Лекция 5

§5. Неопределен интеграл

1. Определение и основни свойства. Нека функциите $f(x)$ и $F(x)$ са определени в отворения интервал (a,b). Казва се, че $F(x)$ е ***примитивна*** на $f(x)$ в интервала (a,b), когато $F'(x)=f(x)$ за всяко $x\in(a,b)$. Например функцията $F(x)=\sin x$ е примитивна на $f(x)=\cos x$. От дефиницията веднага се вижда, че примитивната не се определя еднозначно. Ако $F(x)$ е една примитивна и C е някаква константа, то функцията $F_1(x)=F(x)+C$ също е примитивна, понеже

$$F_1'(x)=[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

По нататък ще докажем, че ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a,b), то $f(x)$ има поне една примитивна в (a,b) и всичките примитивни се получават от $F(x)$ чрез добавяне на константа. Съвкупността от всичките примитивни на дадена функция $f(x)$ се нарича ***неопределен интеграл*** на $f(x)$ и се бележи с $\int f(x)dx$. По този начин за неопределения интеграл имаме

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

където $F(x)$ е една (коя да е) примитивна на $f(x)$.

Неопределеният интеграл е множество от функции и по тази причина равенството на два неопределени интеграла трябва да се схваща като равенство на множества. Две множества A и B са равни, когато всеки елемент на A принадлежи на B и обратно, всеки елемент на B принадлежи на A. Например неопределеният интеграл от функцията $f(x)=x+1$ можем да изразим по следните два (както и по други) начина

$$\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C \text{ и } \int(x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Множествата от функции

$$A=\left\{F(x)\,|\,F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1\right\} \text{ и } B=\left\{F(x)\,|\,F(x)=\frac{(x+1)^2}{2}+C_2\right\},$$

където C_1 и C_2 са произволни константи, са равни. Нека $F(x)\in A$, което означава, че $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1$, за някое C_1. Тогава $F(x)=\frac{(x+1)^2}{2}+C_1-\frac{1}{2}$, следователно $F_1(x)\in B$ и като елемент на B се получава при $C_2=C_1-\frac{1}{2}$. По същия се проверява, че всеки елемент на B е елемент на A.

Знакът $\int$ се нарича ***знак на интеграла***, $f(x)$ се нарича ***подинтегрална функция***, а $f(x)dx$ се нарича ***подинтегрален израз***, който може да се запише във вида $F'(x)dx$ или $dF(x)$. Операцията за намиране неопределен интеграл от дадена функция се нарича ***интегриране*** и се явява обратна на операцията диференциране, понеже съгласно определенията

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \text{ и } \left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

При работа с неопределен интеграл както е прието, чрез символа на интеграла $\int f(x)dx$ ще означаваме както съвкупността от всичките примитивни на $f(x)$ така и една конкретна примитивна според обстоятелствата на употреба на интеграла.

Интегрирането притежава следните основни свойства.

Свойство 1. Нека функцията $F(x)$ е диференцируема в отворения интервал Δ. Тогава

(5.1) $\int dF(x) = F(x) + C$, $x \in \Delta$.

Доказателството на това свойство следва направо от определението, понеже лявата страна на (5.1) всъщност е

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx.$$

Свойство 2. Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ. Тогава

(5.2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, $x \in \Delta$.

Формулата (5.2) се отнася за всяка примитивна на $f(x)$ и нейната справедливост също следва направо от определенията.

Свойство 3. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са непрекъснати в отворения интервал Δ. Тогава за неопределения интеграл на функцията $f_1(x) + f_2(x)$ е в сила

(5.3) $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, $x \in \Delta$.

Нека $F_1(x)$ е една примитивна за $f_1(x)$, а $F_2(x)$ е една примитивна за $f_2(x)$. Тогава

$$[F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

следователно функцията $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ е една примитивна за $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и по определение

(5.4) $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$.

В дясната страна на (5.3) стоят всевъзможни функции от вида

(5.5) $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$.

За да завършим доказателството на това свойство, остава да съобразим, че множеството от функции $\{F_1(x) + F_2(x) + C\}$, където C е произволна константа, съвпада с множеството от функции от вида (5.5), където C_1 и C_2 са произволни константи.

Свойство 4. Нека $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ и λ е константа. Тогава за интеграла на функцията $\lambda f(x)$ имаме

(5.6) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $x \in \Delta$.

Нека $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогава

$$[\lambda F(x)]' = \lambda F'(x) = \lambda f(x),$$

следователно функцията $\lambda F(x)$ е една примитивна за $\lambda f(x)$ и по определение

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C.$$

В дясната страна на (5.6) формално стои множеството от функции $\{\lambda F(x) + \lambda C\}$, за което непосредствено се съобразява, че съвпада с множеството от функции $\{\lambda F(x) + C\}$.

Като комбинираме свойствата 3 и 4 получаваме, че ***интегрирането е линейна операция***, т.е. интеграл от линейна комбинация е равен на съответната линейна комбинация от интеграли,

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x)]dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \lambda_n \int f_n(x)dx.$$

Нека $dF(x) = f(x)dx$ $(F'(x) = f(x))$. Когато преобразуваме израза $f(x)dx$ във вида $dF(x)$ се казва, че функцията $f(x)$ се ***внася под знака на диференциала***, а когато преобразуваме израза $dF(x)$ във вида $f(x)dx$ се казва, че функцията $F(x)$ се ***изнася пред знака на диференциала***.

Твърдение 5.1 ***(смяна на променливата)***. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ_x, а $\varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема в отворения интервал Δ_t, при което $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогава, ако

(5.7) $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то

(5.8) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказателство. Да положим $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Съгласно верижното правило за диференциране на съставни функции имаме

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

понеже по определение $F'(x) = f(x)$. Това показва, че $\Phi(t)$ е една примитивна за функцията $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, откъдето следва верността на формулата (5.8). ■

Формулата (5.8) може да се запише във вида

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

и да се разглежда като получена от (5.7) след полагането $x = \varphi(t)$ и затова се нарича формула за смяна на променливата.

Важен частен случай на твърдение 5.1 се получава, когато знаем

$$\int f(t)dt = F(t) + C.$$

Тогава след линейната смяна $t = ax + b$, $a \neq 0$, получаваме

$$\int f(ax+b)d(ax+b) = a\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C,$$

следователно

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Например за да намерим

$$I = \int \cos(3x+7)dx$$

извършваме линейната смяна $t = 3x + 7$, след което получаваме

$$\int \cos(3x+7)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+7) + C.$$

Практически тези действия се извършват по следния начин. Умножаваме и разделяме интеграла I с константата 3, след което получаваме

$$I = \frac{1}{3}\int \cos(3x+7)d3x.$$

Сега добавяме подходящата константа 7 под знака на диференциала,

$$I = \frac{1}{3}\int \cos(3x+7)d(3x+7)$$

и получаваме

$$I = \frac{1}{3}\int \cos(3x+7)d(3x+7) = \frac{1}{3}\sin(3x+7) + C,$$

понеже $\int \cos x dx = \sin x + C$. Тук под знака на диференциала можехме да добавим коя да е друга константа, но само константата 7 върши определена работа при неговото пресмятане. Последното понякога се нарича ***правило за адитивната константа***, което означава, че под знака на диференциала можем да добавяме подходяща константа, без да променяме интеграла.

Следните неопределени интеграли се използват често и тяхната вярност се доказва чрез непосредствено прилагане на определенията и формулите за производни на основните елементарни функции.

1) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $x > 0$, $\alpha \neq -1$.

Тази формула е вярна и когато степента позволява функцията $y = x^{\alpha}$ да бъде определена и за $x \leq 0$. Например

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

2) $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$, $x \neq -a$,

където a е произволна константа. Да положим

$$y = \ln|x+a| = \frac{1}{2}\ln(x+a)^2.$$

Тогава според верижното правило

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+a)^2} 2(x+a) = \frac{1}{x+a},$$

което доказва формулата. Да подчертаем, че тя е валидна във всеки от двата отворени интервала $(-\infty, -a)$ и $(-a, \infty)$. В частност тук показахме, че ако $y = \ln|x|$, то $y' = \dfrac{1}{x}$ във всеки от двата интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Например

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \text{ и } \int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C.$$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$.

В частност

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Например

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) $\int \cos x dx = \sin x + C$ и $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ и $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

6) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$,

където $a > 0$. Тук са възможни два отговора. Обикновено се избира първия, т.е. в повечето случаи пишем

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C .$$

Например

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C \text{ и } \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C .$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases},$$

където $a > 0$. Тук също са възможни два отговора, като обикновено се избира първия, т.е. пишем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C .$$

Например

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C .$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C ,$$

където $a \neq 0$. Тази формула се доказва след интегриране на тъждеството

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right],$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C .$$

Например

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \text{ и } \int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C .$$

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C ,$$

където $a \neq 0$. Например

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C .$$

10) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C \text{ и } \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C .$$

2. Непосредствено интегриране. Под това действие се разбира изравняване на величината под знака на диференциала с аргумента на оставащата функция и след това прилагане на някой от изброените по-горе таблични и интеграли.

Например за да пресметнем интеграла

$$I = \int 2xe^{x^2}\,dx ,$$

внасяме $2x$ под знака на диференциала, $2xdx = dx^2$, и получаваме

$$I = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C .$$

Тук използвахме, че $\int e^u du = e^u + C$. Аналогично за интеграла

$$I=\int\frac{\ln x}{x}dx,$$

внасяме $\frac{1}{x}$ под знака на диференциала, $\frac{1}{x}dx=d\ln x$, и получаваме

$$I=\int\ln x d\ln x=\frac{(\ln x)^2}{2}+C.$$

Тук използвахме, че $\int u du=\frac{u^2}{2}+C$. За интеграла

$$I=\int\frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

след внасяне на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ под знака на диференциала, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\arcsin x$, намираме

$$I=\int\sqrt{\arcsin x}d\arcsin x=\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Тук използвахме, че $\int\sqrt{u}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$. За да пресметнем интеграла

$$I=\int\left[6x-3\cos x+\frac{4\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx,$$

ще се възползваме отначало от линейното свойство,

$$I=6\int xdx-3\int\cos xdx+4\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=6I_1-3I_2+4I_3+C,$$

където

$$I_1=\int xdx,\ I_2=\int\cos xdx,\ I_3=\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Тук I_1, I_2 и I_3 означават по една примитивна от съответните интеграли. Очевидно

$$I_1=\frac{x^2}{2},\ I_2=\sin x.$$

За да пресметнем I_3 внасяме $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ под знака на диференциала, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-d\arccos x$. В този случай можехме да внесем $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\arcsin x$, но това би било безполезно. В крайна сметка

$$I_3=-\int\arccos x d\arccos x=-\frac{(\arccos x)^2}{2},$$

а за началния интеграл I получаваме

$$I=3x^2-3\sin x-2(\arccos x)^2+C.$$

Да разгледаме интеграла

$$I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}.$$

След отделяне на точен квадрат в знаменателя получаваме

$$I=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx,$$

който решаваме по следния начин,

$$I=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

По същия начин след отделяне на точен квадрат и свеждане към познати случаи се решават интегралите

$$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx,\ \int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ a\neq 0.$$

3. Интегриране по части. Решаването на даден интеграл $\int f(x)dx$ означава по същество да внесем функцията $f(x)$ под знака на диференциала. Много интеграли могат да се решат, ако първоначално внесем само някаква част от $f(x)$, ако това е изобщо възможно, след което да приложим правилото за интегриране по части.

Твърдение 5.2 *(интегриране по части)*. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в отворения интервал Δ. Тогава

(5.9) $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx,\ x\in\Delta.$

Доказателство. Съгласно формулата за диференциране на произведение

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x),$$

следователно

$$\int f(x)g'(x)dx=\int[f(x)g(x)]'dx-\int f'(x)g(x)dx,$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx,$$

понеже

$$\int[f(x)g(x)]'dx=f(x)g(x)+C.$$

При този извод пропуснахме познатите технически уточнения, произтичащи от факта, че неопределеният интеграл е множество от функции. ■

Формулата (5.9) се записва обикновено по следния начин

$$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x).$$

Например за да пресметнем интеграла

$$I=\int x^2\cos x dx,$$

внасяме функцията $\cos x$ под знака на диференциала, $\cos x dx=d\sin x$ и получаваме

$$I=\int x^2 d\sin x,$$

след което прилагаме правилото за интегриране по части,

$$I = x^2 \sin x - \int \sin x dx^2 .$$

Сега изнасяме функцията x^2 пред знака на диференциала $dx^2 = 2xdx$,

$$I = x^2 \sin x - \int \sin x \, 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx .$$

Внасяме $\sin x$ под знака на диференциала, $\sin x dx = -\cos x dx$ и получаваме

$$I = x^2 \sin x + 2\int x d \cos x ,$$

интегрираме отново по части,

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x dx ,$$

след което окончателно намираме

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C .$$

Да обърнем внимание, че по време на междинните действия, при решаване на интегралите не пишем произволна константа. Тази произволна константа се добавя накрая, когато в израза вече няма интегрални знаци.

В този пример се забелязват трите характерни стъпки на прилагане правилото за интегриране по части, внасяне под знака на диференциала, прилагане на формулата и изнасяне пред знака на диференциала.

По същия начин, чрез няколкократно интегриране по части, се пресмятат интеграли от вида

$$\int \sin \alpha x P(x) dx , \int \cos \alpha x P(x) dx , \int e^{\alpha x} P(x) dx ,$$

където $\alpha \neq 0$ е константа, а $P(x)$ е полином, като всеки път под знака на диференциала се внася тригонометричната или експоненциалната функция.

При интеграли от вида

$$\int f(x) \ln x dx , \int f(x) \arcsin \alpha x dx , \int f(x) \arccos \alpha x dx ,$$

$$\int f(x) \operatorname{arctg} \alpha x dx , \int f(x) \operatorname{arcctg} \alpha x dx ,$$

внасянето на $f(x)$ под знака на диференциала и следващо интегриране по части в много случаи може да доведе до решаване на интеграла. Например да пресметнем

$$I = \int x \ln x dx .$$

След внасяне на x под знака на диференциала, $xdx = \dfrac{dx^2}{2}$, получаваме

$$I = \int \ln x d \frac{x^2}{2} .$$

Интегрираме по части,

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d \ln x ,$$

откъдето след изнасяне на $\ln x$ пред знака на диференциала, $d \ln x = \dfrac{1}{x} dx$, намираме

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C .$$

Да пресметнем интеграла

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx .$$

Интегрираме по части,

$$I = x\sqrt{x^2 + 1} - \int x d\sqrt{x^2 + 1} ,$$

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}dx\,,$$

$$I = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - I + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|,$$

откъдето намираме

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right] + C\,.$$

Да пресметнем интеграла

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\,,\ \beta \neq 0\,.$$

Въвеждаме спрегнатия интеграл

$$J = \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\,.$$

Чрез интегриране по части намираме

$$I = \frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} d\sin\beta x = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\,,$$

$$I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}J\,.$$

Аналогично,

$$J = -\frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} d\cos\beta x = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\,,$$

$$J = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}I\,.$$

По този начин за интегралите I и J получихме линейната система

$$I + \frac{\alpha}{\beta}J = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x\,,$$

$$J - \frac{\alpha}{\beta}I = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\,,$$

която решаваме по познатия начин и намираме

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right],\ J = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x\right].$$