Лекция 3

§3. Основни теореми за диференцируеми функции

1. Основни теореми. Тази лекция е посветена на някои, традиционно възприемани като основни, теореми за диференцируемите функции. Теоремата на Ферма дава необходимо условие за наличието на екстремум на функция в дадена точка.

Определение 3.1. Нека функцията $f(x)$ е определена в някаква околност на точката x_0. Казва се, че x_0 е точка на локален максимум (минимум) за $f(x)$, когато е изпълнено $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ за всяко x от някоя δ-околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$. Ако $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ за $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\ne x_0$, то максимумът (минимумът) се нарича строг.

Точката x_0 се нарича точка на ***локален екстремум***, когато е точка на локален максимум или локален минимум. Определението "локален" означава, че въпросното свойство се задава в някаква (малка) околност на x_0 и не се отнася към поведението на функцията над цялата нейна дефиниционна област. На рис. 3.1 е показана графиката на непрекъсната функция, която има няколко локални екстремума

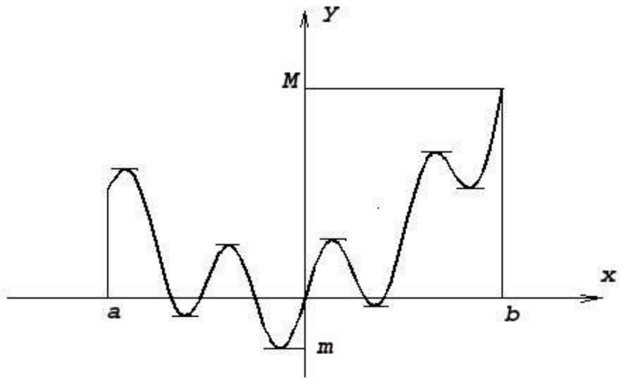

Рис. 3.1.

Тази функция има най-голяма и най-малка стойности в интервала $[a,b]$, при което най-голямата стойност $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ се достига в десния край на интервала, който не е точка на локален максимум, а най-малката $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ се достига в точка на локален минимум. Този пример илюстрира разликата между най-голямата и най-малката стойности (глобалните екстремуми) и локалните екстремуми.

Теорема 3.1 *(Ферма)*. Нека x_0 е точка на локален екстремум за функцията $f(x)$, определена в някаква околност на x_0 и нека $f(x)$ е диференцируема в x_0. Тогава $f'(x_0)=0$.

Доказателство. За определеност да предположим, че x_0 е точка на максимум. Съгласно дефиницията за производна

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

при което нарастването Δx може да клони към нула както със стойности по-големи от нула така и със стойности по-малки от нула, като и в двата случая границата е $f'(x_0)$. Да разгледаме подробно тези два случая.

1) $\Delta x\to 0$, $\Delta x>0$. В този случай за диференчното частно имаме

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0,$$

понеже $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$ (x_0 е точка на максимум) и $\Delta x>0$ (по предположение). Граничният преход запазва неравенствата, следователно границата на неположителни величини ще бъде също неположителна величина, което означава, че

(3.1) $f'(x_0)\le 0$.

2) $\Delta x\to 0$, $\Delta x<0$. В този случай за диференчното частно имаме

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0,$$

понеже $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$ (x_0 е точка на максимум) и $\Delta x<0$ (по предположение). Граничният преход запазва неравенствата, следователно границата на неотрицателни величини ще бъде също неотрицателна величина, което означава, че

(3.2) $f'(x_0)\ge 0$.

От (3.1) и (3.2) следва, че $f'(x_0)=0$. Случаят, когато x_0 е точка на локален минимум се разглежда аналогично. ■

Условието от теоремата на Ферма $f'(x_0)=0$ обаче не е достатъчно за наличие на екстремум. Например да разгледаме функцията $f(x)=x^3$. Имаме $f'(x)=3x^2$ и $f'(x_0)=0$ за $x_0=0$, но точката $x_0=0$ не е точка на локален екстремум, понеже стойността $f(x_0)=0$ не е нито най-голяма нито най-малка във всяка околност на x_0, за $x<0$ имаме $f(x)<f(x_0)$, а за $x>0$ имаме $f(x)>f(x_0)$.

Геометричната интерпретация на теоремата на Ферма е очевидна. Тя означава, че допирателната към графиката на $f(x)$ в точка на локален екстремум е успоредна на оста Ox (Рис. 3.1). Ако x_0 е точка на локален екстремум, то въпросната допирателна има уравнение $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x_0)=const$, което е уравнение на права, успоредна на оста Ox.

Теорема 3.2 *(Рол)*. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и диференцируема в отворения интервал (a,b), при което $f(a)=f(b)$. Тогава съществува поне една точка $\xi\in(a,b)$, за която $f'(\xi)=0$.

Доказателство. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ следователно е ограничена и достига най-голяма и най-малка стойности в този интервал. Нека

$$m=\min_{a\le x\le b} f(x)=f(x_{\min}) \text{ и } M=\max_{a\le x\le b} f(x)=f(x_{\max}),$$

за някои $x_{\min}\in[a,b]$ и $x_{\max}\in[a,b]$. Да разгледаме два случая.

1) Поне една от двете точки $x_{\min}$ или $x_{\max}$ е от отворения интервал (a,b). Тогава тази точка е същевременно и точка на локален екстремум и съгласно теоремата на Ферма, стойността на производната в тази точка е нула.

2) И двете точки $x_{\min}$ и $x_{\max}$ са крайни за интервала $[a,b]$. В този случай имаме

$$m=f(x_{\min})=f(a)=f(b)=f(x_{\max})=M,$$

понеже по условие $f(a)=f(b)$. От горното следва, че функцията $f(x)$ е константа в интервала $[a,b]$ и $f'(\xi)=0$ за всяко $\xi\in(a,b)$. С това теоремата на Рол е доказана. ■

Теоремата на Рол рядко се прилага непосредствено, но нейните следствия, които ще докажем нататък имат голямо значение за математическия анализ. На рис. 3.2 е показана илюстрация на тази теорема. Съгласно геометричната интерпретация на производната, заключението $f'(\xi)=0$ означава, че допирателната към графиката на функцията за $x=\xi$ е успоредна на оста Ox. По условие правата през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ е успоредна на Ox. Ако "придвижим" тази права вертикално до като все още има сечение с графиката, ще стигнем до точката $M(\xi, f(\xi))$, в която придвижената права ще бъде допирателна към графиката и следователно $f'(\xi)=0$.

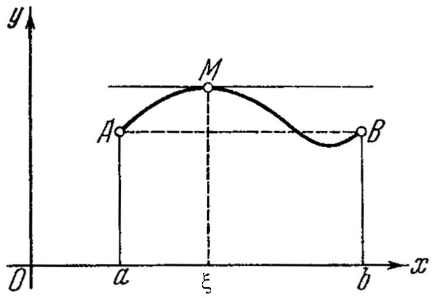

Рис. 3.2.

Теорема 3.3 ***(Лагранж)***. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и диференцируема в отворения интервал (a,b). Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, за която

(3.3) $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Доказателство. Доказателството на теоремата на Лагранж се основава на теоремата на Рол. Да разгледаме функцията $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, където λ е константа, която ще уточним по-нататък от изискването функцията $\varphi(x)$ да удовлетворява условията на теоремата на Рол. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b) понеже $f(x)$ има тези свойства, при което $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$. Условието $\varphi(a) = \varphi(b)$ се свежда до $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, което означава, че константата λ трябва да бъде избрана по следния начин

(3.4) $$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Сега от теоремата на Рол следва съществуването на поне едно $\xi \in (a,b)$, за което $\varphi'(\xi) = 0$, което заедно с определението на $\varphi(x)$ дава $f'(\xi) = \lambda$ и доказва теоремата на Лагранж. ■

Теоремата на Лагранж, която се нарича още ***теорема за крайните нараствания***, също има ясна геометрична интерпретация (Рис. 3.3).

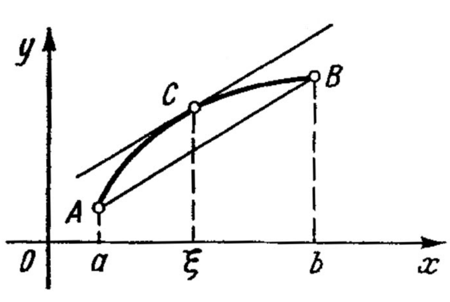

Рис. 3.3.

Числото λ от (3.4) е ъгловият коефициент на правата през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, която има уравнение $y = f(a) + \lambda(x-a)$. Теоремата на Лагранж гласи, че допирателната към графиката на $f(x)$ за някое $\xi \in (a,b)$ е успоредна на тази права, т.е. допирателната има същия ъглов коефициент, който пък според геометричната интерпретация на производната има стойност $f'(\xi)$.

Теорема 3.4 *(Коши)*. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в затворения интервал $[a,b]$ и диференцируеми в отворения интервал (a,b), при което $g'(x) \neq 0$, за всяко $x \in (a,b)$. Тогава съществува поне едно $\xi \in (a,b)$ такова, че

(3.5) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказателство. Доказателството на тази теорема повтаря идеята на доказателството на теоремата на Лагранж. Да положим $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)$, където константата λ ще определим от изискването $\varphi(x)$ да изпълнява условията на теоремата на Рол. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b), понеже $f(x)$ и $g(x)$ имат същите свойства, при това $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$. Условието $\varphi(a) = \varphi(b)$ води до $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, което означава, че константата λ трябва да бъде избрана по следния начин

(3.6) $$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Тук е сигурно, че $g(b) \neq g(a)$. В противен случай, съгласно теоремата на Рол, ще съществува някакво $\xi \in (a,b)$ такова, че $g'(\xi) = 0$, което противоречи на условието $g'(x) \neq 0$, за всяко $x \in (a,b)$. Функцията $\varphi(x)$ при такъв избор на λ удовлетворява всичките условия от теоремата на Рол, следователно може да се намери поне едно $\xi \in (a,b)$, за което $\varphi'(\xi) = 0$, т.е. $f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$, $\lambda = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, което заедно с (3.6) доказва теоремата на Коши. ■

Теоремата на Коши също има геометрична интерпретация (Рис. 3.4). Да разгледаме кривата γ в равнината Oxy с уравнения $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a,b]$. По-нататък ще се убедим, че от условието $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, следва монотонност на $g(x)$, което означава, че $g(x)$ има непрекъсната обратна функция, $t = g^{-1}(x)$, следователно кривата γ е графика на функцията $F(x) = f(g^{-1}(x))$ за $x \in [a,b]$.

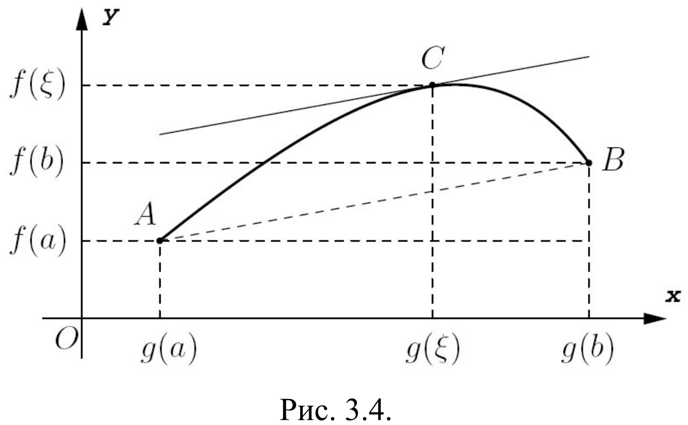

Рис. 3.4.

Ъгловият коефициент на правата през точките $A(g(a), f(a))$ и $B(g(b), f(b))$ е точно λ от формулата (3.6). От теоремата на Лагранж следва съществуване на $\xi \in (a,b)$, за което $F'(\xi) = \lambda$, но от друга страна $F'(\xi) = \dfrac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$, $\theta = g^{-1}(\xi)$. По този начин теоремите на Лагранж и Коши се оказаха еквивалентни, понеже от друга страна теоремата на Лагранж се получава от теоремата на Коши в частния случай, когато $g(x) = x$.

Ако функцията $f(x)$ е константа в интервала Δ, то $f'(x) = 0$, за всяко $x \in \Delta$. Следващото твърдение показва, че обратното също е вярно.

Твърдение 3.1. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал Δ, при което $f'(x) = 0$, за всяко $x \in \Delta$. Тогава $f(x) = C = const$.

Доказателство. Ще докажем, че за всеки $x_1 \in \Delta$ и $x_2 \in \Delta$ имаме $f(x_1) = f(x_2)$, което означава, че $f(x)$ е константа. За определеност нека $x_1 < x_2$. Тогава от теоремата на Лагранж следва, че $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, за някое $\xi \in (x_1, x_2)$. По условие производната се анулира навсякъде, следователно $f'(\xi) = 0$ и $f(x_2) = f(x_1)$, което доказва твърдението. ■

С други думи функцията $f(x)$ е константа в даден интервал тогава и само тогава, когато нейната производна се анулира навсякъде в този интервал.

Да разгледаме основната граница

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Тази граница не може да се пресметне непосредствено чрез заместване на граничната стойност $x = 0$ във функциите, понеже се получава израз от вида $\dfrac{0}{0}$. В този случай казваме, че има неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. За пресмятане на такива граници има различни средства, най-елементарното от които е правилото на Лопитал, което ще установим с помощта на теоремата на Коши.

Твърдение 3.2 ***(правило на Лопитал).*** Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми и $g'(x) \neq 0$ в околност на точката $x = a$, при което $f(a) = g(a) = 0$ и нека съществува границата

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогава съществува и границата на частното на $f(x)$ и $g(x)$ за $x \to a$, при което

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказателство. Нека $x \neq a$ се намира в достатъчно малка околност на a. Съгласно теоремата на Коши имаме

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ т.е. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

където ξ е между x и a, следователно, ако $x \to a$, то $\xi \to a$. От тук непосредствено получаваме, че

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A. \ ■$$

В горния случай правилото на Лопитал касае разкриване на неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Правилото е валидно и за неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Правилото на Лопитал може да се прилага последователно, докато се получи граница, която се пресмята непосредствено. Например

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Формула на Тейлър. Формулата, която ще изведем в този раздел е една от най-важните в математическия анализ.

Теорема 3.5 ***(формула на Тейлър).*** Нека функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до ред $(n+1)$ в околност $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta>0$, на точката $x=a$. Тогава за $x\in(a-\delta, a+\delta)$ е в сила представянето

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{3.7}$$

където ξ е някаква точка от интервала с краища x и a.

Доказателство. Отначало да отбележим, че всички събираеми в дясната страна на равенството (3.7) без последното се подчиняват на формулата

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\ k=0,1,2,\dots,n,$$

в това число и събираемото от ред нула $\frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0$, понеже по определение $0!=1$, $(x-a)^0=1$, а $f^{(0)}(x)\equiv f(x)$, следователно $f^{(0)}(a)=f(a)$. Събираемите от ред нула до ред n образуват полином $T_n(x)$ от степен не по-голяма от n, който се нарича ***полином на Тейлър***,

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

а последното събираемо се нарича ***остатъчен член*** на формулата във формата на Лагранж и се бележи R_n,

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3.8}$$

По този начин теоремата гласи, че всяка функция в околност на точката $x=a$ се представя като сбор от съответния полином на Тейлър и съответния остатъчен член.

Тази теорема също се доказва с помощта на теоремата на Рол. Да фиксираме едно $x\in(a-\delta, a+\delta)$, $x\neq a$, и да разгледаме функцията

$$\begin{aligned}\varphi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2-\frac{f'''(t)}{6}(x-t)^3-\cdots-\\ -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\lambda(x-t)^{n+1}\end{aligned} \tag{3.9}$$

където константата $\lambda=\lambda(x)$ е избрана такава, че $\varphi(a)=0$. От друга страна веднага се проверява, че $\varphi(x)=0$. Сега от теоремата на Рол следва, че $\varphi'(\xi)=0$, за някое ξ между x и a. За да оползотворим този факт първо трябва да пресметнем $\varphi'(t)$. Да отбележим, че диференцирането е по променливата t (a, x и λ са постоянни при това диференциране). Имаме

$$\varphi'(t) = -f'(t) + \left[-f''(t)(x-t) + f'(t)\right] + \left[-\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}2(x-t)\right] +$$

$$+\left[-\frac{f^{(4)}(t)}{6}(x-t)^3 + \frac{f'''(t)}{6}3(x-t)^2\right] +$$

$$+\cdots+$$

$$+\left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}\right] +$$

$$+\lambda(n+1)(x-t)^n$$

откъдето след съкращаване на еднаквите събираеми получаваме

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \lambda(n+1)(x-t)^n,$$

следователно от условието $\varphi'(\xi) = 0$ получаваме

$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Величината λ беше избрана такава, че $\varphi(a) = 0$, което след заместване във формулата (3.9) ни дава желания резултат. ■

Съдържанието на формулата на Тейлър е концентрирано в специалния вид на остатъчния член, понеже винаги можем да напишем формула от вида $f(x) = T_n(x) + R_n$, където R_n е някаква величина, но ако остатъчният член R_n е необозрим или има твърде сложен вид, то такава формула е фактически безполезна. Остатъчният член във формата на Лагранж (3.8) има почти същия вид като общото събираемо от полинома на Тейлър. Съществуват формули, при които остатъчният член има друга форма.

Ако функцията $f(x)$ е полином, то формулата на Тейлър се превръща в специфично тъждество.

Твърдение 3.3 *(формула на Тейлър за полином).* Нека $P(x)$ е полином от степен n, т.е. $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, и a е някакво число. Тогава $P(x)$ може да се запише във вида

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Доказателство. Лесно се проверява, че $(n+1)$-вата производна на $P(x)$ е тъждествено равна на нула, следователно остатъчният член в развитието на $P(x)$ по Тейлър, в околност на точката a, е нула. Сега за да завършим доказателството остава да се позовем на формулата (3.7) при $f(x) = P(x)$. ■

Формулата на Тейлър е отлично средство за изследване локалното поведение на функция $f(x)$ в околност на дадена точка a. Самата формула използва само локална информация за тази функция. Това са стойностите на функцията и известен брой нейни производни в точката a, както и поведението на последната производна в околност на точката. Формулата на Тейлър не е приспособена за глобално изследване на функцията в цял един интервал.

С помощта на символа "о малко", формулата на Тейлър може да се запише както следва

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Когато центърът на Тейлъровото развитие е $a=0$ се получава формулата на Маклорен

(3.10) $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),$$

за развитие на дадена функция $f(x)$ около нулата.

По-надолу ще приведем примери за някои важни развития по Маклорен, които се проверяват непосредствено от определенията.

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right).$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$

4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right),$

където $\binom{\alpha}{k}$ е обобщеният биномен коефициент. Тук α е някакво реално число, а $k=0,1,2,3,\dots$. Полагаме $\binom{\alpha}{0}=1$, а за $k>0$ по определение $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Например $\binom{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-2\right)}{6}$. Ако α е естествено число, то обобщеният биномен коефициент съвпада с традиционния от биномната формула на Нютон.

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$

Например да напишем първите няколко члена от развитието по Маклорен на функцията $f(x)=\sqrt{1+x}$. Имаме $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, следователно

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}x^3+\cdots,$$

или по друг начин

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right).$$

Тези формули могат да се използват за разкриване на неопределеност вместо правилото на Лопитал. Например да намерим границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}}{x^3}.$$

Според маклореновото развитие имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{16}+\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{16}.$$

В повечето случаи този подход води до по-бързи и лесни за проверяване пресмятания.

Накрая да приведем без доказателство следната

Теорема 3.6 ***(Дарбу).*** Нека функцията $f(x)$ има производна в интервала $[a,b]$ и нека η е число между $f'(a)$ и $f'(b)$. Тогава може да се намери някакво $\xi\in(a,b)$, за което $f'(\xi)=\eta$. ■

С други думи, ако функцията $f(x)$ е определена и диференцируема в интервал, то стойностите на нейната производна $f'(x)$ запълват интервал.