Лекция 6

§6. Интегриране на рационални функции

1. Полиноми и рационални функции. Полином от степен не по-висока от n се нарича функцията

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 .$$

Ако $a_n\neq 0$, то степента на $f(x)$ е точно n. Степента на полинома ще означаваме с $\deg f(z)$. Полиномите от нулева степен са константи. Тук коефициентите a_0, a_1, ..., a_n са реални числа. Един полином се формира само на базата на действията събиране и умножение.

Теорема 6.1. Нека $f(x)$ и $\varphi(x)$ са полиноми, при което $1\leq\deg\varphi(x)\leq\deg f(x)$. Тогава съществуват единствени полиноми $q(x)$ и $r(x)$, $\deg r(x)<\deg\varphi(x)$, такива, че $f(x)$ може да се запише във вида

(6.1) $\quad f(x)=\varphi(x)q(x)+r(x)$. ■

Доказателството на това твърдение следва директно от известния алгоритъм за деление на полиноми. Полиномът $q(x)$ се нарича ***частно*** от делението на $f(x)$ с $\varphi(x)$, а полиномът $r(x)$ се нарича ***остатък*** от делението. Ако степента на $\varphi(x)$ е по-голяма от степента на $f(x)$, $\deg\varphi(x)>\deg f(x)$, то делението е безпредметно, понеже формулата (6.1) приема вида $f(x)=\varphi(x).0+f(x)$, в този случай частното е тъждествено нула, $q(x)\equiv 0$, а остатъкът съвпада с $f(x)$, $r(x)=f(x)$.

В частност, ако $\deg f(x)\geq 1$ и a е някакво число, то

(6.2) $\quad f(x)=(x-a)q(x)+r$,

където $q(x)$ е полином, $\deg q(x)=\deg f(x)-1$, r е константа. Казва се, че a е ***корен*** на полинома $f(x)$, когато $f(a)=0$. От (6.2) се вижда, че a е корен на полинома $f(x)$, $\deg f(x)\geq 1$, тогава и само тогава, когато $f(x)$ може да се запише във вида $f(x)=(x-a)q(x)$.

Представянето (6.2) може да се получи веднага и от известната формула на Тейлър за полиноми

(6.3) $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Числото a се нарича ***корен от кратност*** $m\geq 1$, за полинома $f(x)$, когато $f(x)$ може да се запише във вида $f(x)=(x-a)^m g(x)$, където $g(x)$ е полином, за който $g(a)\neq 0$. Ако $m=1$, то коренът се нарича прост. Например числото $a=1$ е корен от кратност 3 за полинома $f(x)=(x-1)^3(x^2+2)$, а полинома $f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ има два прости корена ± 1.

Твърдение 6.1. Числото a е корен на полинома $f(x)$, $\deg f(x)\geq 1$, от кратност $m\geq 1$ $(m<n)$ тогава и само тогава, когато

(6.4) $\quad f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$, $f^{(m)}(a)\neq 0$.

Доказателство. Нека е изпълнено (6.4). Тогава съгласно (6.3)

$$f(x)=(x-a)^m\left[\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m}\right],$$

$$f(x)=(x-a)^m g(x),\ g(x)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m},$$

където $g(x)$ е полином от степен $n-m$ и $g(a)=\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$, което по определение означава, че a е корен от кратност m. Нека сега a е корен от кратност m, което означава, че $f(x)=(x-a)^m g(x)$, където $g(x)$ е полином, за който $g(a)\neq 0$. Тогава непосредствено чрез диференциране се проверява, че е налице (6.4). ■

Да разгледаме полинома $f(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Той се разлага на два множителя $(x-1)$ и x^2+x+1, при което този квадратен тричлен е неразложим. Неговите корени са двойката комплексно спрегнати числа $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Полиномът $f(x)=x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ се записва като произведение на $x-1$, $x+1$ и на полинома от втора степен x^2+1, който също е неразложим. Полиномът $f(x)=x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$ се записва като произведение на два неразложими тричлена. Ситуацията в общия случай изглежда аналогично на приведените примери. Преди всичко да отбележим, че ако един полином $f(x)$ има за корен комплексното число $\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, с кратност s, то комплексно спрегнатото $\alpha-i\beta$ също е корен при това от същата кратност. Това означава, че $f(x)$ се дели на $[(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)]^s=\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^s$. Квадатният тричлен $(x-\alpha)^2+\beta^2$ неразложим. От направените пояснения и от основната теорема на алгебрата следва верността на

Теорема 6.2. Всеки полином с реални коефициенти $f(x)$, може да се представи по единствен начин като произведение на старшия си коефициент a_n и на известен брой (различни по между си) елементарни множители от първи вид $(x-a)^k$ и/или елементарни множители от втори вид $\left(x^2+px+q\right)^s$, $p^2-4q<0$,

(6.5) $\quad f(x)=a_n\cdots(x-a)^k\cdots\left(x^2+px+q\right)^s\cdots$. ■

Тук елементарните множители от първи вид са свързани с реалните корени на $f(x)$ и техните кратности, а елементарните множители от втори вид са свързани с двойките комплексно спрегнати корени и техните кратности.

Функцията $f(x)$ се нарича ***рационална***, когато е частно на два полинома,

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Рационалната функция $f(x)$ се нарича ***правилна***, когато $\deg Q(x)>\deg P(x)$.

Нека $f(x)$ е правилна рационална функция и a е корен от кратност $k\geq 1$ за знаменателя $Q(x)$, което означава, че $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$, където $Q_1(a)\neq 0$. Тогава съществува константа такава, че

(6.6) $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{\hat{P}(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

Константата A избираме такава, че числото a да бъде корен на полинома $\varphi(x)=P(x)-AQ_1(x)$, което означава $\varphi(a)=P(a)-AQ_1(a)=0$. Този избор е възможен понеже по условие $Q_1(a)\neq 0$. Сега полинома $\hat{P}(x)$ определяме като частното от делението на $\varphi(x)$ с $(x-a)$,

$$P(x)-AQ_1(x)=(x-a)\hat{P}(x).$$

Разделяйки последното на $Q(x)$, получаваме равенството (6.6). Да отбележим, че второто събираемо в дясната страна на (6.6) е правилна рационална функция. Когато $k>1$, можем да повторим горното разсъждение до изчерпване кратността на корена a, след което ще получим представянето

$$(6.7)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

при което последното събираемо в дясната страна на (6.7) е правилна рационална функция.

Нека сега $Q(x)=\left(x^2+px+q\right)^s Q_1(x)$, където $Q_1(x)$ не се дели (без остатък) на неразложимия тричлен x^2+px+q с корени двойката комплексно спрегнати числа $z_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $\beta\neq 0$. Тогава за правилната рационална функция е валидно следното аналогично на (6.6) представяне

$$(6.8)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{\hat{P}(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}Q_1(x)},$$

за някои константи B и C, при което второто събираемо в дясната страна на (6.8) също е правилна рационална функция. Константите B и C се избират от условието полиномът $\varphi(x)=P(x)-(Bx+C)Q_1(x)$ да се дели без остатък на x^2+px+q. Това означава, че $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)=0$. Чрез непосредствена проверка се установява, че този избор може да бъде направен, при това по единствен начин. Нека $\hat{P}(x)$ е частното от делението на полинома $\varphi(x)$ с x^2+px+q. Тогава

$$P(x)-(Bx+C)Q_1(x)=\left(x^2+px+q\right)\hat{P}(x).$$

Разделяйки последното на $Q(x)$ получаваме равенството (6.8). Повтаряйки горното разсъждение до изчерпване на кратността, получаваме

$$(6.9)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

където последното събираемо в дясната страна на (6.9) е правилна рационална функция.

Рационалните функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

се нарича ***елементарни дроби от първи вид***, а функциите

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad p^2-4q<0,$$

се нарича ***елементарни дроби от втори вид***.

Повтаряйки представянията (6.7) и/или (6.9) до изчерпване елементарните множители на $Q(x)$, получаваме верността на следната

Теорема 6.3 ***(за представяне в сбор от елементарни дроби).*** Нека

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

е правилна рационална функция, $\deg P(x)<\deg Q(x)$. Тогава $f(x)$ може да се запише като сбор от серии елементарни дроби. Всеки елементарен множител от първи вид $(x-a)^k$ на $Q(x)$ поражда серия елементарни дроби от първи вид както при формулата

(6.7), а всеки елементарен множител от втори вид $\left(x^2+px+q\right)^s$ на $Q(x)$ поражда серия елементарни дроби от втори вида както при формулата (6.9). ■

С други думи

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots\\&+\frac{B_s x+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{B_{s-1}x+C_{s-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_1 x+C_1}{x^2+px+q}+\cdots\end{aligned}\tag{6.10}$$

За определянето на константите в равенството (6.10) съществуват два основни метода. И при двата първоначално изразите се умножават с общия знаменател $Q(x)$, след което (6.10) се превръща в равенство на два полинома. При първия метод се приравняват коефициентите пред съответните степени, откъдето за константите се получава линейна система. При втория метод се дават различни конкретни стойности на променливата, докато се получат достатъчно линейни уравнения за тяхното решаване. Тези два метода могат да се прилагат всеки по отделно но могат и да се комбинират. Всъщност съдържанието на теорема 6.3 се изразява в това, че линейните системи, които се получават по описаните начини са еднозначно разрешими. Освен посочените методи, можем да диференцираме равенството, което се получава след умножаване с $Q(x)$ и на тази основа да извършваме отново познатите действия.

Например да разложим в сбор от елементарни дроби правилната рационална функция

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3}.$$

Тук знаменателят $Q(x)=(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3$ е даден във вид на произведение от елементарни множители. Съгласно теорема 6.3, за $f(x)$ съществува следното представяне

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+2)^2x^5\left(x^2+x+1\right)^2\left(x^2+1\right)^3}=\\&=\frac{A_{13}}{(x-1)^3}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{11}}{x-1}+\\&+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{35}}{x^5}+\frac{A_{34}}{x^4}+\frac{A_{33}}{x^3}+\frac{A_{32}}{x^2}+\frac{A_{31}}{x}+\\&+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+x+1}+\frac{B_{23}x+C_{23}}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+1}\end{aligned}$$

За да представим дадена правилна рационална функция във вид на сбор от елементарни дроби, преди всичко трябва да запишем знаменателя като произведение от елементарни множители, което по същество означава да намерим всичките му корени. За намирането на корените на даден полином от пета или по-висока степен обаче в общия случай не съществуват формули като тези на Виет и Кардано, което представлява принципна преграда за използването на теорема 6.3 във всяка ситуация. Затова в конкретните случаи на приложение, разлагането на знаменателя като произведение на елементарни множители се предполага известно или лесно за постигане.

2. Интегриране на елементарни дроби. Елементарните дроби от първи вид се интегрират непосредствено

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + Const\,,\ \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{1-k}\frac{A}{(x-a)^{k-1}} + Const\,,\ k>1\,.$$

За да се научим да интегрираме елементарни дроби от втори вид, отначало ще разгледаме интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,,\ n=1,2,\ldots\,,\ a>0\,.$$

При $n=1$ имаме табличен интеграл

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + Const\,.$$

За останалите интеграли ще изведем ***рекурентна формула***. Да разгледаме интеграла I_{n+1} и да го преобразуваме,

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(a^2+x^2-x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\,,$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(a^2+x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\,,$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{2a^2}\int \frac{xd\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\int xd\left(x^2+a^2\right)^{-n}\,,$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{a^2}I_n + \frac{x\left(x^2+a^2\right)^{-n}}{2na^2} - \frac{1}{2na^2}\int \left(x^2+a^2\right)^{-n}dx = \frac{1}{a^2}I_n + \frac{x\left(x^2+a^2\right)^{-n}}{2na^2} - \frac{1}{2na^2}I_n\,,$$

откъдето поучаваме желаната връзка между I_{n+1} и I_n

(6.11) $$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n\,.$$

Например за $n=1$ получаваме

$$I_2 = \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2na^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + Const\,.$$

Знаейки I_2, с помощта на (6.11) намираме I_3 и т.н. Интегралите от вида

(6.12) $$J_n = \int \frac{bx+c}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx\,,\ a>0\,,$$

свеждаме до интегралите I_n по следния начин,

$$J_n = b\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n} + c\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{b}{2}\int \frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^n} + c\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,,$$

$$J_n = \frac{b}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + cI_n\,.$$

В общият случай след отделяне на точен квадрат в знаменателя, интегралът

$$\int \frac{bx+c}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$$

се свежда до интеграла J_n от (6.12). Например да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{x-3}{\left[x^2+2x+2\right]^2}dx\,.$$

Последователно намираме

$$I=\int\frac{x-3}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}dx=\int\frac{(x+1)-4}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}d(x+1),$$

което означава, че $I=J_2-4I_2$, при $a=1$, относно променливата $x+1$.

3. Интегриране на рационални функции. Ако рационалната функция

(6.13) $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg Q(x)>0$,

не е правилна, $\deg P(x)\geq \deg Q(x)$, отначало ще разделим полинома $P(x)$ на $Q(x)$ и съгласно теорема 6.1, $P(x)=Q(x)q(x)+r(x)$, където $q(x)$ е частното, а $r(x)$ е остатъкът при това деление, $\deg r(x)<\deg Q(x)$, откъдето след разделяне на $Q(x)$ получаваме

(6.14) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$.

Второто събираемо в дясната страна на (6.14) е правилна рационална функция. Сега имаме

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int q(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx,$$

което означава, че пресмятането на интеграла се свежда до интегриране на полином и интегриране на правилна рационална функция. Полиномите се интегрират непосредствено. Остава да покажем начин за интегриране на правилни рационални функции.

Нека рационалната функция (6.13) е правилна и е известно представянето на знаменателя $Q(x)$ като произведение на елементарни множители. Тогава съгласно теорема 6.3, $f(x)$ може да се запише като сбор от елементарни дроби и в крайна сметка интегрирането на $f(x)$ се сведе до интегриране на елементарни дроби, което вече знаем как става от предишния раздел.

Най-прост е случаят, когато корените на $Q(x)$ са прости. Например да пресметнем интеграла

$$I=\int\frac{x+2}{x^3-x}dx.$$

Знаменателят се разлага на прости множители $x^3-x=x(x-1)(x+1)$. Съгласно теорема 6.3 търсим представяне

$$\frac{x+2}{x^3-x}=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1},$$

където константите a, b и c ще намерим след привеждане под общ знаменател,

$$x+2=a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1).$$

Заместваме $x\to 0$ и намираме $2=a(-1)(1)$, следователно $a=-2$. Заместваме $x\to 1$ и намираме $3=b(1)(2)$, следователно $b=\dfrac{3}{2}$. Заместваме $x\to -1$ и намираме $1=c(-1)(-2)$, следователно $c=\dfrac{1}{2}$. В крайна сметка получихме

$$\frac{x+2}{x^3-x}=-2\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

следователно

$$I=\int\frac{x+2}{x^3-x}dx=-2\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx,$$

$$I=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C\,.$$

В случая на прости корени след умножение с общия знаменател се получава израз, в който заместваме с корените и при всяко едно заместване получаваме стойността на една от търсените константи.

Да пресметнем интеграла

$$I=\int\frac{x^4}{x^2-x+1}\,dx\,.$$

Тук рационалната функция не е правилна затова първоначално ще извършим деление на полиноми. Съгласно правилото за деление

$$\begin{array}{l}
-\,x^4\;:\;x^2-x+1=x^2+x\\
\underline{\;x^4-x^3+x^2\;}\\
\;''\quad x^3-x^2\\
\quad -\,\underline{x^3-x^2+x}\\
\quad\;''\qquad ''\;\;-x
\end{array}$$

Тук частното е x^2+x, а остатъкът е $-x$, следователно

$$\frac{x^4}{x^2-x+1}=x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1}\,,$$

(6.15) $\quad I=\int\left(x^2+x\right)dx-\int\frac{x}{x^2-x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-J\,,\; J=\int\frac{x}{x^2-x+1}\,dx\,.$

Интегралът J се намира по стандартния начин,

$$J=\int\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$J=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,,$$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,,$$

$$J=\frac{1}{2}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C\,.$$

Като заместим в (6.15) намираме

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

4. Интегриране на ирационални и тригонометрични функции. Интегралите от вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx,$$

където степените r_1, r_2, ..., r_n са рационални числа, $ad - bc \neq 0$, могат при определение условия да се сведат до интеграли от рационални функции след полагането $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p$, където p е най-малкото общо кратно на знаменателите на r_1, r_2, ..., r_n. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$$

Тук полагаме $x = t^6$, при което $dx = dt^6 = 6t^5 dt$. Получаваме

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1}6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt,$$

който интеграл пресмятаме по известния вече начин.

Тригонометричните интеграли

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{6.16}$$

могат да бъдат преобразувани чрез ***универсалната субституция*** за такива интеграли $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, при която имаме $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = 2d\operatorname{arctg} t = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. От тъждествата

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} \text{ и } \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}},$$

получаваме

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ и } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Сега след заместване, (6.16) приема вида

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

който при определени условия е интеграл от рационална функция. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + 2}.$$

След полагането $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ интегралът се свежда до

$$I = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2} = \int \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C,$$

следователно

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Понякога вместо универсалната субституция могат да се използват субституциите $t = \sin x$ или $t = \cos x$, които в конкретни случаи водят по-бързо до целта. Например да пресметнем интеграла

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx .$$

Ако отделим един $\cos x$ от степента в числителя и го внесем под знака на диференциала получаваме

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} d\sin x = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d\sin x .$$

Сега полагаме $t = \sin x$,

$$I = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C ,$$

следователно

$$I = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C .$$