)^n$ си мени знака за $x < x_0$ и $x > x_0$;

тъй като $f^{(n)}(t_0)$ е с постоянен знак, то $f(x) - f(x_0)$ също си мени знака

→ в x_0 няма локален екстремум;

нека n е четно; $(x - x_0)^n > 0 \rightarrow f(x) - f(x_0)$ има знака на $f^{(n)}(x_0)$ в

цялата околност $U \rightarrow$ в x_0 има локален екстремум; той е максимум

когато $f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x_0) < 0$ или минимум, ако

$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x_0) > 0$;

21. Неопределени интеграли. Елементарни свойства. Интегриране по части.

Дефиниция: Казваме, че функцията $F(x)$ е **неопределен интеграл** на $f(x)$ в интервал Δ , ако $F(x)$ е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$;

означение: $F(x) = \int f(x) dx$

$f(x)$ наричаме **подинтегрална функция**, dx наричаме **диференциал** на функцията $f(x)$;

$F(x)$ се нарича още **примитивна функция** на $f(x)$ в Δ ;

Твърдение: Ако $F(x)$ е неопределен интеграл на $f(x)$ в интервал Δ , то за всяко $C \in \mathbf{R}$, $F(x) + C$ е неопределен интеграл на $f(x)$ в Δ ; също така с това се изчерпват всички неопределени интеграли на $f(x)$, т.е. ако $F(x)$ и $G(x)$ са неопределени интеграли на $f(x)$ в Δ , то $F(x) - G(x)$ е константа;

Доказателство:

очевидно имаме $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$, т.е. $F(x) + C$ е неопределен интеграл на $f(x)$;

нека $H(x) = F(x) - G(x)$; тогава $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$; по първо следствие от теоремата на Лагранж $\rightarrow H(x)$ е константа;

действието намиране на примитивна функция наричаме **интегриране**;

Интеграли на елементарните функции

$$(e^x)' = e^x \rightarrow \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(\ln |x|)' = 1/x \rightarrow \int 1/x dx = \ln |x| + C;$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \rightarrow \int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C, \alpha \neq -1;$$

$$(\sin x)' = \cos x \rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(\cos x)' = -\sin x \rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(\arctg x)' = 1/(1+x^2) \rightarrow \int 1/(1+x^2) dx = \arctg x + C;$$

$$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2} \rightarrow \int 1/\sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + C;$$

Свойства на неопределените интеграли

Твърдение: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ притежават неопределен интеграл в някакъв интервал Δ ; тогава функцията $f(x) + g(x)$ също притежава неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + C;$$

Доказателство: действително $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ е един неопределен интеграл на $f(x) + g(x)$, тъй като $(\int f(x) dx + \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' + (\int g(x) dx)' = f(x) + g(x)$;

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл в някакъв интервал Δ ; тогава функцията $a \cdot f(x)$, където a е реална константа, също притежава неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx + C;$$

Доказателство: действително $a \cdot \int f(x) dx$ е един неопределен интеграл на $a \cdot f(x)$, тъй като $(a \cdot \int f(x) dx)' = a \cdot (\int f(x) dx)' = a \cdot f(x)$;

$$\text{Пример: } \int 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 5 dx = 2 \cdot \int x^2 dx + 3 \cdot \int x dx + \int 5 dx =$$

$$= 2.x^3/3 + 3.x^2/2 + 5.x + C;$$

Дефиниция: Диференциал на $f(x)$ наричаме израза $f'(x).dx = d f(x)$; прилагането на това равенство наричаме **внасяне под диференциала**; прилагане на равенството $d f(x) = f'(x).dx$ наричаме **изнасяне от диференциала**;

Твърдение: Нека $f(u)$ има неопределен интеграл в интервал Δ ; нека функцията $\varphi(x)$ е диференцируема в интервала Δ' и стойностите и не напускат Δ , когато x се мени в Δ' ; тогава функцията $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ притежава неопределен интеграл в Δ' и ако $\int f(u) du = F(u)$, то $\int f(\varphi(x)).\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C$;

Доказателство: правилото за диференциране на съставна функция дава: $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) = f(\varphi(x)).\varphi'(x)$ – това равенство показва, че $F(\varphi(x))$ е един неопределен интеграл на $f(\varphi(x)).\varphi'(x)$;

като използваме горната дефиниция ние можем да запишем твърдението по следния начин:

$$\int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C;$$

Примери: $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C$;
 $\int \sin x^2 \cdot x dx = 1/2 \int \sin x^2 dx^2 = \sin x^2 / 2 + C$;

Интегриране по части

Твърдение: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в интервал Δ ; нека функцията $f(x).g'(x)$ има неопределен интеграл в този интервал; тогава функцията $f'(x).g(x)$ също има неопределен интеграл в Δ и е изпълнено:

$$\int f(x).g'(x) dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x) dx + C;$$

Доказателство: действително $f(x).g(x) - \int f'(x).g(x) dx$ е един неопределен интеграл на $f(x).g'(x)$, тъй като $(f(x).g(x) - \int f'(x).g(x) dx)' = (f(x).g(x))' - (\int f'(x).g(x) dx)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) - f'(x).g(x) = f(x).g'(x)$;

Като използваме вънасяне под диференциала можем да запишем последното равенство по този начин:

$$\int f(x) dg(x) = f(x).g(x) - \int g(x) df(x) + C;$$

Примери: $\int \ln x dx = x.\ln x - \int x d\ln x = x.\ln x - \int x.1/x dx = x.\ln x - x + C$;
 $\int e^x \cdot \cos x dx = \int e^x d\sin x = e^x \cdot \sin x - \int \sin x de^x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx =$
 $= e^x \cdot \sin x + \int e^x d\cos x = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int \cos x de^x = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x -$
 $- \int e^x \cdot \cos x dx \rightarrow \int e^x \cdot \cos x dx = (e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x) / 2 + C$;

22. Интегриране на рационални функции.

Дефиниция: Казваме, че функцията $f(x)$ е **рационална** функция, ако тя се престава като частно на два полинома, т.е. $f(x) = P(x)/Q(x)$, където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми на x ;

Нека $f(x)$ е рационална функция, т.е. $f(x) = P(x)/Q(x)$;

Дефиниция: Казваме, че $P(x)/Q(x)$ е **правилна дроб**, ако степента на $P(x)$ е строго по-малка от степента на $Q(x)$; в противен случай казваме, че $P(x)/Q(x)$ е **неправилна дроб**;

От алгебрата е известно, че ако степента на $P(x)$ е по-голяма от степента на $Q(x)$ можем да извършим деление и в резултат получаваме: $P(x)/Q(x) = S(x) + R(x)/Q(x)$, където $\deg R(x) < \deg Q(x)$;

интегрирането на полином не представлява проблем, така че можем да считаме, че $\deg P(x) < \deg Q(x)$;

Твърдение: Ако един полином $Q(x)$ има реални коефициенти и $a + b.i$ е комплексен корен на $Q(x)$, то $a - b.i$ също е корен на $Q(x)$;

Доказателство: Използваме, че комплексно спрегнато на произведение и сума е произведение и сума на комплексно спрегнати;

Твърдение: Всеки полином $Q(x)$ с реални коефициенти може да се разложи по следния начин:

$Q(x) = c_0.(x - a_1)^{k_1}.(x - a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1.x + q_1)^{m_1}.(x^2 + p_2.x + q_2)^{m_2} \dots$, където c_0 е старшият коефициент на $Q(x)$, числата $a_i, p_j, q_j \in \mathbf{R}$;

Доказателство: Използваме основна теорема на алгебрата и предното твърдение (групираме комплексните корени по двойки); по този начин получаваме линейни множители и квадратни множители с два комплексни корена ($p_i^2 - 4.q_i < 0$ за всяко i);

Дефиниция: Изразите $A / (x - a)^k$ и $(B.x + C)/(x^2 + p.x + q)^m$, където $A, B, C, a, p, q \in \mathbf{R}$, $p^2 - 4.q < 0$; $k, m \in \mathbf{N}$ наричаме **елементарни дроби** съответно от **първи** и от **втори род**;

Твърдение: Всяка рационална функция $f(x) = P(x)/Q(x)$, където $\deg P(x) < \deg Q(x)$ може да се представи като сума от краен брой елементарни дроби; при това, ако полиномът $Q(x)$ се разлага като $c_0.(x - a_1)^{k_1}.(x - a_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1.x + q_1)^{m_1}.(x^2 + p_2.x + q_2)^{m_2} \dots$, тогава $f(x) = P(x)/Q(x)$ се представя по следния начин:

$$P(x)/Q(x) = 1/c_0 \cdot (A_1/(x-a_1) + A_2/(x-a_1)^2 + \dots + A_{k_1}/(x-a_1)^{k_1} + \\ + B_1/(x-a_2) + B_2/(x-a_2)^2 + \dots + B_{k_2}/(x-a_2)^{k_2} + \dots + \\ (M_1 \cdot x + N_1)/(x^2 + p_1 \cdot x + q_1) + (M_2 \cdot x + N_2)/(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^2 + \dots + \\ + (M_{m_1} \cdot x + N_{m_1})/(x^2 + p_1 \cdot x + q_1)^{m_1} + (E_1 \cdot x + F_1)/(x^2 + p_2 \cdot x + q_2) + \\ (E_2 \cdot x + F_2)/(x^2 + p_2 \cdot x + q_2)^2 + \dots + (E_{m_2} \cdot x + F_{m_2})/(x^2 + p_2 \cdot x + q_2)^{m_2} + \dots)$$

Твърдението привеждаме без доказателство;

Пример: Нека $f(x) = 1/(x^2 - 3x + 2)$; тогава $f(x) = 1/(x-1)(x-2)$; твърдението е, че съществуват $A, B \in \mathbf{R}$, такива че $f(x) = A/(x-1) + B/(x-2)$; след като се освободим от знаменателя получаваме: $1 = A(x-2) + B(x-1)$, откъдето получаваме $A = -1, B = 1$, т.е. $f(x) = -1/(x-1) + 1/(x-2)$;

Пресмятане на коефициентите в разлагането

След привеждане под общ знаменател получаваме равенство на два полинома;

Първи начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат, можем да приравним коефициентите пред степените на x ; тогава ще получим линейна система за коефициентите на разлагането, която ще има единствено решение;

Втори начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат за всяко $x \in \mathbf{R}$, можем да даваме произволни стойности на x (дори комплексни) и по този начин отново да получаваме условия за коефициентите на разлагането;

Трети начин за определяне на коефициентите: тъй като двата полинома съвпадат, то съвпадат и техните производни; можем да диференцираме двете страни на равенството и след това да използваме един от горните два начина;

Ако на дадена стъпка сме определили някои коефициенти, тогава можем да ги заместим и да опростим началното равенство, като останалите коефициенти ги търсим в новополученото равенство;

Интегриране на елементарни дробни

Елементарните дробни от първи род се интегрират непосредствено:
 $\int A/(x-a)^k dx = A \cdot \int d(x-a)/(x-a)^k = A \cdot (x-a)^{-k+1}/(-k+1) + C$ при $k > 1$ или $A \cdot \ln|x-a| + C$ при $k = 1$;

Нека имаме интеграл от елементарна дроб от втори род:
 $\int (M \cdot x + N)/(x^2 + p \cdot x + q)^n dx$; полагаме $x = u - p/2$; тогава

$x^2 + p.x + q = u^2 + q - p^2/4$; при това $q - p^2/4 > 0$, тъй като $x^2 + p.x + q$ няма реални корени; полагаме $q - p^2/4 = a^2$;

получаваме:

$$\int (M.x+N)/(x^2 + p.x + q)^n dx = \int (M.u + N - p.M/2)/(u^2 + a^2)^n du = \\ = M.\int u du / (u^2 + a^2)^n + (N - p.M/2). \int du / (u^2 + a^2)^n;$$

първият интеграл се решава непосредствено:

$$\int u du / (u^2 + a^2)^n = 1/2 \cdot \int d(u^2 + a^2) / (u^2 + a^2)^n = (u^2 + a^2)^{-n+1} / (2 \cdot (-n+1)) \text{ при } \\ n > 1 \text{ или } \ln (u^2 + a^2) / 2 \text{ при } n = 1;$$

остава вторият интеграл:

$$I_n = \int du / (u^2 + a^2)^n = 1/a^2 \cdot \int (u^2 + a^2) / (u^2 + a^2)^n du - \\ 1/a^2 \cdot \int u^2 / (u^2 + a^2)^n du = 1/a^2 \cdot I_{n-1} - 1/2a^2 \cdot \int u d(u^2 + a^2) / (u^2 + a^2)^n = \\ 1/a^2 \cdot I_{n-1} + 1/(2a^2 \cdot (n-1)) \cdot \int u d(u^2 + a^2)^{-n+1} = 1/a^2 \cdot I_{n-1} + u \cdot (u^2 + a^2)^{-n+1} / \\ / (2a^2 \cdot (n-1)) - 1/ (2a^2 \cdot (n-1)) \cdot \int (u^2 + a^2)^{-n+1} du = (2n - 3) / (2a^2 \cdot (n-1)) \cdot I_{n-1} + \\ + u / (2a^2 \cdot (n-1) \cdot (u^2 + a^2)^{n-1});$$

освен това имаме: $I_1 = \int du / (u^2 + a^2) = 1/a \cdot \arctg(u/a) + C$, така че след краен брой прилагания на рекурентната зависимост ще достигнем до I_1 , т.е. ще пресметнем интеграла;

Алгоритъм за пресмятане на интеграл от рационална функция

Нека $f(x) = P(x)/Q(x)$ е рационална функция;

искаме да пресметнем $\int f(x) dx$;

1. Ако $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ делим $P(x)$ на $Q(x)$ и получаваме $f(x) = S(x) + R(x)/Q(x)$; $S(x)$ се интегрира непосредствено;
2. Разлагаме $Q(x)$ на линейни множители и квадратни множители с отрицателна дискриминанта;
3. Пресмятаме коефициентите в разлагането на $f(x)$ като сбор от елементарни дроби;
4. Интегрираме поотделно всяка елементарна дроб;

23. Смяна на променливите при неопределени интегрални. Интегрални от вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ и $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Твърдение: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал Δ ; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцируема в някой интервал Δ' и приемат стойности в интервал Δ'' , където $\Delta'' \subseteq \Delta$; нека освен това функцията $\varphi(t)$ притежава диференцируема обратна функция $\psi(x)$ и функцията $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ притежава неопределен интеграл в интервала Δ' ; тогава ако $g(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$, функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл поне в интервала Δ'' и е изпълнено:
 $\int f(x) dx = g(\psi(x)) + C$;

Доказателство: функцията $g(\psi(x))$ е добре дефинирана в интервала Δ'' , тъй като $\psi(x)$ приема стойности в Δ' ; наистина $g(\psi(x))$ е един неопределен интеграл на $f(x)$, тъй като $(g(\psi(x)))' = g'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$; като използваме теоремата за диференциране на обратни функции получаваме, че $g'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = 1$, т.е. $f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = 1$;

Примери:

$\int x^2 \cdot \sqrt{x+1} dx$ при $x \geq -1$; правим смяна $x = t^2 - 1$, $t > 0$; очевидно условията за смяна на променливата са изпълнени: $\varphi(t) = t^2 - 1$, $\psi(x) = \sqrt{x+1}$, $\varphi(\psi(x)) = x$ за всяко $x \geq -1$;
 функцията $g(t) = \int (t^2 - 1)^2 \cdot t d(t^2 - 1) = \int 2 \cdot t^6 - 4 \cdot t^4 + 2 \cdot t^2 dt = 2 \cdot t^7/7 - 4 \cdot t^5/5 + 2 \cdot t^3/3 + C \rightarrow \int x^2 \cdot \sqrt{x+1} dx = 2 \cdot (x+1)^3 \cdot \sqrt{x+1}/7 - 4 \cdot (x+1)^2 \cdot \sqrt{x+1}/5 + 2 \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}/3 + C$;

Интеграли от вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Такива интеграли могат да се преобразуват в интеграли от рационални функции чрез следното полагане:

$\tan x/2 = t$; това е позволено във всеки интервал Δ , в който $\tan x/2$ е дефинирано; например ако $x \in (-\pi, \pi)$ можем да направим следната смяна: $x = \varphi(t) = 2 \cdot \arctg t$, $t = \psi(x) = \tan x/2$ и t ще се мени върху цялата реална права;
 при тази субституция получаваме:
 $\sin x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, $dx = 2/(1+t^2) dt$;

Пример:

$\int dx/(1 + \sin x + \cos x)$ при $x \in (-\pi, \pi)$;
 правим смяна $x = \varphi(t) = 2 \cdot \arctg t$, $t = \psi(x) = \tan x/2$, $dx = 2/(1+t^2) dt$;
 получаваме:
 $g(t) = 2 \cdot \int dt / ((1+t^2) \cdot (1 + 2t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2))) =$
 $= 2 \cdot \int dt / (t^2 + 1 + 2t + 1 - t^2) = \int d(t+1) / (t+1) = \ln |t+1| + C$
 $\rightarrow \int dx/(1 + \sin x + \cos x) = \ln |1 + \tan x/2| + C$;

Интеграли от вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, $a \neq 0$

Този интеграл се нарича още **ойлеров интеграл**; ще отбележим следното: за да има смисъл този интеграл, квадратният тричлен $ax^2 + bx + c$ трябва да приема положителни стойности в интервала в който пресмятаме интеграла; това означава, че ако квадратният тричлен няма реални корени, то със сигурност $a > 0$, тъй като в противен случай във всеки интервал $a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$;
 тези интеграли се решават с помощта на субституциите на Ойлер;

Първа субституция на Ойлер

Да предположим, че $a > 0$;

Правим следното полагане: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$; тогава смяната е следната: $x = (t^2 - c)/(b - 2\sqrt{a}t)$, $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}$;
по този начин преобразуваме ойлеровия интеграл в интеграл от рационална функция;

Пример:

$\int dx/\sqrt{x^2 + x + 1}$ за $x \in \mathbf{R}$; полагаме $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$; тогава смяната е: $x = (t^2 - 1)/(1 - 2t)$; $dx = 2(t - t^2 - 1)/(1 - 2t)^2 dt$;
тогава $g(t) = \int 2(t - t^2 - 1) \cdot (2t - 1)/(t - t^2 - 1) \cdot (2t - 1)^2 dt =$
 $= - \int d(1 - 2t)/(1 - 2t) = - \ln |1 - 2t| + C \rightarrow$
 $\int dx/\sqrt{x^2 + x + 1} = - \ln |1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x| + C$;

Втора субституция на Ойлер

Да предположим, че корените на $ax^2 + bx + c$ са реални; да отбележим, че ако те са равни, интегралът не е ойлеров, а интеграл от рационална функция; нека α и β са двата корена на квадратния тричлен;

Правим следното полагане: $\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = t(x - \alpha)$; тогава смяната е следната: $x = (\alpha t^2 - \beta a)/(t^2 - a)$; $t = \sqrt{a(x - \beta)/(x - \alpha)}$;
по този начин отново преобразуваме ойлеровия интеграл в интеграл от рационална функция;

Пример:

$\int dx/(x + 4) \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ за $x > 1$; полагаме $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t(x - 1)$;
тогава смяната е: $x = (t^2 + 4)/(t^2 - 1)$, $t = \sqrt{(x + 4)/(x - 1)}$;
 $dx = -10t / (t^2 - 1)^2 dt$
тогава $g(t) = \int -10t dt / ((t^2 - 1)^2 \cdot (5t^2/(t^2 - 1) \cdot 5t/(t^2 - 1))) =$
 $= -2/5 \cdot \int dt/t^2 = 2/(5t) + C \rightarrow$
 $\int dx/(x + 4) \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 4} = 2/5 \cdot \sqrt{(x - 1)/(x + 4)} + C$

Да отбележим, че тези две субституции изчерпват всички ойлерови интегрални, тъй като ако $ax^2 + bx + c$ няма реални корени, то със сигурност $a > 0$;

Понякога се оказва удобна следната

Трета субституция на Ойлер

Да предположим, че $c > 0$;

Правим следното полагане: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$; тогава смяната е следната: $x = (b - 2t\sqrt{c})/(t^2 - a)$, $t = (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c})/x$;
По този начин ойлеровият интеграл отново се преобразува в интеграл от рационална функция;

Пример:

$\int dx/\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ за $x > 4$; ясно е, че към този интеграл могат да се приложат и трите субституции; ще приложим третата; полагаме $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = x.t + 2$; тогава смяната е: $x = (5 + 4.t)/(1 - t^2)$, $t = (\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2)/x$, $dx = (4.t^2 + 10.t + 4)/(1 - t^2)^2 dt$; тогава $g(t) = \int (4.t^2 + 10.t + 4) / ((1 - t^2)^2 \cdot (2 + 5.t + 4.t^2)/(1 - t^2)) dt = 2 \cdot \int dt / (1 - t^2) = - \int d(1 - t)/(1 - t) + \int d(1 + t)/(1 + t) = \ln |(1 + t)/(1 - t)| + C \rightarrow \int dx/\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \ln |(x - 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4})/(x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 4})| + C$

24. Определени интеграли – еквивалентност на определенията чрез суми на Дарбу и риманови интегрални суми. Условия за интегруемост.

Площ на равнинна фигура

Нека е дадена една ограничена равнинна фигура A (точково множество); ако тя е достатъчно проста (например многоъгълник) ние лесно можем да изчислим нейното лице; например правоъгълника има лице произведение от дължините на двете му страни; по този начин ние дефинираме **мярка** (лице) на правоъгълник; ние можем да пресмятаме лица на фигури, които са изцяло съставени от правоъгълници, като съберем лицата на отделните правоъгълници; ще наречем тези фигури прости многоъгълници; дефинираме **мярка** на прост многоъгълник, като сума от лицата на правоъгълниците, които го съставят; разглеждаме множеството от мярките на всички прости многоъгълници, вписани във фигурата A ; това множество е ограничено отгоре, тъй като фигурата A е ограничена; в такъв случай то има точна горна граница, която ще наричаме **долна мярка** на фигурата A ; разглеждаме множеството от мярките на всички прости многоъгълници, описани около фигурата A ; това множество е ограничено отдолу; в такъв случай то има точна долна граница, която ще наричаме **горна мярка** на фигурата A ; Казваме, че фигурата A е **измерима**, ако горната и долната мярка са равни; в такъв случай това число наричаме **площ** на фигурата A ;

Интуитивен смисъл

Нека е дадена функцията $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$; определеният интеграл от a до b е площта на фигурата, която е затворена от графиката на функцията $f(x)$ и от правите $y = a$, $y = b$; тази фигура се нарича **криволинеен трапец**, определен от графиката на $f(x)$ и абцисната ос;

ако функцията $f(x)$ приема и отрицателни стойности, тогава определеният интеграл е равен на сумата от лицата разположени над абцисната ос минус сумата от лицата под абцисната ос;

означаваме $\int_a^b f(x)dx$

Изпълнени са свойствата:

Ако $f(x) = C$, то $\int_a^b f(x)dx = C \cdot (b - a)$, тъй като в този случай фигурата е правоъгълник;

Ако $a < c < b$, то

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, тъй като ако разделим една фигура на две, то нейното лице е сбор от лицата на двете парчета;

Риманови суми

Нека е дадена функцията $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$;

под **разделяне** на интервала $[a, b]$ разбираме редица от точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, където $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$; под **диаметър** $d(\{x_i\})$ на разделянето разбираме $\max (x_i - x_{i-1})$ за $i = 1, 2, \dots, n$;

Дефиниция: Сумата $\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, където $\{x_i\}$ е някакво

разделяне на интервала $[a, b]$, а t_i са междинни точки, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ се нарича **Риманова интегрална сума**;

Ясно е, че Римановата интегрална сума представлява сума от лица на правоъгълници и тази сума апроксимира лицето под графиката на функцията; освен това ако увеличаваме броя на разделящите точки ние все повече и повече ще се приближаваме към лицето на фигурата;

Дефиниция: Казваме, че функцията f е **интегруема в Риманов смисъл** в интервала $[a, b]$, ако съществува число I , такова че Римановите интегрални суми клонят към I , при условие че диаметърът на използваните разделяния клони към 0, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако $d(\{x_i\}) < \delta$, то $|\sigma(\{x_i\}, t_i) - I| < \varepsilon$ при всеки избор на междинните точки t_i ; числото I наричаме **Риманов (определен) интеграл** на f от a до b ;

означаваме: $I = \int_a^b f(x)dx$

Суми на Дарбу

Предполагаме, че $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ е ограничена функция;

Нека сме направили разделяне $\{x_i\}$;

полагаме $m_i = \inf f(x)$ за $x_{i-1} \leq x \leq x_i$;

полагаме $M_i = \sup f(x)$ за $x_{i-1} \leq x \leq x_i$;

Дефиниция: Сумата $s = \sum_{i=1}^n f(m_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ наричаме **малка сума на**

Дарбу, определена от разделянето $\{x_i\}$;

Дефиниция: Сумата $s = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ наричаме **голяма сума на**

Дарбу, определена от разделянето $\{x_i\}$;

Очевидно е следното неравенство:

$s(\{x_i\}) \leq \sigma(\{x_i\}, t_i) \leq S(\{x_i\})$, което следва от $f(m_i) \leq f(t_i) \leq f(M_i)$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$;

Ясно е, че голямата сума на Дарбу представлява лице на фигура съставена от правоъгълници, която е описана около криволинейния трапец, определен от $f(x)$, а малката сума на Дарбу представлява лице на фигура съставена от правоъгълници, която е вписана в криволинейния трапец, определен от $f(x)$; оттук можем да заключим, че $s(\{x_i\}) \leq S(\{y_j\})$ за всеки две разделяния $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$;

тогава ако фиксираме разделянето $\{x_i\}$, ще заключим, че множеството от големите суми на Дарбу при всевъзможните разделяния на интервала $[a, b]$ е ограничено отдолу; тогава то притежава точна долна граница; ако фиксираме разделянето $\{y_j\}$, ще заключим, че множеството от малките суми на Дарбу при всевъзможните разделяния на интервала $[a, b]$ е ограничено отгоре; тогава то притежава точна горна граница;

Дефиниция: Точната долна граница $\bar{I}$ на големите суми на Дарбу се нарича **горен интеграл** на функцията f в интервала $[a, b]$;

Дефиниция: Точната горна граница $\underline{I}$ на малките суми на Дарбу се нарича **долен интеграл** на функцията f в интервала $[a, b]$;

Дефиниция: Казваме, че f е **интегруема в смисъл на Дарбу**, ако горният интеграл е равен на долния, т.е. $\bar{I} = \underline{I}$

Твърдение: Нека функцията f е ограничена в интервала $[a, b]$;

Нека τ е разделяне, определено от точките $\{x_i\}$ и

x' е точка $\neq x_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$; тогава ако $\tau^* = \tau \cup x'$,

1. $s(\tau^*) \geq s(\tau)$;

2. $S(\tau^*) \leq S(\tau)$;

3. Ако $M = \sup |f(x)|$, $a \leq x \leq b$, то $S(\tau) - S(\tau^*) \leq 2.M.d(\tau)$,
 $s(\tau^*) - s(\tau) \leq 2.M.d(\tau)$;

Доказателство:

Нека $x' \in (x_{i-1}, x_i)$; нека $m' = \inf f(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x'$,
 $m'' = \inf f(x)$, $x' \leq x \leq x_i$; ясно е, че $m' \geq m_i$, $m'' \geq m_i$; получаваме:

$$s(\tau^*) - s(\tau) = m' \cdot (x' - x_{i-1}) + m'' \cdot (x_i - x') - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ = (m' - m_i) \cdot (x' - x_{i-1}) + (m'' - m_i) \cdot (x_i - x') \geq 0;$$

тъй като $m' - m_i \leq 2.M$, $m'' - m_i \leq 2.M$, $x' - x_{i-1} < x_i - x_{i-1} \leq d(\tau)$,

$$x_i - x' < x_i - x_{i-1} \leq d(\tau) \Rightarrow s(\tau^*) - s(\tau) \leq 2.M.d(\tau);$$

аналогично нека $M' = \sup f(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x'$,

$M'' = \sup f(x)$, $x' \leq x \leq x_i$; ясно е, че $M' \leq M_i$, $M'' \leq M_i$; получаваме:

$$S(\tau^*) - S(\tau) = M' \cdot (x' - x_{i-1}) + M'' \cdot (x_i - x') - M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ = (M' - M_i) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M'' - M_i) \cdot (x_i - x') \leq 0;$$

тъй като $M_i - M' \leq 2.M$, $M_i - M'' \leq 2.M$, $x' - x_{i-1} < x_i - x_{i-1} \leq d(\tau)$,

$$x_i - x' < x_i - x_{i-1} \leq d(\tau) \Rightarrow S(\tau) - S(\tau^*) \leq 2.M.d(\tau);$$

Твърдение: Нека f е ограничена функция, дефинирана в интервала $[a, b]$; тогава горният интеграл $\bar{I}$ на f в интервала $[a, b]$ е равен на границата на големите суми на Дарбу, когато диаметърът на разделянето на интервала $[a, b]$ клони към 0, т.е.

за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако $d(\tau) < \delta$, то

$$S(\tau) - \bar{I} < \varepsilon;$$

Доказателство: Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $\bar{I} + \varepsilon/2$ вече не е точна долна граница на големите суми на Дарбу $\Rightarrow$ съществува разделяне τ_0 , такова че $S(\tau_0) > \bar{I} + \varepsilon/2$; нека τ_0 има l делящи точки;

нека τ е разделяне, такова че $d(\tau) < \delta$; като използваме горното твърдение (приложено l пъти) получаваме:

$$S(\tau) - S(\tau \cup \tau_0) \leq 2.M.l.\delta, \text{ където } M = \sup |f(x)|, a \leq x \leq b;$$

$$\text{освен това } S(\tau \cup \tau_0) \leq S(\tau_0) < \bar{I} + \varepsilon/2 \Rightarrow S(\tau \cup \tau_0) - \bar{I} < \varepsilon/2;$$

като съберем двете неравенства получаваме:

$$S(\tau) - \bar{I} < 2.M.l.\delta + \varepsilon/2; \text{ ясно е, че ако изберем } \delta < \varepsilon/(4.M.l), \text{ ще получим, че от } d(\tau) < \delta \Rightarrow S(\tau) - \bar{I} < \varepsilon;$$

Твърдение: Нека f е ограничена функция, дефинирана в интервала $[a, b]$; тогава долният интеграл $\underline{I}$ на f в интервала $[a, b]$ е равен на границата на малките суми на Дарбу, когато диаметърът на разделянето на интервала $[a, b]$ клони към 0, т.е.

за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, такова че ако $d(\tau) < \delta$, то

$$\underline{I} - s(\tau) < \varepsilon;$$

Доказателство: Аналогично на горното твърдение;

Твърдение: Нека f е ограничена функция; тогава f е интегрируема в смисъл на Дарбу $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне τ , такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;

Доказателство:

Нека f е интегрируема в смисъл на Дарбу; нека $I = \bar{I} = \underline{I}$;

Избираме $\varepsilon > 0$;

от горните две твърдения получаваме, че съществува разделяне τ' , такова че $S(\tau') - I < \varepsilon/2$ и разделяне τ'' , такова че $I - s(\tau'') < \varepsilon/2$; нека $\tau = \tau' \cup \tau''$; тогава:

$S(\tau) \leq S(\tau') \Rightarrow S(\tau) - I < \varepsilon/2$;

$s(\tau) \geq s(\tau'') \Rightarrow I - s(\tau) < \varepsilon/2 \Rightarrow S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;

Нека е изпълнено, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне τ , такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$;

за всяко разделяне τ са изпълнени неравенствата:

$s(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(\tau) \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} \leq S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$; последното неравенство е изпълнено за всяко $\varepsilon > 0 \Rightarrow \bar{I} = \underline{I} \Rightarrow f$ е интегрируема в смисъл на Дарбу;

Теорема: Нека f е ограничена функция; тогава f е интегрируема в Риманов смисъл $\Leftrightarrow f$ е интегрируема в смисъл на Дарбу;

Доказателство:

Нека f е интегрируема в смисъл на Дарбу;

нека $I = \bar{I} = \underline{I}$;

в сила е неравенството:

$s(\{x_i\}) \leq \sigma(\{x_i\}, t_i) \leq S(\{x_i\})$; в това неравенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$ и получаваме, че

$s(\{x_i\}) \rightarrow I, S(\{x_i\}) \rightarrow I \Rightarrow \sigma(\{x_i\}, t_i) \rightarrow I \Rightarrow f$ е интегрируема по Риман;

Нека f е интегрируема в Риманов смисъл;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; избираме $\delta > 0$, такова че от $d(\{x_i\}) < \delta$ да следва $|\sigma(\{x_i\}, t_i) - I| < \varepsilon/6 \Leftrightarrow I - \varepsilon/6 < \sigma(\{x_i\}, t_i) < I + \varepsilon/6$ независимо от избора на междинните точки t_i ;

Нека $\alpha = \varepsilon/(3 \cdot (b-a))$; тъй като M_i е супремумът на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, тогава $M_i - \alpha$ не е супремум $\Rightarrow$ съществуват междинни точки t'_i , такива че $f(t'_i) > M_i - \alpha$ за всяко i ;

образуваме съответната риманова сума със същото разделяне $\{x_i\}$ и междинните точки t'_i ;

имаме: $\sigma(\{x_i\}, t'_i) = S(\{x_i\}) - \alpha \cdot (b-a) = S(\{x_i\}) - \varepsilon/3$;

аналогично можем да изберем междинни точки t''_i , такива че

$\sigma(\{x_i\}, t''_i) = s(\{x_i\}) + \alpha \cdot (b-a) = s(\{x_i\}) + \varepsilon/3$;

получаваме: $I + \varepsilon/6 < S(\{x_i\}) < I + \varepsilon/2$; $I - \varepsilon/2 < s(\{x_i\}) < I + \varepsilon/6$;

в такъв случай $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < I + \varepsilon/2 - I + \varepsilon/2 = \varepsilon$; от горното твърдение $\Rightarrow f$ е интегрируема в смисъл на Дарбу;

Междувременно покажахме, че ако f е интегрируема в интервала $[a, b]$,

$$\bar{I} = \underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

25. Елементарни свойства на определените интеграли. Теорема за средните стойности.

Свойство 1: $\int_a^b C dx = C \cdot (b - a);$

Доказателство: Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията $f(x) = C$ - $\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = C \cdot \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = C \cdot (b - a)$, независимо от $\{x_i\}$;

Свойство 2: Ако $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_b^c f(x) dx$ съществуват, то съществува

$\int_a^c f(x) dx$ и е изпълнено: $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx;$

Доказателство: Разглеждаме римановата сума на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$; без ограничение можем да считаме, че с винаги е деляща точка; нека $c = x_k$;

$$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=k+1}^n f(t_j) \cdot (x_j - x_{j-1});$$

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$ и получаваме исканото равенството;

Свойство 3: Ако $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ съществуват, то съществува

$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$ и е изпълнено: $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$

Доказателство:

Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията $f(x) + g(x)$ -

$$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^n (f(t_i) + g(t_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1});$$

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$ и получаваме исканото равенството;

Свойство 4: Ако $\int_a^b f(x) dx$ съществува, то съществува $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx$ и е

изпълнено: $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx;$

Доказателство:

Разглеждаме римановата интегрална сума на функцията $\lambda \cdot f(x)$ -

$$\sigma(\{x_i\}, t_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1});$$

в последното равенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$ и получаваме исканото равенство;

Свойство 5: Нека f и g са интегрируеми функции; ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то е изпълнено: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

Доказателство: В сила е неравенството:

$$\sum f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum g(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1});$$

в това неравенство извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$ и получаваме исканото неравенство;

Теорема (за средните стойности): Нека f е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$; тогава съществува

$$t \in [a, b], \text{ такова че } \int_a^b f(x)dx = f(t) \cdot (b - a);$$

Доказателство: По теорема на Вайерщрас $\rightarrow f$ е ограничена; нека $m = \inf f(x)$, $a \leq x \leq b$; $M = \sup f(x)$, $a \leq x \leq b$; за всяко $x \in [a, b]$ имаме:

$$m \leq f(x) \leq M \rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \rightarrow$$

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a) \rightarrow m \leq \int_a^b f(x)dx / (b - a) \leq M;$$

по теорема на Вайерщрас $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$ и по теоремата за междинните стойности съществува $t \in [x_1, x_2]$, такова че

$$f(t) = \int_a^b f(x)dx / (b - a) \rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(t) \cdot (b - a);$$

26. Интегрируемост на непрекъснати функции.
Интегрируемост на ограничени функции с краен брой точки на прекъсване.

Теорема: Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в краен затворен интервал $[a, b]$; тогава $f(x)$ е интегрируема в Риманов смисъл;

Доказателство:

ясно е, че $f(x)$ е интегрируема в Риманов смисъл $\Leftrightarrow f(x)$ е интегрируема в смисъл на Дарбу $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разделяне $\{x_i\}$ на интервала $[a, b]$, такова че $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < \varepsilon$;

по теорема на Кантор $\Rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъснатата;

Фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава съществува $\delta > 0$, такова че

от $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$;

разделяме интервала $[a, b]$ с дялящи точки $\{x_i\}$, така че $d(\{x_i\}) < \delta$;

разглеждаме интервала $[x_{i-1}, x_i]$; по теоремата на Вайерщрас,

$M_i = f(x')$, $m_i = f(x'')$, където $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$; тъй като $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$,

$|x' - x''| < \delta \Rightarrow f(x') - f(x'') < \varepsilon/(b-a) \Rightarrow M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$;

в такъв случай: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) <$

$< \varepsilon/(b-a) \cdot \sum_{i=1}^n x_i - x_{i-1} = \varepsilon \Rightarrow f$ е интегрируема в Риманов смисъл;

Теорема: Ако f е ограничена в интервала $[a, b]$ и има краен брой точки на прекъсване, то f е интегрируема в Риманов смисъл;

Доказателство: нека $M > 0$ и $|f(x)| < M$;

Нека $c_1, c_2, \dots, c_k$ са точките на прекъсване за $f(x)$;

фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме отворени интервали $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, такива

че $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k < \varepsilon/(2.M + b - a)$ и $c_j \in \Delta_j$ за всяко $j = 1, 2, \dots, k$;

по теоремата на Кантор, f е равномерно непрекъснатата в интервалите $[a, b] \setminus \cup \Delta_j$;

избираме $\delta > 0$, такова че от $|x' - x''| < \delta \Rightarrow$

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(2.M + b - a)$;

избираме разделяне $\{x_i\}$, такова че Δ_j (допълнени до затворени) са подинтервали на разделянето и $d(\{x_i\}) < \delta$; аналогично на горната теорема имаме, че

$|M_i - m_i| < \varepsilon/(2.M + b - a)$ за всяко i , такова че $[x_{i-1}, x_i] \neq \Delta_j$;

в такъв случай: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) = \sum_i (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^k (M_{ij} - m_{ij}) \cdot |\Delta_j|$,

където първата сума е по всички i , такива че $[x_{i-1}, x_i] \neq \Delta_j$,

а $i_1, i_2, \dots, i_k$ са поредните номера на интервалите $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ в разделянето;

окончателно: $S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < \varepsilon \cdot (b - a)/(2.M + b - a) +$

$2.M \cdot \varepsilon/(2.M + b - a) = \varepsilon \Rightarrow f$ е интегрируема в Риманов смисъл;

Дефиниция: Казваме, че едно множество A има **лебегова мярка 0**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват интервали $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots$ които са такива, че $A \subset \Delta_j$ и $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_j + \dots < \varepsilon$;

Теорема: Функцията f е интегрируема по Риман $\Leftrightarrow f$ е ограничена и множеството от точките и на прекъсване има лебегова мярка 0;

27. Теорема на Лайбниц – Нютон и формула на Лайбниц – Нютон за пресмятане на определени интеграли.

Теорема (на Лайбниц – Нютон): Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ е непрекъсната функция; тогава функцията $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е диференцируема и

нейната производна е $f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$;

Доказателство: нека $x \in (a, b)$;

записваме диференчното частно на $F(x)$;

$$(F(x+h) - F(x))/h = \left(\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx \right)/h = \left(\int_x^{x+h} f(x)dx \right)/h$$

съгласно теоремата за средните стойности съществува точка

$$u_h \in (x, x+h), \text{ такава че } \left(\int_x^{x+h} f(x)dx \right)/h = f(u_h);$$

сега като извършим граничен преход при $h \rightarrow 0$, получаваме че $u_h \rightarrow x \Rightarrow f(u_h) \rightarrow f(x)$, тъй като функцията f е непрекъсната;

$\Rightarrow (F(x+h) - F(x))/h \rightarrow f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$;

Теорема (формула на Лайбниц – Нютон): Нека $F(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема поне в (a, b) ; тогава ако $f(x) = F'(x)$ е интегрируема в Риманов смисъл в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

Доказателство: Правим произволно разделяне $\{x_i\}$ на интервала $[a, b]$; имаме: $F(b) - F(a) = F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(a)$; прилагаме теоремата на Лагранж и получаваме:

$$F(b) - F(a) = f(t_n) \cdot (b - x_{n-1}) + f(t_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + f(t_1) \cdot (x_1 - a);$$

в дясната страна на равенството стои Риманова сума на функцията $f(x)$ за интервала $[a, b]$; в последното равенство правим граничен преход при $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$; в лявата страна нищо се променя (тя е

константа), а в дясната страна Римановата сума клони към $\int_a^b f(x)dx$;

да отбележим, че междинните точки при всяко едно разделяне могат да се изберат, така че равенството да е изпълнено, но резултатът не зависи от междинните точки $\Rightarrow$ формулата е доказана;

Означение: Ще означаваме $F(b) - F(a)$ по следния начин: $F(x) \Big|_a^b$

Пример: $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2$

$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$; първо ще пресметнем неопределения интеграл;

правим субституция $x = R \cdot \cos t \rightarrow t = \arccos x/R$;

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \sqrt{R^2 - (R \cdot \cos t)^2} dR \cdot \cos t = - \int R^2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \sin t dt = \\ &= - R^2 \int \sin^2 t dt = - \frac{R^2}{2} \int 1 - \cos 2t dt = - \frac{R^2}{2} \int dt + - \frac{R^2}{2} \int \cos 2t dt = \\ &= - R^2/2 \cdot \arccos(x/R) - R^2/4 \cdot \sin(2 \cdot \arccos(x/R)) + C; \end{aligned}$$

тогава $F(R) = C$, $F(-R) = -\pi \cdot R^2/2 + C \rightarrow \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi \cdot R^2/2$;

по този начин намерихме лицето на полукръга с радиус R ; както ще видим по-нататък има и по-кратки начини за пресмятане на определени интеграли;

28. Интегриране по части и смяна на променливата при определени интеграли.

Дефиниция: Нека $a > b$; дефинираме $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;

Това се прави с цел удобство на пресмятането; действително, следвайки дефиницията, ако F е примитивна функция на f в интервала $[a, b]$, то първият интеграл е $F(b) - F(a)$ при $a < b$ или $-(F(a) - F(b))$ при $a > b$, т.е. няма значение коя граница е по-голяма;

Твърдение (интегриране по части): Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в интервала $[a, b]$ и производните им са непрекъснати; тогава е изпълнено равенството:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x);$$

Доказателство: Като вземем предвид, че функцията $f(x) \cdot g(x)$ е един неопределен интеграл на функцията $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ получаваме:

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b \rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b, \text{ което е точно исканото}$$

равенство;

Пример: $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi} x \cdot d \sin x = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = 2;$

Твърдение (смяна на променливата): Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека функцията $g: [p, q] \rightarrow [a, b]$ ($[q, p] \rightarrow [a, b]$) притежава непрекъсната първа производна, освен

това $g(p) = a, g(q) = b$; тогава $\int_a^b f(x) dx = \int_p^q f(g(t)) \cdot g'(t) dt$;

Доказателство: Разглеждаме функцията $F(x) = \int_a^x f(u) du$;

= по теоремата на Лайбниц – Нютон $\rightarrow F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$;
тогава $(F(g(t)))' = f(g(t)) \cdot g'(t) \rightarrow$ функцията $F(g(t))$ е примитивна функция на $f(g(t)) \cdot g'(t)$ в интервала $(p, q) \rightarrow$

$$\int_p^q f(g(t)) \cdot g'(t) dt = F(g(t)) \Big|_p^q = F(g(q)) - F(g(p)) = F(b) - F(a), \text{ но}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \rightarrow \text{твърдението е доказано;}$$

Пример: $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$; правим субституция $x = R \cdot \cos t, t = \arccos(x/R)$,

където $t \in [0, \pi]$; новите граници са π и 0 ;

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \cos^2 t} dR \cdot \cos t = -R^2 \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = -\frac{R^2}{2} \int_{\pi}^0 dt +$$

$$-\frac{R^2}{4} \int_{\pi}^0 \cos 2t dt = \pi \cdot R^2 / 2;$$

29. Приложения на определените интеграли – пресмятане на лица, формули за дължина на крива и обем на ротационно тяло.

Дефиниция: Криволинеен трапец е фигура, дефинирана като всички точки в равнината (x, y) , за които: $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$;

Твърдение: Лицето на един криволинеен трапец е равно на

$$\int_a^b y_2(x) - y_1(x) dx;$$

Доказателство: Прибавяме достатъчно голяма константа към двете функции, така че те да станат положителни, по този начин не

променяме лицето на криволинейния трапец; нека лицето под графиката на функцията $y_1(x)$ е A_1 , а лицето под графиката на функцията $y_2(x)$ е A_2 ; тогава е ясно, че лицето на криволинейния трапец е точно $A_2 - A_1$, откъдето следва формулата;

Намиране на граници

Нека $a_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(n+n)$;

търсим границата на a_n при $n \rightarrow \infty$;

записваме: $a_n = 1/n \cdot (1/(1 + 1/n) + 1/(1 + 2/n) + \dots + 1/(1 + n/n))$;

последното равенство ще разгледаме като Риманова сума;

действително нека имаме разделяне на интервала $[0, 1]$ на n равни части и междинните точки са избрани в краищата на подинтервалите на разделяне; тогава a_n е Риманова интегрална сума на функцията $f(x) = 1/(1+x)$; когато $n \rightarrow \infty$, диаметърът на разделянето ($= 1/n$) клони към 0 $\rightarrow$ Римановата сума клони към

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2;$$

Дефиниция: В равнината е зададена крива $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$; нека по кривата нанесем точки $M_0, M_1, \dots, M_n$, където M_0 има координати $(a, f(a))$ и M_n има координати $(b, f(b))$; казваме, че $M_0M_1\dots M_n$ е начупена линия вписана в кривата; ясно е, че нейната дължина е сума от дължината на отсечките $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$; точната горна граница на всевъзможните дължини на начупените линии вписани в кривата се нарича **дължина** на кривата;

Нека функцията f има непрекъсната първа производна;

нека имаме разделяне $\{x_i\}$ на интервала $[a, b]$ и M_i са съответните точки върху графиката на функцията; тогава дължината на

начупената крива е: $\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$; като използваме

теоремата на Лагранж, получаваме че $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$;

и така дължината на кривата е: $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$, но това е

точно Риманова интегрална сума на функцията $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$; колкото по-малък е диаметърът на разделянето, толкова е по-добра апроксимацията за дължината на кривата; когато $d(\{x_i\}) \rightarrow 0$,

Римановата сума $\rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ и това е дължината на кривата;

Пример: Нека $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{-1}{\sqrt{2}} = \pi/2$$

това пресмятане показва, че дължината на една четвърт от кръга е $\pi/2$;

Изчисляване на обем на ротационни тела

Нека в равнината O_{xy} е дадена крива $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$; ако завъртим тази крива около O_x ще получим ротационно тяло; **обемът** на тялото ще намерим по следния начин:

разделяме интервала $[a, b]$ с делящи точки $\{x_i\}$; във всеки един от подинтервалите фиксираме междинна точка t_i и изчисляваме сумата от обемите на цилиндрите с основа кръговете, описани от t_i при въртенето и височина $x_i - x_{i-1}$; ясно е, че по този начин се получава приближена стойност на обема; тя е:

$$\pi \cdot \sum_{i=1}^n f(t_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}); \text{ когато избираме разделяне с по-малък диаметър}$$

ще получаваме по-точна апроксимация за обема на ротационното тяло; и така обемът на ротационното тяло получаваме, когато диаметърът на разделяне клони към 0 и тогава неговата стойност е:

$$\pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx;$$

Пример: нека $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$; тогава

$$\pi \cdot \int_{-R}^R R^2 - x^2 dx = \pi \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3; \text{ получихме формулата за обема}$$

на сфера с радиус R ;

30. Несобствени интеграли.

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за $x \geq a$ и интегрируема в интервалите от вида $[a, p]$, където $p > a$; казваме, че

несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ е сходящ, ако съществува

границата $\int_a^p f(x) dx$ при $p \rightarrow \infty$ и тогава той има стойност тази

граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за $x \leq a$ и интегрируема в интервалите от вида $[q, a]$ където $q < a$; казваме, че

несобственият интеграл $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ е сходящ, ако съществува

границата $\int_q^a f(x)dx$ при $q \rightarrow -\infty$ и тогава той има стойност тази граница; в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е интегрируема в интервалите от вида $[a + \varepsilon, b]$, където $0 < \varepsilon < b - a$; казваме, че **несобственият**

интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата

$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0+0$ и тогава той има стойност тази граница;

в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Нека функцията $f(x)$ е интегрируема в интервалите от вида $[a, b - \varepsilon]$, където $0 < \varepsilon < b - a$; казваме, че **несобственият**

интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ, ако съществува границата

$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0+0$ и тогава той има стойност тази граница;

в противен случай той е разходящ;

Дефиниция: Несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ се дефинира за

функции, които са непрекъснати за всяко x и по дефиниция:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$, където c е междинна точка;

междинни точки също може да се използват ако функцията има особености и в двете граници; например:

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-5)}} = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(x-5)}} + \int_c^5 \frac{1}{\sqrt{x(x-5)}};$$

Примери:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \arctg p = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} -\varepsilon \cdot \ln \varepsilon + \varepsilon - 1 = -1;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} -\ln \varepsilon, \text{ но тази граница не съществува}$$

→ интегралът е разходящ;

Дефиниция: Казваме, че интегралът $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е **абсолютно сходящ**,

ако е сходящ интеграла $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$;

Твърдение: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани за $x \geq a$ и интегрируеми във всеки интервал от вида $[a, p]$, където $p > a$; ако е

изпълнено: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \geq a$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ е сходящ, то

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ също е сходящ;

Доказателство: по свойствата на определените интеграли, за всяко $p > a$ е изпълнено:

$$\int_a^p f(x)dx \leq \int_a^p g(x)dx < \int_a^{\infty} g(x)dx = C; \text{ нека } F(p) = \int_a^p f(x)dx; \text{ от последното}$$

неравенство → $F(p)$ е ограничена; освен това $f(x) \geq 0$ за всяко $x \geq a$ → $F(p)$ е монотонно растяща; нека $M = \sup F(p)$, $p \geq a$;

ще покажем, че $F(p)$ има граница при $p \rightarrow \infty$ и тя е равна на M ;

фиксираме $\varepsilon > 0$; тогава $M - \varepsilon$ не е горна граница на $F(p)$ →

съществува p_0 , такова че $F(p_0) > M - \varepsilon$; тъй като $F(p)$ е монотонно

растяща, тогава за всяко $p > p_0$ ще имаме: $F(p) > M - \varepsilon$; и така

получаваме неравенствата: $M - \varepsilon < F(p) \leq M$ → $0 \leq M - F(p) < \varepsilon$ за

всяко $p > p_0$ → $F(p)$ притежава граница при $p \rightarrow \infty$ и тя е равна на M ;

Следствие: Ако $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е разходящ, то $\int_a^{\infty} g(x)dx$ също е разходящ;

Твърдение: Ако несобственият интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е абсолютно

сходящ, то той е сходящ;

Доказателство: Да отбележим, че обратното не е вярно;

Разглеждаме функциите:

$$f_1(x) = (|f(x)| + f(x))/2; f_2(x) = (|f(x)| - f(x))/2;$$

ясно е че $0 \leq f_1(x) \leq |f(x)|$, $0 \leq f_2(x) \leq |f(x)|$;

по горното твърдение получаваме, че $\int_a^{\infty} f_1(x)dx$ и $\int_a^{\infty} f_2(x)dx$ са сходящи

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f_1(x) - f_2(x)dx \text{ е сходящ и тъй като } f_1(x) - f_2(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx$$

е сходящ;

Сравняване на несобствени интеграли

Да разгледаме следният интеграл:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left. \frac{1}{(1-\alpha) \cdot x^{\alpha-1}} \right|_a^p = \frac{1}{(1-\alpha) \cdot p^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha) \cdot a^{\alpha-1}};$$

този интеграл очевидно е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \leq 1$ (при $\alpha = 1$ той е равен на $\ln p - \ln a$ за $p \rightarrow \infty$);

и така, ако функцията $f(x)$ е такава, че $|f(x)| \leq 1/x^{\alpha}$, $\alpha > 1$ то

интегралът $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е сходящ; ако пък $|f(x)| \geq 1/x^{\alpha}$, $\alpha \leq 1$ интегралът

е разходящ;

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\beta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^{\beta}} = \left. \frac{1}{(1-\beta) \cdot (x-a)^{\beta-1}} \right|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{(1-\beta) \cdot (b-a)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta) \cdot \varepsilon^{\beta-1}}$$

този интеграл очевидно е сходящ при $\beta < 1$; при $\beta \geq 1$ той е разходящ (при $\beta = 1$, получаваме $\ln |b-a| - \ln \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0+0$);

и така, ако функцията $f(x)$ е такава, че $|f(x)| \leq 1/(x-a)^{\beta}$, $\beta < 1$ то

интегралът

$\int_a^b f(x)dx$ е сходящ; ако пък $|f(x)| \geq 1/x^{\beta}$, $\beta \geq 1$ интегралът е разходящ;

Примери:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 3}{2 \cdot x^4 + x^2 + 1} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \leq \int_1^{\infty} \frac{C}{x^2}; \text{ това е така, тъй като}$$

втората функция има граница при $x \rightarrow \infty$ (тя е $1/2$) $\Rightarrow$ тя е ограничена за достатъчно големи x ; интегралът е сходящ, защото $2 > 1$;

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{C}{x^{\frac{1}{2}}}; \text{ това е така, тъй като } \sin x/x \text{ има}$$

граница при $x \rightarrow 0$ (тя е 1) $\Rightarrow$ тя е ограничена в достатъчно малка околност на нулата; интегралът е сходящ, защото $1/2 < 1$;

Край

24.01.2002