Лекция 2

§2. Производни

1. Някои основни граници. Тук ще опишем някои основни граници, с помощта на които по-нататък ще изведем производните на основните елементарни функции.

Ще докажем, че

(2.1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Нека $0<x<\frac{\pi}{2}$. Да разгледаме окръжност с център O и радиус $R>0$, както е показано на рис. 2.1, $\angle AOB = x$ и $AO\perp AC$. Тогава лицето на триъгълник OAB е по-малко от лицето на сектора OAB, което от своя страна е по-малко от лицето на правоъгълния триъгълник OAC (Рис. 2.1)

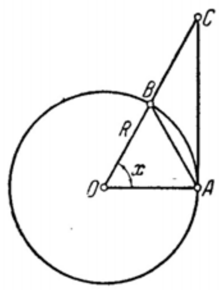

Рис. 2.1.

Сега от формулите за лице на триъгълник и сектор имаме

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x,$$

следователно

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Като разделим $\sin x$ на всеки член на последното неравенство, получаваме

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откъдето, чрез лемата за двамата полицаи, получаваме (2.1), понеже функцията $\cos x$ е непрекъсната и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

В §1 изведохме границата

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\text{ следователно }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

където e е основата на натуралния логаритъм. От нея, след смяна на променливата $x\to\frac{1}{x}$, получаваме следната граница

(2.2) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

След логаритмуване на съотношението (2.2), отчитайки непрекъснатостта на логаритмичната функция, получаваме

(2.3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Да положим $x = \ln(1+y)$, т.е $y = e^x - 1$. Ако x клони към нула то и y клони към нула и освен това. От (2.3) имаме $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$, следователно $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln e^x}{e^x - 1} = 1$, което дава следната основна граница

(2.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Да разгледаме функцията $y = (1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(x+1)} - 1$. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\ln(1+x)}{x},$$

следователно

(2.5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

2. Производна на функция. Нека функцията $y = f(x)$ е определена в околност на точката x_0. Нека Δx е някакво нарастване (промяна) на аргумента, което води до нарастване на функцията $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Отношението

(2.6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

се нарича диференчно частно на $f(x)$ в точката x_0.

Определение 2.1. Нека съществува границата на диференчното частно (2.6) при $\Delta x \to 0$. Тогава нейната стойност се нарича производна на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се бележи с $f'(x_0)$.

С други думи

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Например да разгледаме функцията $y = f(x) = x^2$. Тогава

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

откъдето намираме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x,$$

следователно, ако $y = x^2$, то $y' = 2x$.

Производната има ясен геометричен смисъл (Рис. 2.2).

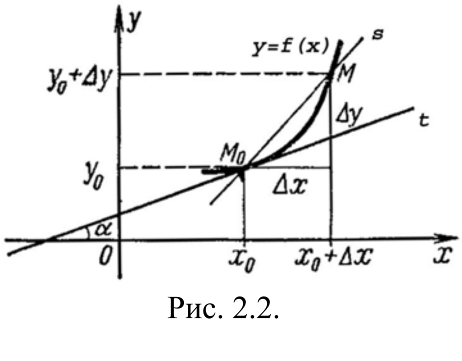

Рис. 2.2.

Нека M_0 е точката с координати (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$, а M има координати $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Правата s през точките M_0 и M, която е секуща за графиката на $f(x)$, има уравнение

$$s: y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) = f(x_0) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

След граничния преход при $\Delta x \to 0$, секущата s преминава в допирателната t към графиката на функцията за точка x_0, с уравнение

(2.7) $\quad t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Следователно, ако функцията $f(x)$ има производна в x_0, то в тази точка съществува допирателна към графиката на $f(x)$, при което въпросната допирателна има уравнение (2.7). Този извод трябва да се схваща като определение за допирателна. От геометричната конструкция се вижда, че за ъгловия коефициент на допирателната е изпълнено $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Чрез символа $o(q)$ ще означаваме величина, за която $\lim\limits_{q \to 0} \frac{o(q)}{q} = 0$ (чете се "о малко").

Определение 2.2. Нека функцията $y = f(x)$ е определена в някаква околност на точката x_0, при което нарастването $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ може да се представи във вида $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, където $A = A(x_0)$ е константа (A не зависи от Δx). Тогава се казва, че $f(x)$ е диференцируема в x_0, а произведението $A\Delta x$ се нарича диференциал на $f(x)$ в x_0 и се бележи с dy.

По този начин $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, където $dy = A\Delta x$.

Теорема 2.1. Функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато $f(x)$ има производна в x_0, при което производната и диференциала са свързани с формулата $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Доказателство. Нека $f(x)$ е диференцируема в x_0. Тогава за диференчното частно имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

следователно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

което означава, че $f'(x_0) = A$ и $dy = f'(x_0)\Delta x$. Обратното (също) е очевидно.

В частност, за $f(x) = x$ имаме $f'(x) \equiv 1$ и $dx = \Delta x$, следователно $dy = f'(x_0)dx$, което обосновава следното означение за производна

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ и } y' = \frac{dy}{dx}.$$

От формулата за производна следва, че ако $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, то $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, в околност на x_0 и $f(x)$ малко се отличава от линейна функция в тази околност, което съставлява смисъла на определението $f(x)$ да бъде диференцируема. Теорема 2.1 показва, че условията $f(x)$ да бъде диференцируема и $f(x)$ да има на производна са еквивалентни.

Казва се, че $f(x)$ е диференцируема в интервала (a,b), когато $f(x)$ е диференцируема във всяка точка от този интервал.

Верността на следващото твърдение следва непосредствено от определенията.

Твърдение 2.1. Нека $f(x)$ е диференцируема в точката x_0. Тогава $f(x)$ е непрекъсната в x_0. ■

От непрекъснатостта на една функция в дадена точка обаче не следва, че тя е диференцируема. Например функцията $f(x)=|x|$ е непрекъсната в $x_0=0$ но няма производна в тази точка. Има примери (Вайерщрас) за функция, която е определена и непрекъсната за всяко $x\in\mathrm{R}$, но няма производна в нито една точка.

Твърдение 2.2. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката x. Тогава:

1) Функцията $f(x)+g(x)$ също е диференцируема в x, при което

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x).$$

2) Функцията $f(x)g(x)$ също е диференцируема в x, при което

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

3) Ако $g(x)\neq 0$, то функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ също е диференцируема в x, при което

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Доказателство. **1**) Да положим $h(x)=f(x)+g(x)$ и да разгледаме диференчното частно на $h(x)$. Имаме

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

следователно

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

2) Да положим $h(x)=f(x)g(x)$ и да разгледаме диференчното частно на $h(x)$. Имаме

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

следователно

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=$$

$$=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]\left[\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\right]+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Формулата за диференциране на частно се доказва по аналогичен начин. По нататък ще приведем още едно доказателство на тази формула въз основа на известната вече формула за диференциране на произведение и верижното правило за диференциране на съставни функции. ■

Ако функцията $f(x)$ е константа, $f(x)=\lambda=const$, то нейната производна е навсякъде равна на нула, което веднага се вижда от определението, понеже всичките диференчни частни на $f(x)$ са нули. Сега от правилото за диференциране на произведение следва, че ако $f(x)$ е диференцируема и λ е константа, то функцията $\lambda f(x)$ също е диференцируема, при което $[\lambda f(x)]'=\lambda f'(x)$. От тук и от твърдение 2.2 следва, че всяка линейна комбинация от диференцируеми функции също е диференцируема, при което производната е съответната линейна комбинация от производни,

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(x)\right]'=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k'(x),$$

което означава, че ***диференцирането е линейна операция***. Начинът за диференциране на произведение обаче силно отличава диференцирането от други линейни операции. Прилагайки последователно правилото за диференциране на произведение на две функции получаваме

$$[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x),$$

което лесно се обобщава за повече на брой множители.

Следващото твърдение касае правилото за диференциране на съставни функции.

Твърдение 2.3 (*верижно правило*). Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, а функцията $\varphi(t)$ е диференцируема в точката t_0 и $x_0=\varphi(t_0)$. Тогава съставната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t_0, при което $F'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0)$.

Доказателство. Означаваме $\Delta F=F(t_0+\Delta t)-F(t_0)$, $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ и $\Delta\varphi=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$. Да разгледаме диференчното частно на $F(t)$ в точката t_0,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t}=\frac{f(\varphi(t_0+\Delta t))-f(\varphi(t_0))}{\Delta t}=\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta t}=$$

$$=\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната в t_0, понеже е диференцируема, следователно нарастването $\Delta\varphi$ клони към нула при $\Delta t\to 0$. От горното представяне следва

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta t}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{f(\varphi(t_0)+\Delta\varphi)-f(\varphi(t_0))}{\Delta\varphi}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0),$$

което доказва твърдението. Тук, за да спестим технически усложнения, мълчаливо предполагахме, че се разглеждат само нараствания $\Delta\varphi\neq 0$. ■

При извеждане производните на обратните тригонометрични функции ще използваме факта, че ако една диференцируема функция има обратна, то обратната също е диференцируема.

Твърдение 2.4. Нека функцията $y = f(x)$ е строго монотонна и диференцируема в интервала (a, b). Тогава нейната обратна $x = f^{-1}(y)$ (която съществува и е непрекъсната) е диференцируема, при което $\left[f^{-1}(y)\right]' = \dfrac{1}{f'(x)}$. ■

Формулата за производната на обратната функция се получава от верижното правило след диференциране на тъждеството $f^{-1}(f(x)) = x$.

3. Производни на основните елементарни функции. В този раздел ще изведем производните на основните елементарни функции въз основа на основните граници, приведени в началото и правилата за диференциране.

Експоненциална и логаритмична функция. Нека $y = e^x$. Тогава

$$\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Сега от основната граница (2.4) получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x,$$

следователно, ако $y = e^x$, то $y' = e^x$. Експоненциалната функция съвпада със своята производна. Такова свойство има и всяка функция от вида λe^x, където λ е константа.

Нека $y = \ln x$, $x > 0$. Тогава

$$\frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x \dfrac{\Delta x}{x}}.$$

Сега от основната граница (2.3) получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$

следователно ако $y = \ln x$, то $y' = \dfrac{1}{x}$. Производната на $\ln x$ може да бъде изведена въз основа на факта, че функциите e^x и $\ln x$ са взаимно обратни, което означава, че са валидни тъждествата $\ln e^x = x$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $e^{\ln x} = x$ за $x > 0$. Като диференцираме тъждеството $\ln e^x = x$ получаваме $\left[\ln e^x\right]' = \left[\ln' e^x\right] e^x = 1$, следователно $\ln' e^x = \dfrac{1}{e^x}$, откъдето като положим $y = e^x$, получаваме $\left[\ln y\right]' = \dfrac{1}{y}$.

Общата показателна функция (Рис. 2.3) $y = a^x$, $a > 0$, се определя чрез експоненциалната, $y = e^{x \ln a}$, следователно $y' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

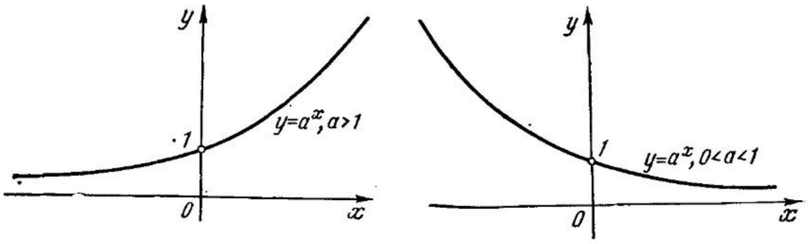

Рис. 2.3.

За логаритмичната функция $\log_a x$ (Рис. 2.4) при произволна основа $a > 0$

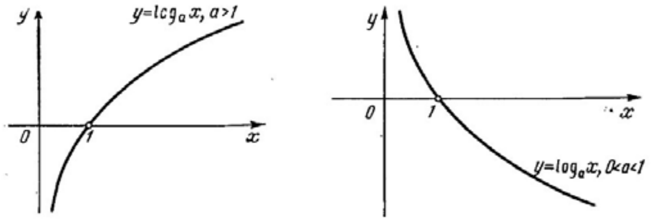

Рис. 2.4.

имаме $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, следователно $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Степенна функция. Нека $y = x^{\alpha}$, $x > 0$. Тук α е произволно реално число. Степенната функция (Рис. 2.5) се определя чрез експонента и логаритъм по следния начин $y = e^{\alpha \ln x}$.

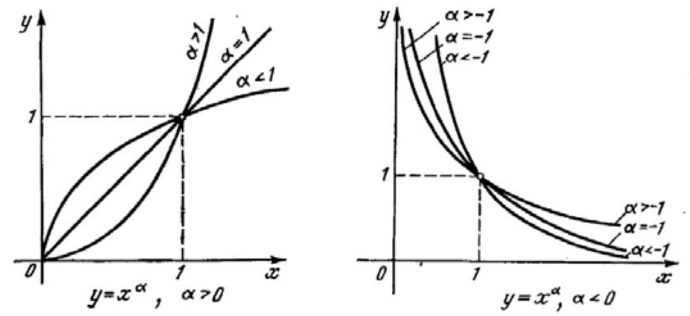

Рис. 2.5.

Да отбележим специално, че в общия случай степента A^B, където $A > 0$ и B са някакви величини също се определя по този начин, $A^B = e^{B \ln A}$. От верижното правило имаме

$$y' = \left[e^{\alpha \ln x}\right]' = e^{\alpha \ln x}\left[\alpha \ln x\right]' = x^{\alpha}\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

следователно, ако $y = x^{\alpha}$, то $y' = \alpha x^{\alpha-1}$. Може да се докаже, че тази формула е валидна и в случаите, когато степента α позволява функцията да се разглежда и за $x < 0$. Например, ако $y = \sqrt{x}$, то $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и ако $y = \dfrac{1}{x}$, то $y' = -\dfrac{1}{x^2}$. Последното заедно с верижното правило ни дава друго доказателство на правилото за диференциране на частно. Имаме

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]' = \left[f(x)(g(x))^{-1}\right]' = f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)\left[(g(x))^{-1}\right]'.$$

От друга страна $\left[(g(x))^{-1}\right]' = (-1)(g(x))^{-2} g'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$, следователно

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = f'(x)(g(x))^{-1} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Тригонометрични функции. Да разгледаме отначало основните тригонометрични функции $\sin x$ и $\cos x$ (Рис. 2.6), които са определени за всяко $x \in \mathrm{R}$ и имат период 2π.

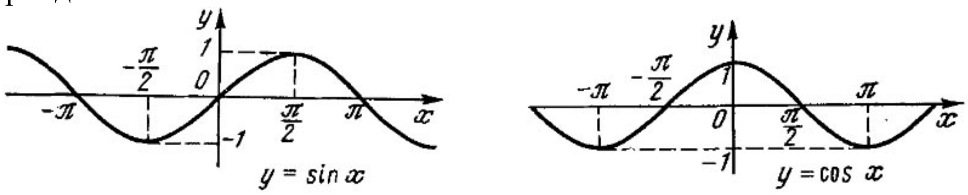

Рис. 2.6.

За функцията $y = \sin x$ имаме

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Сега от основната граница (2.1) получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

следователно ако $y = \sin x$, то $y' = \cos x$.

Нека $y = \cos x$. Тогава $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, следователно съгласно верижното правило

$$y' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right](-1),$$

следователно ако $y = \cos x$, то $y' = -\sin x$.

Производните на функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (Рис. 2.7) се получават като следствие. Нека $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$. Тогава

$$y' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

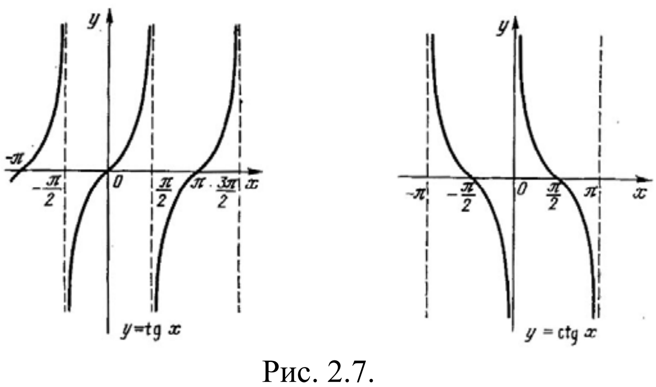

Рис. 2.7.

Аналогично намираме, че ако $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathrm{Z}$, то $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Обратни тригонометрични функции. **1) Функцията** $\arcsin x$**.** Тази функция се определя като обратна на функцията $\sin x$ в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, където $\sin x$ е строго растяща и следователно притежава обратна (Рис 2.8).

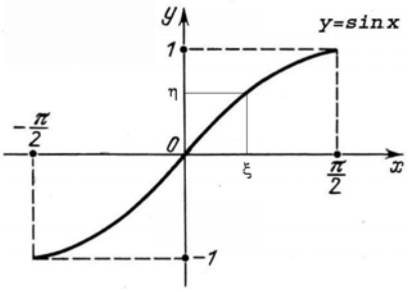

Рис. 2.8.

Ако $\eta = \sin\xi$, за някое ξ, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \xi \leq \dfrac{\pi}{2}$, то по определение $\xi = \arcsin\eta$. По този начин функцията $y = \arcsin x$ е определена в интервала $[-1,1]$ и приема стойности в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ и т.н. Функцията $\arcsin x$ е нечетна и нейната графика е изобразена на рис. 2.9.

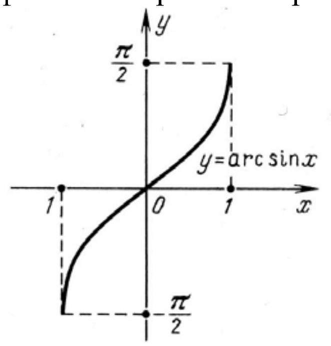

Рис. 2.9.

Функциите $\sin x$ и $\arcsin x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\sin(\arcsin x) = x$ за $x \in [-1,1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\arcsin x$). Да диференцираме тъждеството $\arcsin(\sin x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\arcsin(\sin x)]' = \arcsin'(\sin x)\cos x = 1.$$

Да положим $\sin x = u$. Имаме $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, понеже $\cos x \geq 0$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Сега от горното равенство намираме

$$[\arcsin u]' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

следователно, ако $y = \arcsin x$, то $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Функцията $\arccos x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\cos x$ в интервала $[0,\pi]$, където $\cos x$ е строго намаляваща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \cos\xi$, за някое ξ, $0 \le \xi \le \pi$, то по определение $\xi = \arccos\eta$. По този начин функцията $y = \arccos x$ е определена в интервала $[-1,1]$ и приема стойности в интервала $[0,\pi]$. Например, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos 1 = 0$ и т.н. Графиката на функцията $\arccos x$ е изобразена на рис. 2.10.

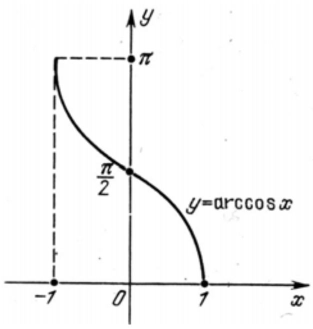

Рис. 2.10.

Функциите $\cos x$ и $\arccos x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\cos(\arccos x) = x$ за $x \in [-1,1]$ и $\arccos(\cos x) = x$ за $x \in [0,\pi]$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\arccos x$). Да диференцираме тъждеството $\arccos(\cos x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\arccos(\cos x)]' = -\arccos'(\cos x)\sin x = 1.$$

Да положим $\cos x = u$. Имаме $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, понеже $\sin x \ge 0$ за $x \in [0,\pi]$. Сега от горното равенство намираме

$$[\arccos u]' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

следователно, ако $y = \arccos x$, то $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) **Функцията** $\operatorname{arctg} x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, където $\operatorname{tg} x$ е строго растяща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \operatorname{tg}\xi$, за някое ξ, $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$, то по определение $\xi = \operatorname{arctg}\eta$. По този начин функцията $y = \operatorname{arctg} x$ е определена в интервала $(-\infty,\infty)$ и приема стойности в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и т.н. Функцията $\operatorname{arctg} x$ е нечетна и нейната графика е изобразена на рис. 2.11.

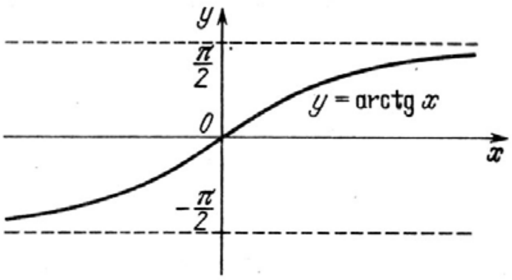

Рис. 2.11.

Функциите $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\operatorname{arctg} x$). Да диференцираме тъждеството $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$. Съгласно верижното правило получаваме

$$[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)]' = \operatorname{arctg}'(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

Да положим $\operatorname{tg} x = u$. Имаме $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Сега от горното равенство намираме

$$[\operatorname{arctg} u]' = \frac{1}{1+u^2},$$

следователно, ако $y = \operatorname{arctg} x$, то $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Граничните съотношения

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty \text{ и } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

дават основания да положим

$$\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

4) Функцията $\operatorname{arcctg} x$. Тази функция се определя като обратна на функцията $\operatorname{ctg} x$ в интервала $(0, \pi)$, където $\operatorname{ctg} x$ е строго намаляваща и следователно притежава обратна. Ако $\eta = \operatorname{ctg}\xi$, за някое ξ, $0 < \xi < \pi$, то по определение $\xi = \operatorname{arcctg}\eta$. По този начин функцията $y = \operatorname{arcctg} x$ е определена в интервала $(-\infty, \infty)$ и приема стойности в интервала $(0, \pi)$. Например, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и т.н. Графиката на функцията $\operatorname{arcctg} x$ е изобразена на рис. 2.12.

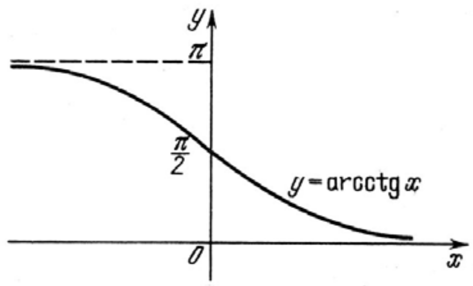

Рис. 2.12.

Функциите $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ са взаимно обратни, следователно са изпълнени тъждествата $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ за $x \in (0, \pi)$ (последното се получава от изискването x да бъде стойност на $\operatorname{arcctg} x$). Както в предишната точка намираме, че ако $y = \operatorname{arcctg} x$, то $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Граничните съотношения $\lim_{x\to\pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$ и $\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg} x = \infty$ дават основания да положим $\operatorname{arcctg}\infty = 0$ и $\operatorname{arcctg}(-\infty) = \pi$.

4. Производни и диференциали от по-висок ред. Втората производна $f''(x)$ на функцията $f(x)$ се определя като първа производна на $f'(x)$, третата производна $f'''(x)$

се определя като първа производна на $f''(x)$ и т.н. Например, ако $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{\mathrm{iv}}(x) = \sin x$ и т.н. За n-та производна на $f(x)$ понякога е удобно да се използва означението $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,\dots$, при което по определение нулевата производна на $f(x)$ съвпада със самата $f(x)$, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$. Вторият диференциал $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$ $\left(dx^2 = (dx)^2\right)$ се определя като първи диференциал на $df(x)$ и т.н. Без да правим уточнения за целесъобразността на това определение полагаме $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$, $n = 0,1,2,\dots$, като полагаме $d^0 f(x) \equiv f(x)$.

За втората производна на произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ имаме

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]'' &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]' = \\
&= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = \\
&= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)
\end{aligned}
$$

което наподобява познатата формула $(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$. Тази аналогия е закономерна и за производни от по-висок ред.

Да припомним биномната формула на Нютон. За всеки две величини a, b и всяко цяло неотрицателно число n е изпълнено равенството

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
&= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-2)}{2}a^2b^{n-2} + \dots + \frac{n(n-2)}{2}a^{n-2}b^2 + nab^{n-1} + b^n
\end{aligned}
$$

където $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1.2\cdots k}$ са биномните коефициенти. По определение $\binom{n}{0} = 1$. Биномните коефициенти са симетрични, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$. Символът $n!$, $n = 1,2,3,\dots$, означава произведението на всичките естествени числа от 1 до n, например $3! = 1.2.3 = 6$. По определение $0! = 1$.

Теорема 2.2 ***(формула на Лайбниц)***. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат производни до ред n $(n = 0,1,2,\dots)$. Тогава е в сила формулата

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) = \\
&= f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \dots + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Доказателство. От последователното прилагане формулата за диференциране на произведение се вижда, че

$$
[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),
$$

където λ_0, λ_1, ..., λ_n са коефициенти, които зависят само от реда на диференциране n и не зависят от конкретния избор на функциите $f(x)$ и $g(x)$. Това ни дава възможност да определим въпросните коефициенти чрез специален избор на функциите $f(x) = e^{ax}$ и $g(x) = e^{bx}$, където $a \neq b$ са някакви константи. Лесно се проверява, че $f^{(k)}(x) = a^k e^{ax}$ и $g^{(k)}(x) = b^k e^{bx}$, за всяко цяло неотрицателно k. От друга страна $f(x)g(x) = e^{(a+b)x}$ и следователно $\left[f(x)g(x)\right]^{(n)} = (a+b)^n e^{(a+b)x}$. Като заместим в горната формула и съкратим всички събираеми на $e^{ax}e^{bx}$ намираме

$$(2.9) \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^{n-k} b^k ,$$

което означава, че $\lambda_k = \binom{n}{k}$, $k = 0,1,\ldots,n$, понеже биномните коефициенти са единствените, за които равенството (2.9) е изпълнено при всеки избор на константите a и b. С това формулата (2.8) е доказана. ■

Например за функцията $f(x) = e^x x^2$ да намерим $f^{(100)}(x)$. По формулата на Лайбниц при $f(x) = e^x$ и $g(x) = x^2$ имаме

$$f^{(100)}(x) = \left(e^x\right)^{(100)}\left(x^2\right)^{(0)} + 100\left(e^x\right)^{(99)}\left(x^2\right)^{(1)} + \frac{100.99}{2}\left(e^x\right)^{(98)}\left(x^2\right)^{(2)}.$$

Следващите събираеми са нули, понеже всички производни от ред трети и по-висок на функцията $g(x) = x^2$ са тъждествено нули. Следователно

$$f^{(100)}(x) = e^x x^2 + 100e^x(2x) + \frac{100.99}{2}e^x 2 = e^x\left[x^2 + 200x + 9900\right].$$

5. Едностранни и безкрайни производни. По аналогия с едностранните граници могат да се въведат едностранни производни. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната отляво (отдясно) в точката x_0 и съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то тази граница се нарича ***лява (дясна) производна*** на функцията $f(x)$ в точката x_0 е се бележи с $f'_-(x_0)$ $\left(f'_+(x_0)\right)$.

Ако функцията е диференцируема в точката x_0, то лявата и дясната производни са равни на стойността на производната в x_0, $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Обратното също е вярно, ако една функция има лява и дясна производна в дадена точка и те са равни, то функцията е диференцируема в тази точка. Има функции, за които едностранните производни съществуват и са различни. Например функцията $y = f(x) = |x|$ (Рис. 2.13) има лява и дясна производни в точката $x_0 = 0$, при което $f'_-(0) = -1$ и $f'_+(0) = 1$.

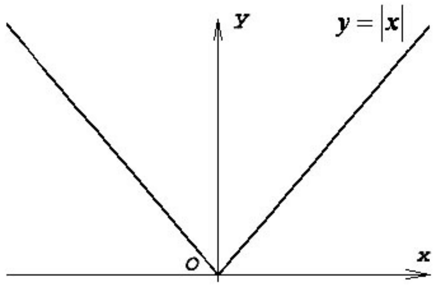

Рис. 2.13.

В този случай се казва, че графиката на $f(x)$ има ***ъглова*** точка за $x = x_0$.

Ако границата на диференчното частно е ∞,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty ,$$

то се казва, че функцията $f(x)$ има производна в x_0, равна на ∞. Аналогично се постъпва, когато границата е $-\infty$. Пишем $f'(x_0)=\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$. Например функцията $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ има безкрайна производна в точката $x_0=0$ (Рис. 2.14).

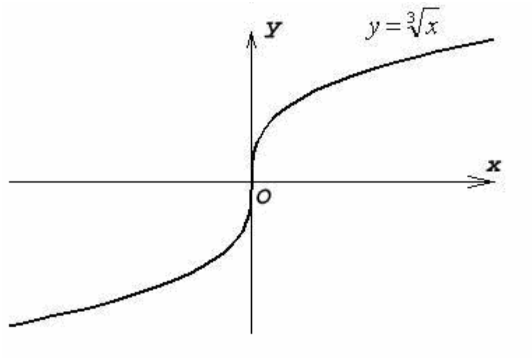

Рис. 2.14.

В този случай вертикалната права $x=x_0$ е допирателна към графиката на $f(x)$.

Има функции, за които в дадена точка и двете едностранни производни са безкрайни, но с различен знак. Например да разгледаме функцията $y=f(x)=\sqrt{|x|}$ в точката $x_0=0$ (Рис. 2.15).

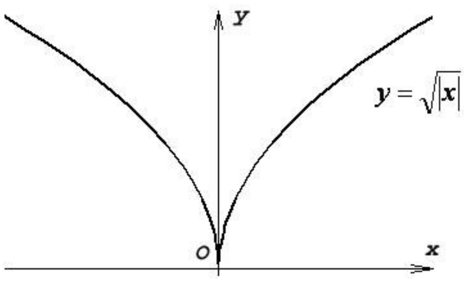

Рис. 2.15.

Имаме $f'_+(0)=\infty$ и $f'_-(0)=-\infty$. В такъв случай се казва, че графиката на $f(x)$ има ***рогова*** точка за $x=x_0$.