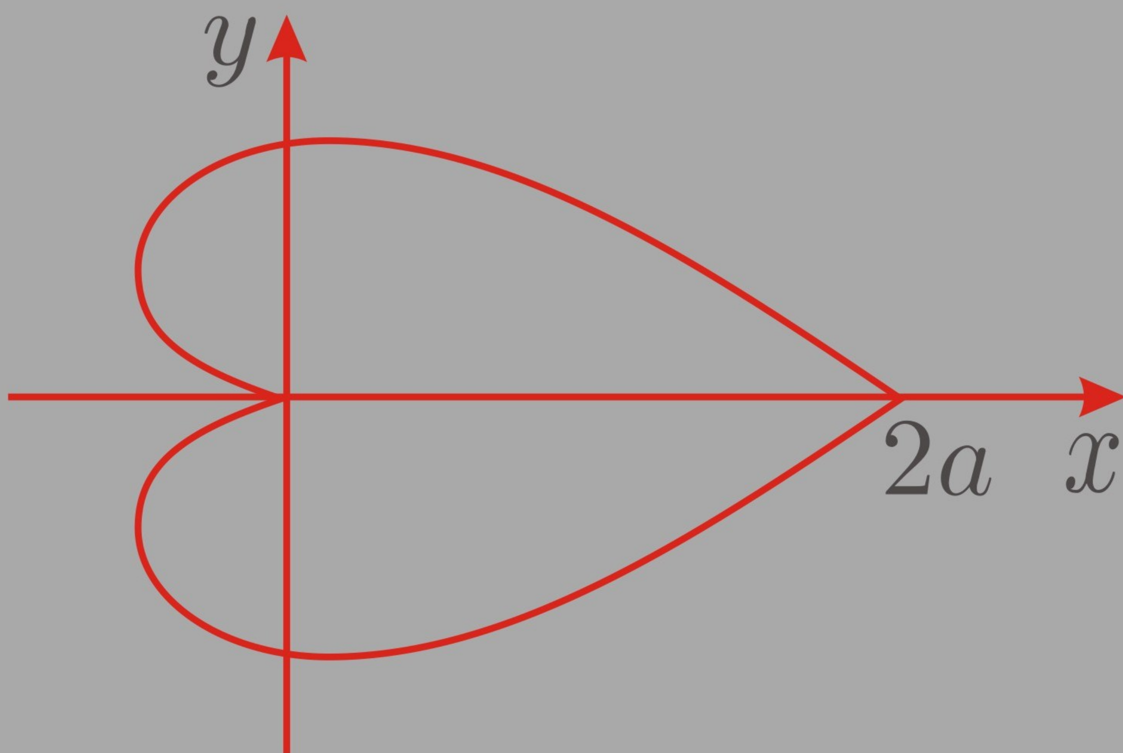
Васил Грозданов
Красимир Йорджев
Анка Марковска



РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Васил Грозданов

Красимир Йорджев

Анка Марковска

РЪКОВОДСТВО

ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ

ПО

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Благоевград
2012

ISBN 978-954-680-805-9

Университетско издателство „Неофит Рилски“
Благоевград, 2012

Съдържание

ПРЕДГОВОР

Настоящето ръководство за решаване на задачи по математически анализ - първа част е написано в съответствие с учебната програма за тази дисциплина, по която се работи през последните години в Югозападния университет „Неофит Рилски“ - Благоевград. Ръководството е предназначено за студентите от специалностите „Физика“, „Педагогика на обучението по физика и математика“, „Педагогика на обучението по математика и информатика“, „Информатика“ и „Компютърни системи и технологии“ в ЮЗУ „Неофит Рилски“. Но разбира се, то може да се ползва и от други студенти от ЮЗУ „Неофит Рилски“, както и от студенти от други ВУЗ-ове, които задълбочено изучават дисциплината математически анализ.

Издаването на ръководството е продиктувано от стремежа на авторите да представят в систематизиран вид решаването на задачи по математически анализ- първа част и отразява опита в това отношение на преподавателите от катедра „Математика“ на ЮЗУ „Неофит Рилски“.

Ръководството е разработено както следва:

- Доц. д-р Васил Гроздανов- глави втора, седма и осма;
- Доц. д-р Красимир Йорджев- глави първа, трета и четвърта;
- Гл. ас. Ана Марковска- глави пета и шеста.

Ръководството излиза под общата научна редакция на доц. д-р Васил Грозданов.

Благодарим на рецензентите проф. дмн Кирил Чимев и доц. д-р Методи Аслански за направените препоръки, с които помогнаха да се подобри ръкописа на ръководството.

05. 03. 2012 г. Авторите
Благоевград

1. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

1.1 Елементи от теория на математическата логика

Понятието *съждение* е първично понятие в логиката и за него не е възможно да се даде строга научна дефиниция. Ще се задоволим с факта, да приемем, че съждението е самостоятелна мисъл, логически израз, изказан на някой от съществуващите езици, и чрез която се потвърждава или отрича нещо. Например мислите:

- днес времето е дъждовно;
- София е столица на България;
- уравнението $x^2 - 5x + 6 = 0$ има корени числата 2 и 3;
- корените на уравнението $x^2 + 1 = 0$ са комплексни числа;

са съждения.

В математическата логика под съждение се разбира твърдение, което може да бъде вярно или невярно. Съждението "три плюс четири е равно на седем" е вярно, а съждението "числото 20 не се дели на 2" е невярно съждение.

За да се характеризира едно съждение като вярно или невярно, се въвежда така наречената *вярностна функция на съждението*. Нека p е съждение. На съждението p се съпоставя в съответствие точно едно от двете числа 0 или 1, като на невярно съждение се приписва вярностна стойност 0, а на вярно съждение се приписва вярностна стойност 1.

Функцията f, която приема стойност 1 или 0, в зависимост от верността или неверността на съждението p, се нарича вярностна функция на съждението, т. е.

$$f(p) = \begin{cases} 1, & \text{ако p е вярно съждение} \\ 0, & \text{ако p е невярно съждение.} \end{cases}$$

Съжденията могат да бъдат елементарни или сложни. Елементарно е това съждение, никоя част на което не е съждение, т. е. от него не може да се отдели друго съждение. Например "две е четно число". Сложно съждение е това съждение, някои части на което представляват също така съждение. Например "числото 20 се дели на 4 и числото 20 се дели на 5" е сложно, тъй като частите му "числото 20 се дели на 4" и "числото 20 се дели на 5" са елементарни съждения.

От елементарните съждения, с помощта на тъй наречените логически връзки, към които се отнасят частицата *не*, съюзите *и*, *или*, думите *ако ..., то ...*, *тогава и само тогава когато*, се получават сложни твърдения. Операциите, чрез които от няколко елементарни съждения, се създават сложни съждения, се наричат *логически операции.* Ще разгледаме следните логически операции:

Отрицание на съждение: Отрицанието на дадено съждение p се означава с $\overline{p}$ (чете се не p), и е съждение, което е вярно, когато p не е вярно, и невярно, когато p е вярно. Таблицата на разпределение на верностните стойности на отрицанието е следната:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Съдържателно отрицанието съответства на употребата на частицата *не*, но на практика, то може да бъде изказано по различни начини.

Конюнкция на две съждения: Конюнкцията на двете съждения p и q се нарича такова съждение $p \wedge q$ (чете се p и q), което е вярно тогава и само тогава, когато са верни и двете съждения p и q. Таблицата на разпределение на верностните стойности на конюнкцията е следната:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Операцията конюнкция може да се приложи и за краен брой съждения. Конюнкцията на n съждения

$$\wedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

е вярна тогава и само тогава, когато са верни всички съждения p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и невярна, когато поне едно от тях е невярно.

Дизюнкция на две съждения: Дизюнкция на две съждения p и q се нарича такова съждение $p \vee q$ (чете се p или q), което е вярно тогава и само тогава, когато е вярно поне едно от тези съждения. Таблицата на разпределение на верностните стойности на дизюнкцията е следната:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Знакът за дизюнкция " $\vee$ " отговаря на логическия съюз *или*, който е употребен в неразделен смисъл: вярно е съждението p или q, или и двете съждения.

Операцията дизюнкция може да се обобщи за краен брой съждения. Дизюнкцията на n съждения

$$\vee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

е вярна тогава и само тогава, когато е вярно поне едно от съжденията p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Употребата на съюза *или* в разделителен смисъл е отразена в следната таблица

p	q	$p \bar{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Операцията $p \bar{\vee} q$ с горната таблица на разпределение на верностните стойности се нарича *алтернатива* на съжденията p и q. Алтернативата на съжденията p и q е вярна тогава и само тогава, когато точно едно от тях е вярно.

Импликация на две съждения: Импликация на две съждения p и q представлява сложно съждение $p \to q$, което е невярно тогава и само тогава, когато p е вярно, а q е невярно. Таблицата на разпределение на верностните стойности на импликацията е следната:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Знакът за импликация $\to$ отговаря на логическата връзка *ако* p, *то* q.

Съждението p се нарича условие, а съждението $q-$ заключение. Таблицата на разпределение на верностните стойности на импликацията изразява на пръв поглед някаква странност, която се състои в това, че от неверността на съжденията p и q, следва верността на съждението $p \rightarrow q$. Тук стрелката $\rightarrow$ не е употребена в смисъл на логическо следствие, или че импликацията няма смисъл на връзка между причина и следствие. Тези верностни стойности на импликацията $p \rightarrow q$ трябва да се разбират само като възможности.

Еквивалентност на две съждения: Еквивалентност на две съждения p и q е такова съждение $p \leftrightarrow q$, което е вярно тогава и само тогава, когато едновременно и двете съждения p и q са верни, или неверни. Таблицата на разпределение на верностните стойности на еквиваленцията е следната:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Логически операцията еквивалентност свързва две съждения с израза *тогава и само тогава* в смисъл на еднаква вярност на двете съждения p и q. Записът $p \leftrightarrow q$ се чете p тогава и само тогава, когато q. Двупосочната стрелка $\leftrightarrow$ показва, че твърдението може да се разглежда и в обратна посока *q тогава и само тогава, когато p.*

1.2 Основни формули в логиката на съжденията

Дефиниция 1.1: *Логически израз наричаме съвкупност от съждения $p, q, r, \ldots$, свързани със знаците за логически операции* $\bar{}$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, *и скоби, определящи реда на операциите.*

Верностната стойност на даден логически израз се получава, като на всяко съждение, участващо в израза, се даде съответна вярностна стойност, и се вземат под внимание таблиците за верностните стойности на участващите операции.

Дефиниция 1.2: *Закон на съждителното смятане (тавтология) наричаме такъв логически израз, който има вярностна стойност 1, при всички възможни верностни стойности на съждителните променливи, участващи в него.*

Задача 1.1: Да се определят верностните стойности на следните логически изрази:

а) $p \wedge (q \wedge r)$; б) $(p \wedge q) \wedge r$; в) $p \to (q \to r)$; г) $(p \wedge q) \to r$;

д) $(p \wedge q) \to (r \vee \bar{q})$; е) $[(p \vee q) \wedge r] \leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$.

Задача 1.2: Да се докаже, че следните схеми са тавтологии на съждителното смятане:

1) закон за двойното отрицание:

$$\overline{\overline{p}} \leftrightarrow p;$$

2) закон за изключеното трето:

$$p \vee \overline{p};$$

3) закон за идемпотентност:

$$p \wedge p \leftrightarrow p, \quad p \vee p \leftrightarrow p;$$

4) комутативни закони:

$$p \wedge p \leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \leftrightarrow q \vee p, \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p);$$

5) асоциативни закони:

$$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r));$$

$$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r));$$

$$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r));$$

6) дистрибутивен закон на конюнкцията по отношение на дизюнкцията:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r));$$

7) дистрибутивен закон на дизюнкцията по отношение на конюнкцията:

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r));$$

8) закони на Де Морган:

$$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q};$$

9) закон за изнасяне и внасяне:

$$((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r));$$

10) закон за изразяване на импликацията чрез дизюнкция и отрицание:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q);$$

11) закон за изразяване на дизюнкцията чрез импликация и отрицание:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\overline{p} \to q);$$

12) закон за отрицание на импликацията:

$$\overline{(p \to q)} \leftrightarrow (p \wedge \overline{q});$$

13) закон за изразяване на еквиваленцията чрез импликация и конюнкция:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p));$$

т. е. конюнкцията на две взаимно обратни имликации е равна на съответната еквивалентност;

14) закон за отрицание на еквиваленцията:

$$\overline{(p \leftrightarrow q)} \leftrightarrow (\overline{(p \to q)} \vee \overline{(q \to p)});$$

15) закон за контрапозицията:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p});$$

16) закон за поглъщането:

$$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p, \quad p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p;$$

17)

$$(p \wedge q) \vee (\overline{q}) \leftrightarrow (p \vee \overline{q}).$$

Решение: Верността на тези закони се показва, като се попълнят съответните таблици на верностните стойности на логическите изрази, участващи в закона. Ще докажем, че

$$(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q).$$

Построяваме съответната таблица на разпределението на верностните стойности на горния израз:

p	q	$\overline{p}$	$p \to q$	$\overline{p} \lor q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \lor q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Ще докажем следния закон $(p \land q) \land r \leftrightarrow p \land (q \land r)$.

p	q	r	$p \land q$	$(p \land q) \land r$	$q \land r$	$p \land (q \land r)$	$(p \land q) \land r \leftrightarrow p \land (q \land r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

1.3 Равнозначност и имплициране

Дефиниция 1.3: *Ще казваме, че съждителната схема α е равнозначна на съждителната схема β, тогава и само тогава когато, схемата $\alpha \leftrightarrow \beta$ е тавтология, и ще означаваме символично така $\alpha \sim \beta$.*

Задача 1.3: Да се докаже, че за произволни схеми α, β, γ, δ на съждителното смятане:

1) ако $\alpha \sim \beta$, то $\overline{\alpha} \sim \overline{\beta}$;

2) ако $\alpha \sim \beta$ и $\gamma \sim \delta$, то:

   2 а) $\alpha \land \gamma \sim \beta \land \delta$;

   2 б) $\alpha \lor \gamma \sim \beta \lor \delta$;

   2 в) $\alpha \to \gamma \sim \beta \to \delta$;

   2 г) $\alpha \leftrightarrow \gamma \sim \beta \leftrightarrow \delta$.

Дефиниция 1.4: *Ще казваме, че съждителната схема α имплицира съждителната схема β, тогава и само тогава, когато схемата $\alpha \to \beta$ е тавтология. Ще означаваме символично така: $(\alpha \Rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \beta)$ е тавтология.*

Задача 1.4: Да се докаже, че за произволни съждителни схеми α, β, γ, δ на съждителното смятане е изпълнено следното:

1) $\alpha \Rightarrow \alpha$;

2) ако $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \gamma$, то $\alpha \Rightarrow \gamma$;

3) ако $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$, то $\alpha \sim \beta$ и обратно;

4) ако $\alpha \Rightarrow \beta$, то $\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}$ и обратно;

5) ако $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\gamma \Rightarrow \delta$, то:

   5 а) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \delta)$;

   5 б) $(\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)$.

1.4 Знаците за общност и съществуване (квантори)

С предположенията, зависещи от променливи величини, често се срещат два вида твърдения:

1) твърдението $p(x)$, $x \in U$ е вярно твърдение, за всички елементи на множеството U.

2) твърдението $p(x)$, $x \in U$ е вярно твърдение, поне за един елемент от множеството U.

Тези твърдения е прието да се записват накратко, използвайки за тази цел специални знаци: *знак за общност* $\forall$ (обърнатата първа буква на английската дума All-всеки) и *знак за съществуване* $\exists$ (обърнатата първа буква на английската дума Exist- съществува). В логиката двата знака $\forall$ и $\exists$ се наричат *квантори*. Кванторът за общност $\forall$ се чете- всеки, всички, произволен, за всеки; кванторът за съществуване $\exists$ се чете- поне един елемент, има, съществува.

Използвайки кванторите $\forall$ и $\exists$ твърденията 1) и 2) се записват така:

$$1)\ \ \forall x\ \ p(x),\ \ x \in U;\ \ 2)\ \ \exists x\ \ p(x),\ \ x \in U.$$

Правилата за образуване на отрицания на твърдения, съдържащи тези квантори са:

$$\overline{\forall x\ \ p(x)} \leftrightarrow \exists x,\ \ \overline{p(x)};\ \ \overline{\exists x\ \ p(x)} \leftrightarrow \forall x,\ \ \overline{p(x)}.$$

Първата формула означава, че $p(x)$ е вярно за не всяко x, тогава и само тогава, когато съществува x, за което $p(x)$ не е вярно.

Втората формула означава, че не съществува x, за което $p(x)$ е вярно тогава и само тогава, когато $p(x)$ не е вярно за всяко x.

Елементът $x_0 \in U$, за който твърдението $p(x)$ не е вярно, се нарича контрапример за твърдението $\forall x\ \ p(x)$. По този начин, за да се убедим в грешността на твърдението $\forall x\ \ p(x)$, е достатъчно да се намери, да се построи, един контрапример.

1.5 Множества и операции над множества

Понятието за множество, както и понятието за съждение, е основно, и се приема за първично понятие, което не се определя строго чрез други математически понятия. То се възприема интуитивно и се илюстрира чрез примери. Така например, множества образуват студентите в една аудитория, пътниците в един влак, върховете на един многоъгълник, корените на едно уравнение, правите от равнината и много други примери.

Изобщо за множество се говори, когато се разглежда някаква система, сбор, ансамбъл, съвкупност, фамилия, клас от обекти, предмети и прочее, обединени в едно цяло, на базата на някакъв общ белег, свойство, или в съответствие с някакво правило. Математиката, като наука, се занимава с множества от математически обекти.

Елементи на множество. Множествата обикновено се означават с главни латински или гръцки букви- $A, B, C,\ \Lambda, \Phi, \Psi, \dots$. За обектите, които съставляват дадено множество казваме, че принадлежат на това множество, или са *елементи на множеството.* Обикновено елементите на множествата се означават с малки букви $a, b, c, x, y, t, \dots$.

Друго основно понятие в теорията на множествата е понятието *принадлежност*, което се отбелязва със символите $\in$, $\ni$. Изразът $a \in A$ се чете "*a принадлежи на множеството A*". Ако a не принадлежи на множеството A, то отбелязваме $a \notin A$, $A \not\ni a$. Изразът $x \in A$ означава, че става дума за кой и да е елемент x на множеството A, като в случая x е общ, текущ елемент.

Множества, елементите на които са числа се наричат *числови множества.* Например, $\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа, и така $5 \in \mathbb{Z}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Начини на задаване на множества: Съществуват основно два начина за задаване на множества: Първият начин се състои в това, да се посочат всички негови елементи. Например $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{\Delta, \nabla, \bigcirc\}$.

При втория начин се посочва свойство, което характеризира елементите на множеството. Това позволява, да се прецени дали даден елемент принадлежи на това множество, или не. Ако $p(\cdot)$ означава най-общо някаква характеристика, то множеството

$$A = \{x : p(x)\}$$

се състои от тези елементи x, които удовлетворяват това характеристично свойство. Например:

$$A(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq a\},$$

$$B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}, \quad \text{т. е.} \quad B = \{2, 3\}.$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Крайно, безкрайно, празно и универсално множество: Едно множество се нарича крайно, ако броят на елементите му е краен, т. е. представлява някакво число. Крайни множества са например книгите в една библиотека, жителите на даден град, броят на корените на даден алгебричен полином и други. Даден елемент може, също така, да се разглежда като крайно множество- едноелементно множество.

Множества, които не са крайни, се наричат безкрайни множества. Такова е множеството от точките в равнината, броят на правите, които минават през дадена точка и други.

Понятието множество се обобщава, като се въведе т. н. *празно множество*, като множество, което не съдържа нито един елемент. За него се използва символът $\emptyset$ и ще го смятаме за крайно множество. Множеството от реалните корени на уравнението $x^2+1=0$ е празно множество.

Ще разглеждаме и множеството от всички множества, което ще наречем *универсално множество*, и ще го означаваме със символа Ω.

Отношение между множества. Подмножество, равенство на множества: Две множества, които се състоят от еднотипни елементи, могат да бъдат помежду си в отношения на включване и равенство.

Дефиниция 1.5: *Множеството A се включва в множеството B, ако всеки елемент на A, е и елемент на B. Множеството A се нарича подмножество на множеството B и означаваме $A \subseteq B$, или $B \supseteq A$, т. е.*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Дефиниция 1.6: *Множеството A се нарича същинско подмножество (строго подмножество) на множеството B, ако A е подмножество на B и съществува поне един елемент на B, който не е елемент на A. Ще използваме означението $A \subset B$ или $B \supset A$.*

Задача 1.5: Да се докаже, че операцията включване има следните свойства:

1) $\emptyset \subseteq A$, за всяко множество A;

2) $A \subseteq A$, за всяко множество A, т. е. операцията включване има свойството *рефлексивност*.

3) за три произволни множества A, B, C от $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, следва, че $A \subseteq C$, т. н. свойство *транзитивност*.

Дефиниция 1.7: *Две множества A и B са равни, точно когато $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т. е.*

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

Две равни множества се състоят от едни и същи елементи.

Задача 1.6: Да се докаже, че операцията равенство на множества има следните свойства:

1) *рефлексивност*: $A = A$, за всяко множество A;

2) *симетричност*: $A = B \Leftrightarrow B = A$, за две произволни множества A и B;

3) *транзитивност*: От $A = B$ и $B = C$ следва, че $A = C$, за три произволни множества A, B и C.

Дефиниция 1.8: *Обединение $A \cup B$ на множеството A с множеството B се нарича ново множество, елементите на което принадлежат поне на едно от множествата A или B, т. е.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Задача 1.7: Да се докаже, че за произволни множества A, B и C са изпълнени следните свойства:

1) *комутативност на обединението*: $A \cup B = B \cup A$;

2) *асоциативност на обединението*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

3) $\emptyset \cup A = A$;

4) *идемпотентност*: $A \cup A = A$.

Решение: 1) По дефиниция имаме, че

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Горното равенство е дизюнкция на твърденията $p = \{x \in A\}$ и $q = \{x \in B\}$, т. е. имаме $p \vee q$. Но се знае, че $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$, тъй като дизюнкцията е комутативна. По този начин се получава, че

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x : (x \in B) \vee (x \in A)\} = B \cup A,$$

т. е.

$$A \cup B = B \cup A.$$

2) Използвайте асоциативният закон на дизюнкцията; 3) и 4) следват директно от дефиницията и свойството идемпотентност на дизюнкцията.

Задача 1.8: Да се докаже, че за произволни множества A, B, C и D са изпълнени следните свойства:
1) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$;
2) $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $A \cup B = B$;
3) Ако $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, то $A \cup B \subseteq C$;
4) Ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cup C \subseteq B \cup D$.

Дефиниция 1.9: *Под сечение $A \cap B$ на множеството A с множеството B ще разбираме тяхната обща част, т. е. това е множеството, състоящо се от точно от онези елементи на A, които са също така елементи и на B, т.е.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

Задача 1.9: Да се докаже, че за произволни множества A, B и C са изпълнени следните свойства:
1) *комутативност*: $A \cap B = B \cap A$;
2) *асоциативност*: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3) *идемпотентност*: $A \cap A = A$;
4) $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Решение: 1) Ще използваме дефиницията за сечение на множества

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

На практика, в горната формула имаме конюнкция на съжденията $p = \{x \in A\}$ и $q = \{x \in B\}$, т. е. $p \wedge q$. Но знаем, че конюнкцията е комутативна, т. е. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$. По този начин се получава

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\} = \{x : x \in B \quad \text{и} \quad x \in A\} = B \cap A.$$

2) Ще използваме, че конюнкцията на три съждения е асоциативна, т. е. $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$. По този начин се получава

$$(A \cap B) \cap C = \{x : x \in (A \cap B) \quad \text{и} \quad x \in C\}$$

$$= \{x : (x \in A \quad \text{и} \quad x \in B) \quad \text{и} \quad x \in C\} = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad (x \in B \quad \text{и} \quad x \in C)\}$$

$$= \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B \cap C\} = \{x : x \in A \cap (B \cap C)\} = A \cap (B \cap C).$$

Задача 1.10: Да се докаже, че за произволни множества A, B, C и D са изпълнени следните свойства:

1) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;
2) ако $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$, то $C \subseteq A \cap B$;
3) ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cap C \subseteq B \cap D$;
4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Задача 1.11: Да се докаже, че за произволни множества A, B и C са изпълнени следните свойства:

1) закони за поглъщането:

$$A \cap (A \cup B) = A; \quad (A \cap B) \cup B = B;$$

2) дистрибутивен закон на сечението по отношението на обединението:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

3) дистрибутивен закон на обединението по отношението на сечението:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Дефиниция 1.10: *Разлика $A \setminus B$, с умаляемо множеството A и умалител множеството B, ще наричаме онова множество, чиито елементи са точно онези елементи на A, които не принадлежат на B, т. е.*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \notin B\}.$$

За да образуваме разликата $A \setminus B$, трябва от множеството A да премахнем онези елементи, които принадлежат на $A \cap B$.

Задача 1.12: Да се докаже, че за произволни множества A, B, C и D са изпълнени следните свойства:

1) $A \setminus B \subseteq A$;
2) ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \setminus D \subseteq B \setminus C$;
3) ако $C \subseteq D$, то $A \setminus D \subseteq A \setminus C$;
4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$;
5) закони на Де Морган:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

6) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;

7) в частност, ако $A \subseteq B$, то $A \cup (B \setminus A) = B$;
8) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Решение: 5) Ще се използват съответните закони на Де Морган: за произволни твърдения p и q имаме, че $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{p}$ и $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$. За доказване на първото равенство ще използваме, че $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$, а за доказване на второто равенство ще използваме, че $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Получават се следните резултати:

$$A \setminus (B \cup C) = \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \notin (B \cup C)\}$$

$$= \{x : x \in A \ \text{ и } \ (x \notin B \ \text{ и } \ x \notin C)\}$$

$$= \{x : (x \in A \ \text{ и } \ x \notin B) \ \text{ и } (x \in A \ \text{ и } \ x \notin C)\}$$

$$= \{x : (x \in A \setminus B) \ \text{ и } \ (x \in A \setminus C)\} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$A \setminus (B \cap C) = \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \notin (B \cap C)\}$$

$$= \{x : x \in A \ \text{ и } \ (x \notin B \ \text{ или } \ x \notin C)\}$$

$$= \{x : (x \in A \ \text{ и } \ x \notin B) \ \text{ или } \ (x \in A \ \text{ и } \ x \notin C)\}$$

$$= \{x : (x \in A \setminus B) \ \text{ или } \ (x \in A \setminus C)\} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Задача 1.13: Да се докаже, че за произволни множества A, B и C са изпълнени следните равенства:
1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
2) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
5) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

При прилагане на алгебрата на множествата в някоя математическа дисциплина, се ограничаваме с разглеждане на подмножества на някое конкретно множество, което ще наречем *пространство*.

Дефиниция 1.11: *Нека X е фиксирано пространство. Допълнение $\overline{A}$ на подмножеството A на X наричаме подмножеството $X \setminus A$, т. е.*

$$A \subseteq X \Rightarrow \overline{A} = X \setminus A.$$

Задача 1.14: Да се докаже, че за произволно подмножество A на пространството X са в сила равенствата:

1) $A \cup \overline{A} = X$;
2) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
3) $\overline{A \cap \overline{A}} = X$;
4) $\overline{A \cup \overline{A}} = \emptyset$.

Задача 1.15: Да се докаже, че за произволно подмножество A на пространството X са в сила равенствата:

1) $X \cap A = A$, $X \cup A = X$;
2) $\overline{X} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = X$;
3) $\overline{\overline{A}} = A$;
4) закони на Де Морган:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

5) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
6) $A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B}$;
7) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$;
8) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = X$;
9) $(A \cap B) \cup \overline{B} = A \cup \overline{B}$.

1.6 Декартово произведение на множества

От дадени обекти a и b можем да образуваме наредена двойка с първа компонента (или предходник) a, и втора компонента (или наследник) b, която ще означаваме с (a, b). Наредените двойки (a, b) и (c, d) ще наричаме равни, тогава и само тогава, когато имат равни предходници и равни наследници, т. е.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ и } b = d.$$

Дефиниция 1.12: *Декартово произведение $X \times Y$ на множеството X по множеството Y ще наричаме множеството от всички наредени двойки с предходници от X и наследници от Y, т. е.*

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Като пример ще посочим, че множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа е декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на множеството на реалните числа $\mathbb{R}$.

Нека $n \geq 2$ е фиксирано цяло и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са произволни множества. Под декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ще разбираме множеството от всички наредени $n-$орки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, където $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ще използваме означението

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ вместо $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ ще използваме означението A^n и A^n ще наричаме $n-$та декартова степен на множеството A.

Задача 1.16: Да се докаже, че за произволни множества A, B и C е изпълнено:

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;
3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
6) $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$;
7) ако $C \neq \emptyset$, то

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C;$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B.$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ

2.1 Математическа индукция

В много математически задачи трябва да се доказва верността на твърдението $p(n)$, определено над множеството на естествените числа, т. е. трябва да се установи верността на твърдението

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; p(n) \;\; \text{е вярно.}$$

Това твърдение може да се докаже, като се използва методът на математическата индукция. Математическата индукция е метод за доказване на твърдения, който се основава на следната аксиома:

Ако едно множество M съдържа естественото число n_0 и от това, че съдържа естественото число $n \geq n_0$, следва, че съдържа и естественото число $n+1$, то M е множеството на всички естествени числа $n \geq n_0$.

На практика математическата индукция ще я използваме така: Ако едно твърдение $p(n)$ е вярно за $n = n_0$ и от предположението, че за някое естествено число $n \geq n_0$ твърдението $p(n)$ е вярно, се докаже, че и за естественото число $n+1$ твърдението $p(n+1)$ е вярно, то твърдението $p(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq n_0$.

Математическата индукция съдържа три компонента:

1) *основа на индукцията*- проверката, че $p(n_0)$ е вярно твърдение;

2) *индукционно предположение*- условието, че за някое естествено число n твърдението $p(n)$ е вярно твърдение;

3) *стъпка на индукцията*- доказване, че $p(n+1)$ е вярно твърдение. При извършване на стъпката на индукцията, обикновено се използва индукционното предположение.

Задача 2.1: Да се докаже, че за всяко естествено число n

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2.1}$$

Решение: Това равенство представлява твърдение $p(n)$, дефинирано над множеството на естествените числа.

1) Твърдението $p(1)$ е вярно, тъй като

$$1^2 = \frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}.$$

2) Предполагаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$ $p(n)$ е вярно твърдение, т. е.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2.2}$$

3) За да докажем верността на $p(n)$ за $n+1$ ще оформим следния резултат: лявата страна на (2.1) ще съдържа още едно събираемо, т. е. имаме израз от вида $1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$; в дясната страна на (2.1) формално на мястото на n трябва да се постави $n+1$, т. е. тя добива вида

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

По този начин се получава, че трябва да се докаже равенството

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \tag{2.3}$$

Ще преобразуваме лявата страна на (2.3) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$. Съгласно индукционното предположение (2.2) е в сила равенството

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

По този начин се получава

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

с което равенството (2.3) е напълно доказано.

Задача 2.2: Да се докаже неравенството на Бернули

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Решение: 1) При $n = 1$ са в сила очевидните представяния

$$(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha \geq 1 + 1.\alpha,$$

така, че неравенството (2.4) е вярно за $n = 1$.

2) Да смятаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

3) Ще докажем, че

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Тъй като $\alpha > -1$, то $1 + \alpha > 0$ и последователно се получава

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n.(1+\alpha) \geq (1+n\alpha).(1+\alpha)$$
$$= 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha.$$

Задача 2.3: Да се докаже, че да всяко естествено число n е в сила неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Решение: 1) Неравенството е вярно при $n = 1$, тъй като

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1.$$

2) Смятаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1. \tag{2.5}$$

3) Ще докажем, че

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 1. \tag{2.6}$$

Прибавяме към лявата и дясната страна на (2.5) $\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}$ и се получава

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}$$
$$> 1 + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\\ >1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}\\ =1+\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}>1,\end{aligned}$$

с което неравенството (2.6) е доказано.

Задача 2.4: Да се докаже, че за всеки две реални числа a и b е в сила неравенството

$$|a+b|\leq|a|+|b|,$$

което се нарича *неравенство на триъгълника*. Равенство в горния израз се достига когато a и b са с еднакви знаци.

Решение: В сила са очевидните неравенства

$$+a\leq|a|,\quad -a\leq|a|$$

$$+b\leq|b|,\quad -b\leq|b|.$$

Чрез почленно събиране на горните неравенства се получава

$$+(a+b)\leq|a|+|b|,\quad -(a+b)\leq|a|+|b|. \tag{2.7}$$

Но точно едно от двете числа $+(a+b)$ и $-(a+b)$ е равно на $|a+b|$. Следователно от неравенствата (2.7) се получава, че

$$|a+b|\leq|a|+|b|.$$

Задача 2.5: Да се докаже, че за всяко естествено число n и произволни реални числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ е в сила неравенството

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

Решение: При $n=1$ се получава очевидното твърдение $|a_1|\leq|a_1|$. При $n=2$ неравенството $|a_1+a_2|\leq|a_1|+|a_2|$ го доказахме в задача 2.4.

Нека сега за някое $n\in\mathbb{N}$ и произволни реални числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ е изпълнено неравенството

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|. \tag{2.8}$$

Нека сега $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са произволни реални числа. Ще докажем, че

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|.$$

Действително, съгласно задача 2.4 и индукционното предположение (2.8) се получава

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}|$$
$$\leq |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|.$$

Задача 2.6: Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са произволни положителни числа, при това $x_1.x_2 \ldots x_n = 1$. Да се докаже, че

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Решение: 1) Ако $n = 1$, то по условие $x_1 = 1$, и следователно $x_1 \geq 1$, т. е. за $n = 1$ твърдението е вярно.

2) Да предположим, че твърдението е вярно да някое $n \in \mathbb{N}$.

3) Нека сега $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са произволни реални, такива, че $x_1.x_2 \ldots x_n.x_{n+1} = 1$. Ще докажем, че

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1. \tag{2.9}$$

Нека да смятаме, че всички числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са равни на 1, но тогава условието (2.9) е изпълнено.

Нека сега измежду числата $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ има поне едно число, което не е равно на 1. Но тогава непременно ще има поне още едно число, което не е равно на 1, при това ако едното от тях е по-голямо от 1, то другото трябва да бъде по-малко от 1. Без да ограничаваме общността на разглеждането, да смятаме, че $x_n > 1$, а $x_{n+1} < 1$.

Разглеждаме сега $n-$те числа $x_1, x_2, \ldots, (x_n.x_{n+1})$. Тяхното произведение е равно на 1 и съгласно индукционното предположение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n.x_{n+1} \geq n.$$

Прибавяме към двете страни на горното неравенство $x_n + x_{n+1}$, пренасяме $x_n.x_{n+1}$ в дясната страна на неравенството и се получава

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n - x_n.x_{n+1} + x_n + x_{n+1}$$
$$= n + 1 + x_n(1 - x_{n+1}) - (1 - x_{n+1})$$
$$= n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}) \geq n + 1.$$

От направеното доказателство следва, че равенство в доказаното съотношение се достига, точно когато $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Задача 2.7: Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са произволни положителни числа. Да се докаже, че
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}.$$

Последното съотношение се нарича *неравенство между средно аритметично и средно геометрично.*

Решение: Нека да разгледаме следните n числа
$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}}.$$

Очевидно всички тези числа са положителни и тяхното произведение е равно на едно. Съгласно предната задача, тяхната сума е по-голяма или равна на n, т. е.
$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}} \geq n,$$

откъдето
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n}.$$

Равенство в горното неравенство се достига точно когато $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Задача 2.8: Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ са в сила равенствата:

а) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$;

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

г) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

д) $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

е) $1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$;

ж) $1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

Задача 2.9: Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ и всяко реално x е в сила равенството
$$(\cos x + \mathbf{i}\sin x)^n = \cos nx + \mathbf{i}\sin nx$$

(формула на Моавър).

Задача 2.10: Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ са в сила равенствата:

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

б) $1.2 + 2.5 + \ldots + n.(3n-1) = n^2(n+1)$;

в) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$;

г) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (n-1).n = \dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$;

д) $1.2^2 + 2.3^2 + \ldots + (n-1).n^2 = \dfrac{1}{12}n(n^2-1)(3n+2)$;

е) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

ж) $\dfrac{1}{1.5} + \dfrac{1}{5.9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3).(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

з) $\left(1 - \frac{1}{4}\right).\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$.

Задача 2.11: Да се докаже, че за всяко естествено $n > 1$ са в сила неравенствата:

а) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

б) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$;

в) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;

г) $\dfrac{n}{2} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$;

д) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$;

е) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$;

Задача 2.12: Да се докаже, че за всяко естествено $n \in \mathbb{N}$:

а) $n(2n^2 - 3n + 1)$ се дели на 6;

б) $2^{n+2}.3^n + 5n - 4$ се дели на 25;

в) $2^{2n} + 15n - 1$ се дели на 9;

г) $2^{4n} - 15n - 1$ се дели на 225;

д) $2^{3n} - 7n - 1$ се дели на 49;

е) $3^{3n+3} - 26n - 27$ се дели на 169;

ж) $n^3 + 5n$ се дели на 6;

з) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ се дели на 11;

и) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ се дели на 133;

й) $n^5 - n$ се дели на 5.

Задача 2.13: Да се докаже, че:

а) за всяко естествено $n \geq 5$ е в сила неравенството $2^n > n^2$;

б) за всяко естествено $n \geq 3$ е в сила неравенството $2^n.n! < n^n$;

в) за всяко естествено $n \geq 3$ е в сила неравенството $2^n > 2n + 1$;

г) за всяко естествено $n \geq 4$ е в сила неравенството $3^n > n^3$;

д) за всяко естествено $n \geq 1$ е в сила неравенството $3n^2 \geq 2n + 1$;

е) за всяко естествено $n \geq 1$ е в сила неравенството $3^n > 3n$;

ж) за всяко естествено $n \geq 1$ е в сила неравенството $4^n > n^2$.

Задача 2.14: Да се докаже, че за аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, членовете на която са положителни, и всяко естествено число n е в сила равенството

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

Задача 2.15: Да се докаже, че за аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и всяко естествено число n е в сила равенството

$$\frac{1}{a_1.a_2} + \frac{1}{a_2.a_3} + \frac{1}{a_3.a_4} + \dots + \frac{1}{a_n.a_{n+1}} = \frac{n}{a_1.a_{n+1}}.$$

Задача 2.16: Да се докаже че да всяко естествено число n и реално $x \neq 2k\pi$ са в сила равенствата:

$$\text{а)} \quad \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$\text{б)} \quad \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2};$$

в) $\sin x + 2.\sin 2x + \ldots + n.\sin nx = \dfrac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \dfrac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$;

г) $\cos x + 2.\cos 2x + \ldots + n.\cos nx = \dfrac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$.

2.2 Сумиране

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са дадени числа. Тяхната сума $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ се означава със символа $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Тук $\sum$ означава знак за сума, k се нарича сумационен индекс, 1 е долната граница на сумирането, n е горната граница на сумирането. Сумата не зависи от това, с каква буква ще означим сумационния индекс, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha.$$

Операцията сумиране има свойството линейност, т. е. за всеки реални α и β е в сила равенството

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Разглеждаме сума, съдържаща $m.n$ събираеми от вида a_{ij}, където $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

и които се наричат двойни суми. В сила е равенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Задачата за изчисляване на сумата от вида

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

където $f(k)$ е зададена функция, означава да се намери $S(n)$ като функция на n.

Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са дадени реални числа, и ако за $k = 1, 2, \ldots, n$ $f(k) = a_{k+1} - a_k$, то се получава, че

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1. \tag{2.10}$$

Задача 2.17: Да се изчислят сумите:

$$\text{а)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}; \quad \text{б)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Решение: а) Тъй като $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то по формулата (2.10) се получава

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= -\left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

б) Ще използваме представянето

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

и формулата (2.10), за да се получи

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{1.2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

Задача 2.18: Да се изчислят сумите:

$$\text{а)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)};\quad \text{б)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)};$$

$$\text{в)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)};\quad \text{г)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)};$$

$$\text{д)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Решение: а) Ще покажем един ефективен начин за представяне на дробта $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ във вид на сума на две елементарни дроби. Ще използваме представянето

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}.$$

От тук, след привеждане под общ знаменател се получава

$$A(3k+1) + B(3k-2) \equiv 1,$$

$$(3A+3B)k + A - 2B = 0.k + 1.$$

Приравняваме коефициентите пред съответните степени на k от лявата и дясната страна на горното равенство, и се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} 3A+3B=0 \\ A-2B=1, \end{array}\right.$$

която има решение $A = \dfrac{1}{3}$ и $B = -\dfrac{1}{3}$. Окончателно се получи представянето

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right).$$

Отговори: а) $\dfrac{n}{3n+1}$; б) $\dfrac{n}{4n+1}$; в) $\dfrac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$; г) $\dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; д) $\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Задача 2.19: Нека $\{a_n\}$ е аритметична прогресия, всички членове и разликата d, на която са различни от нула. Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right);$$

$$\text{б)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right);$$

$$\text{в)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}}\right).$$

Упътване: Могат да се използват представянията:

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{d+d}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{(a_{k+1} - a_k) + (a_{k+2} - a_{k+1})}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}.$$

Задача 2.20: Да се изчисли сумата

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Решение: Разглеждаме тъждеството

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагаме в това тъждество последователно $x = 1, 2, \ldots, n$ и събираме почленно получените равенства. Получава се равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \qquad (2.11)$$

В сила са следните резултати: съгласно равенство (2.10)

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n; \qquad (2.12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2.13)$$

От (2.11), (2.12) и (2.13) се получава равенството

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n,$$

откъдето се определя, че

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

т. е.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Забележка: Като се използва начинът за решаване на горната задача, могат директно да се намерят сумите, представени в задача 2.8. Всъщност, по този начин могат да се получат десните страни на тези равенства. Тази задача можеше да бъде решена, като се използва метода на математическата индукция, но при условие, че десните страни на тези равенства са предварително известни.

Задача 2.21: Да се изчисли сумата

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx,$$

където $n \in \mathbb{N}$, и $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Разглеждаме равенството

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin\frac{x}{2}.$$

Ще използваме, че за всеки две реални α и β е в сила равенството

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Приложена тази формула ще даде, че

$$2\sin kx\sin\frac{x}{2} = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x.$$

Използвайки равенството (2.10) се получава

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$= -\left[\cos\left(n+1-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(1-\frac{1}{2}\right)x\right] = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$$= 2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x.$$

Окончателно се получава, че

$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Забележка: Горната формула е в сила при $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то ще се получи, че $S_n(x) = 0$.

Задача 2.22: Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са дадени редици от реални числа. Нека за всяко цяло $k \geq 1$ да положим $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$. Да се докаже, че:

а) За всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила равенството (*преобразование на Абел*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n;$$

б) За всеки две числа $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ е в сила равенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n;$$

в) Нека $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ са произволни числа и за $1 \leq s \leq p$ нека $D_s = \sum\limits_{k=n+1}^{n+s} b_j$. Тогава е в сила равенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1}(a_{n+j} - a_{n+1+j})D_j + a_{n+p}D_p.$$

Решение: а) Очевидно имаме, че $b_1 = B_1$ и за $2 \leq k \leq n$ $b_k = B_k - B_{k-1}$. Ще използваме представянията

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_k + a_n b_n$$

$$= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_n (B_n - B_{n-1})$$

$$= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n-1} a_k B_{k-1} - a_n B_{n-1} + a_n B_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} + a_n B_n.$$

Във втората сума на горното равенство полагаме $k-1=l$, откъдето намираме, че при $k=2$, $l=1$, при $k=n$, $l=n-1$ и $k=l+1$. По този начин се получава, че

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{l=1}^{n-1} a_{l+1} B_l + a_n B_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k + a_n B_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n;$$

б) Очевидно за $n+1 \le k \le n+p$ имаме, че $b_k = B_k - B_{k-1}$. Ще използваме представянията

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k B_k - \sum_{k=n+2}^{n+p} a_k B_{k-1} + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n.$$

Във втората сума полагаме $k-1=l$, откъдето намираме, че при $k=n+2$, $l=n+1$, при $k=n+p$, $l=n+p-1$, $k=l+1$, и се получава

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k B_k - \sum_{l=n+1}^{n+p-1} a_{l+1} B_l + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n.$$

в) Очевидно е изпълнено, че $b_{n+1} = D_1$ и за $2 \leq s \leq p$ $b_{n+s} = D_s - D_{s-1}$, или все едно, че за $n+2 \leq k \leq n+p-1$ имаме, че $b_k = D_{k-n} - D_{k-n-1}$. Последователно се получава следното

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{n+p-1} a_k b_k + a_{n+p}b_{n+p}$$

$$= a_{n+1}D_1 + \sum_{k=n+2}^{n+p-1} a_k(D_{k-n} - D_{k-n-1}) + a_{n+p}(D_p - D_{p-1})$$

$$= a_{n+1}D_1 + \sum_{k=n+2}^{n+p-1} a_k D_{k-n} - \sum_{k=n+2}^{n+p-1} a_k D_{k-n-1} + a_{n+p}D_p - a_{n+p}D_{p-1}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k D_{k-n} - \sum_{k=n+2}^{n+p} a_k D_{k-n-1} + a_{n+p}D_p.$$

В първата сума полагаме $k - n = j$, $1 \leq j \leq p-1$, $k = n+j$, а във втората сума полагаме $k - n - 1 = j$, $1 \leq j \leq p-1$, $k = n+1+j$, и се получава

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+j}D_j - \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+1+j}D_j + a_{n+p}D_p$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1}(a_{n+j} - a_{n+1+j})D_j + a_{n+p}D_p.$$

2.3 Нютонов бином

Нека $n \geq 0$ да бъде произволно цяло число. Ще дефинираме теоретико-числовата функция $n!$ (чете се *ен-факториел*) по следния начин:

$$0! = 1 \text{ и за } n \geq 1 \;\; n! = 1.2\dots n.$$

Ясно е, че е изпълнено следното рекурентно равенство

$$(n+1)! = n!.(n+1).$$

Нека $n \geq 0$ и $0 \leq k \leq n$ са произволни цели. Да дефинираме величината

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \qquad (2.14)$$

която ще наричаме биномиален коефициент. Символът $\binom{n}{k}$ се чете *ен над ка*.

Биномиалните коефициенти имат следните свойства:

1) $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, за всяко цяло $n \geq 0$;

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$, за всеки цели $n \geq 0$ и $0 \leq k \leq n$;

3) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, за всеки цели $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$.

Равенствата 1) се проверяват непосредствено, като се използва равенството (2.14);

2) Имаме следните равенства:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k};$$

3) Имаме следните равенства:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k,$$

т. е.

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Триъгълник на Паскал наричаме числова таблица, елементите на която са биномиалните коефициенти. Записан във вид на равнобедрен триъгълник, той изглежда така

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Равенствата 1) показват, че по бедрата на триъгълника на Паскал стоят единици. Равенството 2) показва, че той е симетричен спрямо височината си. Равенството $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ показва начина за неговото конструиране- чрез събиране на два съседни елемента от даден ред, се получава съответният елемент от следващия ред. Записан във вид на правоъгълен триъгълник, той изглежда така:

$$\begin{array}{llll}
C_0^0 & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

или като числени стойности

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Имаме, че $(n+1)-$вият ред на триъгълника на Паскал дава биномиалните коефициенти за развитие в $n-$та степен на бинома $(a+b)^n$. В сила е равенството

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k, \tag{2.15}$$

което се нарича *формула за нютонов бином.* В разгънат вид тя изглежда така:

$$(a+b)^n = C_n^0.a^n + C_n^1.a^{n-1}.b + C_n^2.a^{n-2}.b^2 + \ldots + C_n^k.a^{n-k}.b^k + \ldots + C_n^n.b^n.$$

От формулата (2.15) при замяната на b с $-b$ се получава

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k.a^{n-k}.b^k.$$

Едно обобщение на формулата (2.15) се явява следният резултат: За произволни $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и всяка цяла степен $n \geq 1$ е в сила равенството

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_p!} x_1^{k_1}.x_2^{k_2}\ldots x_p^{k_p},$$

където сумирането се извършва по всички цели неотрицателни $k_1, k_2, \ldots, k_p$, такива че $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$.

Като се постави в (2.15) $a = 1$ и $b = x$, се получава

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{2.16}$$

Полагаме в (2.16) $x = 1$ и $x = -1$, и се получава

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \tag{2.17}$$

Задача 2.23: Напишете формулата за нютоновия бином:

а) $(1+x)^4$; б) $(a+b)^5$; в) $(x+y)^7$; г) $(a-b)^5$; д) $(1-x)^8$.

Задача 2.24: Да се докажат следните равенства:

$$\text{а)} \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}; \quad \text{б)} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0;$$

$$\text{в)} \quad \sum_{k=0}^{s} C_n^s C_m^{s-k} = C_{m+n}^s \quad (s \geq 1, \quad m, n \geq 1 - \text{дадени цели числа});$$

$$\text{г)} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}; \quad \text{д)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Решение: 1) В сила са следните представяния

$$k.C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n.C_{n-1}^{k-1},$$

откъдето след сумиране се получава

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n.2^{n-1},$$

като за получаване на последния резултат е използвано първото от равенствата (2.17).

б) Използвайте факта, че $k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$ и второто от равенствата (2.17).

в) На практика, C_{m+n}^s представлява коефициентът пред x^s в биномното развитие на $(1+x)^{m+n}$. От друга страна

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m.(1+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k . \sum_{l=0}^{m} C_m^l x^l = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} C_n^k C_m^l x^{k+l}.$$

Коефициентът пред x^s ще се получи когато $k+l=s$. Но това е възможно, когато $k=0,1,\ldots,s$, а $l=s-k$. Следователно коефициентът пред x^s е точно $\sum\limits_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k}$. След приравняване на двата коефициента се получава

$$\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s.$$

г) Използвайте представянията

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n!(n+1)}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{1}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1}.$$

Задача 2.25: Да се изчислят следните суми:

$$\text{а)}\quad \sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k;\quad \text{б)}\quad \sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k;\quad \text{в)}\quad \sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k};$$

$$\text{г)}\quad \sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1};\quad \text{д)}\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k,\quad m<n;\quad \text{е)}\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2.$$

Решение: а) Използвайте равенството

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k = \sum_{k=1}^{n}k.C_n^k + \sum_{k=1}^{n}C_n^k,$$

задача 2.24 и първото равенство на (2.17), за да се получи $(n+2)2^{n-1}$; б) $(n-2)2^{n-1}+1$; в) От равенството $\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k = 0$ се получава

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}. \tag{2.18}$$

Също така имаме, че

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n}. \tag{2.19}$$

От (2.18) и (2.19) се получава

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^{2k-1} = 2^{2n-1};$$

г) 2^{2n-1}; д) $(-1)^m C_{n-1}^{m}$; е) $(-1)^m C_{2m}^{m}$ при $n = 2m$, и 0 при $n = 2m+1$.

Задача 2.26: Да се докаже, че за произволни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ е изпълнено *неравенството на Коши-Буняковски-Шварц*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{2.20}$$

Равенство в (2.20) се достига точно когато, съществуват такива числа α и β, че $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и равенството $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ е изпълнено за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решение: Ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то в (2.20) се достига равенство. Нека поне едно от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е различно от нула, т. е. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$. Разглеждаме квадратният тричлен относно x

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k.x + b_k)^2$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right] x^2 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right] x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

и където сме положили

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Тъй като за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ е изпълнено $(a_k.x + b_k)^2 \geq 0$, то $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ за всяко реално x. Но това е възможно точно когато, дискриминантата на този квадратен тричлен е неположителна, т. е. $b^2 \leq a.c$, което ни дава неравенството

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Ще изясним, в кои случаи, в (2.20) се достига равенство? Ако $a = 0$, т. е. ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то полагаме $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, и е изпълнено, че $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, за $k = 1, 2, \ldots, n$.

Нека сега $a \neq 0$. Тъй като дискриминантата на квадратния тричлен е 0, то той има корен и да го означим с x_0, т. е.

$$ax_0^2 + 2bx_0 + c = \sum_{k=1}^{n} (a_k.x_0 + b_k)^2 = 0.$$

От тук следва, че $a_k.x_0 + b_k = 0$, за $k = 1, 2, \ldots, n$. Полагаме $\alpha = x_0$ и $\beta = 1$, и получаваме $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, където $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, като това равенство е изпълнено за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 2.27: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(x + ky) = \sin\left(x + \frac{n}{2}y\right) \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{y}{2}};$$

$$\text{б)} \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(x + ky) = \cos\left(x + \frac{n}{2}y\right) \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{y}{2}};$$

$$\text{в)} \quad \sum_{k=1}^{n-1} p^k \sin kx = \frac{p\sin x - p^n \sin nx + p^{n+1}\sin(n-1)x}{1 - 2p\cos x + p^2};$$

$$\text{г)} \quad \sum_{k=1}^{n-1} p^k \cos kx = \frac{1 - p\cos x - p^n \cos nx + p^{n+1}\cos(n-1)x}{1 - 2p\cos x + p^2}.$$

Задача 2.28: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x.\sin nx}{2\sin x};$$

$$\text{б)} \quad \sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x.\sin nx}{2\sin x}.$$

Упътване: Използвайте формулите

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Задача 2.29: Да се докажат равенствата:

а) $$\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \frac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \frac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Упътване: Използвайте факта, че $(\sin kx)' = k.\cos kx$ и $(\cos kx)' = -k.\sin kx$, както и задача 2.16 а) и б). Трябва да се намерят производните по x на десните страни на цитираните равенства.

Задача 2.30: Да се докажат равенствата:

а) $\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots;$

б) $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots \quad .$

Решение: Ще използваме формулата на Ойлер: за всяко реално t

$$e^{\mathbf{i}t} = \cos t + \mathbf{i}\sin t.$$

Тогава се получава, че за всяко естествено число n

$$\cos nx + \mathbf{i}\sin nx = e^{\mathbf{i}nx} = \left(e^{\mathbf{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{i}^k \cos^{n-k} x \cdot \sin^k x,$$

т. е.

$$\cos nx + \mathbf{i}\sin nx = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{i}^k \cos^{n-k} x \cdot \sin^k x. \tag{2.21}$$

Имаме, че $\mathbf{i}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i}^4 = 1$, изобщо

$$\mathbf{i}^k = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad k \equiv 0 (mod \ \ 4) \\ \mathbf{i}, & \text{ако} \quad k \equiv 1 (mod \ \ 4) \\ -1, & \text{ако} \quad k \equiv 2 (mod \ \ 4) \\ -\mathbf{i}, & \text{ако} \quad k \equiv 3 (mod \ \ 4). \end{cases}$$

Ще приравним имагинерните и реалните части на лявата и дясната страна на равенството (2.21). Ще използваме горните равенства за да се изчислят степените $\mathbf{i}^k$. Ясно е, че ако k е четно число, то $\mathbf{i}^k$ е реално число, а ако k е нечетно число, то $\mathbf{i}^k$ е имагинерно число. По този начин едновременно се получават двете равенства в условието на задачата.

Задача 2.31: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)}\quad \sin^{2n} x = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2.(-1)^{n-k}.C_{2n}^k.\cos 2(n-k)x + \frac{1}{4^n}C_{2n}^n;$$

$$\text{б)}\quad \cos^{2n} x = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2.C_{2n}^k.\cos 2(n-k)x + \frac{1}{4^n}C_{2n}^n;$$

$$\text{в)}\quad \sin^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}.C_{2n-1}^k.\sin(2n-2k-1)x;$$

$$\text{г)}\quad \cos^{2n-1} x = \frac{1}{4^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k.\cos(2n-2k-1)x.$$

3. БЕЗКРАЙНИ ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

3.1 Числова редица

3.1.1 Понятие за числова редица

Дефиниция 3.1: *Ще казваме, че е дефинирана една редица от реални числа*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{3.1}$$

ако на всяко естествено число n е съпоставено едно реално число x_n.

Числото x_1 се нарича първи член, x_2- втори член, x_3-трети член, $\ldots$, x_n-общ (n-ти) член на числовата редицата. Индексът n се нарича пореден номер (или накратко номер) на члена x_n.

Да бъде зададена редицата (3.1), това означава да бъде зададено правилото, с помощта на което може да се определи стойността на всеки член x_n от редицата, като знаем неговия пореден номер n.

Общият член x_n на редицата (3.1) се явява функция на естествения аргумент n т. е.

$$x_n = f(n).$$

Като даваме различни стойности на $n = 1, 2, \ldots$ получаваме редица от стойностите на тази функция

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots.$$

Обикновено за редиците ще използваме означението $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, или само накратко $\{x_n\}$.

Ако редицата $\{x_n\}$ се дефинира чрез правилото $x_n = \dfrac{1}{n}$, то тя представлява числовото множество

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

Следващите примери показват стойностите на някои конкретно зададени редици:

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}, \quad \text{или все едно} \quad \{-1, 1, -1, 1, \ldots\};$$

$$\{x_n\} = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}, \quad \text{или все едно} \quad \{1, 0, -1, 0, 1, \ldots\};$$

$$\{x_n\} = \{(-1)^n n\}, \quad \text{или все едно} \quad \{-1, 2, -3, 4, \ldots\};$$

Ако

$$x_n = \begin{cases} 1, & n - \text{нечетно} \\ 0, & n - \text{четно}, \end{cases}$$

то редицата $\{x_n\}$ има вида $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$.

Една редица може да бъде зададена и чрез рекурентна зависимост. Нека да положим $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ и за $n = 1, 2, \ldots$ се положи $x_{n+2} = x_n + x_n$, т. е. като предполагаме, че всеки член на редицата, започвайки от третия е равен на сумата от предшестващи го членове, получаваме множеството $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$. Тази редица е известна под името редица на Фибоначи.

3.1.2 Ограничени и неограничени редици

Дефиниция 3.2: *Редицата $\{x_n\}$ се нарича ограничена отгоре (отдолу), ако съществува реално число M (реално число m), такова, че всеки член на редицата x_n да удовлетворява неравенството*

$$x_n \leq M, \quad (x_n \geq m).$$

Редица $\{x_n\}$, която е ограничена и отгоре и отдолу, се нарича ограничена от двете страни, или просто ограничена редица.

Ясно е, че една редица $\{x_n\}$ е ограничена редица, ако съществуват такива две реални числа m и M, че всеки член x_n на редицата да удовлетворява неравенствата

$$m \leq x_n \leq M. \tag{3.2}$$

Ако редицата $\{x_n\}$ е ограничена и $A = \max(|m|, |M|)$, то членовете x_n на редицата удовлетворяват неравенството $|x_n| \leq A$. Геометрично това означава, че всички членове на редицата принадлежат на сегмента $[-A, A]$.

Редица, която не е ограничена, се нарича *неограничена*. За неограничена редица, за всяко $A > 0$, може да се намерят членове от редицата, които лежат вън от интервала $(-A, A)$.

Задача 3.1: Да се докаже, че редицата $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ е ограничена редица.

Решение: Съгласно (3.2) трябва да се намерят две константи m и M, че да са изпълнени неравенства

$$m \leq \frac{n}{n+1} \leq M.$$

Ще използваме факта, че за да се засили една положителна дроб е необходимо да се засили числителя и намали знаменателя, и обратно, за да се намали тази дроб, трябва да се намали числителя и засили знаменателя. По този начин се получава, че за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n}{n} = 1,$$

и още, че

$$\frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

В нашата задача посочихме две числа $m = \dfrac{1}{2}$ и $M = 1$, такива че за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$m \leq \frac{n}{n+1} \leq M,$$

следователно редицата $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ е ограничена редица.

Задача 3.2: Да се докаже, че:

а) Редицата $\{x_n\} = \{n\}$ е ограничена отдолу, но не е ограничена отгоре;

б) Редицата $\{x_n\} = \{-n\}$ е ограничена отгоре, но не е ограничена отдолу;

в) Редицата $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$ не е ограничена нито отдолу, нито отгоре;

г) Редицата $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ е ограничена.

Задача 3.3: Да се докаже ограничеността на редиците:

а) $\left\{\dfrac{n+4}{2n+3}\right\}$; б) $\left\{\dfrac{n^2+2n}{3n^2+1}\right\}$; в) $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}$;

г) $\left\{\dfrac{n+100}{n^2+2}\right\}$; д) $\left\{\dfrac{n^2+2}{5n^2+3n+1}\right\}$;

е) $\left\{\dfrac{n}{a^n}\right\}$, $a > 1$ е фиксирана число; ж) $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$;

з) $\left\{\sqrt{n^2+(n-1)\sin n}-n\right\}$; и) $\left\{a_n = 1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\ldots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right\}$;

$$\text{й)}\quad \left\{a_n = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{n-\text{корена}}\right\}.$$

Решение: е) Ще използваме биномната формула, че за произволни реални u и v

$$(u-v)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.C_n^k.u^{n-k}.v^k. \tag{3.3}$$

Нека $a>1$ е дадено реално число. Тогава $a-1>0$ и като се използва (3.3) се получава

$$a^n = (1+a-1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4}(a-1)^2,$$

за всяко $n \geq 2$. По този начин се намира, че

$$\frac{n}{a^n} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{4}(a-1)^2} = \frac{4}{n}\cdot\frac{1}{(a-1)^2} \leq \frac{4}{(a-1)^2}.$$

Ако $n=1$ имаме, че първият член на редицата е $\dfrac{1}{a}$. Така се получи, че за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq \max\left(\frac{4}{(a-1)^2}, \frac{1}{a}\right),$$

т. е. редицата е ограничена.

ж) В сила са следните неравенства

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1.2.3}\cdot\frac{2\ldots2}{4\ldots n} < \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \leq \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{16}{3}.$$

Отново използваме неравенствата (3.2), откъдето следва, че редицата е ограничена.

3.2 Граница на числова редица. Свойства и действия със сходящи редици

3.2.1 Граница на числова редица.

Дефиниция 3.3: *Числото a се нарича граница на редицата $\{x_n\}$, ако за всяко число $\varepsilon > 0$, съществува такъв номер $N = N(\varepsilon)$, зависещ* *от* ε, *че за всяко* $n \geq N$ *членовете на тази редица удовлетворяват неравенството*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

За да изразим, че a е граница на редицата $\{x_n\}$ ще използваме означението

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

В случай, че има такова крайно число a, удовлетворяващо изброените условия, редицата $\{x_n\}$ се нарича *сходяща*. В противен случай тя се нарича *разходяща*.

От определението за граница на редица непосредствено следва, че при премахване, прибавяне, или разместване на краен брой членове на дадена редица, се получава нова редица, притежаваща следното свойство: ако е сходяща една от тях, то и другата е сходяща и техните граници са равни.

Неравенството (3.4) е еквивалентно на неравенствата

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon,$$

или

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

т. е.

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Интервалът $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ се нарича ε-околност на точката a.

Тогава, определението за граница на редица може да се изрази така: числото a се нарича граница на редицата $\{x_n\}$, ако на всяко положително число $\varepsilon > 0$, може да се съпостави такова число N, зависещо от ε, че всички числа x_n с номер $n \geq N$ принадлежат на ε-околност на точката a, т. е. $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ при $n \geq N$.

Фактът, че $x_n \to a$ може да се изрази и така: ако $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ е произволна $\varepsilon-$околност на точката a, то всички точки x_n, започвайки от известен номер N, принадлежат на тази околност. Що се отнася за точките x_n с индекси $n < N$, то те могат да принадлежат, а могат и да не принадлежат на $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. По такъв начин, ако вън от този интервал има точки x_n, то те са краен брой.

Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са две редици. По определение под сума, разлика, произведение и частно на тези редици ще разбираме съответно редиците $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n . y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В случай на частно се предполага, че $y_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1: *Ако съществуват границите* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Ако $y_n \neq 0$ *за всяко* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

За произволно реално число x, функцията $[x]$, която се чете *скобка хикс*, се дефинира като

$$[x] = \max_{m\in\mathbf{Z}}\{m \leq x\}$$

и означава цялата част на числото x. Очевидни са неравенствата

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Задача 3.4: Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Решение: Неравенството $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ ще бъде изпълнено за всяко $n \geq N$, ако номерът N се избере $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Действително, за тези n, за които $n \geq N$ са изпълнени неравенствата

$$n \geq N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

т. е. $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$. В този случай, числото $a = 0$ удовлетворява Дефиниция 3.3 и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Задача 3.5: Да се докаже, че:

$$\text{а)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1; \quad \text{б)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2+1} = 2;$$

$$\text{в)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k} = \frac{a_0}{b_0}; \quad \text{г)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+10}{n^2+2} = 0;$$

$$\text{д)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_l} = 0, \quad \text{при} \quad k < l.$$

Решение: б) За да намерим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+2}{n^2+1}$ от числителя и знаменателя ще изнесем n, повдигнат на най-висока степен, в случая n^2. Ще използваме Теорема 3.1 и последователно се получава

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2.$$

3.2.2 Безкрайно малки и безкрайно големи редици

Особена роля в математиката и нейните приложения играят тези променливи величини, които имат за своя граница числото нула.

Дефиниция 3.4: *Редицата $\{\alpha_n\}$ се нарича безкрайно малка, ако*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

По такъв начин, ако $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка, то за всяко $\varepsilon > 0$, съществува номер $N = N(\varepsilon)$, такъв че $|\alpha_n| < \varepsilon$, щом $n \geq N$.

Редицата $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ е безкрайно малка, изобщо всяка редица от вида $\left\{\dfrac{1}{n^c}\right\}$, където $c > 0$ е безкрайно малка.

Задача 3.6: Да се докаже, че за да притежава редицата $\{x_n\}$ граница a е необходимо и достатъчно да имаме $x_n = a + \alpha_n$, където $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка редица.

Теорема 3.2: *Алгебрична сума от краен брой безкрайно малки редици е безкрайно малка редица.*

Теорема 3.3: *Произведението на безкрайно малка редица и ограничена редица е безкрайно малка редица.*

Отбелязваме факта, че частното на две безкрайно малки редици, в най-общия случай, може да има твърде разнообразно поведение.

Дефиниция 3.5: *Редицата $\{\beta_n\}$ се нарича безкрайно голяма, ако за всяко $A > 0$, съществува число $N = N(A)$, такова че $|\beta_n| > A$, щом $n \geq N$.*

Този факт се записва така:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty, \tag{3.5}$$

при това се казва, че β_n клони (дивергира) към безкрайност. Когато една редица дивергира към плюс или минус безкрайност, тя е разходяща.

Ако безкрайно голяма редица $\{\beta_n\}$, започвайки от някакъв номер N, приема само положителни, или само отрицателни стойности, то пишем съответно

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty, \tag{3.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty, \tag{3.7}$$

По такъв начин от (3.6), както и от (3.7) следва (3.5).

Разглеждаме примерите:

$$\beta_n = n^3, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty; \quad \beta_n = -n, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty.$$

Теорема 3.4: *Ако редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка и всички нейни членове са различни от нула, то редицата $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ е безкрайно голяма, и обратно, ако редицата $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$ е безкрайно голяма, то редицата $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ е безкрайно малка.*

Редицата с общ член $x_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \to +\infty$, при $n \to \infty$, т. е. тя е безкрайно голяма редица. Тогава да образуваме редица с общ член $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Очевидно $\alpha_n \to 0$, при $n \to \infty$, и това е безкрайно малка редица.

3.2.3 Неопределени изрази

1) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, ($y_n \neq 0$ за всяко n).

Да разгледаме редицата $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. За границата на тази редица предварително нищо определено не може да се каже, както показват и следващите няколко примера:

Ако $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ако $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Ако $x_n = \dfrac{a}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = a \to a$ при $n \to \infty$.

Ако $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\dfrac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ и редицата $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ в този случай не притежава граница.

За намиране на границата на редицата $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ не е достатъчно да знаем, че $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$. Нужни са допълнителни сведения за характера на изменението на x_n и y_n, така че за всеки конкретен случай се изисква специален начин за търсене на границата.

Казва се, че изразът $\dfrac{x_n}{y_n}$ при $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ представлява неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

2) Ако $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, то изразът $\dfrac{x_n}{y_n}$ също представлява неопределеност и се нарича неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

3) Ако $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$, то изразът $x_n.y_n$ се нарича неопределеност от вида $[0.\infty]$.

4) Ако $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, то изразът $x_n - y_n$ се нарича неопределеност от вида $[\infty - \infty]$.

Да се разкрие съответната неопределеност, означава да се намери границата (ако съществува) на съответния израз.

Задача 3.7: Да се докаже, че редицата с общ член

$$x_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{4n^2 + n + 1}$$

дивергира към плюс безкрайност.

Решение: Ще направим следните преобразования на общия член на редицата

$$x_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{4n^2 + n + 1} = \frac{n^3\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= n \cdot \frac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} > n \cdot \frac{1}{4 + 1 + 1} = \frac{n}{6}.$$

Нека $A > 0$ да бъде произволно реално число. Ще направим анализ на неравенството $\dfrac{n}{6} > A$. Нека да посочим номер $N = [6A] + 1$. За тези $n > N$ са изпълнени неравенствата

$$n > N = [6A] + 1 > 6A, \quad \text{т. е.} \quad \frac{n}{6} > A.$$

Окончателно, за произволно $A > 0$, посочваме $N = [6A] + 1$, че за всяко $n > N$ е изпълнено неравенството $x_n > A$, т. е. редицата дивергира към $+\infty$.

Задача 3.8: Да се докаже, че редицата с общ член x_n дивергира към $+\infty$, или $-\infty$, ако:

$$\text{а)} \quad x_n = \frac{3n^2 + 1}{4n + 3}; \quad \text{б)} \quad x_n = \frac{4n^3 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 1};$$

$$\text{в)} \quad x_n = \frac{-3n^2 + 2n - 1}{2n + 1}; \quad \text{г)} \quad x_n = \frac{5n^3 + 3n^2 - n + 1}{-2n^2 + n + 1}.$$

Задача 3.9: Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ и $x_n \neq 0$, следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Задача 3.10: Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ и $x_n \neq 0$, следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|x_n|} = \infty$. Да се посочи пример, когато $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, но $\dfrac{1}{x_n}$ не дивергира нито към плюс безкрайност, нито към минус безкрайност.

Задача 3.11: Нека k и l са естествени числа, за които $k > l$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_l} = \begin{cases} +\infty, & \text{ако} \quad a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & \text{ако} \quad a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

3.2.4 Граници на рационални функции на n

Задача 3.12: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}; \quad \text{б)} \quad \frac{3n^2 + 2n + 6}{n^2 + 1}; \quad \text{в)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+6};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+2}; \quad \text{д)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{10n^3 - 5n^2 + 3n - 8}{2n^3 + 5n^2 - n + 4};$$

$$\text{е)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{6n^5+3n^3-7n+13}{3n^5-6n^3+14n+1};\quad \text{ж)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{24n^9-8}{4n^9-2};$$

$$\text{з)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{22n^{22}+\pi n^{11}+8n^5-6n^3+\pi}{7n^{22}+13n^5-2n^3+\pi^2};\quad \text{и)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{1-n^2}+2^{\frac{1}{n}}-\frac{4}{n}\right);$$

$$\text{й)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2+3n-4n^2+3n^3}{4-7n+14n^2+5n^3};\quad \text{к)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3-5n+14n^2}{n^3+6n^2-9};$$

$$\text{л)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+45n^2-9}{45n^3-3n};\quad \text{м)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\dots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\dots+b_m},\quad a_0,b_0\neq 0;$$

$$\text{н)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3};\quad \text{о)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{8n^2-16n+5};$$

$$\text{п)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2n-1)^5};$$

$$\text{р)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^{20}(3n-2)^{30}}{(2n+4)^{50}};\quad \text{с)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}.$$

Отговори: а) 1; б) 3; в) 0; г) $+\infty$; д) 5; е) 2; ж) 6; з) $\frac{22}{7}$; и) -4; й) $\frac{3}{5}$; к) 0; л) $\frac{1}{45}$; м) $\frac{a_0}{b_0}$ при $k=m$, 0 при $k<m$, и ∞ при $k>m$; н) $\frac{1}{4}$; о) $+\infty$; п) $\frac{1}{32}$; р) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$; с) 1.

Задача 3.13: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2};\quad \text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}};\quad \text{г)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3};$$

$$\text{д)}\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}\right];\quad \text{е)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)};$$

$$\text{ж)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)},\quad (m\in\mathbb{N}).$$

Решение: а) Изразът $1+2+3+\ldots+n$ представлява сумата на първите n члена на аритметична прогресия. Отг: $\dfrac{1}{2}$; б) Докажете, че за всяко $n\in\mathbb{N}$ $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Отг: 2; в) 1; г) Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Отг: $\dfrac{1}{3}$; д) За всяко естествено k е в сила равенството

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Като се използва това равенство се получава

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1;$$

е) За всяко естествено k ще използваме представянето

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right].$$

Тогава, след сумиране се получава

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Търсената граница е $\dfrac{1}{4}$;

ж) Използвайте представянето

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m}\cdot\frac{(k+m)-k}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right].$$

След това се сумира, за да се получи, че търсената граница е $\dfrac{1}{m.m!}$.

Задача 3.14: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)};$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2m+1)},\quad (m\in\mathbb{N}).$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{1.3.5\dots(2m-1)}$.

Задача 3.15: Да се докаже, че:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2};\quad \text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{1+2+\ldots+k}\right)=\frac{1}{3}.$$

3.2.5 Граници на рационални функции на a_n

Задача 3.16: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-5a_n+6}{a_n^2-7a_n+10},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=2,\quad a_n\neq 2,5;$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-6a_n+8}{a_n^2-5a_n+4},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=4,\quad a_n\neq 1,4;$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4+2a_n^2-3}{a_n^2-3a_n+2},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad a_n\neq 1,2;$$

$$\text{г)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n^4-4a_n^3+1}{(a_n-1)^2},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad a_n\neq 1;$$

$$\text{д)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^k-1}{a_n-1},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad a_n\neq 1,\quad k\in\mathbb{N};$$

$$\text{е)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^k-1}{a_n^l-1},\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad k,l\in\mathbb{N},$$

и $a_n\neq 1$, за нечетно l, $|a_n|\neq 1$ за четно l;

$$\text{ж)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-a_n}-\frac{3}{1-a_n^3}\right),\quad \text{ако}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad a_n\neq 1;$$

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{k}{1-a_n^k}-\dfrac{l}{1-a_n^l}\right)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $k,l\in\mathbb{N}$, и $a_n\neq 1$, за нечетни k и l, $|a_n|\neq 1$, когато някое от числата k и l е четно.

Решение: а) Използвайте очевидните представяния, че $a_n^2-5a_n+6 = (a_n-2)(a_n-3)$ и $a_n^2-7a_n+10=(a_n-2)(a_n-5)$, за да се получи, че границата е $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) -8; г) 6; д) k; е) $\frac{k}{l}$; ж) -1; з) $\frac{k-l}{2}$.

3.2.6 Граници на ирационални функции на n

Задача 3.17: Да се докаже, че от $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следват равенствата:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a};\quad \text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a},$$

винаги когато корените съществуват.

Упътване: Използвайте, че за всеки две неотрицателни реални a и b, които не са едновременно равни на нула, е в сила равенството

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Задача 3.18: Да се намери границата

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Решение: Ако $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, то при $n\to\infty$ се получава неопределеност от вида $[\infty-\infty]$. Ще разкрием тази неопределеност, като умножим и разделим на $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\neq 0$, т. е. правят се преобразованията

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Следователно се получава, че

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Задача 3.19: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right);\quad \text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+5}-n\right);\quad \text{г)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+4}-\sqrt{n^2+n}\right);$$

$$\text{д)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n-1}\right);\quad \text{е)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right);$$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-8n^3}+2n\right)$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)n$; й) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Отговори: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2; д) $+\infty$; е) 1; ж) 0; з) $\frac{a+b}{2}$; и) $\frac{1}{2}$; й) 2; к) e;

Задача 3.20: Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2-16}}{3n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+1}+n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24n+5}{\sqrt[3]{27n^3+12n^2-6}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-5}{1+\sqrt{n^2+3}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+9}}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Отговори: а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 8; д) 6; е) 1; ж) 2; з) 1; и) $\frac{1}{3}$.

3.2.7 Граници с q^n

Задача 3.21: Да се докаже, че ако $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Решение: Нека $q\neq 0$ и $\varepsilon>0$ е произволно реално число. Неравенството

$$|q^n-0| = |q|^n < \varepsilon \tag{3.8}$$

е изпълнено когато $n\lg|q| < \lg\varepsilon$. Понеже $|q|<1$, то $\lg|q|<0$. Също така, без ограничение на общността може да се смята $\varepsilon<1$, откъдето се получава, че $\lg\varepsilon<0$. Така неравенството $n\lg|q|<\lg\varepsilon$ е еквивалентно на неравенството $n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$. Сега да посочим $N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]+1$. Тогава за $n\geq N$ се получава, че $n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ и неравенството (3.8) е в сила, което показва, че при $0<|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Ако $q=0$, то в този случай се получава стационарната редица $\{0,0,\ldots,0,\ldots\}$, която очевидно има граница нула.

Задача 3.22: Нека $|q| < 1$ и $S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^n$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Решение: Като се използва формулата за сумата на първите n члена на геометричната прогресия се получава

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Извършваме граничен преход в горното равенството, използваме задача 3.21 и се получава

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Задача 3.23: Да се докаже, че:

а) ако $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^k.q^n = 0$, където k е произволно естествено число;

б) ако $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$;

в) ако $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^k} = \infty$, където k е произволно естествено число.

Решение: а) Ще използваме следният резултат: Ако P е полином и $q > 1$, то съществува такова число N, че за всяко естествено $n > N$ е изпълнено неравенството $q^n > P(n)$.

Сега ще решим нашата задача. Ако $q = 0$, твърдението е очевидно, затова нека $q \neq 0$. При произволно $\varepsilon > 0$, от горният резултат с $\dfrac{1}{|q|}$ вместо q и $P(x) = \dfrac{x^k}{\varepsilon}$ следва, че съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е в сила неравенството $\dfrac{1}{|q|^n} > \dfrac{n^k}{\varepsilon}$. Това неравенство е равносилно на неравенството $|n^k q^n| < \varepsilon$, откъдето следва, че

$$\lim_{n\to\infty} n^k.q^n = 0.$$

Задача 3.24: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}; \quad \text{б)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{\nu=1}^{k} \nu^n \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$\text{в)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}; \quad \text{г)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$\text{д)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}); \quad \text{е)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Решение: а) Ще използваме следните преобразувания

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0;$$

б) 1; в) 3; г) 0 при $|a| < 1$, 1 при $|a| > 1$, $\frac{1}{2}$ при $a = 1$, и при $a = -1$ редицата не е дефинирана; д) 0 при $|a| \neq 1$, $\frac{1}{2}$ при $a = 1$, при $a = -1$ редицата е $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}$ и следователно е разходяща; е) Редицата не е дефинирана при $a = 0$. При $a \neq 0$ общият член може да се запише във вида $\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, откъдето следва, че при $|a| < 1$ границата е -1, при $|a| = 1$ тя е 0, а при $|a| > 1$ е 1; ж) 0 за всяко $a \neq -1$.

Задача 3.25: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}, \quad |q| < 1; \quad \text{б)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{5^k};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{2^k}\right), \quad |q| < 1.$$

Решение: а) Използвайте следният резултат:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \neq 1,$$

за да се намери, че търсената граница е $\frac{1}{(1-q)^2}$; б) От а) следва, че търсената граница е $\frac{11}{16}$; в) Умножете произведението с $1 - q$, направете преобразувания за да се получи, че търсената граница е $\frac{1}{1-q}$.

3.3 Сходимост и неравенства

Следващите два резултата ще бъдат много полезни в нашата работа.

Теорема 3.5: *Нека за редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ съществуват границите $\lim_{n\to\infty} x_n$ и $\lim_{n\to\infty} y_n$. Тогава, ако съществува номер N, такъв че $x_n \le y_n$ при $n \ge N$, то $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$, т. е. операторът за граница запазва неравенствата между общите членове на редиците.*

Теорема 3.6: (*теорема за трите редици*) *Нека за редиците $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ съществуват границите $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. Нека за редицата $\{z_n\}$ съществува номер N, такъв че $x_n \le z_n \le y_n$, при $n \ge N$. Тогава е в сила, че редицата $\{z_n\}$ е сходяща и е в сила равенството $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.*

Задача 3.26: Нека $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \ge -1$ за всяко n, и p е естествено число. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1.$$

Решение: Ако $x_n \ge 0$, то

$$1 \le \sqrt[p]{1+x_n} \le \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|,$$

а ако $-1 \le x_n < 0$, то

$$1 \ge \sqrt[p]{1+x_n} \ge \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Обединяваме тези резултати, така че за всяко $x_n \ge -1$, се получава

$$1 - |x_n| \le \sqrt[p]{1+x_n} \le 1 + |x_n|. \tag{3.9}$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n\to\infty} (1 + |x_n|) = 1.$$

От тук, като се извърши граничен преход при $n \to \infty$ в (3.9) и се използва Теорема 3.6 се получава, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1.$$

Задача 3.27: Да се докаже, че за всяко реално $a > 0$ е в сила равенството

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Решение: Нека е в сила, че $a \geq 1$. Тогава за всяко цяло положително число n е изпълнено равенството $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, където $\alpha_n \geq 0$. От неравенството на Бернули следва, че $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, откъдето се получава, че $0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Елементите на редицата $\{\alpha_n\}$ се намират между елементите на две редици, които имат за граница 0. Съгласно Теорема 3.6 редицата $\{\alpha_n\}$ също има за граница числото 0. Следователно редицата $\{\sqrt[n]{a}\}$ при $a \geq 1$ е сходяща и има за своя граница числото 1.

Нека сега е в сила, че $0 < a < 1$. Полагаме $a = \dfrac{1}{b}$, където $b > 1$. Тогава редицата $\{\sqrt[n]{b}\}$ е сходяща и има за граница числото 1. По този начин се получава, че $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Задача 3.28: Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Решение: Означаваме $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$. Тогава $\alpha_n \geq 0$ и

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \alpha_n^2,$$

при $n \geq 2$. Тъй като $n - 1 \geq \dfrac{n}{2}$ при $n \geq 2$, то $n \geq \dfrac{n^2\alpha_n^2}{4}$, откъдето се получава

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Извършваме граничен преход при $n \to \infty$ в горните неравенства и се получава $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Окончателно се получава, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \alpha_n) = 1.$$

В следващите три примера ще бъдат сравнени скоростите на растене на редиците $\{n!\}$, $\{a^n\}$, $\{n\}$ и $\{\log_a n\}$, където $a > 1$.

Задача 3.29: Да се докаже, че за всяко $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Решение: Нека N е цяло положително число по-голямо от a. Тогава за всяко $n > N$ ще имаме

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n} = \frac{a^n}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n}.$$

Но при $n > N$ е в сила неравенството

$$\frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} \leq \frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{N+1} = q^{n-N},$$

където $q = \dfrac{a}{N+1} < 1$. Но при $q < 1$ редицата $\{q^n\}$ има за граница числото 0. Тогава, след извършване на граничен преход в горното неравенство се получава следното:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a}{N!} \cdot q^{n-N} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{N!} \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-N} = \frac{a}{N!} \cdot 0 = 0.$$

Прилагайки Теорема 3.6 стигаме да извода, че редицата $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$ е сходяща и има граница 0.

Задача 3.30: Нека $a > 1$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Решение: Тъй като $a - 1 > 0$ имаме

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot (a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4} \cdot (a-1)^2,$$

за всички естествени числа $n \geq 2$. От тук следва, че

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n(a-1)^2}.$$

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n(a-1)^2} = 0$, то съгласно горните неравенства се получава, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

Задача 3.31: Нека $a > 1$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Решение: За да докажем горното равенство ще използваме дефиницията за граница на редица и резултата на задача 3.30. Нека $\varepsilon > 0$ да бъде произволно число. Неравенството

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

е равносилно на неравенството $n < (a^{\varepsilon})^n$. Тъй като $a^{\varepsilon} > a^0 = 1$, то съгласно задача 3.30 имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(a^{\varepsilon})^n} = 0$, следователно съществува номер $N = N(\varepsilon)$, че за всяко $n \geq N$

$$\frac{n}{(a^{\varepsilon})^n} < 1,$$

т. е. $n < a^{\varepsilon n}$. Оттук се получава, че за всяко $n \geq N$ е в сила неравенството

$$0 \leq \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

което означава, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

По този начин, от трите редици $\{a^n\}$, $\{n\}$ и $\{\log_a n\}$, $a > 1$, първата редица расте към безкрайност много по-бързо отколкото другите, а третата- по-бавно отколкото предходните две редици. Ако в задача 3.29 се постави $a > 1$, то редицата $\{n!\}$ има по-бърза скорост на клонене към безкрайност, отколкото редицата $\{a^n\}$.

Задача 3.32: Намерете границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}.$$

Решение: Ще използваме неравенствата

$$0 \leq \left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right| \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Извършваме граничен преход при $n \to \infty$ в горното неравенство и се получава равенството $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0$.

Задача 3.33: Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2011}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ (a – произволно число);

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2}\right)^n$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+10}{2n-1}\right)^n$.

Решение: а) Най-напред ще използваме факта, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2011}{n} = 0$. Тогава за произволно ε, такова, че $0 < \varepsilon < 1$ съществува номер N, че за всяко $n \geq N$ е в сила неравенството $\dfrac{2011}{n} < \varepsilon$. От тук се получава, че

$$0 \leq \left(\frac{2011}{n}\right)^n < \varepsilon^n.$$

След това, от $\varepsilon < 1$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon^n = 0$. След извършване на граничен преход при $n \to \infty$ в горното равенство се получава, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2011}{n}\right)^n = 0$; б) 0; в) Най-напред от $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n^2} = 0$, за произволно $0 < \varepsilon < 1$ съществува номер N, че за всяко $n \geq N$

$$0 \leq \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n < \varepsilon^n.$$

Търсената граница е 0; г) 0.

Задача 3.34: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако:

$$\text{а)} \ \ x_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n}}; \ \ \text{б)} \ \ x_n = \left(8 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}}; \ \ \text{в)} \ \ x_n = \sqrt[3]{\frac{n + 0,25}{8n+1}};$$

$$\text{г)} \ \ x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}; \ \ \text{д)} \ \ x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}.$$

Отговори: а) 3; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) Използвайте двете неравенства

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

за да се получи, че границата е 1.

Задача 3.35: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)} \ \ \sqrt[3n]{8}; \ \ \text{б)} \ \ \sqrt[2n]{0,5}; \ \ \text{в)} \ \ \sqrt[n^2]{6}; \ \ \text{г)} \ \ \frac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,01}};$$

$$\text{д)} \ \ \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}; \ \ \text{е)} \ \ \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}; \ \ \text{ж)} \ \ \sqrt[n]{\frac{2n+5}{n-0,5}}; \ \ \text{з)} \ \ \sqrt[n]{3^n + 2^n};$$

$$\text{и)} \ \ \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1}; \ \ \text{й)} \ \ \frac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}; \ \ \text{к)} \ \ 4^{\frac{n+2}{n+1}};$$

$$\text{л)} \ \ (1 + 11^n)^{\frac{1}{n+2}}; \ \ \text{м)} \ \ a^{\frac{1}{n+p}}, \ \ a > 0, \ \ p > 0.$$

Отговори: а) 1; б) 1; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$; д) 1; е) 1; ж) 1; з) Използвайте, че $\sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, за да се получи, че търсената граница е 3; и) Използвайте факта, че

$$\frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1} = \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{(\sqrt[n]{3} - 1)(\sqrt[n]{3} + 1)},$$

за да се получи, че търсената граница е $\frac{1}{2}$; й) 3; к) 4; л) 11; м) 1.

Задача 3.36: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\quad \sqrt[n]{n^2};\quad \text{б)}\quad \sqrt[n]{5n};\quad \text{в)}\quad \sqrt[2n]{2n};\quad \text{г)}\quad \sqrt[4n]{n};$$

$$\text{д)}\quad \sqrt[n^2]{n};\quad \text{е)}\quad \sqrt[n]{n+3};\quad \text{ж)}\quad \frac{1 + \sqrt[n]{2}}{1 + \sqrt[n]{2n}};\quad \text{з)}\quad \sqrt[n]{3n-2};$$

$$\text{и)}\quad \sqrt[n]{n^3 + 3n};\quad \text{й)}\quad \sqrt[n]{\frac{2n^2 - 5n + 3}{n^5 + 1}}.$$

Отговори: а) 1; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1; е) 1; ж) 1; з) $\frac{1}{2}$; и) 1; й) 1.

Задача 3.37: Да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k.q^n = 0$, където $|q| < 1$, и k е естествено число;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, където $|a| > 1$, и k е естествено число.

Резултатите на горната задача се използват за да се намерят границите в следващата задача.

Задача 3.38: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\quad \frac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}};\quad \text{б)}\quad \frac{n^{10} - 1}{1 + n.1,1^n};$$

$$\text{в)}\quad \sqrt[n]{3^n + n.2^n};\quad \text{г)}\quad \sqrt[n]{\frac{n^2 + 4^n}{n + 5^n}};\quad \text{д)}\quad \sqrt[n]{\frac{10}{n} - \frac{1}{1,2^n}}.$$

Отговори: а) $\frac{1}{3}$; б) 0; в) 3; г) $\frac{4}{5}$; д) 1.

Задача 3.39: Нека $0 < a < 1$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

Сравнете тази задача със задача 3.31.

Задача 3.40: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\ \ \frac{n\lg n}{n^2-1};\quad \text{б)}\ \ \frac{5n+\lg n}{n-3,5};$$

$$\text{в)}\ \ \frac{\log_2(n+3)}{n-1,3};\quad \text{г)}\ \ \frac{\log_5(n^2+1)}{n};\quad \text{д)}\ \ \frac{n-\ln n}{\log_2(4^n+1)}.$$

Отговори: а) 0; б) 5; в) 0; г) 0; д) $\frac{1}{2}$.

Задача 3.41: Да се докаже, че за произволно a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Задача 3.42: Да се намерят границите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\ \ \frac{(-2)^n}{(n+2)!};\quad \text{б)}\ \ \frac{1}{(0,3)^n.n!};\quad \text{в)}\ \ \frac{n.3^n+1}{n!+1};\quad \text{г)}\ \ \frac{4^n+n^2.2^n-1}{n^4+(n!)^2};$$

$$\text{д)}\ \ \frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!};\quad \text{е)}\ \ \frac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!};\quad \text{ж)}\ \ \frac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}.$$

Отговори: а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 0; ж) 1;

3.4 Монотонни редици. Числото e

Дефиниция 3.6: *Редицата $\{x_n\}$ се нарича ненамаляваща (нерастяща), ако за всяка $n\in\mathbb{N}$ е в сила неравенството*

$$x_n\le x_{n+1}\quad (x_n\ge x_{n+1}).$$

Ако са изпълнени строгите неравенства $x_n<x_{n+1}$ ($x_n>x_{n+1}$), то редицата $\{x_n\}$ се нарича строго растяща (строго намаляваща), или просто растяща (намаляваща). Ненамаляващите, нерастящите, растящите и намаляващите редици се наричат монотонни редици.

Например редицата $\left\{\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right\}=\left\{1,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},...,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},...\right\}$ е нерастяща, а редицата $\left\{n^2\right\}=\left\{1,4,9,...,n^2,...\right\}$ е растяща.

Теорема 3.7: *Ако редицата от реални числа*

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

не намалява (не расте) и е ограничена отгоре (отдолу) от числото M *(съответно* m*), то съществува реално число* a*, ненадминаващо* M *(не по-малко от* m*), такова, че*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leq M \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq m\right).$$

Тази теорема за сходимост на монотонни редици, практически в много случаи позволява да се установи съществуването на граница на редица.

Да разгледаме редицата

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

Ще докажем, че тази редица е сходяща. За тази цел ще използваме биномната формула на Нютон, а именно, че за произволни реални a и b е в сила равенството

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Прилагайки горната формула се получава:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!} \cdots \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Ще покажем, че редицата $\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ е ограничена отгоре редица. От равенството (3.10) се получава следната оценка отгоре:

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \qquad (3.11)$$

За всяко цяло $k \geq 2$ е в сила неравенството $k! = k(k-1)\dots 2.1 \geq 2^{k-1}$. От последното неравенство и (3.11) се получава, че

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Очевидно неравенството $x_n < 3$ е вярно и в случая, когато $n = 1$. Получихме, че за всяко $n \geq 1$ е в сила неравенството $x_n < 3$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е ограничa отгоре редица.

Сега ще покажем, че редицата $\{x_n\}$ е монотонно растяща. От равенството (3.10) се получава, че

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \tag{3.12}$$

Като се сравнят изразите във формулите (3.10) и (3.12) е ясно, че всяко едно събираемо от формулата (3.12) е по-голямо от съответното събираемо от формулата (3.10), и формулата (3.12) има още едно положително събираемо $\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$. По този начин се получава, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $x_n < x_{n+1}$, откъдето редицата $\{x_n\}$ е монотонно растяща редица.

Съгласно Теорема 3.7 следва, че $\{x_n\}$ е сходяща редица. Да означим границата на редицата $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ с буквата e, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{3.13}$$

Числото e записано с няколко цифри след десетичната запетая е

$$e = 2,7182818284\cdots.$$

Това число играе важна роля в математиката и ще го срещаме понататък многократно. Освен това, то участвува и в редица важни приложни проблеми. Числото e е прието за основа на така наречените натурални, или неперови логаритми, по името на шотландския математик Джон Непер. По негово име то се нарича неперово число.

Натуралните логаритми имат по-широко приложение от десетичните. Прието е натуралния логаритъм от числото $x > 0$ да се означава със знака $\ln x = \log_e x$, докато за десетичния логаритъм се използва означението $\lg x = \log_{10} x$.

Лесно се вижда, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Задача 3.43: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n; \quad \text{б)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n;$$

Решение: а) Ще използваме следните преобразувания

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Сега извършваме граничен преход в горното равенство при $n \to \infty$ и използваме резултата (3.13), за да се получи, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.1.e = e^2;$$

б) e^3.

Задача 3.44: Нека p е произволно естествено число. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n = e.$$

Решение: За произволно фиксирано естествено p и всяко естествено число n е в сила равенството

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p. \tag{3.14}$$

Тъй като p е фиксирано, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p = 1$, и чрез граничен преход в (3.14) при $n \to \infty$ се получава, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-p} = e. \tag{3.15}$$

Редицата с общ член $\left(\dfrac{n+p+1}{n+p}\right)^n$ се получава от редицата с общ член $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-p}$ чрез изпускане на първите p члена. От (3.15) следва, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+p+1}{n+p}\right)^n = e.$$

Задача 3.45: Нека k е прозволно фиксирано цяло число. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k. \tag{3.16}$$

Решение: Нека k е произволно естествено число. Ще използваме представянето

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+k-1}{n+k-2}\right)^n \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

В горното равенство ще извършим граничен преход при $n \to \infty$, използваме резултата на задача 3.44 и се получава

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \underbrace{e.e\dots e}_{k-\text{пъти}} = e^k.$$

Ако $k = 0$, то равенството (3.16) е очевидно.

Нека сега $k < 0$ е произволно цяло. Тогава съществува цяло положително t, че $k = -t$. В този случай ще използваме следните преобразувания

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-t}{n}\right)^n = \left(\frac{n-t}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-t}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^n \dots \left(\frac{n-t+1}{n-t}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-2+1}{n-2}\right)^n \dots \left(\frac{n-t+1}{n-t}\right)^n}.$$

В горното равенство извършваме граничен преход при $n \to \infty$ и отново използваме резултата на задача 3.44. Получаваме следните равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{\underbrace{e.e\ldots e}_{t-\text{пъти}}} = e^{-t} = e^k.$$

Задача 3.46: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n;\quad \text{б)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{kn}\right)^n;\quad \text{в)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k};$$

$$\text{г)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^n;\quad \text{д)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n;\quad \text{е)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+k}{n+m}\right)^n;$$

$$\text{ж)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n};\quad \text{з)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn};\quad \text{и)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn};$$

$$\text{й)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\right)^n;\quad \text{к)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n;\quad \text{л)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n}};$$

$$\text{м)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1};\quad \text{н)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n^2}\right)^{\frac{n+1}{3}};$$

$$\text{о)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2};\quad \text{п)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+4}\right)^n.$$

Отговори: а) e^{-k}; б) e^k; в) e; г) e^4; д) e^5; е) e^{k-m}; ж) e^2; з) e^k; и) $e^{k\cdot m}$; й) e^3; к) 1; л) 1; м) e^6; н) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$; о) e^2; п) e^2.

3.5 Фундаментални редици. Критерии на Коши

Дефиниция 3.7: *Редицата $\{x_n\}$ се нарича фундаментална редица, ако тя удовлетворява условието на Коши, т. е. за всяко $\varepsilon > 0$, съществува такова естествено число $N = N(\varepsilon)$, зависещо от ε, че за всяко $n \geq N$ и всяко естествено число p е в сила неравенството*

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon. \tag{3.17}$$

Теорема 3.8: (**Критерий на Коши:**) *За това една редица да има крайна граница, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална редица.*

От критерия на Коши следва, че за това една редица да не бъде сходяща, е необходимо и достатъчно тя да не удовлетворява условието на Коши, иначе казано, тя да удовлетворява отрицанието на условието на Коши, т. е. съществува такова $\varepsilon > 0$, че за всяко естествено N съществуват номер $n \geq N$ и естествено число p, че да е в сила неравенството

$$|x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon. \tag{3.18}$$

Задача 3.47: Да се докаже, че редицата

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

е сходяща.

Решение: Ще оценим модула на разликата

$$|x_n - x_{n+p}| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2.3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Нека ε е произволно положително число. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$, то за това ε съществува номер N, че за всяко $n \geq N$ е в сила неравенството $\dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$. Окончателно, ако $n \geq N$ а p е произволно естествено число е в сила неравенството

$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Условието (3.17) на Коши е изпълнено и дадената редица е сходяща.

Задача 3.48: Да се докаже, че редицата

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

е разходяща.

Решение: Ще оценим разликата

$$x_{n+p} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}$$

$$\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Ако в горното равенство се вземе $p = n$, то се получава

$$x_{2n} - x_n = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

От тук се вижда, че тази редица удовлетворява отрицанието (3.18) на условието на Коши, а именно, при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и всяко естествено N посочваме $n = N$ и $p = N$, и имаме

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \geq \frac{1}{2}.$$

Следователно, дадената редица е разходяща.

Задача 3.49: Да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ е фундаментална, ако:

а) $x_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$ б) $x_n = \dfrac{n+1}{3n+2}, \quad n \in \mathbb{N};$

в) $x_n = 0.\underbrace{66\ldots6}_{n-\text{цифри}}, \quad n \in \mathbb{N};$

г) $x_n = a + a.q + a.q^2 + \ldots + a.q^{n-1}$, където $|q| < 1, \quad n \in \mathbb{N};$

д) $\{x_n\} = \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots\};$

е) $x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} \quad (n = 2, 3, \ldots).$

Задача 3.50: Нека a_0 е цяло неотрицателно число, а $\{a_n\}$ е редица, членовете на която са десетични цифри. Разглеждаме редицата от десетични дроби $x_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че това е фундаментална редица.

Задача 3.51: Да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ е сходяща, ако x_n е равно на:

а) $\dfrac{\sin a}{2} + \dfrac{\sin 2a}{2^2} + \dfrac{\sin 3a}{2^3} + \ldots + \dfrac{\sin na}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k q^k$, където $|q| < 1, \quad |a_k| \leq C, \quad n \in \mathbb{N};$

в) $1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N};$

г) $\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n.(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Задача 3.52: Като се използва отрицанието на условието на Коши да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ е разходяща, ако x_n е равно на:

а) $0,2^{(-1)^n . n}$; б) $\dfrac{n\cos\pi n - 1}{2n}$; в) $(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

г) $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$; д) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{3^2}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)^2}$.

3.6 Общи задачи от числови редици

Задача 3.53: Нека редицата $\{x_n\}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Да се докаже, че и редицата $\{|x_n|\}$ е сходяща, и е в сила равенството $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Упътване: Използвайте, че за произволни реални x и y е в сила неравенството $||x| - |y|| \le |x - y|$.

Задача 3.54: Посочете пример за разходяща редица $\{x_n\}$, за която редицата $\{|x_n|\}$ е сходяща.

Задача 3.55: За редицата $\{x_n\}$ двете подредици $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ имат една и съща граница. Да се докаже, че и самата редица е сходяща към тази граница.

Задача 3.56: Редицата $\{x_n\}$ е такава, че $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$, и $a \neq b$. Да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ е разходяща.

Задача 3.57: Да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ е разходяща, ако x_n е равно на:

а) $\log_a\left(2+(-1)^{n^2}\right)$, $1 \neq a > 0$; б) $\arcsin\dfrac{(-1)^n . n}{n+1}$; в) $\dfrac{2^{n+1}-(-3)^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$.

Упътване: Използвайте задача 3.56.

Задача 3.58: Да се докаже, че редицата:

а) $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k$, $n \in \mathbb{N}$ е сходяща;

б) $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k$, $n \in \mathbb{N}$ е разходяща.

Задача 3.59: Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0.$$

Задача 3.60: Посочете пример на редица $\{x_n\}$, удовлетворяваща условието

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon), \ \ \forall n \geq N \ \ x_n < \varepsilon,$$

и такава, че: 1) тя няма граница; 2) тя има граница. Може ли тази граница да бъде равна на 1?

Задача 3.61: Формулирайте на езика $<< \varepsilon - N >>$ отрицанието на факта, че редицата $\{x_n\}$ е бекрайно малка, и го запишете като използвате символите $\forall, \exists$.

Задача 3.62: Явява ли се обезателно числото a граница на редицата $\{x_n\}$, ако:

1) съществува такова естествено число N, че за всяко $\varepsilon > 0$ и произволно $n \geq N$ да е в сила неравенството $|x_n - a| < \varepsilon$;

2) за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват такива естествени числа N и $n \geq N$, че да е в сила неравенството $|x_n - a| < \varepsilon$?

Задача 3.63: Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\ \ \frac{n!}{n^n}; \quad \text{б)}\ \ \frac{n^2-3}{n^4+3n^2+1}; \quad \text{в)}\ \ \frac{n\sin n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}};$$

$$\text{г)}\ \ \frac{n.\text{arctg}n}{n^2-2}; \quad \text{д)}\ \ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k; \quad \text{е)}\ \ \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}};$$

$$\text{ж)}\ \ \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}; \quad \text{з)}\ \ \left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2};$$

$$\text{и)}\ \ \left(\frac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2}{1-n}}; \quad \text{й)}\ \ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Отговори: а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 1; ж) 1; з) 0; и) 1; й) 0.

Задача 3.64: Нека за всяко естествено n имаме, че $x_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right| = q$, където $q > 1$. Да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Задача 3.65: Намерете границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}, \quad a>0;$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Отговори: а) 0; б) 1.

Задача 3.66: Редицата $\{x_n\}$ има крайна граница a. На координатната равнина са построени правите AA_n през точките $A(a,a^2)$ и $A_n(x_n,x_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Нека a_n е абсцисата на точката на пресичане на правата AA_n с остта Ox. Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Задача 3.67: В кръг с радиус R е вписан квадрат, в този квадрат е вписан нов кръг, в него нов квадрат и така нататък. Нека S_1 е лицето на първия кръг, S_2-лицето на втория кръг и т. н., σ_1 е лицето на първия квадрат, σ_2- лицето на втория квадрат и т. н. Намерете

$$\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\dots+S_n), \quad \lim_{n\to\infty}(\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_n).$$

Отговор: $2\pi R^2$, $4R^2$.

Задача 3.68: Намерете:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}\right);$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}\right).$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{4}$.

Задача 3.69: Нека $\{a_n\}$ е аритметична прогресия с разлика $d \neq 0$. Намерете:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right), \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right),$$

ако $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Отговори: а) $\frac{1}{a_1 d}$; б) $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

Задача 3.70: Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ са положителни числа. Съществува ли границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \ldots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n}?$$

Ако съществува, то намерете тази граница.

Задача 3.71: Нека $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \text{при} \quad \alpha > 1.$$

Задача 3.72: Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\quad \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)};\quad \text{б)}\quad \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}};\quad \text{в)}\quad \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n};$$

$$\text{г)}\quad \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1};\quad \text{д)}\quad \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}};$$

$$\text{е)}\quad \frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}};\quad \text{ж)}\quad \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}.$$

Отговори: а) -2; б) 0; в) $\frac{1}{6}$; г) 0; д) $+\infty$; е) $-\infty$; ж) 0.

Задача 3.73: Намерете $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ако x_n е равно на:

$$\text{а)}\quad \sqrt[n]{3^n-2^n};\quad \text{б)}\quad \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}};\quad \text{в)}\quad \sqrt[n]{a^n+b^n} \quad a>0,\quad b>0;$$

$$\text{г)}\quad \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1};\quad \text{д)}\quad \frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2};$$

$$\text{е)}\quad \frac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\frac{5}{1-\sqrt[n]{32}};\quad \text{ж)}\quad \frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1},\quad a>1,\quad k,m\in\mathbb{N}.$$

Отговори: а) 3; б) 1; в) $\max\{a,b\}$; г) $\frac{3}{4}$; д) 6; е) -1; ж) $\frac{m}{k}$.

Задача 3.74: Две редици $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ се наричат еквивалентни и означаваме $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Да се докаже, че:

1) $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ (рефлексивност);
2) ако $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ (симетричност);
3) ако $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ (транзитивност).

Задача 3.75: Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ са фундаментални редици. Да се докаже, че:

1) $\{x_n + y_n\}$ е фундаментална редица;
2) $\{x_n . y_n\}$ е фундаментална редица;
3) ако $|y_n| \geq C > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ е фундаментална редица.

Задача 3.76: Нека $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = a.$$

Задача 3.77: Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, където $y \neq 0$ и $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \neq 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} = \frac{x}{y},$$

където y е число, а $x-$ число, $+\infty$, или $-\infty$.

Задача 3.78: 1) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} = 1.$$

2) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $x \neq 0$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} = x.$$

Задача 3.79: Дайте пример за разходяща редица $\{x_n\}$, за която съществува

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n}.$$

Задача 3.80: Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1}{n} = a.b.$$

Задача 3.81: Редицата $\{x_n\}$ има *ограничена вариация*, ако е ограничена редицата

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че:

1) Монотонната и ограничена редица има ограничена вариация;

2) Редица с ограничена вариация е сходяща редица;

3) За всяка редица с ограничена вариация, съществуват растящи и ограничени редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, такива че $x_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

4. ЧИСЛОВИ РЕДОВЕ

4.1 Сходимост на числов ред и неговата сума

Понятието безкраен числов ред се отнася към основните понятия на математическия анализ. Безкрайните числови редове участвуват при дефинирането на редица математически понятия и се използуват в много теоретични изследвания на математиката изобщо. Те играят важна роля в приложенията на математиката в другите науки.

Дефиниция 4.1: *Нека е дадена безкрайната редица от числа* [1] $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *Израз от вида*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.1}$$

се нарича числов ред, а числата $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$*-членове на реда.*

За реда (4.1) често казваме "редът с n-ти член u_n", или "редът с общ член u_n".

Например за реда

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

казваме "редът с общ член $u_n = \dfrac{1}{n^3}$".

Много често реда (4.1) ще записваме по-кратко така

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{4.2}$$

Например означението

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

---

[1] Редицата се смята за зададена, ако е известен законът, чрез който при дадено n може да се намери всеки неин член u_n.

определя реда
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots.$$

Нека да разгледаме следните примери:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$; б) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots$; в) $1-1+1-1+1-1+\ldots$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Редовете в примерите г) и д) са зададени с n-тите си членове. Не е трудно да се намерят тези членове и за редовете от останалите примери. За реда от пример б) имаме, че $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Задача 4.1: Намерете формулата за общия член на редовете:

а) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$; б) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$;

в) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$; г) $1+\frac{1.3}{1.4}+\frac{1.3.5}{1.4.7}+\frac{1.3.5.7}{1.4.7.10}+\ldots$;

д) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ldots$.

Дефиниция 4.2: *Сумата от първите n члена на реда (4.1) наричаме n-та частична (или парциална) сума на реда, т. е. по дефиниция*

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n. \tag{4.3}$$

Разглеждаме редицата от частичните суми:

$S_1=u_1$
$S_2=u_1+u_2$
$S_3=u_1+u_2+u_3$
$\ldots$
$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$
$\ldots$

Дефиниция 4.3: *Ако редицата от частичните суми*

$$S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$$

е сходяща, то нейната граница

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{4.4}$$

се нарича сума на реда (4.1) и записваме равенството[2]

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots . \tag{4.5}$$

В този случай казваме, че редът (4.1) е сходящ. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *не съществува, или не е крайно число, то казваме, че редът (4.1) е разходящ.*

Нека да разгледаме следните примери: Редът

$$0 + 0 + 0 + \ldots$$

е сходящ и сумата му S е равна на 0, тъй като $S_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

Редът

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

е разходящ, защото $S_n = n$ и $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Редът

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

е също разходящ. Тук $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$, т. е. $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = 1$ и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не съществува. С други думи този ред няма сума.

Задача 4.2: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad a \neq 0, \tag{4.6}$$

който е известен под името *геометричен ред*, или (*безкрайна геометрична прогресия*).

Решение: Членовете на този ред a, aq, $aq^2, \ldots$ образуват геометрична прогресия с първи член a и частно q. В случая n-тата частична сума S_n (при $q \neq 1$) на реда, като сума от първите n члена на геометрична прогресия, се определя чрез равенството

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

[2] Действието събиране распростираме в случая на безброй много събираеми.

или

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

а) Ако $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и тогава

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Това означава, че при $|q| < 1$ геометричният ред е сходящ и сумата му е

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

б) Ако $|q| > 1$, то $|q^n| \to \infty$ при $n \to \infty$ и тогава $S_n \to \pm\infty$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не съществува. И така, при $|q| > 1$ геометричният ред е разходящ.

в) При $q = 1$ геометричният ред приема вида

$$a + a + a + \dots$$

В този случай $S_n = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. редът е разходящ.

г) При $q = -1$ редът има вида

$$a - a + a - a + a - a + \dots.$$

В този случай

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{ако} \quad n \quad \text{е} \quad \text{четно} \quad \text{число} \\ a & \text{ако} \quad n \quad \text{е} \quad \text{нечетно} \quad \text{число.} \end{cases}$$

Оттук следва, че S_n няма граница, т. е. редът е разходящ.

И така, геометричният ред е сходящ числов ред когато $-1 < q < 1$.

Задача 4.3: Нека $|q| < 1$. Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.q^n$$

е сходящ и намерете неговата сума.

Решение: Тъй като $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} nq^n$, то се получава, че

$$S_n - S_n.q = [q + 2q^2 + \dots + nq^n] - [q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1)q^n + nq^{n+1}]$$

$$= q + q^2 + \ldots + q^n - nq^{n+1},$$

откъдето се намира

$$S_n.(1-q) = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1},$$

$$S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{n.q^{n+1}}{1-q}.$$

За $|q| < 1$, са в сила равенствата

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n.q^{n+1} = 0,$$

откъдето се получава, че съществува

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad |q| < 1.$$

Задача 4.4: Докажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots \tag{4.7}$$

е сходящ при $x > 1$.

Решение: Очевидно редицата с общ член $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ от частичните суми на реда е растяща. Следователно, достатъчно е да докажем, че редицата $\{S_n\}$ е ограничена. И наистина

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}\right) + \left(\frac{1}{4^x} + \ldots + \frac{1}{7^x}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{tx}} + \ldots + \frac{1}{n^x}\right),$$

където t е естествено число, такова че $2^t \leq n < 2^{t+1}$. Тогава са в сила представянията

$$S_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x}\right) + \left(\frac{1}{4^x} + \ldots + \frac{1}{4^x}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{tx}} + \ldots + \frac{1}{2^{tx}}\right)$$

$$\leq 1 + \left(\frac{2}{2^x}\right) + \left(\frac{4}{4^x}\right) + \ldots + \left(\frac{2^n}{2^{nx}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^n$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}(2^{1-x})^k = \frac{1}{1-2^{1-x}} < \infty.$$

Функцията $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ на променливата x се нарича *дзета-функция* на Риман. Редът (4.7) се нарича още *обобщен хармоничен ред*. Може да се докаже, че обобщения хармоничен ред е разходящ при $x \leq 1$.

Една от основните задачи в теорията на редовете е изследване на тяхната сходимост, или разходимост, и ако установим, че редът е сходящ, да намерим неговата сума.

Задача 4.5: Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

е сходящ и да се намери неговата сума.

Решение: *Първи начин*- Изпълнени са следните равенства:

$$S_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}, \quad S_2 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} = \frac{2}{5},$$

$$S_3 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} = \frac{3}{7}, \quad S_4 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} = \frac{4}{9}.$$

От горните равенства стигаме до предположението, че частичната сума S_n удовлетворява равенството

$$s_n = \frac{n}{2n+1}. \tag{4.8}$$

Равенството (4.8) ще докажем, прилагайки индукция по n. И наистина

$$S_{n+1} = S_n + u_n = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+2n+n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Оттук следва верността на равенството (4.8) за всяко естествено n. Тогава се получава

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Следователно даденият ред е сходящ и неговата сума е равна на $\dfrac{1}{2}$.

Втори начин- Ще представим общия член u_n на реда във вид на сума от две елементарни дроби

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

където A и B са константи. След освобождаване на знаменателите се получава

$$A(2n+1) + B(2n-1) = 1,$$

или

$$(2A+2B).n + A - B = 0.n + 1.$$

Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на n, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 2A + 2B = 0 \\ A - B = 1, \end{array}\right.$$

която има решение $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$. Следователно е в сила представянето

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Тогава за частичната сума S_n получаваме

$$S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5} - \ldots - \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Така за сумата на реда получаваме

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Задача 4.6: Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

е сходящ и да се намери неговата сума.

Решение: За даденият ред по метода на неопределените коефициенти намираме, че

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

откъдето се получава, че

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

или

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

От тук се намира, че

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т. е. редът е сходящ и неговата сума е

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Задача 4.7: Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

е сходящ и да се намери неговата сума.

Решение: По метода на неопределените коефициенти се получава, че

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

За частичната сума S_n след преобразувания се намира, че

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right). \end{aligned}$$

По този начин се получава, че редът е сходящ и сумата му S ще бъде

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Задача 4.8: Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4}$$

е сходящ и да се намери неговата сума.

Решение: Корените на уравнението $n^2+5n+4=0$ са $n=-1$ и $n=-4$. Следователно е в сила представянето

$$u_n = \frac{72}{n^2+5n+4} = \frac{72}{(n+1)(n+4)}.$$

По метода неопределените коефициенти се получава, че

$$u_n = \frac{72}{n^2+5n+4} = \frac{24}{n+1} - \frac{24}{n+4}.$$

Тогава за частичната сума S_n се получава

$$\begin{aligned} S_n = {} & \left(\frac{24}{2}-\frac{24}{5}\right)+\left(\frac{24}{3}-\frac{24}{6}\right)+\left(\frac{24}{4}-\frac{24}{7}\right)+\left(\frac{24}{5}-\frac{24}{8}\right)+\dots \\ & +\left(\frac{24}{n-1}-\frac{24}{n+2}\right)+\left(\frac{24}{n}-\frac{24}{n+3}\right)+\left(\frac{24}{n+1}-\frac{24}{n+4}\right) \\ & =\left(\frac{24}{2}+\frac{24}{3}+\dots+\frac{24}{n+1}\right)-\left(\frac{24}{5}+\frac{24}{6}+\dots+\frac{24}{n+4}\right) \\ & =\frac{24}{2}+\frac{24}{3}+\frac{24}{4}-\frac{24}{n+2}-\frac{24}{n+3}-\frac{24}{n+4} \\ & =26-\frac{24}{n+2}-\frac{24}{n+3}-\frac{24}{n+4}. \end{aligned}$$

Следователно, редът е сходящ и сумата му S ще бъде

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(26-\frac{24}{n+2}-\frac{24}{n+3}-\frac{24}{n+4}\right) = 26.$$

Задача 4.9: Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

е сходящ и да се намери неговата сума.

Решение: Намираме $n-$тата парциална сума на този ред

$$S_n = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}\right) + \left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)$$

$$+ \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Следователно, редът е сходящ и сумата S на реда ще бъде

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$$

Задача 4.10: Да се докаже, че редовете са сходящи и да се намерят техните суми, ако:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+5n+6}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2-5n+6}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2+5n-6}$; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$;

ж) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2+3n}$; з) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2+8n-5}$; и) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2-3n-2}$;

й) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2-8n-3}$; к) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$;

л) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n(n+1)(n+2)}$; м) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

4.2 Необходимо условие за сходимост на числов ред.

Теорема 4.1: *Ако един ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е сходящ, то общият му член клони към нула при* $n \to \infty$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4.9}$$

От тази теорема следва следното следствие:

Следствие 4.1: *Ако общият член на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *няма граница при* $n \to \infty$ *или има граница, различна от нула, то редът е разходящ.*

Съгласно следствие 4.1 редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ е разходящ, тъй като

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Следва да отбележим, че представеният по-горе признак е само необходимо условие за сходимост. Обратната теорема не е вярна, а именно, от това, че $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ в най-общия случай не следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ. В някои от следващите задачи ще покажем числови редове, за който необходимото условие е изпълнено, но редът е разходящ.

Задача 4.11: Да се докаже, че сумата на *хармоничния ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

е безкрайна, независимо от факта, че $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение: За $n-$тата парциална сума S_n на хармоничния ред са в сила следните оценки отдолу

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \geq \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Полученото неравенство, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $S_n \geq \frac{n}{2}$ показва, че $\lim_{n\to\infty} = +\infty$, откъдето се получава, че хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ числов ред.

Задача 4.12: Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx. \tag{4.10}$$

Решение: При $x = k\pi$, където k е цяло число, сходимостта на реда (4.10) е очевидна и неговата сума е равна на 0.

Нека $x \neq k\pi$, където k е цяло число. Да допуснем, че и в този случай редът (4.10) е сходящ. Тогава съгласно Теорема 4.1 ще бъде изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0, \quad x \neq k\pi. \tag{4.11}$$

От (4.11) ще следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$. И тъй като разглеждаме случая когато $x \neq k\pi$, то оттук следва, че

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0, \quad x \neq k\pi. \tag{4.12}$$

От (4.11) и (4.12) се получава

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 nx + \cos^2 nx) = 0,$$

което противоречи на известното равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Следователно при $x \neq k\pi$, където k е цяло число, редът (4.10) е разходящ.

Задача 4.13: С помощта на необходимото условие за сходимост определете кои от дадените редове са разходящи, ако:

а) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{8} + \dots$; б) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dots$;

в) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{27} + \dfrac{8}{81} + \dots$; г) $\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{\dfrac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + \dots$;

д) $\dfrac{1}{1001} + \dfrac{2}{2001} + \dfrac{3}{3001} + \dots + \dfrac{n}{1000n+1} + \dots$;

е) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$; ж) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$; з) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$;

и) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; й) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$; к) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$.

4.3 Редове с комплексни членове

Нека е дадена редицата от комплексни числа $\{z_n\}$. Тази редица се нарича *сходяща*, ако съществува такова комплексно число z, че

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0. \tag{4.13}$$

В този случай означаваме

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \quad \text{или} \quad z_n \to z \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Ако $z_n = x_n + iy_n$ и $z = x + iy$, където $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, и $y \in \mathbb{R}$, то условието (4.13) е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Нека $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ да бъде ред с комплексни членове и за всяко $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ е неговата $n-$та парциална сума. Тогава този ред се нарича *сходящ*, ако съществува крайната граница

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Комплексното число S се нарича *сума на реда* и означаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Ако $z_n = x_n + iy_n$, $S = A + iB$, то равенството $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = B.$$

Един аналог със сходимостта на геометричната прогресия в реалния случай е следния резултат: Нека q е комплексно число и $|q| < 1$. Тогава се получава, че

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

откъдето се намира, че

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad (|q| < 1). \tag{4.14}$$

Задача 4.14: Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ и намерете неговата сума, ако:

$$\text{а)} \quad z_n = \frac{1}{(1+i)^n}; \quad \text{б)} \quad z_n = a^n.e^{i.n.\varphi}, \quad \text{където} \quad 0 < a < 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Решение: а) Тъй като числата

$$z_n = \frac{1}{(1+i)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

образуват геометрична прогресия с частно $q = \dfrac{1}{1+i}$, където $|q| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, то по формулата (4.14) се получава

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{i} = -i.$$

б) Имаме, че $z_n = a^n.e^{i.n.\varphi} = (a.e^{i.\varphi})^n$, където $|a.e^{i.\varphi}| = a < 1$.

Ще отбележим, че за всяко реално t е в сила следната *формула на Ойлер*

$$e^{it} = \cos t + i \ \sin t.$$

Прилагаме формулата на Ойлер и резултатът (4.14) при $q = a.e^{i.\varphi}$, за да се получи

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n.e^{i.n.\varphi} = \frac{a.e^{i.\varphi}}{1-a.e^{i.\varphi}} = \frac{a(\cos\varphi + i \ \sin\varphi)}{1 - a\cos\varphi - i\, a\sin\varphi}$$

$$= a\frac{(\cos\varphi + i \ \sin\varphi)(1 - a\cos\varphi + i\, a\sin\varphi)}{(1-a\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}(\cos\varphi - a + i \ \sin\varphi).$$

4.4 Критерий на Коши за сходимост на числов ред

Теорема 4.2: (**Критерий на Коши за сходимост на числов ред**) *За да бъде редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходящ, е необходимо и достатъчно, за всяко* $\varepsilon > 0$ *да съществува такъв номер* $N = N(\varepsilon)$*, зависещ от* ε*, че за всяко* $n \geq N$ *неравенството*

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon \tag{4.15}$$

е изпълнено за всяко $p \in \mathbb{N}$.

Ще представим отрицанието на критерия на Коши за сходимост на числов ред. Ако условието (4.15) не е изпълнено, т. е. съществува $\varepsilon > 0$, че за всяко $N \in \mathbb{N}$ съществуват $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ и $p \in \mathbb{N}$, че е изпълнено неравенството $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \geq \varepsilon$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ.

Задача 4.15: Прилагайки критерият на Коши да се изследва за сходимост реда

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots .$$

Решение: Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Търсим такова число $N = N(\varepsilon)$, че за всяко $n \geq N$ и всяко цяло число $p > 0$ да е изпълнено $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Последователно се получава

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Посочваме $N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогава за всяко $n \geq N$, неравенството $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ ще бъде изпълнено за всяко $p \in \mathbb{N}$. Съгласно критерият на Коши редът е сходящ.

Задача 4.16: Прилагайки критерият на Коши да се изследва за сходимост реда

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \ldots.$$

Решение: Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Търсим такова число $N = N(\varepsilon)$, че при всяко $n \geq N$ и всяко $p \in \mathbb{N}$, да е изпълнено $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Последователно се получава

$$\begin{aligned}
&|S_{n+p} - S_n| \\
&= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \ldots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \\
&= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \ldots \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots \\
&\qquad + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Посочваме $N = N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$. Тогава за всяко $n \geq N$ неравенството $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ е изпълнено за всяко $p \in \mathbb{N}$. Съгласно критерият на Коши редът е сходящ.

Задача 4.17: Прилагайки отрицанието на критерият на Коши да се докаже, че хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ. (Вижте също така решението на задача 4.11 със същото условие.)

Решение: Нека се постави $p = n$ и да разгледаме израза $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+n}$. В сила са следните представяния

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n-\text{събираеми}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ако се избере някое $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$, то ще бъде изпълнено неравенството $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+n} \geq \varepsilon$. Съгласно отрицанието на критерия на Коши, се получава, че хармоничният ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

Задача 4.18: Прилагайки отрицанието на критерият на Коши да се докаже, че редът

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \ldots .$$

е разходящ.

Решение: Нека да поставим $p = 3n$, да образуваме и оценим отдолу разликата

$$S_{6n} - S_{3n} = u_{3n+1} + u_{3n+2} - u_{3n+3} + \ldots + u_{6n-2} + u_{6n-1} - u_{6n}$$

$$= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \ldots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}$$

$$> \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \ldots + \frac{1}{6n-2}$$

$$> \underbrace{\frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-2} + \ldots + \frac{1}{6n-2}}_{n-\text{събираеми}} = \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

Ако се избере някое $\varepsilon \leq \dfrac{1}{6}$, то ще бъде изпълнено неравенството

$$u_{3n+1} + u_{3n+2} - u_{3n+3} + \ldots + u_{6n-2} + u_{6n-1} - u_{6n} \geq \frac{1}{6}.$$

Съгласно отрицанието на критерия на Коши, се получава, че редът е разходящ.

Задача 4.19: Прилагайки отрицанието на критерият на Коши да се докаже, че редът

$$\frac{1}{\sqrt{1.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\sqrt{3.4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$$

е разходящ.

Решение: Нека се постави $p=n$ и да образуваме, и оценим отдолу разликата

$$S_{n+p}-S_n=S_{2n}-S_n=u_{n+1}+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

$$>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}>\underbrace{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+1}}_{n-\text{събираеми}}$$

$$=\frac{n}{2n+1}\geq\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Ако се избере някое $\varepsilon\leq\frac{1}{3}$, то за всеки цели $n\geq 1$ и $p=n$ е изпълнено неравенството

$$u_{n+1}+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}\geq\varepsilon,$$

което показва, че редът е разходящ.

Задача 4.20: Като се използва необходимото условие за сходимост, да се докаже разходимостта на следните редове:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{5n+1}}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,01}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$; е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$;

ж) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$; з) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2}$; и) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\mathrm{arctg}\frac{1}{n+2}$;

й) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}$; к) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$; л) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

Задача 4.21: Като се използва критерият на Коши да се докаже сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = \frac{\cos n.x}{2^n},\quad x \in \mathbb{R};\quad \text{б)}\quad u_n = \frac{\sin n.\alpha}{n(n+1)},\quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\text{в)}\quad u_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2},\quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.22: Прилагайки отрицанието на критерия на Коши, да се докаже разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = \frac{1}{2n+1};\quad \text{б)}\quad u_n = \frac{n+1}{n^2+4};\quad \text{в)}\quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Задача 4.23: Да се докаже, че ако редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

са сходящи и техните суми са съответно равни на S и σ, то и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$, където $\zeta_n = \lambda z_n + \mu w_n$, е сходящ за произволни комплексни числа λ и μ, и неговата сума е равна на $\lambda S + \mu\sigma$.

Задача 4.24: Да се докаже, че:

а) ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, то за всяко цяло $m \geq 1$ е сходящ неговия $m-$ти остатък;

б) ако поне един остатък е сходящ, то е сходящ и самия ред, при това е в сила равенството $S = S_m + r_m$, където S и S_m са съответно сумата и $m-$тата частична сума на изходния ред, а r_m- сумата на неговия $m-$ти остатък.

Задача 4.25: Да се докаже, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, където $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ е сходящ, то е сходящ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

Задача 4.26: Какво може да се каже за сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, където $c_n = a_n + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$, ако е известно, че:

а) редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, а редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ;

б) двата реда са разходящи.

Задача 4.27: Да се докаже, че ако редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, където $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ са сходящи, то са сходящи и редовете:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n.b_n|; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2.$$

4.5 Редове с неотрицателни членове

4.5.1 Признак за сравняване на редове

Ако за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имаме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $u_n \geq 0$, то той се нарича ред с *неотрицателни членове*. Един такъв ред е сходящ тогава и само тогава, когато редицата от парциалните му суми е ограничена отгоре редица, т. е. съществува число $M > 0$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq M.$$

Теорема 4.3: (**Признак за сравняване на редове**) *Нека са дадени редовете*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad v_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Нека съществуват номер N и константа $C > 0$, че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството

$$u_n \leq C.v_n.$$

Тогава е изпълнено следното:

От сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *следва сходимост на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

От разходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *следва разходимост на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Следствие 4.2: *Нека за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *имаме, че* $u_n \geq 0$, $v_n > 0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$$

Тогава е в сила следното:

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *е сходящ и* $0 \leq l < +\infty$, *то и редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е също сходящ.*

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *е разходящ и* $0 < l \leq +\infty$, *то и редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *е също разходящ.*

В частност, ако

$$u_n \sim v_n,$$

т. е. u_n *и* v_n *са еквивалентни, но редовете* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *са едновременно сходящи или разходящи.*

Задача 4.28: Като се използва признака за сравняване на редове, да се докаже сходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение: За всеки $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ са в сила неравенствата

$$0 \leq \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Тъй като редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

като геометрична прогресия с частно $q = \dfrac{1}{2}$ е сходящ числов ред, то съгласно Теорема 4.3 и редът $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$ е също сходящ ред.

Задача 4.29: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Решение: Ще приложим признака за сравняване на редове. Нека $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$ и $v_n = \dfrac{1}{n}$. Тогава да намерим границата

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Тъй като $l = \dfrac{1}{2} > 0$ и хармоничният ред с общ член $v_n = \dfrac{1}{n}$ е разходящ, то и даденият ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ е разходящ.

Задача 4.30: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Решение: Нека $u_n = \sin\dfrac{1}{n}$ и $v_n = \dfrac{1}{n}$. Тогава $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Съгласно следствие 4.2, тъй като хармоничният ред с общ член $v_n = \dfrac{1}{n}$ е разходящ, то и даденият ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ е разходящ.

Задача 4.31: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение: Сравняваме дадения ред с разходящия хармоничен ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Тъй като за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$, то всеки член $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ на дадения ред е по-голям от съответния член $v_n = \dfrac{1}{n}$ на хармоничния ред. Тогава съгласно признакът за сравнение, дадения ред е разходящ.

Може да разсъждаваме и така: Даденият ред е обобщен хармоничен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, където $x = \frac{1}{2} < 1$, и съгласно забележката след задача 4.4, той е разходящ.

Задача 4.32: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение: За всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$. Тъй като хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ (виж задача 4.4), то и даденият ред е също сходящ.

Задача 4.33: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Решение: Сравняваме дадения ред със сходящия геометричен ред (4.6). Всеки член $u_n = \frac{1}{n^n}$ на дадения ред, започвайки от третия е по-малък от съответния член $v_n = \frac{1}{2^n}$ на безкрайна геометрична прогресия с частно $q = \frac{1}{2} < 1$. Тогава съгласно признакът за сравняване, дадения ред е сходящ.

Задача 4.34: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Решение: За всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. По този начин всеки член $u_n = \frac{1}{\ln n}$ на дадения ред е по-голям от съответния член $v_n = \frac{1}{n}$ на разходящия хармоничен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Следователно дадения ред е разходящ.

Задача 4.35: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}.$$

Задача 4.36: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}}.$$

Решение: За всяко естествено число n са в сила неравенствата

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{1}{2+\dfrac{1}{n}}\right)^n < \frac{1}{2^n}.$$

Следователно членовете на дадения ред са по-малки от съответните членове на сходящия ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, представляващ геометрична прогресия с частно $\dfrac{1}{2}$. Следователно даденият ред е сходящ.

Задача 4.37: Да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\quad \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} + \ldots;$$

$$\text{б)}\quad \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots;$$

$$\text{в)}\quad 1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5^2} + \frac{1}{4.5^3} + \ldots;$$

$$\text{г)}\quad \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \frac{1}{1+x^8} + \ldots;$$

$$\text{д)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}; \quad \text{е)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.5^n}; \quad \text{ж)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1};$$

$$\text{з)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}; \quad \text{и)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}; \quad \text{й)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)};$$

$$\text{к)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}, \quad a>0,\ b>0;$$

$$\text{л)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}, \quad a>0; \quad \text{м)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^p}, \quad p>2.$$

Упътване: м) Докажете, че при $n \geq 3$ и $p > 2$ са в сила неравенствата $\dfrac{n-2}{n^p} < \dfrac{\ln(n!)}{n^p} < \dfrac{\ln n}{n^{p-1}}$. Приложете признака за сравняване, вземайки в предвид, че редовете $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^p}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{p-1}}$ са сходящи при $p > 2$.

4.5.2 Метод на отделяне на главна част

При изследване на сходимостта на реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицателни членове, понякога е удобно, с помощта на формулата на Тейлор (виж параграф 6.1.7) да се получи асимптотична формула от вида

$$u_n \sim \frac{c}{n^\alpha} \quad (n \to \infty, \quad c > 0).$$

В този случай редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \leq 1$.

Задача 4.38: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

Решение: Нека да положим

$$u_n = \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

За всяко цяло $n \geq 3$ имаме, че $u_n \geq 0$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)^3, \quad n \to \infty.$$

В сила са следните равенства

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) \\
&= \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)\right) \\
&= 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

[3] Подробно представяне на символите $\mathcal{O}$ и o е направено в параграф 5.3.1

По този начин се получава, че $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$, и тъй като редът $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2\pi}{n}$ е разходящ, то съгласно Следствие 4.2, редът

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

е също разходящ.

Задача 4.39: Да се изследва за сходимост редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = 1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}};\quad \text{б)}\quad u_n = \left(1-\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^{\alpha};$$

$$\text{в)}\quad u_n = \ln \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Решение: а) Тъй като

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2), \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

то

$$u_n = 1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} = 1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^2+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{\sqrt[3]{n^4}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right).$$

От тук се получава асимптотичното поведение $u_n \sim \dfrac{\pi^2}{2.n^{\frac{4}{3}}}$. В нашия случай $\alpha = \dfrac{4}{3}$ и следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ е сходящ.

б) Отбелязваме факта, че

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

и прилагаме асимптотичната формула

$$(1+t)^{\beta} = 1+\beta t+o(t), \quad t \to 0$$

при $\beta = \dfrac{1}{3}$ и $\beta = -\dfrac{1}{3}$ за да се получи

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

От тук се получава, че

$$u_n \sim \left(\frac{2}{3n}\right)^{\alpha}, \quad n \to \infty.$$

Следователно, редът е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \le 1$.

в) Ще използваме разлаганията

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

$$\mathrm{tg}t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

$$\mathrm{arctg}t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t \to 0.$$

По този начин се получават следните представяния

$$\ln(1+\mathrm{tg}t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3),$$

$$\ln(1+\mathrm{arctg}t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad t \to 0.$$

По този начин е в сила равенството

$$u_n = \frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

т. е. $u_n \sim \dfrac{2}{3n^{\frac{3}{2}}}$, следователно редът е сходящ.

4.5.3 Признак на Даламбер

Теорема 4.4: (**Признак на Даламбер**) *Ако за реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

съществуват число q, $0 < q < 1$, и номер n_0, че за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то този ред е сходящ; ако за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то редът е разходящ.

На практика ще бъде удобно да се използва признака на Даламбер в следната гранична форма:

Теорема 4.5: (**Гранична форма на признака на Даламбер**)
Ако съществува крайната или безкрайна граница

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то:

1. *Ако $l < 1$, то редът е сходящ;*
2. *Ако $l > 1$, то редът е разходящ;*
3. *Ако $l = 1$, то редът може да бъде както сходящ, така и разходящ.*

Що се отнася до третия случай на признака на Даламбер, когато $l = 1$, посочваме следните два реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. За тях имаме, че $l = 1$, но първият от тях е сходящ, а вторият е разходящ.

Признакът на Даламбер е удобно да се прилага когато в общия член на реда участвуват факториели. Това разбира се не е задължително.

Задача 4.40: С помощта на признака на Даламбер да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{n^5}{2^n}$. От тук последователно се получава $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$ и

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5.$$

Извършваме граничен преход при $n \to \infty$ и намираме

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2}.$$

Тъй като $l = \dfrac{1}{2}$, то съгласно признака на Даламбер, редът е сходящ.

Задача 4.41: С помощта на признака на Даламбер да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$. От тук последователно се получава

$$u_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)+1}}{2^{3(n+1)-1}} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$$

и

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}}{\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}.\frac{2^{3n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}.$$

Извършваме граничен преход при $n \to \infty$ и намираме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{8}.$$

Тъй като $l = \dfrac{9}{8} > 1$, то съгласно признака на Даламбер, редът е разходящ.

Ще припомним дефинициите на две известни теоретико-числови функции, а именно: Нека $n \geq 1$ да бъде произволно цяло. Тогава дефинираме

$$(2n)!! = 2.4.6\ldots(2n),$$

т. е. $(2n)!!$ означава произведението на четните числа от 2 до $2n$, и

$$(2n+1)!! = 1.3.5\ldots(2n+1),$$

т. е. $(2n+1)!!$ означава произведението на нечетните числа от 2 до $2n+1$.

Задача 4.42: С помощта на признака на Даламбер да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};\quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2012^n};\quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!};\quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}a^n,\quad a>0;$$

$$\text{д) } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^{3n}}{(2n-5)!};\quad \text{е) } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}};\quad \text{ж) } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(2n)!!};\quad \text{з) } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n};$$

$$\text{и) } \frac{4}{2}+\frac{4.7}{2.6}+\frac{4.7.10}{2.6.10}+\ldots+\frac{4.7.10\ldots(3n+1)}{2.6.10\ldots(4n-2)}+\ldots.$$

Решение: а) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

следователно, разглежданият ред е сходящ; б) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2012^n}{2012^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2012}=+\infty,$$

следователно, разглежданият ред е разходящ; в) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

следователно, разглежданият ред е разходящ; г) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{a^{n+1}}{a^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.a=e.a.$$

Следователно при $a<\dfrac{1}{e}$ редът е сходящ, а при $a>\dfrac{1}{e}$ редът е разходящ. При $a=\dfrac{1}{e}$ признакът на Даламбер не дава резултат; д) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{3n+3}}{(2n-3)!}\cdot\frac{(2n-5)!}{2^{3n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3}{(2n-1)(2n-3)}=0<1,$$

следователно, разглежданият ред е сходящ; е) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\cdot\frac{2^{n^2}}{(n!)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1,$$

следователно, разглежданият ред е сходящ; ж) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{(2n)!!(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!!}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(2n+2)} = 0 < 1,$$

следователно, разглежданият ред е сходящ; з) В сила са равенствата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1,$$

следователно, разглежданият ред е разходящ; и) Общият член u_n на реда има вида

$$u_n = \frac{4.7.10\ldots(3n+1)}{2.6.10\ldots(4n-2)}.$$

Тогава се получава

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4.7.10\ldots(3n+1)(3n+4)}{2.6.10\ldots(4n-2)(4n+2)} \cdot \frac{2.6.10\ldots(4n-2)}{4.7.10\ldots(3n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

следователно, разглежданият ред е сходящ.

Задача 4.43: Да се изследват за сходимост редовете:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{((2n+1)!!}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$;

е) $\displaystyle 2 + \frac{2.5}{1.5} + \frac{2.5.8}{1.5.9} + \ldots + \frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)} + \ldots$;

$$\text{ж)}\quad 1+\frac{1.4}{3!!}+\frac{1.4.7}{5!!}+\ldots+\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}+\ldots;$$

$$\text{з)}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}+\ldots;$$

$$\text{и)}\quad 1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots.$$

4.5.4 Признак на Коши

Теорема 4.6: (**Признак на Коши**) *Ако за реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

съществуват число q, $0 \leq q < 1$ и номер n_0, че за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q,$$

то този ред е сходящ; ако за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

то редът е разходящ.

На практика, обикновено признакът на Коши се използва в следната гранична форма:

Теорема 4.7: (**Гранична форма на признака на Коши**)
Ако съществува крайната или безкрайна граница

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то:

1. *Ако $l < 1$, то редът е сходящ;*
2. *Ако $l > 1$, то редът е разходящ;*
3. *Ако $l = 1$, то редът може да бъде както сходящ, така и разходящ.*

Забележка: Ако за редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

е известно само, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{4.16}$$

то нищо определено за неговата сходимост не може да се каже, т. е. редът може да бъде както сходящ, така и разходящ. Например, редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

удовлетворяват всяко едно от условията (4.16), но първият от тях е разходящ, а вторият е сходящ.

Признакът на Коши е удобно да се прилага когато в общия член на реда участвуват n-ти степени. Това разбира се не е задължително.

Полезни биха били и следните равенства:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1, \tag{4.17}$$

където $P(n)$ е полином от n.

Задача 4.44: С помощта на признака на Коши да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. От тук последователно се получава

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Тъй като $l = \dfrac{1}{2}$, то съгласно признака на Коши, редът е сходящ. За получаване на горното равенство сме използвали първото от равенствата (4.17).

Задача 4.45: С помощта на признака на Коши да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$. От тук последователно се получава

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Тъй като $l = 0 < 1$, то съгласно признака на Коши, редът е сходящ.

Задача 4.46: С помощта на признака на Коши да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. От тук последователно се получава

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Тъй като $l = \dfrac{1}{2} < 1$, то съгласно признака на Коши, редът е сходящ.

Задача 4.47: С помощта на признака на Коши да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n}.$$

Решение: Ще използуваме факта, че

$$\operatorname{arctg} x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

откъдето следва че

$$u_n = n^4 \operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n} \sim n^4\left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n} = v_n \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следователно, вместо даденият ред можем да изследваме за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2n},$$

тъй като за двата реда ще имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ и можем да приложим следствие 4.2. За вторият ред, прилагайки признака на Коши и третото равенство в (4.17), получаваме

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 \left(\frac{\pi}{4n}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 = 1.0 = 0 < 1.$$

Съгласно признака на Коши редът с общ член v_n е сходящ. Следователно и редът с общ член u_n е също така сходящ.

Задача 4.48: С помощта на признака на Коши докажете, че редът

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

е сходящ. Покажете, че за този ред признакът на Даламбер не може да даде отговор за неговата сходимост.

Задача 4.49: С помощта на признака на Коши да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}; \quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}; \quad \text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2};$$

$$\text{ж)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}; \quad \text{з)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}; \quad \text{и)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n};$$

$$\text{й)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}}; \quad \text{к)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}; \quad \text{л)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n};$$

$$\text{м)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}; \quad \text{н)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n};$$

о) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots;$

п) $\dfrac{2}{1}+\left(\dfrac{3}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots;$

р) $\arcsin 1+\arcsin^2\dfrac{1}{2}+\arcsin^3\dfrac{1}{3}+\ldots+\arcsin^n\dfrac{1}{n}+\ldots.$

4.5.5 Признак на Раабе-Дюамел

Признаците на Даламбер и Коши се основават на сравнението на даден ред с геометричната прогресия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q+q^2+\ldots+q^n+\ldots,\quad |q|<1$$

или с разходящия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+\ldots+1+\ldots.$$

Естествено възниква идеята за получаване на по-прецизен признак, основаващ се на сравнение на разглеждания ред с други стандартни редове, сходящи или разходящи "по-бавно" от реда на геометричната прогресия. В този параграф ще представим един признак, основаващ се на сравнението на разглеждания ред с хармоничния ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\quad (\alpha>1).$$

Ще представим тъй нареченият признак на Раабе-Дюамел.

Теорема 4.8: (**Признак на Раабе-Дюамел**) *Ако за реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\quad u_n>0\quad (n\in\mathbb{N})$$

съществуват число $q>1$ и номер n_0, че за всяко $n\geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geq q,$$

то този ред е сходящ; ако за всяко $n \geq n_0$ е изпълнено неравенството

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

то редът е разходящ.

Теорема 4.9: (**Гранична форма на признака на Раабе-Дюамел**) *Ако съществува крайната или безкрайна границата*

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = l,$$

то:

1. *Ако $l > 1$, то редът е сходящ;*

2. *Ако $l < 1$, то редът е разходящ;*

3. *Ако $l = 1$, то редът може да бъде както сходящ, така и разходящ.*

Признакът на Раабе-Дюамел е "по-силен" от признаците на Даламбер и Коши, в смисъл, че за редовете на които признаците на Даламбер и Коши не могат да отговорят дали са сходящи или разходящи, обикновено признакът на Раабе-Дюамел може да отговори на въпроса за тяхната сходимост или разходимост.

Естествено възниква въпросът не съществува ли такъв универсален сходящ, или разходящ възможно най-бавно ред, с който може да се сравни произволен ред с неотрицателни членове? Такъв универсален ред обаче не съществува.

Задача 4.50: Да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, откъдето пък се получава, че

$$u_{n+1} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)}{(2n)!!(2n+2)}.$$

За да изследваме реда, най-напред ще приложим признака на Даламбер. В сила са следните представяния

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+1)}{(2n)!!(2n+2)}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1.$$

Признакът на Даламбер не дава отговор на въпроса за сходимостта или разходимостта на реда. Сега ще приложим признака на Раабе-Дюамел. Последователно се получава следното

$$l=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

Тъй като $l=\dfrac{1}{2}<1$, то съгласно признака на Раабе-Дюамел, редът е разходящ.

Задача 4.51: С помощта на признака на Раабе-Дюамел изследвайте за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},\quad a\ge 0.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$, откъдето пък се намира, че $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}$. Последователно се получават следните резултати:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\cdot\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)(a+n+1)}{(n+1)!}$$

$$=\frac{a+n+1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a.n}{n+1+a}=a.$$

Ако $a>1$, то съгласно признака на Раабе-Дюамел редът е сходящ. Ако $a<1$, то редът е разходящ. Ако $a=1$, то признакът на Раабе-Дюамел не дава резултат.

Задача 4.52: С помощта на признака на Раабе-Дюамел да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!2^n}{3.7.11\dots(4n-1)}.$$

Решение: Общият член на реда е $u_n = \dfrac{(2n-1)!!2^n}{3.7.11\ldots(4n-1)}$, откъдето пък се получава, че

$$u_{n+1} = \frac{(2n+1)!!2^{n+1}}{3.7.11\ldots(4n-1)(4n+3)} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)2^{n+1}}{3.7.11\ldots(4n-1)(4n+3)}.$$

Последователно се получават следните резултати:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!2^n}{3.7.11\ldots(4n-1)} \cdot \frac{3.7.11\ldots(4n-1)(4n+3)}{(2n-1)!!(2n+1)2^{n+1}} = \frac{4n+3}{4n+2},$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{4n+2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+2} = \frac{1}{4}.$$

Тъй като $l = \dfrac{1}{4} < 1$, то съгласно признака на Раабе-Дюамел, редът е разходящ.

Задача 4.53: С помощта на признака на Раабе-Дюамел да се изследва за сходимост редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Решение: Общият член на реда е

$$u_n = \frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)},$$

откъдето пък се получава, че

$$u_{n+1} = \frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{n+1}\right)},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{n+1}\right)}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{3}\right)\ldots\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= 1 + \sin\frac{\pi}{n+1},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(1 + \sin\frac{\pi}{n+1} - 1\right) = \pi \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1},$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \pi.\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \pi.$$

Тъй като $l = \pi > 1$, то съгласно признака на Раабе-Дюамел, редът е сходящ.

Задача 4.54: С помощта на признака на Раабе да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}};\quad \text{б)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}};\quad \text{в)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q};$$

$$\text{г)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.2.3\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q};$$

$$\text{д)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right)^r,\quad (p>0,\ q>0);$$

$$\text{е)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)},\quad (q>0);$$

$$\text{ж)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})};$$

$$\text{з)}\ \ \left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p+\dots;$$

$$\text{и)}\ \ \frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\dots,\quad (a>0,\ b>0,\ d>0).$$

4.5.6 Признаци на Дирихле и Абел

Признаците на Дирихле и Абел разглеждат въпросите за сходимост на редове от вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.v_n.$$

В сила са следните две достатъчни условия за сходимост на горния тип редове.

Теорема 4.10: (**Признак на Дирихле**) *Ако за реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.v_n$$

са изпълнени условията:

1. *Частичните суми на реда* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *са ограничени, т. е. съществува константа* $M > 0$, *че за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *е в сила неравенството*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} v_k \right| \leq M;$$

2. *Редицата* $\{u_n\}$ *монотонно клони към нула, т. е.* $u_{n+1} \leq u_n$ *или* $u_{n+1} \geq u_n$ *за всяко* $n \geq n_0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то той е сходящ.

Теорема 4.11: (**Признак на Абел**) *Ако за реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n . v_n \tag{4.18}$$

са изпълнени условията:

1. *Редицата* $\{u_n\}$ *е монотонна и ограничена, т. е.* $u_{n+1} \leq u_n$ *или* $u_{n+1} \geq u_n$ *и съществува константа* $M > 0$, *че за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *е в сила неравенството* $|u_n| \leq M$;

2. *Редът*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

е сходящ, то редът (4.18) е сходящ.

Задача 4.55: Да се докаже, че ако редицата $\{u_n\}$ монотонно клони към нула, то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\alpha$$

е сходящ за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$, а редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos n\alpha$$

е сходящ за $\alpha \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение: Нека за $n = 1, 2, \ldots$ да означим

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha.$$

Тогава са в сила равенствата

$$B_n = \frac{\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad C_n = \frac{\cos(n+1)\frac{\alpha}{2}\sin n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{4.19}$$

$$\alpha \neq 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

За доказване на формулите (4.19) може да се използват равенствата

$$2\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha,$$

$$2\cos k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha.$$

Ако $\alpha \neq 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$, то от (4.19) се получават оценките отгоре

$$|B_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}, \quad |C_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Следователно, съгласно признака на Дирихле редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\alpha$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \cos n\alpha$ са сходящи. Ако $\alpha = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$, то $\cos n\alpha = 1$, а $\sin n\alpha = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Затова при $\alpha = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$, редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\alpha$ е сходящ, а редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \cos n\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ може да бъде както сходящ, така и разходящ, в зависимост от поведението на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Неговата сходимост може да се изследва, като се използват някои от познатите ни вече признаци.

Задача 4.56: Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)} \cdot \cos\frac{1}{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение: Редицата $\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена. Нека да разгледаме редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln(n+2)} \cdot \sin n\alpha. \tag{4.20}$$

Нека за $n = 1, 2\ldots$ да положим $u_n = \dfrac{1}{\ln\ln(n+2)}$. Очевидно редицата $\{u_n\}$ е монотонно намаляваща и клони към 0, при $n \to \infty$. Като се приложи резултата на предната задача се получава, че редът (4.20) е сходящ. Съгласно признака на Абел редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln\ln(n+2)} \cdot \cos\frac{1}{n}$$

е сходящ за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 4.57: Да се намерят всички реални α, за които са сходящи редовете:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n}}; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\ln(n+1)};$$

$$\text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.(2n-1)!!}{3.7.11\ldots(4n-1)} \cdot \sin n\alpha; \quad \text{г)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n . \cos n\alpha.$$

4.6 Абсолютно и неабсолютно сходящи редове

4.6.1 Абсолютно сходящи редове

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{4.21}$$

се нарича абсолютно сходящ, ако редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{4.22}$$

съставен от абсолютните стойности на неговите членове е сходящ числов ред.

При изследване на редове за абсолютна сходимост се прилагат признаците за сходимост на редове с неотрицателни членове.

Задача 4.58: Да се докажат следните свойства на абсолютно сходящите редове:

1. Абсолютно сходящите редове са и просто сходящи, т. е. от сходимостта на реда (4.22) следва сходимостта на реда (4.21), при това $|S| \leq \sigma$, където S и σ са съответно сумите на редовете (4.21) и (4.22);

2. Ако редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ са абсолютно сходящи, то за произволни реални α и β редът
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$$
е също абсолютно сходящ;

3. Ако редът (4.21) е абсолютно сходящ, то редът, съставен от същите членове, но взети в друг ред, е също абсолютно сходящ и неговата сума е равна на сумата на реда (4.21);

4. Ако редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ са абсолютно сходящи, то редът съставен от всевъзможните произведения от вида $u_i.v_j$ от членове на тези редове, разположени в произволен ред, е също сходящ и неговата сума е равна на $S.\sigma$, където S и σ са сумите на редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Упътване: Използвайте критерия на Коши за сходимост на редове.

Задача 4.59: Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е абсолютно сходящ, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}; \quad \text{б)}\quad u_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n};$$

$$\text{в)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Решение: а) Ще използваме неравенствата $n+1 \le 2n$, $|\cos 2n| \le 1$, $n^7+3n+4 > n^7$. По този начин се получава, че

$$|u_n| \le \frac{2}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

От сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{4}{3}}}$ по признака за сравняване на редове следва сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, т. е. абсолютната сходимост на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$; б) Отбелязваме, че при $t \ge 0$ са в сила неравенствата $0 \le \ln(1+t) \le t$, а за всяко $t \in \mathbb{R}-$ неравенството $|\mathrm{arctg} t| \le t$. Следователно се получава

$$|u_n| \le \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \left| \frac{\sin n}{n} \right| \le \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}},$$

откъдето следва абсолютната сходимост на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$; в) Ще използваме формулата $1-\cos t = 2\sin^2 \dfrac{t}{2}$ и неравенството $|\sin t| \le t$, $t \in \mathbb{R}$ за да се получи

$$|u_n| \le \frac{1}{2n \ln^2(n+1)}.$$

Тъй като редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \ln^2(n+1)}$$

е сходящ, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е абсолютно сходящ ред.

4.6.2 Знакопроменливи редове-признак на Лайбниц

Ако членовете на редицата $\{u_n\}$ са положителни, т. е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$, то всеки от редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ се нарича *алтернативен* или *знакопроменлив ред.* Отговор за сходимостта на такива редове дава признакът на Лайбниц.

Теорема 4.12: (Признак на Лайбниц) *Ако редицата* $\{u_n\}$ *е монотонно намаляваща и клони към нула, т. е. за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *е изпълнено неравенството*

$$u_n \geq u_{n+1} \tag{4.23}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{4.24}$$

то редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

е сходящ.

Задача 4.60: Да се докаже сходимостта на знакопроменливите редове:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Решение: а) Редицата $\left\{u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ е монотонно намаляваща и клони към нула, т. е. тя удовлетворява условията (4.23) и (4.24). Съгласно признакът на Лайбниц, редът е сходящ; б) Нека за $n = 1, 2, \dots$ $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. Проверете условията (4.23) и (4.24).

Задача 4.61: Да се изследват за сходимост редовете :

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}.$$

$$\text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(1 - \sqrt[n]{n}\right); \quad \text{г)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Упътване: в) Нека μ е произволно реално число. По аналогия с тъй наречените биномни коефициенти, за всяко цяло $n = 1, 2, \dots$ да дефинираме функцията

$$\binom{\mu}{n} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

По този начин

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-n)}{1.2.3\dots n} = (-1)^n.$$

Задача 4.62: Ако P е полином от степен p, който приема само положителни стойности за естествени стойности на аргумента си, да се докаже, че:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{P(n+1)}{P(n)}\right)^n = e^p$;

б) Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{P(n)}-1\right)$ е сходящ.

4.6.3 Условно сходящи редове

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

се нарича *условно* (*не абсолютно*) сходящ, ако този ред е сходящ, а редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

е разходящ.

Пример: Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ е сходящ. (Неговата сходимост може да се установи като се използва признакът на Лайбниц). Разглеждаме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Това е хармоничният ред, за който беше показано, че е разходящ ред. Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ е условно сходящ ред.

Задача 4.63: Изследвайте за сходимост и абсолютна сходимост редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, ако:

а) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}$; б) $u_n = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}.\mathrm{tg}\dfrac{1}{n}$; в) $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$;

г) $u_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}\cdot\dfrac{1}{n}$; д) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$;

$$\text{е)}\quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right); \quad \text{ж)}\quad u_n = \frac{\cos n}{n}.$$

Решение: д) Записваме u_n във вида

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

и ще използваме асимптотичната формула

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t^2), \quad t \to 0.$$

По този начин се получава

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \alpha_n, \quad \text{където} \quad |\alpha_n| \le \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad C > 0.$$

Тъй като редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ е абсолютно сходящ, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ или разходящ, едновременно с реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, където $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$. От сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и разходимостта на хармоничният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ следва разходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ;

е) Ще използваме асимптотичната формула

$$\ln(1+t) = t + o(t^2), \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

за да се получи

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + b_n, \quad \text{където} \quad |b_n| \le \frac{C}{n^{\frac{4}{3}}}, \quad C > 0.$$

Тъй като редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ абсолютно, а редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ е сходящ условно (редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt[3]{n^2}}$ е разходящ), то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ условно;

ж) Редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ е сходящ. Ще докажем, че този ред не е абсолютно сходящ, т. е. ще докажем разходимостта на реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$. Използвайки неравенството $|\cos n| \geq \cos^2 n$ и формулата

$$\cos^2 n = \frac{1+\cos 2n}{2},$$

се получава

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{1+\cos 2n}{2n}.$$

Отбелязваме, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n}{2n}$ е разходящ, тъй като редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ е сходящ, а редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ е разходящ. По признака за сравняване на редове, се получава, че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ е разходящ.

Задача 4.64: Докажете, че редовете $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ са абсолютно сходящи, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = \frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}};\quad \text{б)}\quad u_n = \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}};$$

$$\text{в)}\quad u_n = \frac{\cos\frac{\pi n}{4}}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}};\quad \text{г)}\quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n};$$

$$\text{д)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\cdot\arcsin\frac{\pi}{4n};\quad \text{е)}\quad u_n = \cos^3 n.\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2};$$

$$\text{ж)}\quad u_n = \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right);\quad \text{з)}\quad u_n = n^3.\sin n.e^{-\sqrt{n}};$$

$$\text{и)}\quad u_n = (-1)^n\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\right);\quad \text{й)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!};$$

$$\text{к)}\quad u_n = \frac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n};\quad \text{л)}\quad u_n = \frac{(-1)^n\ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}};$$

$$\text{м)}\quad u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3};\quad \text{н)}\quad u_n = \frac{(-1)^n\sin 3n}{n.\ln(n+1).\ln^2(n+2)}.$$

Задача 4.65: Изследвайте за сходимост и абсолютна сходимост редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, ако:

$$\text{а)}\quad u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2};\quad \text{б)}\quad u_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2.2^n}{3^n+1};$$

$$\text{в)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)};\quad \text{г)}\quad u_n = \frac{(n+1)\sin 2n}{n^2 - \ln n};$$

$$\text{д)}\quad u_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}};\quad \text{е)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)\ln\ln(n+2)};$$

$$\text{ж)}\quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+4)}{\sqrt[3]{n^2+1}.(2+\sqrt{n^2+3})};\quad \text{з)}\quad u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{6}\right)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right);$$

$$\text{и)}\quad u_n = \frac{\ln^2\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \cdot \sin\frac{\pi n}{4};\quad \text{й)}\quad u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n}+(-1)^{n-1}}.$$

Задача 4.66: Намерете стойностите на α, за които редовете са: а) абсолютно сходящи; б) условно сходящи, ако:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha};\quad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\alpha};$$

$$\text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+n^{-1}}};\quad \text{г)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^\alpha}\right);$$

$$\text{д)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^\alpha};\quad \text{е)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n+1}+(-1)^n)^\alpha};$$

$$\text{ж)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^\alpha};\quad \text{з)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n.\ln^2 n}{n^\alpha};$$

$$\text{и)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\right)^\alpha;$$

$$\text{й)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!};$$

$$\text{к)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^{2n}\alpha}{n};\quad \text{л)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\cos^{2n}\alpha}{\sqrt{n}};$$

$$\text{м)}\quad 1+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\dots.$$

4.7 Общи задачи от сходимост редовете:

Задача 4.67: Да се докаже, че редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$, където $x \neq 0$ са сходящи при $\alpha > \frac{1}{2}$ и разходящи при $\alpha < \frac{1}{2}$.

Задача 4.68: Да се докаже, че редът

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots,$$

получен от сходящия ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ чрез разместване на неговите членове, е разходящ.

Задача 4.69: Нека $\alpha > 0$ и S е сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$. Да се докаже, че $\frac{1}{2} < S < 1$.

Задача 4.70: Нека за всяко $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Следва ли, от тук, че знакопроменливият ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ е сходящ?

Задача 4.71: Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ и $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Следва ли, от тук, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ?

Задача 4.72: Нека редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи и при всяко $n \geq n_0$ са изпълнени неравенствата $a_n \leq c_n \leq b_n$. Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ е сходящ.

Задача 4.73: Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, където за всяко $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$, е сходящ, ако съществува число $\alpha > 0$, такова, че

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Задача 4.74: Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n.v_n$ е сходящ, ако са изпълнени условията:

1. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ;

2. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+1})$ е абсолютно сходящ.

Задача 4.75: Да се докаже, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n.v_n$ е сходящ, ако са изпълнени следните условия:

1. частичните суми на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ са ограничени, т. е. съществува константа $M > 0$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right| \leq M;$$

2. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+1})$ е абсолютно сходящ;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Задача 4.76: Нека редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е условно сходящ ред. Нека да означим

$$\alpha_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad \beta = \frac{|u_n| - u_n}{2}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Да се докаже, че:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$;

2. Редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ са разходящи;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1.$

Задача 4.77: Нека са дадени две редици $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ от положителни числа, и числата p и q, такива, че $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Да се докаже, че ако редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^p$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^q$ са сходящи, то:

1. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n.v_n$ е сходящ, при това

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.v_n \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

2. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^p$ е сходящ, при това

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Упътване: Използвайте следните две неравенства:

1. **(Неравенство на Хьолдер за суми)** Нека $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ са произволни неотрицателни числа. Тогава е изпълнено следното неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

където $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

2. **(Неравенство на Минковски за суми)** Нека $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ са произволни неотрицателни числа и $p > 1$. Тогава е изпълнено следното неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Задача 4.78: Да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!},\quad a>0;\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}};$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}n!,\quad a>0;\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+2}\right)^n,\quad a>0;$$

$$\text{е)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^n,\quad a>0;\quad \text{ж)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n};\quad \text{з)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}.$$

Задача 4.79: Да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!2^n};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n;$$

$$\text{г)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1.3.5.\ldots.(2n-5)}{2.4.6.\ldots.2(n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1};\quad \text{д)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6.\ldots.2(n-1)}{3.5.7.\ldots.(2n-1)};$$

$$\text{е)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{1.4.7.\ldots.(3n-7)};\quad \text{ж)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad \text{з)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n};$$

$$\text{и)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n};\quad \text{й)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

Задача 4.80: Да се изследват за сходимост редовете:

$$\text{а)}\ \frac{1}{2}+\frac{3!}{2.4}+\frac{5!}{2.4.6}+\frac{7!}{2.4.6.8}+\ldots;$$

$$\text{б)}\ 1+\frac{1.2}{1.3}+\frac{1.2.3}{1.3.5}+\frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}+\ldots;$$

$$\text{в)}\ 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots;$$

$$\text{г)}\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots;$$

$$\text{д)}\ \frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots;$$

е) $\dfrac{(1!)^2}{2!} + \dfrac{(2!)^2}{4!} + \ldots + \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} + \ldots;$

ж) $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1.5}{8.11} + \dfrac{1.5.9}{8.11.14} + \dfrac{1.5.9.13}{8.11.14.17} + \ldots;$

з) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \ldots;$

и) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7} + \ldots + \dfrac{n}{2n-1} + \ldots;$

й) $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)^2} + \ldots.$

5. ФУНКЦИИ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

5.1 Функция. Основни понятия

Множеството $X = \{x\}$ от всички стойности, които дадена променлива величина x може да приема, се нарича *област на изменение* на тази величина. Променливата величина x е зададена, ако е зададена нейната област на изменение.

Нека е зададена променливата величина x, която има област на изменение множеството $X = \{x\}$.

Дефиниция 5.1: *Ако на всяка стойност на променливата x от множеството $X = \{x\}$ е съпоставено чрез някое правило точно едно число y от множеството $Y = \{y\}$, казваме, че върху множеството X е зададена функцията $y = f(x)$.*

Променливата x се нарича *независима променлива* или *аргумент* на функцията $f(x)$, множеството X се нарича *дефиниционна област* на функцията, а числото $f(x)$, което съответства на дадената стойност на аргумента x, се нарича стойност на функцията в точката x. Съвкупността $\{y\}$ от всички възможни стойности на функцията f се нарича *област на изменение* на тази функция.

В означението $y = f(x)$ буквата f се нарича *характеристика* на функцията.

За функцията f с дефиниционна област множеството X и област на изменение множеството Y ще използваме означението $f : X \to Y$.

Най-простото, но същевременно най-приложимо, е задаването на една функция чрез нейния аналитичен израз или формула. Това са изрази, които определят операциите, които трябва да се извършат над стойностите на x и някои постоянни числа, за да се получат стойностите на y, например

$$y = f(x) = \frac{3x}{x^2 - 3x}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + \operatorname{arctg} x.$$

Дефиниционната област на функция, зададена чрез аналитичен израз, се състои от онези стойности на x, за които всички означени операции са изпълними, и те напълно да определят една крайна реална стойност.

Съставна функция. Когато вместо аргумента в дадена функция се постави друга функция, получаваме сложна или съставна функция. Нека функцията $y = f(x)$ е определена за x от областта X и нейните стойности са от областта, в която е определена функцията $z = \varphi(y)$. Тогава променливата z посредством y се явява функция на x и тази функция наричаме сложна, или съставна функция, и означаваме

$$z = \varphi[f(x)].$$

Основни елементарни функции

1. Степенна функция: $y = x^m$, ($m-$ дадено реално число).
2. Показателна функция: $y = a^x$, $1 \neq a > 0$.
3. Логаритмична функция: $y = \log_a x$, $1 \neq a > 0$, $x > 0$.
4. Тригонометрични функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.
5. Хиперболични функции: Това са функции, дефинирани чрез равенствата

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

6. Обратни тригонометрични функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arccotg} x$.

Ако една функция се получава, като се приложат краен брой пъти аритметични операции върху основните елементарни функции, или се вземат краен брой пъти функция от функция от основните елементарни функции, то тя се нарича елементарна функция.

Една функция се нарича алгебрична, ако стойностите ѝ се получават, като се извършват краен брой алгебрични действия (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване) върху независимата променлива и някои константи.

Всяка функция, която не е алгебрична, се нарича трансцедентна. Трансцедентни са например функциите $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$ и други.

Четност и нечетност: Функцията $f : D \to \mathbf{R}$ се нарича *четна функция*, ако дефиниционната ѝ област D е симетричен относно нулата интервал и е изпълнено условието $f(-x) = f(x)$, т. е. за две противоположни стойности на аргумента, приема равни функционални стойности.

Функцията $f : D \to \mathbf{R}$ се нарича *нечетна функция*, ако D е симетричен относно нулата интервал и е изпълнено условието $f(-x) = -f(x)$, т. е. за две противоположни стойности на аргумента, приема противоположни функционални стойности.

Четните функции имат графики, които са симетрични спрямо оста oy. Нечетните функции имат графики, които са симетрични спрямо началото O на координатната система.

Не всички функции са непременно четни или нечетни. В този случай, те се наричат нито четни, нито нечетни функции.

Монотонни функции: Ако за всеки две стойности на аргумента x от даден сегмент $[a, b]$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$, казваме, че функцията е монотонно растяща (ненамаляваща) в този сегмент. Ако е изпълнено неравенството $f(x_1) \geq f(x_2)$, казваме, че функцията е монотонно намаляваща (нерастяща) в този сегмент.

Периодични функции: Функцията $y = f(x)$ се нарича периодична, ако съществува константа $T > 0$, че за всяко реално x, е в сила равенството $f(x+T) = f(x)$. Ако функцията f е периодична с период T, то за всяко $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и всяко реално x е изпълнено равенството

$$f(x + nT) = f(x).$$

Ако $y = f(x)$ е произведение от няколко периодични функции с обща дефиниционна област и със съизмерими периоди, то тя е периодична с период, равен на най-малкото общо кратно на периодите на тези функции. Ако $y = f(x)$ е линейна комбинация на няколко периодични функции с обща дефиниционна област и със съизмерими периоди, то тя е периодична с период, равен на най-малкото общо кратно на периодите на дадените функции.

5.1.1 Задачи

Задача 5.1: Представете чрез редица от основните елементарни функции следните съставни функции:

$$\text{а)}\quad y = a^{\ln \operatorname{tg}(5x+2)}; \quad \text{б)}\quad y = \log_a \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} a^{3x}}.$$

Решение: а) Функцията y може да се представи така:

$$y = a^u, \quad u = \ln v, \quad v = \operatorname{tg} t, \quad t = 5x + 2.$$

б) Тук имаме

$$y = \log_a u, \quad u = \sin v, \quad v = \sqrt[3]{w}, \quad w = \mathrm{tg} t, \quad t = a^p, \quad p = 3x.$$

Задача 5.2: Дадени са функциите $f(x) = x^3 - x$ и $\varphi(x) = \cos 2x$. Напишете сложните функции $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$, $f[f(x)]$ и $\varphi[\varphi(x)]$. Изчислете $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$, $\varphi[f(1)]$.

Решение: Като заместим аргумента на функцията $f(x)$ с $\varphi = \cos 2x$, получаваме

$$f[\varphi(x)] = f(\cos 2x) = \cos^3 2x - \cos 2x.$$

Аналогично имаме

$$\varphi[f(x)] = \varphi(x^3 - x) = \cos 2(x^3 - x);$$

$$f[f(x)] = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + x.$$

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi(\cos x) = \cos(\cos 2x).$$

В сила са следните представяния:

$$f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = f\left(\cos 2\frac{\pi}{12}\right) = f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varphi[f(1)] = \varphi[1^3 - 1] = \varphi(0) = \cos 2.0 = 1.$$

Задача 5.3: Определете дефиниционната област на функцията

$$f(x) = \sqrt{x - 5} - \sqrt[4]{6 - x}.$$

Решение: Тъй като знаем, че четен корен може да се извлече само от неотрицателно число, то трябва да са изпълнени неравенствата

$$x - 5 \geq 0, \quad 6 - x \geq 0,$$

или $x \geq 5$ и $x \leq 6$. Получаваме затворения интервал $[5, 6]$, който е дефиниционната област на функцията.

Задача 5.4: Определете дефиниционната област и областта от стойностите на функцията $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Решение: Тази функция е дефинирана за $x \in [-2, 2]$ (при тези стойности на x изразът $4 - x^2$ под знак за корен е неотрицателен), а множеството от всичките ѝ стойности е сегмента $y \in [0, 2]$.

Задача 5.5: Определете дефиниционните области на функциите:

$$\text{а) } y = \frac{x^2}{1+x}; \quad \text{б) } y = \arccos(2\sin x); \quad \text{в) } y = \sqrt{3x - x^3};$$

$$\text{г) } y = \lg[\cos(\lg x)]; \quad \text{д) } y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \text{е) } y = \lg(x^2 - 4);$$

$$\text{ж) } y = \lg(x+2) + \lg(x-2); \quad \text{з) } y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}; \quad \text{и) } y = \sqrt{\cos x^2};$$

$$\text{й) } y = \lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right); \quad \text{к) } y = \arcsin\frac{2x}{1+x}; \quad \text{л) } y = (x + |x|)\sqrt{x\sin^2 \pi x};$$

$$\text{м) } y = \mathrm{cotg}\pi x + \arccos\left(2^x\right); \quad \text{н) } y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x);$$

$$\text{о) } y = \log_2 \log_3 \log_4 x; \quad \text{п) } y = \sqrt[4]{\lg \mathrm{tg} x};$$

$$\text{р) } y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

Отговори: а) $-\infty < x < +\infty, x \neq 1$; б) $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; в) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$; г) $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; д) $x \in [-1, 1)$; е) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; ж) $x \in (2, +\infty)$; з) $x \in [4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2], k = 0, 1, 2, \ldots$; и) $x \in \left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right], x \in \left[-\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{2k\pi}\right], x \in \left[\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right], k = 0, 1, 2, \ldots$; й) $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right), k = 0, 1, 2, \ldots$; к) $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$; л) $x \in [0, +\infty)$; м) $x < 0$ и $x = -k, k = 1, 2, 3, \ldots$; н) $x \in (1, 2]$; о) $x \in (4, +\infty)$; п) $x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; р) $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 5.6: Да се определи коя от следните функции е четна и коя е нечетна функция:

$$\text{а) } f(x) = 3x - x^3; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2};$$

$$\text{в) } f(x) = a^x + a^{-x}, \quad a > 0; \quad \text{г) } f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x};$$

$$\text{д) } f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Решение: а) Дефиниционната област на функцията $f(x) = 3x - x^3$ е $(-\infty, +\infty)$ и това е интервал, който е симетричен спрямо точката O. След това имаме, че

$$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -(3x - x^3) = -f(x),$$

следователно, това е нечетна функция; б) четна функция; в) четна функция; г) Дефиниционната област на функцията е $(-1, 1)$, който е симетричен спрямо O интервал. След това имаме

$$f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1-x} = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x),$$

и това е нечетна функция; д) Дефиниционната област е $(-\infty, \infty)$ и

$$f(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) = \ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1} = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x),$$

и това е нечетна функция.

Задача 5.7: Да се докаже, че всяка функция $f(x)$, която е дефинирана в симетричен интервал $(-l, l)$, може да се представи като сума от четна и нечетна функция.

Упътване: Разгледайте представянето на функцията $f(x)$ във вида

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(f(x) + f(-x)) + (f(x) - f(-x))\right].$$

Задача 5.8: Да се определи коя от следните функции е четна, коя е нечетна, и коя е нито четна нито нечетна:

а) $f(x) = \cos x - \ln\cos x$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$;

г) $f(x) = 3^{-x^2} + x\sin x$; д) $f(x) = e^{x-x^3}$.

Отговори: а) четна; б) $x \in (-\infty, +\infty)$, който е симетричен интервал, но

$$f(-x) = -x - (-x)^2 = -x - x^2 \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x), \end{cases}$$

което показва, че функцията е нито четна, нито нечетна; в) нечетна; г) четна; д) нито четна нито нечетна функция.

Задача 5.9: Да се намерят интервалите на монотонност на функцията

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение: Дефиниционната област е $[-1, 1]$. За разликата $y_2 - y_1$ получаваме

$$y_2 - y_1 = x_2 + \sqrt{1 - x_2^2} - x_1 - \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$= x_2 - x_1 + \frac{1 - x_2^2 - 1 + x_1^2}{\sqrt{1 - x_2^2} + \sqrt{1 - x_1^2}} = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{1 - x_2^2} + \sqrt{1 - x_1^2}}\right)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - x_2^2} + \sqrt{1 - x_1^2}}\left(\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} - x_1 - x_2\right).$$

За да имаме $y_2 > y_1$ при $x_2 > x_1$, трябва да е изпълнено неравенството

$$\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} > x_1 + x_2, \tag{5.1}$$

или

$$\sqrt{1 - x_1^2} - x_1 > x_2 - \sqrt{1 - x_2^2}. \tag{5.2}$$

Неравенството (5.1) е изпълнено за произволни отрицателни стойности на x_1 и x_2 от дефиниционната област, т. е. за $-1 \leq x_1 < x_2 < 0$.

Неравенството (5.2) е изпълнено когато

$$0 < x_1 < \sqrt{1 - x_1^2} \;\text{ и }\; 0 < x_2 < \sqrt{1 - x_2^2},$$

т. е.

$$0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \;\text{ и }\; 0 < x_2 < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

следователно и за $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, защото тогава лявата му страна е положителна, а дясната е отрицателна.

От (5.2) се вижда, че когато $\frac{1}{\sqrt{2}} < x_1 < 1$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} < x_2 < 1$, неравенството не е изпълнено, а следователно и при $\frac{1}{\sqrt{2}} < x_1 < x_2 < 1$ то няма да е изпълнено.

Окончателно, функцията е растяща в интервала $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и намаляваща в интервала $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

Задача 5.10: Да се докаже, че следните функции са монотонно растящи в посочените интервали:

$$\text{а)}\;\; f(x) = x^2, \quad x \in [0, \infty); \quad \text{б)}\;\; f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{в)}\ \ f(x) = \mathrm{tg}x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{г)}\ \ f(x) = 2x + \sin x \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Задача 5.11: Да се докаже, че следните функции са монотонно намаляващи в посочените интервали:

$$\text{а)}\ \ f(x) = x^2, \quad x \in (-\infty, 0]; \quad \text{б)}\ \ f(x) = \mathrm{cotg}x, \quad x \in (0, \pi);$$

$$\text{в)}\ \ f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi].$$

Задача 5.12: Да се изследват за монотонност функциите:

$$\text{а)}\ \ f(x) = ax + b; \quad \text{б)}\ \ f(x) = ax^2 + bx + c; \quad \text{в)}\ \ f(x) = x^3;$$

$$\text{г)}\ \ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad \text{д)}\ \ f(x) = a^x, \quad (a > 0).$$

Задача 5.13: Нека $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ са монотонно растящи функции. Да се докаже, че ако

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \le f[f(x)] \le \psi[\psi(x)].$$

Задача 5.14: Определете периода на следните функции, или покажете, че те не са периодични:

$$\text{а)}\ \ f(x) = \sin 3x; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = \cos^2 x;$$

$$\text{в)}\ \ f(x) = \sin 2\pi x; \quad \text{г)}\ \ f(x) = \mathrm{tg}(x^2).$$

Решение: а) Ще използваме представянето

$$\sin 3(x+T) = \sin(3x + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

След приравняване на аргументите под знака за синус се получава

$$3x + 3T = 3x + 2k\pi, \quad 3T = 2k\pi, \quad T = \frac{2}{3}k\pi.$$

При $k = 1$ се получава най-малкият период $T = \dfrac{2}{3}\pi$; б) Използвайте представянето $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ и намерете, че периодът е $T = \pi$; в) Периодична с период 1; г) От условието за периодичност

$$\mathrm{tg}[(x+T)^2] = \mathrm{tg}(x^2), \tag{5.3}$$

се получава $2Tx + T^2 = \pi$, тъй като периодът на $\mathrm{tg}x$ е π. Полученото равенство показва, че не може да се определи такова $T = const$, което да удовлетворява равенството (5.3) за всяко x. Тук T зависи от x. Функцията не е периодична.

Задача 5.15: Определете периода на следните функции, или покажете, че те не са периодични:

$$\text{а)}\quad f(x) = 6\sin^2 x + 2\cos\frac{x}{2} + \mathrm{tg}2x;\quad \text{б)}\quad f(x) = (x - [x])\sin 3\pi x;$$

$$\text{в)}\quad f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

Решение: а) Имаме, че

$$f(x) = 3(1 - \cos 2x) + 2\cos\frac{x}{3} + \mathrm{tg}2x.$$

За периодите на отделните функции намираме:

$$\cos 2(x + T_1) = \cos 2x,\quad T_1 = \pi,$$

$$\cos\frac{x + T_2}{3} = \cos\frac{x}{3},\quad T_2 = 6\pi,$$

$$\mathrm{tg}2(x + T_3) = \mathrm{tg}2x,\quad T_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Най-малкото общо кратно на периодите е 6π, което е и периодът на дадената функция;

б) функцията е произведение на функциите $\varphi(x) = x - [x] = \{x\}$ и $\psi(x) = \sin 3\pi x$. Функцията $\varphi(x)$ е периодична с период 1, а $\psi(x)$ е периодична с период $\frac{1}{2}$. Периодът на функцията ще бъде числото 2.

в) Отделните събираеми са периодични функции с периоди 2π и $\sqrt{2}\pi$, които не са съизмерими, затова функцията не е периодична функция.

Задача 5.16: Определете периода на следните функции, или покажете, че те не са периодични:

$$\text{а)}\ f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{3} + \cos\frac{\pi x}{4};\ \text{б)}\ f(x) = x\cos x;\ \text{в)}\ f(x) = |\sin x| + |\cos 2x|;$$

$$\text{г)}\ f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x;\ \text{д)}\ f(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3};\ \text{е)}\ f(x) = \sin^2 x;$$

$$\text{ж)}\ f(x) = \sin x^2;\ \text{з)}\ f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}x};\ \text{и)}\ f(x) = \mathrm{tg}\sqrt{x}.$$

Отговори: а) $T = 24$; б) тя не е периодична; в) $T = \pi$; г) $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; д) $T = 6\pi$; е) $T = \pi$; ж) тя не е периодична; з) $T = \pi$; и) тя не е периодична.

5.2 Граница на функция

Нека функцията f е дефинирана върху някое множество D и нека a е точка на сгъстяване на това множество, която може и да не принадлежи на това множество. Например, нека множеството D е интервалът (a, b). В този случай точката a не принадлежи на интервала, но всяка δ-околност на точката a съдържа точки от този интервал.

Дефиниция 5.2: (Граница на функция по Хайне) *Числото b се нарича граница на функцията f в точката a, (или при $x \to a$), ако за всяка редица от стойности на аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, клоняща към a и състояща се от числа x_n, различни от a, съответната редица от стойности на функцията $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$, клони към числото b.*

Този факт ще записваме така:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Дефиниция 5.3: (Граница на функция по Коши) *Числото b се нарича граница на функцията $f : D \to \mathbf{R}$ в точката a, (или при $x \to a$), ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависещо от ε, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < |x - a| < \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Теореми за граници на функции

Нека функциите f и g имат граници в точката a. Тогава са в сила следните равенства:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$$

$$\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x);$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x))} \quad (\text{ако} \quad g(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0).$$

Нека функциите $\varphi(x)$, $f(x)$ и $\psi(x)$ са дефинирани в някой интервал (a, b), с изключение може би във фиксираната точка x_0. Ако за всяко $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ са изпълнени неравенствата

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Някои основни граници

(1) $$\lim_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a}\quad (k\in\mathbb{N});$$

(2) $$\lim_{x\to a}R(x)=R(a),\quad (R \text{ е рационална функция});$$

(3) $$\lim_{x\to a}|x|=|a|;$$

(4) $$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;$$

(5) $$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a;$$

(6) $$\lim_{x\to a}\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}a;$$

(7) $$\lim_{x\to a}\mathrm{cotg}x=\mathrm{cotg}a;$$

(8) $$\lim_{x\to a}e^x=e^a;$$

(9) $$\lim_{x\to a}\ln x=\ln a;$$

(10) Тъй като за всяко $b>0$ $b^x=e^{x\ln b}$, и за всяко $x>0$ $x^b=e^{b\ln x}$, то от (8) и (9) се получава

$$\lim_{x\to a}b^x=b^a \quad\text{и}\quad \lim_{x\to a}x^b=a^b;$$

(11) За всяко $0<q<1$ е в сила равенството $\lim\limits_{x\to\infty}q^x=0$.

Дефиниция 5.4: (дясна (лява) граница на функция по Коши) *Числото b се нарича дясна граница (лява граница) на функцията f в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависещо от ε, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $0 < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$, да е изпълнено неравенството $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Дясната (лявата) граница на функцията f в точката a ще означаваме с:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad \left(\lim_{x \to a-0} f(x) = b \right),$$

или накратко

$$f(a+0) = b \ \ (f(a-0) = b).$$

Ако функцията f има в точката a и дясна и лява граница, и тези едностранни граници са равни на едно и също число b, то тази функция има граница в точката a, равна на b.

Ако функцията f има в точката a граница, равна на b, то и дясната и лявата граница на f в точката a съществуват, и са равни на b.

5.2.1 Граница на функция при неограничено нарастване на аргумента

Дефиниция 5.5: (Граница на функция при $x \to \infty$ по Коши) *Числото b се нарича граница на функцията f при $x \to \infty$, ако за всяко положително число ε, съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависеща от ε, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x| > \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

В този случай ще използваме означението

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Нека да отбележим факта, че

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Задача 5.17: Да се намери границата

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 + 3x}.$$

Решение: Ако преминем към граница, получаваме неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, поради това изнасяме най-високата степен на x от числителя и най-високата степен на x от знаменателя пред скоби, съкращаваме, което е възможно, и използваме основната граница $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, за да се получи

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}} = 0.1 = 0.$$

Задача 5.18: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x).$$

Решение: Ако преминем към граница, получаваме неопределеност от вида $[\infty - \infty]$. Ще рационализираме израза $\sqrt{x^2+1} - x$ и последователно се получава

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1} = 0.1 = 0.$$

Задача 5.19: Да се намерят границите на функциите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} - x); \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1});$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}); \quad \text{г)} \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1});$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x\to\infty} x^3 (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}).$$

Отговори: а) ∞; б) 0; в) 1; г) умножете и разделете на $(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2-1} + (\sqrt[3]{x^2-1})^2$, отговорът е $\frac{2}{3}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Задача 5.20: Да се докаже, че границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to\infty} \sin x; \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} \cos x; \quad \text{в)} \quad \lim_{x\to\infty} \mathrm{tg} x; \quad \text{г)} \quad \lim_{x\to\infty} \mathrm{cotg} x;$$

не съществуват.

Упътване: Използвайте подхода на Хайне. Например за а) могат да се изберат две дивергиращи към ∞ редици $\{x_n = n\pi\}$ и $\{x_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\}$ и разгледайте границите на съответните редици $\{\sin n\pi\}$ и $\{\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\}$. Покажете, че те имат различни граници.

Задача 5.21: Да се намерят границите на функциите:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m};$$

$$\text{б)} \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

5.2.2 Граници на някои алгебрични функции, когато аргументът клони към крайна граница

Задача 5.22: Да се намери границата на функцията

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

Решение: При формалното заменяне на x с 2 ще се получи неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. За да се разкрие тази неопределеност, трябва числителят и знаменателят да се разложат в произведение от множители, т. е. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ и $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x-1)(x+1)$. За границата се получава

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{3}.$$

Задача 5.23: Да се намери границата на функцията

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

Решение: При формалното заменяне на x с 4 ще се получи неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. За да се разкрие тази неопределеност, ще рационализираме и числителя, и знаменателя на тази функция. Последователно се получава

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{4}{3}.$$

Задача 5.24: Да се намери границата на функцията

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+2x}{x^6+3x^2+x}.$$

Решение: При преминаване към граница получаваме неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. За да се разкрие тази неопределеност, изнасяме найниската степен на x от числителя и знаменателя пред скоби, и се получава

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+2x}{x^6+3x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.(x^4+2)}{x.(x^5+3x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+2}{x^5+3x+1} = 2.$$

Задача 5.25: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^3+x}{x^6+2x^4+x};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x+2};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to a} \frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3};\quad \text{д)}\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6};$$

$$\text{е)}\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right);\quad \text{ж)}\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right).$$

Отговори: а) 1; б) $\frac{5}{4}$; в) -5; г) $\frac{2}{3}$; д) $-\frac{2}{5}$; е) -1; ж) 0.

Задача 5.26: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\sqrt[3]{1+x^2}-1);$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x});\quad \text{д)}\ \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\quad (0 \le b < a);$$

$$\text{е)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}};\quad \text{ж)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\quad (m,n \in \mathbb{N});$$

$$\text{з)}\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2};\quad \text{и)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt[n]{1+x}-1)\quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\text{й)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\frac{x}{n}\right)\quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\text{к)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\sqrt[n]{1+x}-1-\frac{x}{n}+\frac{n-1}{2n^2}x^2\right)\quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отговори: а) 4; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$; е) $\sqrt{a}$; ж) $\frac{n}{m}$; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{1}{n}$; й) $\frac{1-n}{2n^2}$; к) $\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}$.

Упътване: За да се решат примерите й) и к) можете да рационализирате числителите, или да положите $1 + x = y^n$. Тогава условието $x \to 0$ е еквивалентно на условието $y \to 1$.

5.2.3 Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Ще отбележим една забележителна граница, а именно, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{5.4}$$

Едно обобщение на горния резултат е следният факт: ако $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, то е в сила равенството

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1. \tag{5.5}$$

Като се използват равенствата (5.4) и (5.5) директно се получава

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} = 1,$$

и ако $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{tg} u(x)}{u(x)} = 1$.

Задача 5.27: Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x}$ $(a \neq 0)$.

Решение: Ще използваме равенството (5.5). В случая $u(x) = ax$. В знаменателя също трябва да се получи ax. За тази цел ще използваме представянето

$$\frac{\sin ax}{x} = a \cdot \frac{\sin ax}{ax}.$$

Съгласно (5.5) имаме, че $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = 1$. По този начин се получава, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a. \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = a.$$

Задача 5.28: Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a, b \neq 0)$.

Решение: Ще използваме представянията

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{x}{\sin bx} = a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{bx}{\sin bx},$$

за да се получи, че границата е $\dfrac{a}{b}$.

Задача 5.29: Да се намерят границите

$$\text{а)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}; \qquad \text{б)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sin 2\pi x}{x - 1}.$$

Решение: а) Полагаме $x - 1 = t$, т. е. $x = 1 + t$. Условието $x \to 1$ е еквивалентно на условието $t \to 0$ и се получава

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi(1 + t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{t} = -\pi. \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = -\pi;$$

Отговор: б) 2π.

Задача 5.30: Да се намерят границите

$$\text{а)} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}; \qquad \text{б)} \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}x}{x - 1} \quad (n \in \mathbb{N}); \qquad \text{г)} \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cos(2m+1)\frac{\pi}{2}x}{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}x} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Отговори: а) -1; б) 1; в) $(-1)^{n+1}(2n+1)\frac{\pi}{2}$; г) $(-1)^{m+n}\frac{2m+1}{2n+1}$.

Задача 5.31: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}; \quad \text{е)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x};$$

$$\text{ж)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}; \quad \text{з)} \quad \lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{\sin x - \sin a}; \quad \text{и)} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}.$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{3}{4}$; д) Ще използваме следните представяния:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} = -1.$$

е) 2; ж) 4; з) $-\mathrm{tg}a$; и) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5.32: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}a}{x-a};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{cotg}x - \mathrm{cotg}a}{x-a};\quad \text{д)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{x};\quad \text{е)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x};$$

$$\text{ж)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}ax - \mathrm{tg}bx}{x};\quad \text{з)}\ \lim_{x\to 0} x(\mathrm{cotg}ax - \mathrm{cotg}bx)\quad (a\cdot b \neq 0).$$

Отговори: а) $\cos a$; б) $-\sin a$; в) $\frac{1}{\cos^2 a}$; г) $-\frac{1}{\sin^2 a}$; д) $a-b$; е) 0; ж) $a-b$; з) $\frac{b-a}{ab}$.

Задача 5.33: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2};\qquad \text{б)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{tg}x}{x^2}.$$

Решение: а) Тъй като за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ функцията $f(x) = \dfrac{x-\sin x}{x^2}$ е нечетна, то двата случая $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$ са еквивалентни. Ще смятаме, че $0 < x < \frac{\pi}{2}$. За тези x са изпълнени неравенствата

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x. \tag{5.6}$$

В сила е равенството

$$\frac{x-\sin x}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right). \tag{5.7}$$

От (5.6) и (5.7) се получава

$$\frac{x-\sin x}{x^2} > 0. \tag{5.8}$$

Ще използваме представянията

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{x-\sin x}{x} < \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{x^2}{2}. \tag{5.9}$$

От (5.7) и (5.9) се получава

$$\frac{x-\sin x}{x^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot x. \tag{5.10}$$

От (5.8) и (5.10) се получава

$$0 < \frac{x-\sin x}{x^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot x.$$

Извършваме граничен преход при $x \to 0$ в горните неравенства и се получава

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0.$$

б) Използваме представянията

$$\frac{x-\mathrm{tg}x}{x^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{x\cos x - x + (x-\sin x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - x}{x^2\cos x} + \frac{x-\sin x}{x^2\cos x} = -\frac{1-\cos x}{x\cos x} + \frac{x-\sin x}{x^2\cos x}$$

$$= -\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{x-\sin x}{x^2}.$$

В горното равенство извършваме граничен преход при $x \to 0$ и използваме резултата а) на задачата, за да се получи

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{tg}x}{x^2} = 0.$$

5.2.4 Сравняване растенето на функциите a^x, x^α, $\ln x$

Отбелязваме факта, че са в сила следните резултати:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n \in \mathbb{N}); \tag{5.11}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad (a > 1, \alpha \in \mathbb{R}); \tag{5.12}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \quad (a > 1, \alpha > 0); \tag{5.13}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha . a^x - 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < a < 1. \tag{5.14}$$

Равенствата (5.11) ÷ (5.13) ни показват, че за $a > 1$ при неограничено растене на аргумента x ($x \to \infty$), показателната функция a^x има по-голяма скорост на клонене към ∞ в сравнение със степенната функция x^n (x^α), след това функцията x^α ($\alpha > 0$) има по-голяма скорост на клонене към ∞ в сравнение с логаритмичната функция $\log_a x$.

Равенството (5.14) ни показва, че за $0 < a < 1$, показателната функция a^x има по-бърза скорост на клонене към 0, в сравнение със скоростта на клонене към ∞ на степенната функция x^α, за $\alpha > 0$.

Задача 5.34: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a^x} = 0 \quad (a > 1, \quad f(x) \ \text{ е полином});$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{a^x} = 0 \quad (a > 1, \quad R(x) \ \text{ е рационална функция}).$$

Решение: а) Нека да смятаме, че $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогава се получава, че

$$\frac{f(x)}{a^x} = a_0\frac{x^n}{a^x} + a_1\frac{x^{n-1}}{a^x} + \ldots + a_n\frac{1}{a^x}.$$

Извършваме граничен преход при $x \to \infty$ в горното равенство, използваме равенството (5.11), за да се получи, че $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{a^x} = 0$.

б) Нека $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Тогава

$$\frac{R(x)}{a^x} = \frac{f(x)}{a^x}\frac{1}{g(x)}.$$

Използва се а) на задачата и факта, че $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = (\pm)\infty$.

Задача 5.35: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \infty \quad (\alpha \le 0); \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Решение: а) Полагаме $\ln x = u$, т. е. $x = e^u$. Тогава, условието $x \to \infty$ е еквивалентно на условието $u \to \infty$. Получаваме равенствата

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{(e^u)^\alpha} = \lim_{u\to\infty} (e^u)^{-\alpha}u = \infty.$$

Тук сме използвали, че за $\alpha \le 0$ е в сила неравенството $e^{-\alpha} \ge 1$.

б) Използваме представянето

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}} \to e^0 = 1 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

За получаване на последната граница сме приложили равенството (5.13).

Задача 5.36: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n.a^x = 0 \quad (a > 1); \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha.a^x = 0 \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (0 < a < 1).$$

Упътване: а) Използвайте представянето

$$x^n.a^x = \frac{x^n}{a^{-x}} = \frac{(-1)^n(-x)^n}{a^{-x}}$$

и равенството (5.11); б) Използвайте представянето

$$x^\alpha.a^x = (-1)^\alpha(-x)^\alpha \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = (-1)^\alpha(-x)^\alpha b^{-x}, \quad b = \frac{1}{a} > 1$$

и резултата на а); в) Използвайте представянето

$$\frac{x^n}{a^x} = (-1)^n(-x)^n.a^{-x}.$$

Задача 5.37: Да се докажат равенствата:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to0} x\ln x = 0; \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} x(\ln x)^2 = 0; \quad \text{в)} \quad \lim_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0);$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x\to0} x^\alpha \ln x = -\infty \quad (\alpha \le 0); \quad \text{д)} \quad \lim_{x\to0} x^x = 1;$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x\to0} x^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \text{ж)} \quad \lim_{x\to0} x^{\frac{1}{x}} \ln x = 0.$$

Решение: а) В сила са равенствата

$$\lim_{x\to0}(x\ln x) = -\lim_{x\to0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = 0;$$

б) Използвайте представянето $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x}\ln x)^2$; в) Използвайте представянията

$$x^\alpha \ln x = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{-\alpha\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha};$$

г) За $\alpha \le 0$ имаме, че $-\alpha \ge 0$. В сила е равенството $x^\alpha \ln x = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \ln x$. Използва се, че $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \to \infty$ при $x \to 0$, и $\ln x \to -\infty$ при $x \to 0$ $(x > 0)$; д) Имаме, че $x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$ при $x \to 0$, като сме използвали в) на предната задача; е) Имаме, че $x^{\frac{1}{x}} = e^{x \ln x}$; ж) При $0 < x < 1$ имаме, че $x^{\frac{1}{x}} \le x$. Следователно са в сила неравенствата

$$x \ln x \le x^{\frac{1}{x}} \ln x \le x^{\frac{1}{x}}.$$

Доказахме, че $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ и от е) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$. Извършваме граничен преход в горните неравенства и се получава, че $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} \ln x = 0$.

Задача 5.38: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x + (\ln x)^2}{x+1}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x + 2^x + \ln(3x^2-1)}{3^x - 2x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^x};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x - 1); \quad \text{г)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x - x^2); \quad \text{д)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln[x + (\ln x)^2]}{\ln x}; \quad \text{ж)} \quad \lim_{x\to\infty} (x^\alpha - \ln x); \quad \text{з)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + 2^x)}{\ln(x-3)};$$

$$\text{и)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^{\sqrt{3x}}}; \quad \text{й)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 + x^2 + 1)}{\ln(x^2 - 2x - 2)};$$

$$\text{к)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(x + 2^{\sqrt{3x-1}}\right).$$

Решение: а) Използваме представянето

$$\frac{x + (\ln x)^2}{x+1} = \frac{x\left(1 + \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2}{1 + \frac{1}{x}},$$

за да се получи, че границата е равна на 1;

б) Използваме представянето

$$\frac{x + 2^x + \ln(3x^2-1)}{3^x - 2x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{\frac{x}{2^x} + 1 + \frac{\ln(3x^2-1)}{2^x}}{1 - 2\cdot\frac{x^2}{3^x} - \left(\frac{5}{6}\right)^x},$$

основната граница (11), че ако $0 < q < 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} q^x = 0$, за да се получи, че границата е равна на 0;

в) В сила са следните оценки

$$\frac{1}{x}\ln(e^x-1) < \frac{1}{x}\ln e^x = \frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{1}{x}\ln(e^x-1) \geq \frac{1}{x}\ln\frac{e^x}{2} = \frac{\ln e^x - \ln 2}{x} = 1 - \frac{\ln 2}{x},$$

т. е.

$$1 - \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{1}{x}\ln(e^x-1) < 1.$$

В горните неравенства се извършва граничен преход при $x \to \infty$, за да се получи, че границата е равна на 1;

г) Докажете, че при $\lambda < 1$ неравенствата $e^{\lambda x} < e^x - x^2 < e^x$ са изпълнени за всички достатъчно големи x, след това се логаритмуват горните неравенства, за да се получи, че границата е равна на 1;

д) Използвайте оценките

$$1 = \frac{\ln x}{\ln x} \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln x} < \frac{\ln 2x}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln x},$$

извършва се граничен преход при $x \to \infty$, за да се получи, че границата е равна на 1;

е) Докажете, че за достатъчно големи x е в сила неравенството $(\ln x)^2 < x$. Получават се оценките

$$1 = \frac{\ln x}{\ln x} \leq \frac{\ln\left(x + (\ln x)^2\right)}{\ln x} < \frac{\ln 2x}{\ln x} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln x}$$

и, че границата при $x \to \infty$ е равна на 1;

ж) Ако $\alpha > 0$, то се получава, че

$$x^\alpha - \ln x = x^\alpha\left(1 - \frac{\ln x}{x^\alpha}\right) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Ако $\alpha \leq 0$, то границата ще бъде $-\infty$. Използвайте задача 5.35 а);

з) Използвайте оценките

$$\frac{\ln(x+2^x)}{\ln(x-3)} \geq \frac{\ln 2^x}{\ln(x-3)} = \frac{x\ln 2}{\ln(x-3)},$$

за да се получи, че границата е $+\infty$.

и) Положете $x = t^2$ и се получава

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^{\sqrt{3x}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^4}{\left(2^{\sqrt{3}}\right)^t} = 0;$$

й) Отг: $\frac{3}{2}$; к) Докажете, че неравенствата

$$2^{\sqrt{3x}-1} \leq 2^{\sqrt{3x-1}} \leq x + 2^{\sqrt{3x-1}} \leq 2^{\sqrt{3x}+1}$$

са в сила за достатъчно големи x. Търсената граница е $\sqrt{3}\ln 2$.

Задача 5.39: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})};\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})};$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x];$$

$$\text{д)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right);$$

$$\text{е)}\quad \lim_{x\to 0+0}\left[\ln(x\ln a).\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]\quad (a>1).$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0; д) $\frac{1}{8}$; е) $\ln a^2$.

5.2.5 *Някои приложения на равенството* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Отбелязваме факта, че са в сила следните равенствата:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Задача 5.40: Да се докаже, че:

$$\text{а)}\ \text{от}\ \lim_{x\to\infty} f(x) = a\ \text{следва}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^a;$$

$$\text{б)}\ \text{от}\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\ \text{следва}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \infty;$$

$$\text{в)}\ \text{от}\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\ \text{и}\ 1+\frac{f(x)}{x}\geq 0\ \text{следва}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = 0.$$

Решение: Ще използваме равенството

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}=\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{f(x)}. \tag{5.15}$$

а) Тъй като $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, то за всяко $\varepsilon>0$ и достатъчно големи x е изпълнено $a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$. Тогава от (5.15) се получава

$$\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{a-\epsilon}<\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}<\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{a+\epsilon}. \tag{5.16}$$

Нека сега да положим $\frac{x}{f(x)}=t$, така че условието $x\to\infty$ ни дава, че $t\to\infty$. От (5.16) се получава следното

$$\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{a-\epsilon}<\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}<\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{a+\epsilon}.$$

Извършваме граничен преход в горните неравенства при $t\to\infty$ и се получава

$$e^{a-\varepsilon}<\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}<e^{a+\varepsilon}.$$

Тъй като последното неравенство е изпълнено за всяко положително ε, то се получава, че то е възможно точно когато

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}=e^{a}.$$

б) Тъй като $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, то за всяко положително A неравенството $f(x)>A$ е изпълнено за достатъчно големи x. Тогава от (5.15) се получава

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}>\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{A}. \tag{5.17}$$

Полагаме $\frac{x}{f(x)}=t$, като $t\to\infty$ при $x\to\infty$. От равенството $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$, за всяко достатъчно малко $\varepsilon>0$ и достатъчно големи t е изпълнено неравенството $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}>e-\varepsilon>1$. От (5.17) се получава, че

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x}>(e-\varepsilon)^{A}.$$

Извършваме граничен преход при $x \to \infty$ в последното неравенство, което е вярно за всяко положително A, и се получава

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \infty.$$

в) Тъй като $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, то за всяко положително A и достатъчно големи x е изпълнено неравенството $f(x) < -A$. Условието $1 + \frac{f(x)}{x} \geq 0$ и (5.15) ни дават

$$0 \leq \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x < \left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{-A}.$$

Постъпва се както в б) и се получава

$$0 \leq \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x < (e+\varepsilon)^{-A} = \frac{1}{(e+\varepsilon)^A}.$$

От последните неравенства се получава

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = 0.$$

Задача 5.41: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^x.$$

Решение: Ще използваме представянето

$$\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^x = \frac{x^x\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}{x^x\left(1+\frac{4}{x}\right)^x} = \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{4}{x}\right)^x}. \tag{5.18}$$

Ще използваме а) на предната задача. Тук функциите $f_1(x) = -3$ и $f_2(x) = 4$, и от (5.18) се получава

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^x = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x} = \frac{e^{-3}}{e^4} = e^{-7}.$$

Задача 5.42: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x, \quad (a_1 > 0, \quad a_2 > 0).$$

Отговор: 0, ако $a_1 < a_2$; $+\infty$ ако $a_1 > a_2$; $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$, ако $a_1 = a_2$.

Задача 5.43: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x;\quad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+1}\right)^x;\quad \text{в)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-x-6}\right)^x;$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right)^x;\quad \text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2}\right)^x;$$

$$\text{е)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x+1}\right)^x;$$

$$\text{ж)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\ldots+a_k}{x^k+b_1x^{k-1}+b_2x^{k-2}+\ldots+b_k}\right)^x.$$

Отговори: а) e^4; б) e^{-2}; в) e; г) e^{-10}; д) e^{-7}; е) 1; ж) $e^{a_1-b_1}$.

Задача 5.44: Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = e^a$;

б) от $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = \infty$;

в) от $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $1+xf(x) > 0$ следва $\lim\limits_{x\to 0}(1+xf(x))^{\frac{1}{x}} = 0$;

Упътване: Положете $x = \frac{1}{t}$ и използвайте задача 5.40.

Задача 5.45: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+ax}{1+bx}\right)^{\frac{1}{(a+b)x}};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x+3x^2+x^3}{1+x+2x^2+x^3}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Отговори: а) $e^{\frac{a-b}{a+b}}$; б) 1; в) $e^{a_1-b_1}$.

5.2.6 *Някои приложения на равенството* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Отбелязваме факта, че са в сила следните равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad (a > 0)$$

и, че ако $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = a > 0$, то е изпълнено

$$\lim_{x\to 0} \frac{(g(x))^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0).$$

Задача 5.46: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0); \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to \xi} \frac{e^x - e^\xi}{x - \xi}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x\to \xi} \frac{e^{\lambda x} - e^{\lambda \xi}}{x - \xi}.$$

Решение: а) Ще използваме представянето

$$\lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x\to b} \frac{a^b\left(a^{x-b} - 1\right)}{x - b} = a^b . \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^b . \ln a;$$

Отговори: б) e^ξ; в) $\lambda e^{\lambda\xi}$.

Задача 5.47: Да се докаже, че:

а) от $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)} - 1\right) = \ln a$;

б) от $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a > 0$ следва $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[x]{f(x)} - 1\right) = \ln a$.

Задача 5.48: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to\infty} x^2 . \left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2\right) \quad (a > 0); \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) \quad (a > 0);$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x+1}} - a^{\frac{1}{x^2-x+1}}\right) \quad (a > 0).$$

Решение: а) В сила са представянията

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt[x]{a} + \frac{1}{\sqrt[x]{a}} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{\left(\sqrt[x]{a}\right)^2 - 2\sqrt[x]{a} + 1}{a^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{x}}} \left[\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right)\right]^2 = \ln^2 a.$$

б) Ще използваме представянията

$$\lim_{x\to\infty} x^2 . \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x+1}} . x^2 . \left(a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x+1}} . \lim_{x\to\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(a^{\frac{x}{x^2(x+1)}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt[x^2]{a^{\frac{x}{x+1}}} - 1 \right),$$

като за получаване на последния резултат е използвана задача 5.47 а). Отново ще използваме задача 5.47 а). Тук $f(x) = a^{\frac{x}{x+1}}$, следователно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Получава се, че търсената граница е $\ln a$; в) Работете както в б) за да се получи, че търсената граница е $\ln a$.

Задача 5.49: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\mathrm{tg} x}}{x - \mathrm{tg} x}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^{\cos x} - 2}{x^2}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(a^{\sqrt{1+x}} - a\right) \quad (a>0);$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^{\sqrt{1+x}} - a^{1+\frac{x}{2}}}{\sin^2 x} \quad (a>0); \quad \text{д)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(a^{\sqrt{1+x}} - a^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}\right) \quad (a>0);$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(a^{\sqrt[3]{1+x}} - a^{1+\frac{x}{3}}\right) \quad (a>0).$$

Отговори: а) 1; б) $-\ln 2$; в) $\frac{a}{2}\ln a$; г) $-\frac{a}{8}\ln a$; д) $\frac{a}{16}\ln a$; е) $\frac{a}{2}\ln a$.

5.2.7 *Някои приложения на равенството* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Отбелязваме факта, че е в сила равенството

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Задача 5.50: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}.$$

Решение: а) Полагаме $1 - x = t$, т. е. $x = 1 - t$. Условието $x \to 1$ е еквивалентно на условието $t \to 0$. Получаваме следните представяния

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{-t} = -1.$$

б) В сила са равенствата

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \frac{\sqrt[3]{8x^3\left(\frac{1}{8}+\frac{2x^4}{8x^3}\right)}}{\ln(1+2x)} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}+\frac{2x}{8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{\ln(1+2x)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{1+2x} \cdot \frac{2x}{\ln(1+2x)}.$$

Полагаме $2x = u$. Условието $x \to 0$ е еквивалентно на условието $u \to 0$, и се получава

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}. \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+2x}. \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{2}.$$

Задача 5.51: Да се намерят границите:

$$\text{а)} \lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}; \quad \text{б)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}; \quad \text{в)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+a)-\ln a}{\sqrt[4]{a^4+x}-a};$$

$$\text{г)} \lim_{x\to 3} \frac{e^x - e^3}{\ln x - \ln 3}; \quad \text{д)} \lim_{x\to 2} \frac{\ln x - \ln 2}{x^2-5x+6};$$

$$\text{е)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}; \quad \text{ж)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Решение: а) Използвайте представянето

$$\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \frac{\ln \frac{x}{a}}{x-a} = \frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right]}{x-a}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}},$$

за да се получи, че търсената граница е $\dfrac{1}{a}$; б) Отг: 1; в) Ще използваме представянията:

$$\frac{\ln(x+a)-\ln a}{\sqrt[4]{a^4+x}-a} = \frac{\ln\frac{x+a}{a}}{\sqrt[4]{a^4+x}-a}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt[4]{a^4+x}-a}.$$

След това ще рационализираме знаменателя като използваме равенството $u^4 - v^4 = (u-v)(u+v)(u^2+v^2)$. По този начин се получава

$$\frac{\ln(x+a)-\ln a}{\sqrt[4]{a^4+x}-a} = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{\frac{x}{a}\left(\sqrt[4]{a^4+x}+a\right)\left[\left(\sqrt[4]{a^4+x}\right)^2+a^2\right]}{x},$$

откъдето пък се получава

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+a)-\ln a}{\sqrt[4]{a^4+x}-a} = 4a^2.$$

г) Използвайте представянията

$$\frac{e^x - e^3}{\ln x - \ln 3} = \frac{e^3\left(e^{x-3} - 1\right)}{\ln \frac{x}{3}} = e^3 \cdot \frac{\frac{x-3}{3}}{\ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)} \cdot \frac{e^{x-3} - 1}{\frac{x-3}{3}},$$

за да се получи, че търсената граница е $3e^3$; д) Използвайте равенството

$$\frac{\ln x - \ln 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}} \cdot \frac{\frac{x-2}{2}}{(x-2)(x-3)},$$

за да се получи, че границата е равна на $-\dfrac{1}{2}$; е) От равенството $x = \ln e^x$ се получава

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{\ln \frac{e^x}{1+x}}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{e^x - 1 - x}{1+x}\right)$$

$$= -\frac{\ln\left(1 + \frac{e^x-1-x}{1+x}\right)}{\frac{e^x-1-x}{1+x}} \cdot \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x}. \tag{5.19}$$

В сила са следните равенства

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1+x} = 0; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{5.20}$$

За по-добро разбиране на границите (5.20) препоръчваме на читателя да се запознае подробно с Маклореновото развитие на функцията e^x (виж параграф 6.1.7), а именно

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

От (5.19) и (5.20) се получава, че търсената граница е $-\frac{1}{2}$. Разбира се, при първото разглеждане, читателят би могъл да пропусне тази задача.

ж) Работи се както в е), използвайте (5.21), за да се получи, че търсената граница е $\dfrac{1}{3}$.

5.2.8 Някои приложения на равенството $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

Задача 5.52: Да се докаже, че ако $\lim\limits_{x\to 0}[1 + xf(x)]^{\frac{1}{x}} = a$, където $a \geq 0$ и функцията f удовлетворява неравенството $1 + xf(x) > 0$, то

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \ln a, & \text{при} \quad a > 0 \\ -\infty, & \text{при} \quad a = 0. \end{cases}$$

Нека разгледаме функцията $f(x) = \dfrac{(1+x)^a - 1}{x}$. Тогава е в сила равенството

$$\lim_{x\to 0}[1 + xf(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^a = e^a.$$

Като се използва резултата на задача 5.52 се получава, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \ln e^a = a,$$

т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a. \tag{5.22}$$

Задача 5.53: Да се намери границата

$$\lim_{x\to a}\frac{x^b - a^b}{x - a}.$$

Решение: Нека да положим $x - a = t$, така че условието $x \to a$ е еквивалентно на условието $t \to 0$. Получаваме представянията

$$\frac{x^b - a^b}{x - a} = \frac{(t+a)^b - a^b}{t} = \frac{a^b\left[\left(\frac{t+a}{a}\right)^b - 1\right]}{t}$$

$$= a^b \cdot \frac{\left(1 + \frac{t}{a}\right)^b - 1}{t} = a^b \cdot \frac{\left(1 + \frac{t}{a}\right)^b - 1}{a \cdot \frac{t}{a}},$$

откъдето се получава, че

$$\lim_{x\to a}\frac{x^b - a^b}{x - a} = \lim_{x\to 0} a^b \cdot \frac{\left(1 + \frac{t}{a}\right)^b - 1}{a \cdot \frac{t}{a}} = b.a^{b-1}.$$

За получаване на последния резултат използвахме равенството (5.22).

Задача 5.54: Да се намерят границите:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^\pi - 2^\pi}{x^e - 2^e};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^a - 3^a}{x^b - 3^b};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}\quad (a > 0);$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x} - 1}{(1+x)^\alpha - 1}\quad (\alpha \neq 0);\quad \text{д)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1 + \ln(1+x)} - 1\right).$$

Решение: а) Използвайте представянето

$$\frac{x^{\pi}-2^{\pi}}{x^{e}-2^{e}}=\frac{x^{\pi}-2^{\pi}}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^{e}-2^{e}}.$$

Работи се както в задача 5.53 и се получава, че границата е равна на $\frac{\pi}{e}\cdot 2^{\pi-e}$; б) Отг: $\frac{a}{b}\cdot 3^{a-b}$; в) Отг: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot a^{\alpha-\beta}$; г) Ще използваме представянето

$$\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{(1+x)^{\alpha}-1}=\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}\cdot\frac{x}{(1+x)^{\alpha}-1}. \tag{5.23}$$

Съгласно (5.22) имаме, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^{\alpha}-1}=\frac{1}{\alpha}. \tag{5.24}$$

Ще използваме, че за всеки две числа a и b е в сила равенството

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}b^{k}.a^{n-k}.$$

Ще рационализираме израза $\sqrt[7]{1+x}-1$. Съгласно горната формула

$$\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{(\sqrt[7]{1+x})^{6}+(\sqrt[7]{1+x})^{5}+\ldots+\sqrt[7]{1+x}+1},$$

откъдето за границата се получава, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{7}. \tag{5.25}$$

От (5.23), (5.24) и (5.25) се получава, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{(1+x)^{\alpha}-1}=\frac{1}{7\alpha}\quad(\alpha\neq 0).$$

д) Ще използваме представянето

$$\frac{1}{\sin 2x}\left(\sqrt[6]{1+\ln(1+x)}-1\right)$$

$$=\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+x)}. \tag{5.26}$$

В сила са следните граници

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}. \tag{5.27}$$

За намиране на границата на функцията $\dfrac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+x)}$ при $x\to 0$ полагаме $\ln(1+x)=t$, т. е. $t\to 0$. Получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{6}}-1}{t}=\frac{1}{6}. \tag{5.28}$$

От (5.26), (5.27) и (5.28) се получава, че търсената граница е $\dfrac{1}{12}$.

5.3 O-символика

5.3.1 O-символика

Записът

$$\varphi(x)=\mathcal{O}(\psi(x)),\quad \text{при}\quad x\in X$$

означава, че съществува положителна константа A, че

$$|\varphi(x)|\le A.|\psi(x)|,\quad \text{за}\quad x\in X.$$

По аналогичен начин означаваме

$$\varphi(x)=\mathcal{O}(\psi(x))\quad \text{при}\quad x\to a,$$

ако неравенството $|\varphi(x)|\le A.|\psi(x)|$ е изпълнено в някоя околност U_a на точката a, $(x\ne a)$.

Необходимо и достатъчно условие да бъде изпълнено равенството $\varphi(x)=\mathcal{O}(\psi(x))$, е да съществува крайната граница $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k\ne 0$.

Записът

$$\varphi(x)=o(\psi(x))\quad \text{при}\quad x\to a,$$

означава, че

$$\varphi(x)=\alpha(x).\psi(x)\quad (x\in U_a,\quad x\ne a),$$

където $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Ако $\psi(x)\ne 0$ при $x\in U_a$, $x\ne a$, то равенството $\varphi(x)=o(\psi(x))$ е еквивалентно на факта, че $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$.

Функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се наричат *еквивалентни*, и означаваме $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \to a$, ако $\varphi(x) = g(x).\psi(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 1$.

Функции, които са еквивалентни при $x \to a$ се наричат също така асимптотически равни при $x \to a$.

При $x \to 0$ са в сила следните еквиваленции:

$$\sin x \sim x; \quad \mathrm{tg} x \sim x; \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 5.55: Да се докаже, че:

$$\text{а)} \;\; o(o(f(x))) = o(f(x)); \quad \text{б)} \;\; \mathcal{O}(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$\text{в)} \;\; o(\mathcal{O}(f(x))) = o(f(x)); \quad \text{г)} \;\; \mathcal{O}(\mathcal{O}(f(x))) = \mathcal{O}(f(x));$$

$$\text{д)} \;\; \mathcal{O}(f(x) + o(f(x))) = \mathcal{O}(f(x)).$$

Задача 5.56: Нека $x \to 0$ и $n, m > 0$. Да се докаже, че:

$$\text{а)} \;\; C.\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n) \;\; (C \neq 0 - \text{константа});$$

$$\text{б)} \;\; \mathcal{O}(x^n) + \mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^n) \;\; (n < m);$$

$$\text{в)} \;\; \mathcal{O}(x^n).\mathcal{O}(x^m) = \mathcal{O}(x^{n+m}).$$

Задача 5.57: Да се докаже, че символът $\sim$ има следните свойства:

1) рефлексивност: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$;
2) симетричност: ако $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$;
3) транзитивност: ако $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

Задача 5.58: Нека $x \to 0$. Да се докажат следните равенства:

$$\text{а)} \;\; 3x - x^2 = \mathcal{O}(x); \quad \text{б)} \;\; x \sin\sqrt{x} = \mathcal{O}(x^{\frac{3}{2}}); \quad \text{в)} \;\; x \sin\frac{1}{x} = \mathcal{O}(|x|);$$

$$\text{г)} \;\; \ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right) \;\; (\varepsilon > 0); \quad \text{д)} \;\; \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x};$$

$$\text{е)} \;\; \mathrm{arcth}\frac{1}{x} = \mathcal{O}(1); \quad \text{ж)} \;\; (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

Решение: а) За да се докаже, че $3x - x^2 = \mathcal{O}(x)$ $(x \to 0)$, трябва да се покаже, че съществува крайната граница

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - x^2}{x},$$

и тя трябва да е различна от нула. Действително,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(3 - x) = 3 \neq 0;$$

г) Трябва да се докаже, че

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}} = \lim_{x\to 0} x^\varepsilon \ln x = 0.$$

Задача 5.59: Нека $x \to \infty$. Да се докажат следните равенства:

а) $2x^3 - 4x^2 + 3 = \mathcal{O}(x^3)$; б) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; в) $x + x^2 \sin x = \mathcal{O}(x^2)$;

г) $\dfrac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; д) $\ln x = o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$; е) $x^p e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

ж) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$; з) $x^2 + x \ln x \sim x^2$.

Задача 5.60: Да се докаже, че:

а) $x^2 \sim \dfrac{x^2}{1+x^4}$, при $x \to \infty$; б) $x^2 \sim \dfrac{x^6}{1+x^4}$, при $x \to \infty$.

5.3.2 Метод на отделяне на главни части на функциите за намиране на граници

Теорема 5.1: *За това, че две функции $f(x)$ и $g(x)$ да бъдат еквивалентни при $x \to a$, е необходимо и достатъчно, че при $x \to a$ да е изпълнено поне едно от условията*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)),$$

или

$$g(x) = f(x) + o(f(x)).$$

Нека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са две функции, определени в околност на точката a. Ако при $x \to a$ функцията $\beta(x)$ се представя във вида

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)),$$

то функцията $\alpha(x)$ се нарича *главна част за функцията* $\beta(x)$.

Ако е зададена функцията $\beta(x)$, то само по нея, една нейна главна част не се определя еднозначно. Съгласно Теорема 5.1, всяка функция $\alpha(x)$, която е еквивалентна на $\beta(x)$, се явява главна част за функцията $\beta(x)$. Например, функцията x е главна част за функцията $\sin x$ при $x \to 0$, тъй като $\sin x = x + o(x)$.

Ако $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, то функцията $a_n x^n$ се явява главна част за полинома $P_n(x)$ при $x \to \infty$, т. е. $P_n(x) = a_n x^n + o(a_n x^n)$ при $x \to \infty$.

Задача 5.61: Нека $x \to 1$. Да се отдели главна част от вида $C(x-1)^n$ от следващите функции:

$$\text{а)}\ \ x^3 - 3x + 2; \quad \text{б)}\ \ \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}; \quad \text{в)}\ \ \ln x; \quad \text{г)}\ \ e^x - e; \quad \text{д)}\ \ x^x - 1.$$

Решение: а) В сила е представянето

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 = 3(x-1)^2 + o((x-1)^2),$$

защото $(x-1)^3 = 3(x-1)^2 \cdot \dfrac{x-1}{3}$. Ако се положи $\alpha(x) = \dfrac{x-1}{3}$, то $\lim\limits_{x\to 1} \alpha(x) = 0$, и следователно $(x-1)^3 = o((x-1)^2)$ при $x \to 1$;

б) Достатъчно е да се разгледа само функцията $1-\sqrt{x}$. Ще докажем, че

$$1 - \sqrt{x} \sim \frac{1-x}{2} \quad (x \to 1).$$

Действително, имаме че

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\frac{1-x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{2(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{1+\sqrt{x}} = 1.$$

Тогава се получава, че

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} \sim \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}};$$

в) Използвайте, че $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. Тогава

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) \sim x - 1,$$

т. е.

$$\ln x = x - 1 + o(x-1);$$

г) Използвайте, че $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$. Следователно се получава, че

$$e^x - e = e(e^{x-1} - 1) \sim e(x-1),$$

т. е.

$$e^x - e = e(x-1) + o(x-1);$$

д) Използвайте представянето

$$x^x - 1 = e^{\ln x^x} - 1 \sim \ln x^x \ln e = x\ln x = (x-1)\ln x + \ln x$$

$$= (x-1)[(x-1) + o(x-1)] + (x-1) + o(x-1)$$

$$= (x-1)^2 + o((x-1)^2) + (x-1) + o(x-1) = (x-1) + o(x-1),$$

и резултата на в).

Задача 5.62: Нека $x \to \infty$. Да се отдели главна част от вида Cx^n от следващите функции:

$$\text{а)}\quad x^2 + 10x + 2;\quad \text{б)}\quad \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$\text{в)}\quad \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x};\quad \text{г)}\qquad \text{д)}\quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

Отговори: а) x^2; б) Разделете числителя на знаменателя с частно и остатък, за да се получи, че главната част е $2x^2$; в) използвайте представянето

$$\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + x^{-\frac{1}{6}}\right),$$

за да се получи, че главната част е $x^{\frac{2}{3}}$; г) $x^{\frac{1}{8}}$.

В сила е следната теорема:

Теорема 5.2: *Нека $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогава ако съществува границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то съществува и границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, при това е изпълнено равенството*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{5.29}$$

Теорема 5.2 е много удобна за приложение в практиката. За да се намери границата в лявата страна на равенството (5.29) е достатъчно функциите $f(x)$ и $g(x)$ да се заменят с техните еквивалентни функции, т. е. на тях да се отделят главните им части и да се намери границата на дясната страна на равенството (5.29).

Задача 5.63: Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^4)+\mathrm{arcsin}3x-5x^3}{\sin 2x+\mathrm{tg}^2x+(e^x-1)^5}.$$

Решение: Ще използваме следните еквивалентности: При $u \to 0$ $\ln(1+u) \sim u$, т. е. $\ln(1+x+x^4) \sim x+x^4$ $(x \to 0)$, откъдето

$$\ln(1+x+x^4) \sim x+x^4+o(x+x^4) \sim x+o(x),$$

т. е.

$$\ln(1+x+x^4) = x+o(x);$$

При $u \to 0$ $\mathrm{arcsin}u \sim u$, затова

$$\mathrm{arcsin}3x = 3x+o(x);$$

$$5x^3 = o(x);$$

При $u \to 0$ $\sin u \sim u$, затова

$$\sin 2x = 2x+o(x);$$

$$\mathrm{tg}^2x \sim x^2, \quad \mathrm{tg}^2x = o(x);$$

От $(e^x-1)^5 \sim x^5$ получаваме

$$(e^x-1)^5 = x^5+o(x^5) = o(x).$$

По този начин за границата се получава, че

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^4)+\mathrm{arcsin}3x-5x^3}{\sin 2x+\mathrm{tg}^2x+(e^x-1)^5} = \lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)}.$$

Но $4x+o(x) \sim 4x$, а $2x+o(x) \sim 2x$ $(x \to 0)$ и съгласно Теорема 5.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+o(x)}{2x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = 2.$$

Задача 5.64: Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x.$$

Решение: Ще използваме представянето

$$\cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{\ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x}. \tag{5.30}$$

По този начин, трябва да се намери границата

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2}.$$

Тъй като $\ln(1 - \sin^2 2x) \sim -\sin^2 2x$, то съгласно Теорема 5.2 имаме, че

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 2x}{x^2}.$$

Но $\sin^2 2x \sim (2x)^2$, откъдето се получава, че

$$-\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 2x}{x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2.$$

По този начин намираме, че

$$\lim_{x\to 0} \ln \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = -2.$$

От тук и (5.30) се получава, че

$$\lim_{x\to 0} \cos^{\frac{1}{x^2}} 2x = e^{-2}.$$

Задача 5.65: Да се намерят границите:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsin} 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln(1+3x)}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + \mathrm{tg}^2 x)}$; в) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$;

г) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x^3}$; д) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha x})}{\ln(1 + e^{\beta x})}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

е) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \mathrm{tg} x}{\cos 2x}$; ж) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; з) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

и) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + 2\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{cotg}^2 x}$; й) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

5.4 Непрекъснатост на функция

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката a ако:

1) $f(x)$ е дефинирана в точката a;
2) съществува границата $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3) в сила е равенството $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Задача 5.66: Да се изследват за непрекъснатост функциите:

$$\text{а)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{при} \quad x \neq 2 \\ a & \text{при} \quad x = 2; \end{cases}$$

$$\text{б)}\quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при} \quad x < 0 \\ a + x & \text{при} \quad x \geq 0; \end{cases}$$

$$\text{в)}\quad f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} & \text{при} \quad |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{при} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

$$\text{г)}\quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{при} \quad 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{д)}\quad f(x) = \frac{5}{x^2-9}; \quad \text{е)}\quad f(x) = e^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{ж)}\quad f(x) = \begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Отговори: а) ако $a = 4-$ непрекъсната, и ако $a \neq 4-$ прекъсва при $x = 2$. б) ако $a = 1-$ непрекъсната, и ако $a \neq 1-$ прекъсва при $x = 0$; в) прекъсва при $x = -1$; г) непрекъсната; д) прекъсва при $x = -3$ и $x = 3$; е) прекъсва при $x = 0$; ж) непрекъсната.

Задача 5.67: Да се определи параметъра t, така че функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при} \quad x \leq 2 \\ x.t + 1 & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

да бъде непрекъсната в дефиниционната си област.

Задача 5.68: Да се изследва за непрекъснатост функцията

$$f(x) = x - [x].$$

Решение: Ще докажем, че когато x е цяло число функцията прекъсва, защото лявата и дясната граница са различни. Нека $x = k$ е цяло число и $\varepsilon > 0$. Тогава, тъй като $k - \varepsilon < k$ и $0 < \varepsilon < 1$, то $[k - \varepsilon] = k - 1$ и $[k + \varepsilon] = k$. Така се получава

$$\lim_{x\to k-0}(x-[x]) = \lim_{\varepsilon\to 0}(k-\varepsilon-[k-\varepsilon]) = \lim_{\varepsilon\to 0}(k-\varepsilon-(k-1)) = \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon) = 1,$$

$$\lim_{x\to k+0}(x-[x]) = \lim_{\varepsilon\to 0}(k+\varepsilon-[k+\varepsilon])) = \lim_{\varepsilon\to 0}(k+\varepsilon-k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0.$$

Или получихме, че $\lim\limits_{x\to k-0}(x-[x]) = 1 \neq \lim\limits_{x\to k+0}(x-[x]) = 0$. Следователно функцията прекъсва за $x = k$, където k е цяло число.

Задача 5.69: Да се дефинира числото $f(0)$, така че функцията $f(x)$ да бъде непрекъсната при $x = 0$, ако:

$$\text{а)}\ \ f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1};\ \ \text{б)}\ \ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}};\ \ \text{в)}\ \ f(x) = \frac{\mathrm{tg} 2x}{x};$$

$$\text{г)}\ \ f(x) = \frac{\sin x}{x};\ \ \text{д)}\ \ f(x) = \left(\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Отговори: а) $f(0) = 1,5$; б) $f(0) = 0$; в) $f(0) = 2$; г) $f(0) = 1$; д) $f(0) = 1$.

Задача 5.70: Да се докаже, че уравнението $x^5 - 3x - 1 = 0$ има поне един реален корен в сегмента $[1, 2]$.

Упътване: Ако $f(x) = x^5 - 3x - 1$, покажете, че $f(1).f(2) < 0$ и използвайте непрекъснатостта на $f(x)$.

5.5 Равномерна непрекъснатост на функция

Дефиниция 5.6: *Функцията $f(x)$ е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$, зависещо от ε, че за всеки две точки x_1 и x_2 от множеството $\{x\}$, за които е изпълнено неравенството $|x_1 - x_2| < \delta$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 5.3: (Теорема на Кантор) *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната в този сегмент.*

Задача 5.71: Да се докаже, че функцията $f(x) = 2x$ е равномерно непрекъсната върху цялата числова ос.

Решение: Нека фиксираме положителното число ε и да посочим $\delta = \dfrac{1}{2}\varepsilon$. Тогава за всеки две точки x_1 и x_2, за които е изпълнено неравенството $|x_1 - x_2| < \delta = \dfrac{1}{2}\varepsilon$, ще бъде изпълнено и неравенството

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |2x_1 - 2x_2| = 2.|x_1 - x_2| < 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Следователно функцията $f(x) = 2x$ е равномерно непрекъсната върху цялата числова ос.

Задача 5.72: Да се докаже, че функцията $f(x) = x^2$ не е равномерно непрекъсната в интервала $[1, \infty)$.

Решение: Нека $\varepsilon = 1$. Ще докажем, че за всяко положително число δ съществуват две числа x_1 и x_2 от интервала $[1, \infty)$, такива че $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon = 1$. Нека δ е някое фиксирано положително число. Нека x_1 е произволно число, по-голямо от 1 и от $\frac{2}{\delta}$, а $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. Тогава $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Въпреки това

$$|f(x_1) - f(x_2) = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2|.|x_1 + x_2| > |x_1 - x_2|.x_2 > \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} = 1 = \varepsilon.$$

Следователно функцията $f(x) = x^2$ не е равномерно непрекъсната в интервала $[1, \infty)$.

Задача 5.73: Да се докаже, че функцията $f(x) = \ln x$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$.

Задача 5.74: Да се докаже, че функцията $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$ е равномерно непрекъсната в сегмента $[-1, 1]$.

Задача 5.75: Да се докаже, че функцията $f(x) = \sqrt{x}$ е равномерно непрекъсната в интервала $[1, \infty)$.

Задача 5.76: Да се докаже, че функцията $f(x) = x^2$ е равномерно непрекъсната в сегмента $[a, b]$, където a и b са константи.

6. ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

6.1 Производна и диференциал на функция

6.1.1 Определение за производна

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в точката x_0 и в достатъчно малка околност на тази точка.

Дефиниция 6.1: *Производна $f'(x_0)$ на функцията $y = f(x)$ в точката x_0 се нарича границата на отношението на нарастването на функцията и нарастването на аргумента, ако тази граница съществува, когато нарастването на аргумента клони към нула, т. е.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операцията намиране на производна на функция се нарича *диференциране.*

Дефиниция 6.2: *Функцията f се нарича диференцируема в точката x_0, ако нарастването $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ на тази функция в точката x_0, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, може да се представи във вида*

$$\Delta f = A.\Delta x + \alpha(\Delta x).\Delta x, \tag{6.1}$$

където A е константа, независеща от Δx, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Двете понятия- производна на функция в точка и диференцируемост на функция в тази точка са свързани със следния важен резултат:

Теорема 6.1: *Една функция е диференцируема в дадена точка тогава и само тогава, когато тя има в тази точка крайна производна.*

Теорема 6.1 ни дава, че за функция на един аргумент двете понятия – производна на функция и диференцируемост на функция са еквивалентни помежду си.

Нарастването (6.1) е сума от две събираеми, първото от които $A.\Delta x$ е линейно относно Δx, а второто $\alpha(\Delta x).\Delta x$ в околност на точката $\Delta x = 0$ е безкрайно малка функция от по-висок ред, спрямо Δx. Знае се, че $A = f'(x_0)$, и ако A е различно от нула, то първото събираемо $A.\Delta x = f'(x_0)\Delta x$ представлява главната част на нарастването Δf. Тази главна част се нарича *диференциал* на функцията f и се означава със символа df, т. е.

$$df = f'(x_0).\Delta x. \tag{6.2}$$

Когато аргументът x е независима променлива, то под диференциал dx на този аргумент ще разбираме нарастването му Δx, т. е. $dx = \Delta x$. По този начин формулата (6.2) добива вида

$$df = f'(x_0).dx. \tag{6.2$'$}$$

6.1.2 Правила за диференциране

Нека $u(x), v(x)$ и $w(x)$ са функции, които са диференцируеми в един и същи интервал. В сила са следните правила за диференциране:

(I) $$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'; \quad d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw;$$

(II) $$(u.v)' = u'.v + u.v'; \quad d(u.v) = v.du + u.dv;$$

Следствия: 1) $(C.u)' = C.u'$;
2) $(C_1.u + C_2.v)' = C_1.u' + C_2.v'$;
3) $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$.

(III) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.du - u.dv}{v^2}.$$

Следствия: 1) $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$;

2) $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{1}{C}u'$.

(IV) *Диференциране на сложна функция*:

Ако $y = f(u), \quad u = u(x), \quad$ то $y'_x = y'_u.u'_x$.

Обобщение: при $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y'_x = y'_u.u'_v.v'_x.$$

(V) *Диференциране на обратна функция*: Ако функциите $f(x)$ и $\varphi(y)$ са права и обратна функция, то

$$f'_x(x).\varphi'_y(y) = 1; \quad (y'_x.x'_y = 1).$$

(VI) *Логаритмична производна*: За намиране на производната на функция от вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, където основата $f(x) > 0$ и функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми, предварително се логаритмува и се получава

$$\ln y = g(x). \ln f(x).$$

Диференцира се лявата и дясната страна на горното равенство по x, и се получава

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x). \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)},$$

откъдето намираме, че

$$y'(x) = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x). \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]. \tag{6.3}$$

Като следствие от формулата (6.3) се получава, че ако $u(x)$ е диференцируема функция, то

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}.u'(x), \quad \left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}.u'(x). \ln a. \tag{6.4}$$

(VII) *Производна на функция, зададена параметрично*: Ако функция е зададена параметрично във вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

където функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцируеми функции, то производната на y спрямо x е

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \left(y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right), \tag{6.5}$$

където y'_x е производната на y спрямо x, $\varphi'(t) = x'_t = \dot{x}$ и $\psi'(t) = y'_t = \dot{y}$ са производните на x и y спрямо параметъра t. Производната (6.5) съществува само в случаите когато $x^2 + y^2 \neq 0$.

Таблица на производните на основните елементарни функции

Функция $f(x)$	Производна $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производна $f'(x)$
$C = const$	0	$\arcsin x,\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x,\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$a^x, 1 \neq a > 0$	$a^x \ln a$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
e^x	e^x	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\log_a x, 1 \neq a > 0$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\ln x,$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{arcsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arcch} x,\ \lvert x\rvert > 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arcth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arccth} x$	$\dfrac{-1}{x^2-1}$
$\operatorname{cotg} x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$		

Задача 6.1: Да се намери производната на функцията

$$y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2.$$

Решение: Като се използва правилото (I), за намиране на производна на алгебрична сума, производната е равна на

$$y' = (x^4)' - (4x^3)' + (2x^2)' + (4x)' + 2'. \tag{6.6}$$

Производната на x^4, като производна на степенната функция $(x^n)' = x^{n-1}$, е $4x^3$. Като се използва, че $(C.u)' = C.u'$, се намира, че $(4x^3)' = 4.3x^2 = 12x^2$, $(2x^2)' = 2(x^2)' = 2.2x = 4x$, $(4x)' = 4.x' = 4.1 = 4$, $2' = 0$. Окончателно за (6.6) се получава

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 4.$$

Задача 6.2: Да се намери производната на функцията

$$y = \frac{1}{3x^2} + \frac{x^2}{2}.$$

Решение: Записваме функцията във вида $y = \frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2$. След прилагане на правилата за диференциране, се получава $y' = \frac{-2}{3x^3} + x$.

Задача 6.3: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\quad y = \frac{1}{6}x^6 + 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2; \quad \text{б)}\quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}.$$

Отговори: а) $y' = x^5 + 12x^3 + x + 1$; б) $y' = \frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$.

Задача 6.4: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\quad y = e^x.\sin x; \quad \text{б)}\quad y = 2^x.\ln x; \quad \text{в)}\quad y = \frac{x^4}{x+1};$$

$$\text{г)}\quad y = (1+x^2).\mathrm{arctg}x; \quad \text{д)}\quad y = \frac{\ln x}{x}.$$

Решение: а) Прилагаме правилото за диференциране на произведение и формулите от таблицата на производните на основните елементарни функции, и получаваме

$$y' = (e^x)'.\sin x + e^x.(\sin x)' = e^x.\sin x + e^x.\cos x;$$

б) $y' = 2^x.\ln 2.\ln x + \frac{2^x}{x}$; в) Прилагаме правилото за диференциране на частно и получаваме

$$y' = \frac{\left(x^4\right)'.(x+1) - x^4.(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{4x^3.(x+1) - x^4.1}{(x+1)^2} = \frac{x^3.(3x+4)}{(x+1)^2}.$$

г) $y' = 2x.\mathrm{arctg}x + 1$; д) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Задача 6.5: Да се намери производната на функцията $y = \sqrt{\sin x}$.

Решение: Ако положим $u = \sin x$, то функцията може да се запише във вида

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \sin x. \tag{6.7}$$

Съгласно правилото (IV) производната на съставната функция (6.7) е $y'_x = y'_u.u'_x$. За разглеждания пример $y'_u = (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, а $u'_x = (\sin x)' = \cos x$. Следователно се получава

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

За намиране на производни на съставни функции е за предпочитане да не се въвежда междинната променлива u, както това вече направихме, а да се намира производната на външната функция спрямо вътрешната функция (в случая u), и получената производна да се умножи с производната u' на вътрешната функция.

В случай, че вътрешната функция е също съставна функция, отново умножаваме с производната на вътрешната ѝ функция, и това продължава докато достигнем до производната на аргумента x, която е 1, или все едно, докато последното диференциране е диференциране на основна елементарна функция.

В нашия пример, производната на функцията $y = \sqrt{\sin x}$ ще намерим, като намерим производната на $\sqrt{\sin x}$ (това е външната функция) спрямо $\sin x$, която е $\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}$, и я умножим с производната на $\sin x$ (това е вътрешната функция) спрямо x, която е $\cos x$. Функцията $\sin x$ е основна елементарна функция и нейната вътрешна функция е само x, чиято производна е 1. По този начин се спира процесът на последователното диференциране, за да се получи окончателно, че производната е

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

За намиране на производната на съставна функция е от съществено значение определянето точно реда на функциите т. е. коя от основните елементарни функции е външна, коя е вътрешна и т. н. коя е най-вътрешната. При дадена съставна функция първото действие, което трябва да се извърши върху аргумента, ни определя най-вътрешната функция. Действието, което трябва да се извърши върху най-вътрешната функция, ни дефинира нейната външна функция и т. н. Действието, което трябва да се извърши последно в една функция, за да се пресметне нейната стойност, ни дефинира външната функция, от която се започва диференцирането.

Например във функцията $y = \cos(\sin\sqrt{\ln x})$ най-вътрешната функция е $\ln x$, нейната външна е корен квадратен, нейната външна е синус, нейната външна е косинус. При диференцирането най-напред се намира производната на косинуса спрямо $\sin\sqrt{\ln x}$, която е $-\sin(\sin\sqrt{\ln x})$, след това ще умножим с производната на синус спрямо $\sqrt{\ln x}$, която е $\cos\sqrt{\ln x}$, след това ще умножим с производната на $\sqrt{\ln x}$ спрямо $\ln x$, която е $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}$, след това ще умножим с производната на $\ln x$ спрямо x, която е $\dfrac{1}{x}$, т. е.

$$y' = -\sin(\sin\sqrt{\ln x}).\cos\sqrt{\ln x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}.$$

Задача 6.6: Да се намери производната на функцията

$$y = \sin^2 x.$$

Решение: Функцията $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ е съставна функция, като последното действие, което трябва да се извърши е повдигане във втора степен. Сега обратно, първо трябва да се намери производната на степенната функция спрямо $\sin x$, която е $2\sin x$, и след това да се умножи с производната на вътрешната функция $\sin x$ спрямо x, която е $\cos x$, т. е.

$$y' = 2\sin x\cos x.$$

Задача 6.7: Да се намери производната на функцията

$$y = \arcsin\sqrt{\mathrm{tg}\, x}.$$

Решение: В случая външната функция е arcsin, вътрешната е $\sqrt{\mathrm{tg}x}$, а най-вътрешната е $\mathrm{tg}x$. Първо ще намерим производната на $\arcsin\sqrt{\mathrm{tg}x}$ спрямо $\sqrt{\mathrm{tg}x}$, която е $\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\mathrm{tg}x})^2}}$, ще умножим с производната на $\sqrt{\mathrm{tg}x}$ спрямо $\mathrm{tg}x$, която е $\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}x}}$, и накрая ще умножим с производната на $\mathrm{tg}x$ спрямо x, която е $\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Следователно се получава

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\mathrm{tg}x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Задача 6.8: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\ \ y = \ln(x^2 + 2\sqrt{x});\ \ \text{б)}\ \ y = \sqrt{1 + \ln^2}.$$

Решение: а) Прилагаме правилото за диференциране на сложна функция и получаваме $y' = \dfrac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}} \cdot \left(2x + 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2x\sqrt{x} + 1}{(x^2 + 2\sqrt{x})\sqrt{x}}$; б) $y' = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}$.

Задача 6.9: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\ \ y = x^4 a^x;\ \ \text{б)}\ \ y = e^x(x^2 + 3x + 4);\ \ \text{в)}\ \ y = x^3.\mathrm{arctg}x;$$

$$\text{г)}\ \ y = x^5 \log_4 x;\quad \text{д)}\ \ y = x^2 e^x \cos x;\ \ \text{е)}\ \ y = (1 + x^2)\mathrm{arcotg}x.$$

Отговори: а) $y' = 4x^3 a^x + x^4 a^x \ln a$; б) $y' = e^x(x^2 + 5x + 7)$; в) $y' = 3x^2 \mathrm{arctg}x + \frac{x^3}{1+x^2}$; г) $y' = 5x^4 \log_4 x + \frac{x^4}{\ln 4}$; д) $y' = xe^x(2\cos x + x\cos x - x\sin x)$; е) $y' = 2x\mathrm{arctg}x - 1$.

Задача 6.10: Ако $f(x) = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$, да се намери $f'(5)$.

Отговор: $f'(5) = \frac{1}{15}$.

Задача 6.11: Ако $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} - \ln\sqrt[4]{x^4 - a^4}$, да се намери $f'(2a)$.

Отговор: $f'(2a) = -\frac{1}{3a}$.

Задача 6.12: Да се намери производната на функцията $y = x^x$.

Решение: Ще приложим правилото (6.3) за логаритмичната производна. Логаритмуваме двете страни на равенството $y = x^x$ и се получава $\ln y = x \ln x$. Намираме производните по x на двете страни на последното равенство

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Умножаваме двете страни по y и получаваме $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Задача 6.13: Да се намери производната на функцията $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Решение: Логаритмуваме двете страни на равенството $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$ и се получава

$$\ln y = \mathrm{tg}x. \ln \sin x.$$

Намираме производните по x на двете страни на последното равенство

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + \mathrm{tg}x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

или

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + 1.$$

От тук се получава, че

$$y' = (\sin x)^{\mathrm{tg}x} \left[\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \right].$$

Задача 6.14: Да се намери производната на функцията $y = e^{x^2+1}$.

Решение: Като се използва първата от формулите (6.4) се получава

$$y' = e^{x^2+1}.(x^2+1)' = e^{x^2+1}.2x = 2xe^{x^2+1}.$$

Задача 6.15: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\quad y = x^{\sin x};\quad \text{б)}\quad y = x^{\mathrm{tg}x};\quad \text{в)}\quad y = x^{a^x};$$

$$\text{г)}\quad y = x^{x^x};\quad \text{д)}\quad y = (\sin x)^{\mathrm{tg}2x};\quad \text{е)}\quad y = 6^{\sqrt{x}};$$

$$\text{ж)}\quad y = 3^{x-\sqrt{x}};\quad \text{з)}\quad y = e^{\mathrm{tg}^2 \frac{1}{x}};\quad \text{и)}\quad y = e^{\arcsin \frac{1}{x}};\quad \text{й)}\quad y = 2^{\mathrm{arctg} \frac{1}{3x}}.$$

Отговори: а) $y' = x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$; б) $y' = \frac{x^{\mathrm{tg}x}}{\cos x} \left[\frac{\ln x}{\cos x} + \frac{\sin x}{x} \right]$; в) $y' = x^{a^x} a^x \cdot \frac{x^2 \ln a + 1}{x}$; г) $y' = x^{x^x}.x^x. \left[\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right]$; д) $y' = (\sin x)^{\mathrm{tg}2x} \left[\frac{2}{\cos^2 2x} \ln \sin x + \mathrm{tg}2x \mathrm{cotg}x \right]$; е) $y' = \frac{6^{\sqrt{x}} \cdot \ln 6}{2\sqrt{x}}$; ж) $y' = \frac{3^{x-\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot (2\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$; з) $y' = -e^{\mathrm{tg}^2 \frac{1}{x}}.2\mathrm{tg}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$; и) $y' = -e^{\arcsin \frac{1}{x}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; й) $y' = 2^{\mathrm{arctg} \frac{1}{3x}} \cdot \frac{-3 \ln 2}{9x^2+1}$.

Задача 6.16: Да се намерят производните на функциите:

$$\text{а)}\quad y = \sin^3(2x + \ln x);\quad \text{б)}\quad y = \sqrt[3]{\cos x};\quad \text{в)}\quad y = \mathrm{tg}^4(\sin^3 4x);$$

$$\text{г)}\quad y = \arcsin \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2};\quad \text{д)}\quad y = \mathrm{arctg} \frac{6x}{1 - x^2};\quad \text{е)}\quad y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}};$$

$$\text{ж)}\quad y = \ln \ln x;\quad \text{з)}\quad y = \ln \sqrt{(3x^2-4)^3};\quad \text{и)}\quad y = \log_3 \left(\cos^2 x + 4^{\sin 3x} \right).$$

Отговори: а) $y' = 3\sin^2(2x+\ln x)\cos(2x+\ln x)\cdot\frac{2x+1}{x}$; б) $y' = -\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; в) $y' = \frac{48\text{tg}^3(\sin^3 4x)\sin^2 4x\cos 4x}{\cos^2(\sin^3 4x)}$; г) $y' = \frac{2a}{x^2+a^2}$; д) $y' = \frac{6(1+x^2)}{x^4+34x^2+1}$; е) $y' = \frac{7}{8.\sqrt[8]{x}}$; ж) $y' = \frac{1}{x\ln x}$; з) $y' = \frac{9x}{3x^2-4}$; и) $y' = \frac{3.4^{\sin 3x}.\cos 3x.\ln 4-\sin 2x}{(\cos^2 x+4^{\sin 3x})\ln 3}$.

Задача 6.17: Да се докаже, че функцията $f(x) = e^{-\frac{x}{a}}.\cos\frac{x}{a}$ удовлетворява равенството $f(0) + a.f'(0) = 0$.

Задача 6.18: Да се докаже, че функцията $y = \dfrac{1}{x\ln Cx}$ удовлетворява диференциалното уравнение $x.y' + x = -x.y^2$, където $C = const$.

Задача 6.19: Да се докаже, че функцията $y = x.e^{-\sin x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $y' + y\cos x - e^{-\sin x} = 0$.

Задача 6.20: Да се докаже, че функцията $y = -\sin x + 2\text{tg}x$ удовлетворява диференциалното уравнение $y'.\sin x\cos x - y - \sin^3 x = 0$.

Задача 6.21: Да се докаже, че функцията $y = \dfrac{1+\ln x}{x - x.\ln x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $2x^2.y' - x^2.y^2 - 1 = 0$.

Задача 6.22: Да се намери производната на y спрямо x на функцията, зададена параметрично $x = 1 - t^2, \quad y = t^3$.

Решение: За намиране на производната ще използваме формулата $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. В случая $x'(t) = -2t$, $y'(t) = 3t^2$, откъдето пък се намира, че

$$y'_x = \frac{3t^2}{-2t} = -\frac{3}{2}t.$$

Задача 6.23: Да се намерят производните на y спрямо x на следните параметрично зададени функции:

$$\text{а)} \;\; x = 1 - t^2, \;\; y = t^2; \;\; \text{б)} \;\; x = a\cos t, \;\; y = b\sin t, \;\; (a, b \neq 0);$$

$$\text{в)} \;\; x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; (a \neq 0); \;\; \text{г)} \;\; x = \frac{3at^2}{1+t^3}, \;\; y = \frac{3at^3}{1+t^3}, \;\; (a \neq 0);$$

$$\text{д)} \;\; x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; (a \neq 0).$$

Отговори: а) $y'_x = -1$; б) $y'_x = -\frac{b}{a}\text{cotg}t$; в) $y'_x = -\text{tg}t$; г) $y'_x = \frac{3t}{2-t^3}$; д) $y'_x = \frac{\sin t}{1-\cos t}$.

Задача 6.24: Да се намерят производните на y спрямо x на следните параметрично зададени функции:

а) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, \quad y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}};$

б) $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t;$

в) $x = e^{2t}.\cos^2 t, \quad y = e^{2t}.\sin^2 t;$

г) $x = a.\cos^5 t, \quad y = b.\sin^5 t \quad (a, b \neq 0);$

д) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2};$

е) $x = a(\sin t - t.\cos t), \quad y = a(\cos t + t.\sin t), \quad (a \neq 0);$

ж) $x = e^t.\cos t, \quad y = e^t.\sin t;$

з) $x = \mathrm{arctg} t, \quad y = \ln(1+t^2);$

и) $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

Отговори: а) $y'_x = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt{t})^3}}$; б) $y'_x = -1$; в) $y'_x = \mathrm{tg}\, t \cdot \mathrm{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y'_x = -\frac{b}{a} \cdot \mathrm{tg}^3 t$; д) $y'_x = -1$; е) $y'_x = \mathrm{cotg}\, t$; ж) $y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$; з) $y'_x = 2t$; и) $y'_x = \frac{t}{|t|} = \mathrm{sgn}\ t$.

6.1.3 Геометричен смисъл на производната на функция

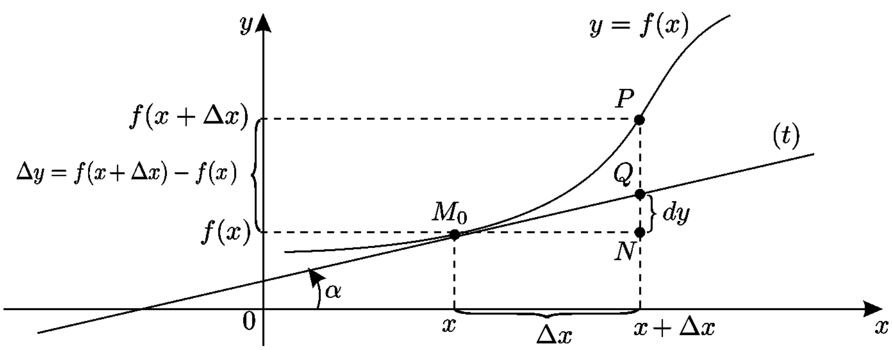
Ако функцията $y = f(x)$ е диференцируема в точката x, то производната $f'(x)$ е равна на ъгловия коефициент на допирателната, прекарана към графиката на функцията в точката $M_0(x, f(x))$, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x)$ (виж фиг. 6.1).

Съгласно формула (6.2) диференциалът на функцията f в точката x е равен на $dy = f'(x)\Delta x$. На фиг. 6.1 дължината на отсечката QN е равна на диференциалът dy на функцията f в точката x.

Производните имат различни физически тълкования. Ако $s = f(t)$ е законът на движение на една материална точка, където t е времето, а s е изминатия път, то скоростта v на движението в даден момент t е равна на $v(t) = s'(t) = f'(t)$.

Задача 6.25: Да се напише уравнението на допирателна към кривата с уравнение $y = \frac{1}{4}x^4$ в точката с абсциса $x = -1$.

Решение: Ординатата на точката от кривата с абсциса $x = -1$ е $y = \frac{1}{4}$. Уравнението на търсената допирателна е $y - \frac{1}{4} = k(x+1)$, където $k = f'(-1) = -1$. Тогава уравнението на допирателната е $4x+4y+3 = 0$.



Фиг. 6.1:

Задача 6.26: Да се намери уравнението на онази допирателна към кривата $y = x^3$, която е успоредна на хордата AB, където $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.

Отговор: $t_1 : 3x - y + 2 = 0$ и $t_2 : 3x - y - 2 = 0$.

Задача 6.27: Да се намери уравнението на допирателната към кривата $x = 2t - t^2, \;\; y = 3t - t^3$, в точките за които: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

Решение: а) Имаме, че $y'_t = 3-3t^2, \;\; x'_t = 2-2t$, тогава $y'_x = \frac{3}{2}(1+t)$. При $t = 0$ имаме, че $y'_x = \frac{3}{2}$. Точката от кривата, която се получава при $t = 0$ е $M(0,0)$. Уравнението на допирателната към кривата в точката $M(0,0)$ е $3x - 2y = 0$; б) $3x - y - 1 = 0$.

Задача 6.28: Да се намери уравнението на допирателната, прекарана към астроидата с уравнения $x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; a \neq 0$, в точката, която съответства на $t = \dfrac{3}{4}\pi$, и да се определи ъгълът, който сключва тази допирателна с оста Ox.

Решение: Тъй като $\cos\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то допирната точка е $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}a}{4}, \frac{\sqrt{2}a}{4}\right)$ и уравнението на допирателната е

$$t : y - \frac{\sqrt{2}a}{4} = k\left(x + \frac{\sqrt{2}a}{4}\right),$$

където ъгловият коефициент е $k = y'_x\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$. Имаме, че

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\mathrm{tg}t,$$

откъдето се получава, че за $t = \dfrac{3}{4}\pi$ имаме $k = y'_x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1$. За уравнението на допирателната се получава, че

$$t : y - \frac{\sqrt{2}a}{4} = x + \frac{\sqrt{2}a}{4}, \quad t : y = x + \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Ъгълът, който допирателната сключва с остта Ox е $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 6.29: Да се намери уравнението на допирателната към кривата $x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$, в точките за които: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

Отговори: а) $y = x$; б) $3x - y - 4 = 0$.

6.1.4 Диференциал на функция

Нека $y = f(x)$ е дадена функция. Съгласно формулата (6.2′), диференциалът на функцията f в точката x_0 се дава чрез формулата

$$df = f'(x_0)dx.$$

Изобщо, за произволна точка x от общата дефиниционна област на функцията и нейната производна

$$df = f'(x)dx,$$

т. е. произведението от производната на функцията $f(x)$ и диференциалът на аргумента dx ни дава диференциалът на тази функция.

Геометрично, диференциалът на функцията $y = f(x)$ се изразява чрез дължината на отсечката NQ (виж фиг. 6.1).

Задача 6.30: Да се намерят диференциалите на следните функции:

$$\text{а)}\;\; y = \frac{1}{x}; \quad \text{б)}\;\; y = \ln x^2; \quad \text{в)}\;\; y = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a};$$

$$\text{г)}\;\; y = \arcsin\frac{x}{a}; \quad \text{д)}\;\; y = x\cdot e^x; \quad \text{е)}\;\; y = \frac{1}{x^3};$$

$$\text{ж)}\;\; y = \sqrt{a^2+x^2}; \quad \text{з)}\;\; y = \sin x - x.\cos x; \quad \text{и)}\;\; y = \ln(1-x^2).$$

Отговори: а) $dy = -\frac{1}{x^2} \cdot dx$; б) $dy = \frac{2}{x} \cdot dx$; в) $dy = \frac{dx}{a^2+x^2}$; г) $dy = \frac{\mathrm{sgn} a . dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; д) $dy = (1+x)e^x . dx$; е) $dy = -\frac{3}{x^4} \cdot dx$; ж) $dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; з) $dy = x . \sin x . dx$; и) $y' = \frac{2xdx}{x^2-1}$.

6.1.5 Производни и диференциали от по-висок ред

Производната на всяка функция $y = f(x)$, в общия случай също е функция на x. Ако производната $f'(x)$ е диференцируема функция, то нейната производна $(f'(x))'$ се нарича втора производна на функцията $y = f(x)$ и се означава с $y'' = f''(x)$, т. е. по определение

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

След като е въведено понятието втора производна, последователно могат да се въведат понятията трета производна, четвърта производна и т. н. Нека вече сме въвели понятието $(n-1)-$ва производна $f^{(n-1)}(x)$ на функцията $f(x)$. Да смятаме, че $(n-1)-$та производна е диференцируема функция в някоя точка x, т. е. има в тази точка производна. Тази производна се нарича $n-$та производна на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(n)}(x)$. По определение

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Функция, която има в дадено множество производна от $n-$ти ред и няма производни от по-висок ред, се нарича n пъти диференцируема в това множество.

Стойността $\delta(df)$ на диференциала на първия диференциал df, взета при условие, че $\delta x = dx$, се нарича *втори диференциал* на функцията f в дадена точка x, и се означава със символа $d^2 f$, т. е. по определение

$$d^2 f = \delta(df)|_{\delta x = dx}.$$

Диференциалът $d^n f$ от произволен ред n се определя по индукция. Нека вече е определен диференциалът $d^{(n-1)} f$ от ред $n-1$ и нека функцията f е n пъти диференцируема в дадена точка x, а аргументът ѝ x е или независима променлива, или n пъти диференцируема функция на някоя друга независима променлива.

Стойността $\delta(d^{(n-1)} f)$ на диференциала на $(n-1)-$вия диференциал $d^{(n-1)} f$, взета при условие, че $\delta x = dx$, се нарича *$n-$ти диференциал* на функцията f в дадена точка x, и се означава със символа $d^n f$, т. е. по определение

$$d^n f = \delta(d^{(n-1)} f)\Big|_{\delta x = dx}.$$

Когато аргументът x е независима променлива, за втория диференциал на функцията в точката x имаме

$$d^2 f = f''(x)(dx)^2,$$

изобщо за $n-$тия диференциал на $n-$пъти диференцируема функция f имаме

$$d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Когато аргументът x е $n-$пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t, то вторият и следващите диференциали имат съвсем друга форма. Специално, вторият диференциал в този случай има вида

$$d^2 f = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x.$$

Задача 6.31: Да се намерят втората производна и вторият диференциал на функцията $y = x^3 + \cos x$.

Решение: Последователно намираме първата и втората производна на функцията $y' = 3x^2 - \sin x$, $y'' = (3x^2 - \sin x)' = 6x - \cos x$. Тогава за втория диференциал се получава $d^2 y = (6x - \cos x)(dx)^2$.

Задача 6.32: Да се намерят вторите производни и вторите диференциали на следните функции:

$$\text{а)}\quad y = x\sqrt{1+x^2};\quad \text{б)}\quad y = \ln(x+1);\quad \text{в)}\quad y = \sqrt{1+2x^2};$$

$$\text{г)}\quad y = e^{2\arcsin x};\quad \text{д)}\quad y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Отговори: а) $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $d^2 y = \frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}(dx)^2$; б) $y'' = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $d^2 y = \frac{-1}{(x+1)^2}(dx)^2$; в) $y'' = \frac{2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $d^2 y = \frac{2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}(dx)^2$; г) $y'' = \frac{4\sqrt{1-x^2}+2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot e^{2\arcsin x}$, $d^2 y = \frac{4\sqrt{1-x^2}+2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot e^{2\arcsin x}(dx)^2$; д) $y'' = -4 \cdot \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2}$, $d^2 y = -4 \cdot \frac{1+3x^4}{(1-x^4)^2}(dx)^2$;

Задача 6.33: а) За функцията $y = x(2x-1)^2(x+4)^3$ намерете $y^{(6)}$;

б) За функцията $y = \sqrt{x}$ намерете $y^{(10)}$;

в) За функцията $y = x\ln x$ намерете $y^{(5)}$;

г) За функцията $y = e^x \cos x$ намерете $y^{(4)}$;

д) За функцията $y = \frac{n}{x^m}$ намерете y''';

Отговори: а) $y^{(6)} = 4.6!$; б) $y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10}.x^9\sqrt{x}}$; в) $y^{(5)} = -\frac{6}{x^4}$; г) $y^{(4)} = -4e^x \cos x$; д) $y''' = \frac{-n.m.(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$.

Задача 6.34: Нека $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ са два пъти диференцируеми функции. Да се намери y'' ако:

$$\text{а)}\ \ y = u^2;\ \ \text{б)}\ \ y = \sqrt{u^2+v^2};\quad \text{в)}\ \ y = \ln\frac{u}{v};\ \ \text{г)}\ \ y = u^v, (u > 0).$$

Отговори: а) $y'' = 2(u')^2 + 2.u.u''$; б) $y'' = \frac{u'^2+u.u''+v'^2+v.v''}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{(u.u'+v.v')^2}{\sqrt{u^2+v^2}(u^2+v^2)}$; в) $y'' = \frac{uv(u''.v-v''.u)-(u'^2v^2-v'^2u^2)}{(uv)^2}$; г) За намиране на първата производна ще използваме формулата (6.3) за логоритмичната производна. В сила е, че

$$y' = (u^v)' = u^v\left[v'.\ln u + \frac{v.u'}{u}\right].$$

Диференцираме горното равенство и намираме, че

$$y'' = (u^v)'\left[v'.\ln u + \frac{v.u'}{u}\right] + u^v.\left[v'.\ln u + \frac{v.u'}{u}\right]'.$$

Заместваме вече намереният резултат за $(u^v)'$ в горното равенство и се получава

$$y'' = u^v\left[v'\ln u + \frac{v.u'}{u}\right]^2 + u^v\left[v''\ln u + \frac{2u'.v' + v.u'}{u} - \frac{v.u'^2}{u^2}\right].$$

Нека отново да разгледаме въпроса за производната на параметрично зададена функция $x = x(t)$, $y = y(t)$. Съгласно формулата (6.5) имаме, че $y'_x = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Сега ще намерим y''_{xx}. В сила са представянията

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3},$$

т. е. получихме следната формула

$$y''_{xx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}. \tag{6.8}$$

Задача 6.35: Намерете производните y'_x и y''_{xx} на функцията, зададена параметрически $x = 2t - t^2$ и $y = 3t - t^3$.

Решение: В сила са следните равенства: $\dot{x} = 2(1-t)$, $\ddot{x} = -2$, $\dot{y} = 3(1-t^2)$ и $\ddot{y} = -6t$. От (6.5) и (6.8) се намира, че

$$y'_x = \frac{3(1+t)}{2} \quad \text{и} \quad y''_{xx} = \frac{-6t.2(1-t) - 3(1-t^2)(-2)}{8(1-t)^3} = \frac{3}{4(1-t)}, \quad (t \neq 1).$$

Задача 6.36: Намерете производните y'_x, y''_{xx} и y'''_{xxx} на функцията $y = y(x)$, зададени параметрически, ако:

$$\text{а)} \;\; x = a\cos t, \;\; y = a\sin t; \;\; \text{б)} \;\; x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1-\cos t);$$

$$\text{в)} \;\; x = e^t \cos t, \;\; y = e^t \sin t; \;\; \text{г)} \;\; x = f'(t), \;\; y = t.f'(t) - f(t),$$

където функцията $f(t)$ е произволна, три пъти диференцируема функция.

Отговори: а) $y'_x = -\text{cotg}t$, $y''_{xx} = \frac{-1}{a\sin^3 t}$, $y'''_{xxx} = \frac{-3\cos t}{a^2\sin^5 t}$, $(t \neq k\pi, \;\; k-\text{цяло})$;

б) $y'_x = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \text{tg}\frac{t}{2}$, $y''_{xx} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$, $y'''_{xxx} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$, $(t \neq 2k\pi, \;\; k-\text{цяло})$;

в) $y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$, $y''_{xx} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$, $y'''_{xxx} = \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$, $(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \;\; k-\text{цяло})$;

г) $y'_x = t$, $y''_{xx} = \frac{1}{f''(t)}$, $y'''_{xxx} = -\frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ $\;(f''(t) \neq 0)$.

Задача 6.37: Нека е дадена функцията $y = f(x)$, която е диференцируема достатъчно брой пъти. Да се намерят производните x', x'', x''' и x^{IV} на обратната функция $x = f^{-1}(y)$, предполагайки, че тези производни съществуват.

Решение: Съгласно правилото за диференциране на обратна функция имаме, че $x' = x'_y = \frac{1}{f'(x)}$. Последната формула може да се получи и по следния начин: Диференцираме равенството $y = f(x)$ и се получава $dy = f'(x)dx$, откъдето $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$, т. е. $x'_y = \dfrac{1}{f'(x)}$.

За намиране на производната $x'' = x''_{yy}$ постъпваме така:

$$x'' = \frac{dx'}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)},$$

т. е.

$$x'' = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}.$$

Чрез аналогична техника на работа се получава, че

$$x''' = \frac{dx''}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{f''}{f'^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{f''}{f'^3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$= -\frac{f'''f'^3 - 3f''f'^2f''}{f'^6}\cdot\frac{1}{f'} = -\frac{f'''f' - 3f''^2}{f'^5}.$$

В сила е следната формула:

$$x^{IV} = -\frac{f'^2 f^{IV} - 10f'f''f''' + 15f''^3}{f'^7}.$$

Навсякъде в тази задача смятаме $f' \neq 0$.

За намиране на производната на неявно зададена функция ще използваме теоремата за неявната функция. Нека функцията $y = y(x)$ се определя чрез равенството $F(x,y) = 0$, $(x,y) \in M \subseteq \mathbf{R}^2$. В сила е следната теорема:

Теорема 6.2: *Нека функцията F е диференцируема в някоя околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ и частната ѝ производна $\frac{\partial F}{\partial y}$ е непрекъсната в точката M_0. Тогава, ако в точката M_0 функцията F се анулира, а частната производна $\frac{\partial F}{\partial y}$ не се анулира, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува околност на точката x_0, в която има единствена функция $y = y(x)$, удовлетворяваща условието $|y - y_0| < \varepsilon$, и която е решение на уравнението $F(x,y) = 0$, при това тази функция $y = y(x)$ е непрекъсната и диференцируема в посочената околност на точката x_0, и производната y'_x се пресмята по формулата*

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{6.9}$$

Задача 6.38: Намерете производните y'_x, y''_{x^2} и y'''_{x^3} на функцията $y = y(x)$, зададена неявно чрез равенството $x^2 + y^2 = 25$ в точката $M(3,4)$.

Решение: Ще намерим най-напред y'_x. В нашия случай $F(x,y) = x^2+y^2-25$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$. По формулата (6.9) се намира, че $'_x = -\dfrac{x}{y}$.

Последната производна може да се намери и по следния начин: Диференцираме равенството $x^2+y^2 = 25$ по променливата x, като смятаме, че $y = y(x)$, и се получава $2x+2y.y' = 0$. От последното равенство се намира $y'_x = -\dfrac{x}{y}$. За препоръчване е читателят да използва втория начин на работа.

Намираме втората и третата производни:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}.$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{25}{y^3}\right)' = -25\cdot\frac{-3y^2y'}{y^6} = \frac{75y'}{y^4} = \frac{75}{y^4}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{75x}{y^5}.$$

След това се получава съответно, че $y'(3) = -\dfrac{3}{4}$, $y''(3) = -\dfrac{25}{64}$, $y'''(3) = -\dfrac{225}{1024}$.

Задача 6.39: Намерете производните y'_x и y''_{x^2} на функцията $y = y(x)$, зададена неявно чрез равенството:

$$\text{а) } y^2 = 2px \quad (p = const); \quad \text{б) } x^2 - xy + y^2 = 1;$$

$$\text{в) } y^2 + 2\ln y = x^4 \quad \text{г) } \sqrt{x^2+y^2} = a.e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad a > 0.$$

Отговори: а) $y' = \frac{p}{y}$, $y''_{x^2} = -\frac{p^2}{y^3}$; б) $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$, $y''_{x^2} = \frac{6}{(x-2y)^3}$; в) $y' = \frac{2x^3y}{1+y^2}$, $y''_{x^2} = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$; г) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y''_{x^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

Задача 6.40: Точка се движи праволинейно по закона $s(t) = 10 + 20t - 5t^2$. Намерете скоростта и ускорението на движението. Намерете скоростта и ускорението в момента $t = 2$.

Отговор: $v(t) = 20 - 10t$, $a(t) = -10$, $v(2) = 0$, $a(2) = -10$.

Задача 6.41: Да се намери $n-$тата производна на функцията $y = \cos x$.

Решение: Ще използваме метода на пълната математическа индукция.

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Допускаме, че $k-$тата производна се получава по правилото $y^{(k)} = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Намираме $(k+1)-$вата производна

$$y^{(k+1)} = -\sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. $(k+1)-$вата производна се записва по същото правило. Тогава по метода на пълната математическа индукция следва, че $y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 6.42: Да се намерят $n-$тите производни на функциите:

$$а)\quad y = \ln(1+x);\quad б)\quad y = (1+x)^m;\quad в)\quad y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Отговор: а) $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. б) $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, при $m \geq n$ и $y^{(n)} = 0$ при $n > m$; в) Представете функцията във вида $y = x+1+\dfrac{1}{x-1}$, за да се получи, че $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са n пъти диференцируеми в някоя точка x. Тогава функцията $u(x)v(x)$ е n пъти диференцируема в тази точка и

$$(u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Това правило се нарича *формула на Лайбниц за $n-$тата производна.*

Задача 6.43: Да се пресметне $n-$тата производна на функцията

$$y = x^2.e^x.$$

Решение: Полагаме $u(x) = x^2$, $v(x) = e^x$. Имаме следните последователни производни $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(3)} = u^{(4)} = \cdots = 0$, за всяко цяло $k \geq 0$ $v^{(k)} = e^x$. Следователно се получава

$$(x^2.e^x)^{(n)} = e^x x^2 + C_n^1 e^x 2x + C_n^2 e^x 2 = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x.$$

Задача 6.44: Да се намери третата производна на функцията

$$y = x.f'(m-x) + 3f(m-x),$$

където $f(x)$ е произволна и поне четири пъти диференцируема функция.

Отговор: $y''' = -x.f^{(IV)}(m-x)$.

Задача 6.45: Да се докаже, че функцията $y = e^{2\arcsin x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $(1-x^2)y'' - xy' - 4y = 0$.

Задача 6.46: Да се докаже, че функцията $y = x.\ln\dfrac{x}{x+1}$ удовлетворява диференциалното уравнение $x^3y'' - (xy' - y)^2 = 0$.

Задача 6.47: Да се докаже, че функцията $y = me^{2x} + 13e^{-x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $y'' - y - 2 = 0$.

6.1.6 Основни теореми на диференциалното смятане

Теорема 6.3: (Теорема на Рол) *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*

1) $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$;

2) $f(x)$ е диференцируема поне в отворения интервал (a, b);

3) $f(a) = f(b)$.

Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, за която е изпълнено равенството $f'(\xi) = 0$.

Теорема 6.4: (Теорема на Лагранж). *Нека функцията $f(x)$ удовлетворява условията:*

1) $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$;

2) $f(x)$ е диференцируема поне в отворения интервал (a, b);

Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, за която е изпълнено равенството

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теорема 6.5: (Теорема на Коши) *Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяват условията:*

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ са дефинирани и непрекъснати в сегмента $[a, b]$;

2) $f(x)$ и са $\varphi(x)$ диференцируеми поне в отворения интервал (a, b);

3) Производната $\varphi'(x)$ е различна от нула навсякъде в отворения интервал (a, b);

Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, за която е изпълнено равенството

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Задача 6.48: Да се покаже, че функцията $f(x) = \sin x$ удовлетворява условията на теоремата на Рол за сегмента $[0, \pi]$ и да се намери стойността на ξ от този сегмент, за която $f'(\xi) = 0$.

Решение: Функцията $f(x) = \sin x$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$ и диференцируема в интервала $(0, \pi)$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Условията на теоремата на Рол са изпълнени за сегмента $[0, \pi]$. Тогава уравнението $f'(x) = \cos x = 0$ е изпълнено за $\xi = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6.49: Да се покаже, че функцията $f(x) = x^3 - x^2 + 11x + 4$ удовлетворява условията на теоремата на Рол за сегмента $[1, 2]$ и да се намери стойността на ξ от този сегмент, за която $f'(\xi) = 0$.

Отговор: $\xi = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 6.50: Да се докаже, че между два последователни реални корена на уравнението $f'(x) = 0$ може да има най-много един корен на уравнението $f(x) = 0$.

Задача 6.51: За функцията $f(x) = \ln x$ и сегмента $[1, 2]$ да се напише формулата на Лагранж и да се намери стойността на ξ.

Решение: Функцията$f(x) = \ln x$ е непрекъсната в сегмента $[1, 2]$ и диференцируема в интервала $(1, 2)$. Следователно съществува поне една точка ξ от интервала $(1, 2)$, за която е изпълнено равенството

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}.$$

Но $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, т. е. $\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln 2 - \ln 1}{2 - 1}$. От тук се получава, че $\xi = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Задача 6.52: За функцията $f(x)$ да се напише формулата на Лагранж за съответния сегмент и да се намери стойността на ξ ако:

а) $f(x) = px^2 + qx + r$, за $x \in [a, b]$;

б) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, за $x \in [1, 3]$.

Решение: а) По формулата на Лагранж имаме

$$\frac{pb^2 + qb + r - (pa^2 + qa + r)}{b - a} = 2p\xi + q,$$

или $\xi = \dfrac{a + b}{2}$. Решението геометрично е представено на фиг. 6.2;

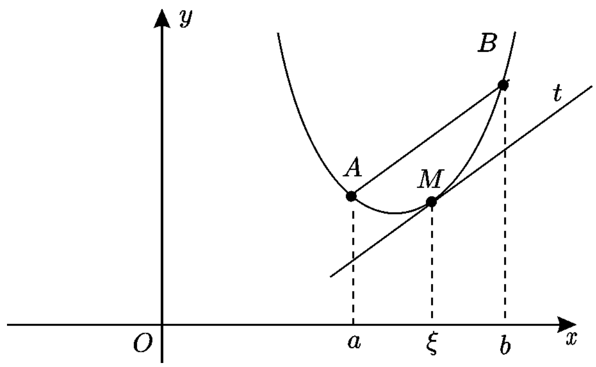
б) Тъй като функцията е прекъсната в точката $x = 2$, теоремата на Лагранж не е в сила за всеки интервал, съдържащ точката $x = 2$.

Задача 6.53: Като се използва теоремата на Лагранж да се докаже неравенството

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}, \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Решение: Функцията $\mathrm{tg}x$ в сегмента $[\alpha, \beta]$, където $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ е непрекъсната и диференцируема функция, следователно по теоремата на Лагранж имаме

$$\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha = (\beta - \alpha)\frac{1}{\cos^2 \xi}, \quad \text{където} \quad \xi \in (\alpha, \beta). \tag{6.10}$$



Фиг. 6.2:

Като се вземе предвид, че $0 < \alpha < \xi < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $1 > \cos\alpha > \cos\xi > \cos\beta > 0$. Ако в равенството (6.10) поставим $\cos\alpha$ вместо $\cos\xi$ ще увеличим знаменателя, т. е. ще намалим дясната страна и ще се получи

$$\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha > \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Аналогично, ако вместо $\cos\xi$ поставим $\cos\beta$, то ще се получи неравенството

$$\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

Задача 6.54: Като се използва теоремата на Лагранж да се докаже неравенството

$$\frac{x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{x}{2}, \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Решение: Тъй като функцията $\ln(1+x)$ е непрекъсната и диференцируема в сегмента $[1, 1+x]$, $x > 0$, то по формулата на Лагранж се получава

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{1+x-1} = \frac{1}{1+\xi}, \quad 1 < \xi < 1+x,$$

или

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}. \tag{6.11}$$

Ако в равенството (6.11) вместо ξ поставим 1 се получава

$$\ln(1+x) < \frac{x}{2}.$$

Ако в равенството (6.11) вместо ξ поставим $1+x$ се получава

$$\ln(1+x) > \frac{x}{2+x}.$$

Задача 6.55: Да се докажат неравенствата:

а) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y), \quad$ ако $0 < y < x \quad$ и $p > 1$;

в) $|\mathrm{arctg} a - \mathrm{arctg} b| \leq |a-b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}, \quad$ ако $0 < b < a$.

Задача 6.56: Да се провери изпълнени ли са условията на теоремата на Коши за функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ в посочените сегменти и да се намери стойността на ξ, ако:

а) $f(x) = x^2+5$, $\varphi(x) = x^3 - 3$ в $[1,2]$;

б) $f(x) = \ln x$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ в $[a, a^2]$, $a > 0$.

Решение: а) Тъй като функциите са дефинирани, непрекъснати и диференцируеми за всяко x и $\varphi'(x) = 3x^2 > 0$ за $1 \leq x \leq 2$, по теоремата на Коши следва, че има такова ξ, за което

$$\frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad 1 < \xi < 2.$$

Получава се, че $\dfrac{9-6}{5+2} = \dfrac{2\xi}{3\xi^2}$, откъдето се определя, че $\xi = \dfrac{14}{9}$.

б) По теоремата на Коши имаме

$$\frac{\ln a^2 - \ln a}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{\xi}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

или $\xi = \dfrac{a^2}{a-1}\ln a \ (a \neq 1)$.

Задача 6.57: За функциите $f(x) = x^2+5$, $\varphi(x) = x^3-3$ и сегмента $[1,2]$ да се напише формулата на Коши и да се намери стойността на ξ.

Отговор: $\xi = \dfrac{14}{9}$.

Задача 6.58: Да се обясни, защо не е вярна формулата на Коши за функциите $f(x) = x^2$ и $\varphi(x) = x^3$ в сегмент $[-1, 1]$.

Задача 6.59: Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[x_1, x_2]$, където $x_1.x_2 > 0$. Да се докаже, че

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi.f'(\xi),$$

където $x_1 < \xi < x_2$.

Задача 6.60: Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в ограничения интервал Δ и $f'(x)$ е ограничена в Δ, то и функцията $f(x)$ също е ограничена в Δ.

Задача 6.61: а) Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема и има ограничена производна в интервала Δ, то тя е равномерно непрекъсната в интервала Δ.

б) Да се намерят всички реални числа a, за които функцията x^a е равномерно непрекъсната в интервала $(0, \infty)$.

6.1.7 Формула на Тейлор

Сега ще представим една от най-важните формули в математическия анализ, която има приложения в много научни области

Теорема 6.6: (Теорема на Тейлор) *Нека функцията f има в някоя околност на точката a производни до $(n+1)$-ви ред (n е произволно естествено число) включително. Нека x е произволна точка от тази околност, а p е произволно положително число. Тогава между точките a и x съществува такава точка ξ, че е в сила формулата*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{6.12}$$

където

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-a)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.13}$$

Формулата (6.12) се нарича *формула на Тейлор с център в точката* a, а изразът $R_{n+1}(x)$ се нарича *остатъчен член в обща форма*, или форма на Шльомилх-Рош.

Тъй като точката ξ лежи между точките a и ξ, то съществува число θ, $0 < \theta < 1$, че $\xi - a = \theta(x-a)$ т. е. $\xi = a + \theta(x-a)$, $x - \xi = (x-a)(1-\theta)$. От (6.13) се получава

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]. \tag{6.14}$$

Ако във формулата (6.14) се положи $p = n+1$ се получава

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],$$

която се нарича *остатъчен член във форма на Лагранж.*

Ако във формулата (6.14) се положи $p = 1$ се получава

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],$$

която се нарича *остатъчен член във форма на Коши.*

Формулата на Тейлор (6.12) може да се запише и във вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \to a,$$

където $o((x-a)^n)$ се нарича *остатъчен член във форма на Пеано.*

Формулата на Тейлор (6.12) с център в точката $a = 0$ се нарича *формула на Маклорен*, т. е.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n + R_{n+1}(x), \tag{6.15}$$

където остатъчният член има вида:

1) във форма на Лагранж

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta.x), \quad (0 < \theta < 1);$$

2) във форма на Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta.x), \quad (0 < \theta < 1);$$

3) във форма на Пеано

$$R_{n+1}(x) = o(x^n).$$

Ще покажем Маклореновите развития на някои елементарни функции:

1) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x);$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} + R_{n+1}(x);$$

2) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+2}(x);$$

3) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+2}(x);$$

4) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $x > -1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x);$$

5) Нека за $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \geq 0$ да положим $C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$. Тогава за $x > -1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + R_{n+1}(x);$$

6) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+2}(x);$$

7) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+2}(x);$$

8) За $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_{n+1}(x);$$

9) За $|x| < 1$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \ldots;$$

10) За $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$\text{tg}x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots.$$

Задача 6.62: Да се разложи по степените на x многочленът

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)^3.$$

Решение: Намираме производните на полинома, изчисляваме ги за $x = 0$ и заместваме във формулата (6.15). Имаме $f(0) = 27$. За производните се получава

$$f'(x) = 6(x^2 - 2x + 3)^2(x - 1), \quad f'(0) = -54,$$

$$f''(x) = 6(x^2 - 2x + 3)(5x^2 - 10x + 7), \quad f''(0) = 126,$$

$$f'''(x) = 24(x - 1)(5x^2 - 10x + 11), \quad f'''(0) = -264,$$

$$f^{IV}(x) = 24(15x^2 - 30x + 21), \quad f^{IV}(0) = 504,$$

$$f^{V}(x) = 720(x - 1), \quad f^{V}(0) = -720,$$

$$f^{VI}(x) = 720, \quad f^{VII} = 0 \text{ и т. н.}$$

Заместваме във формулата на Маклорен

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^6}{6!}f^{VI}(0)$$

и се получава

$$(x^2 - 2x + 3)^3 = 27 - 54x + \frac{126}{2!}x^2 - \frac{264}{3!}x^3 + \frac{504}{4!}x^4 - \frac{720}{5!}x^5 + \frac{720}{6!}x^6,$$

или

$$(x^2 - 2x + 3)^3 = 27 - 54x + 63x^2 - 44x^3 + 21x^4 - 6x^5 + x^6.$$

Задача 6.63: Да се разложи по степените на $x - 2$ многочленът

$$f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3.$$

Решение: Съгласно формулата на Тейлор развитието на полинома по степените на $x-2$ ще бъде

$$f(x)=f(2)+\frac{x-2}{1!}f'(2)+\frac{(x-2)^2}{2!}f''(2)+\ldots+\frac{(x-2)^8}{8!}f^{(8)}(2).$$

Стойностите на функцията и производните ѝ за $x=2$ са:

$$f(2)=321,\quad f'(2)=1087,\quad f''(2)=3424,\quad f'''(2)=8832,\quad f^{(4)}(2)=20640,$$

$$f^{(5)}(2)=36720,\quad f^{(6)}(2)=64080,\quad f^{(7)}(2)=70560,\quad \text{и}\quad f^{(8)}(2)=40320.$$

Следователно Тейлоровото развитие на полинома е

$$f(x)=321+1087(x-2)+1712(x-2)^2+1972(x-2)^3+860(x-2)^4$$

$$+301(x-2)^5+89(x-2)^6+14(x-2)^7+(x-2)^8.$$

Задача 6.64: Да се развие по степените на $x-1$ функцията

$$f(x)=x^3\ln x.$$

Решение: Производните на функцията $f(x)=x^3\ln x$ са:

$$f'(x)=x^2(3\ln x+1),\quad f''(x)=x(6\ln x+5),\quad f'''(x)=6\ln x+11,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x},\quad f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^2},\quad f^{(6)}=6.(-1)^2\frac{2!}{x^3},\quad \text{и т. н.}$$

$$f^{(n)}(x)=6.(-1)^{n-4}\frac{(n-4)!}{x^{n-3}},\quad \text{при}\quad n\geq 4.$$

Стойностите на функцията и на производните ѝ за $x=1$ са:

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1,\quad f''(1)=5,\quad f'''(1)=11,\quad f^{(4)}(x)=6,$$

$$f^{(5)}(x)=-6,\quad f^{(6)}=6.2!,\ldots,f^{(n)}(1)=6.(-1)^{n-4}.(n-4)!.$$

За формулата на Тейлор се получава

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3$$

$$+6\left[\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{(x-1)^5}{5!}+\frac{(x-1)^6}{6.5.4.3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right]$$

$$+R_n(x).$$

Задача 6.65: Функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ да се развие по степените на $x-4$ до член, съдържащ $(x-4)^3$.

Решение: Формулата на Тейлор в случая е

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = f(4) + \frac{x-4}{1!}f'(4) + \frac{(x-4)^2}{2!}f''(4) + \frac{(x-4)^3}{3!}f'''(4) + R_3.$$

Производните на функцията $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ са:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(x) = \frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{5}{2}},$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{8}\cdot x^{-\frac{7}{2}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}\cdot x^{-\frac{9}{2}}.$$

Стойностите им за $x = 4$ са $f(4) = \dfrac{1}{2}$, $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$, $f''(4) = \dfrac{3}{128}$, $f'''(4) = -\dfrac{15}{1024}$, стойността на четвъртата производна за $x = 4+\theta.h$ е $f^{(4)}(4+\theta.h) = \dfrac{105}{16\sqrt{(4+\theta.h)^9}}$, $0<\theta<1$.

Заместваме получените стойности на функцията и нейните производни в Тейлоровото развитие на функцията и се получава, че

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2 - \frac{5}{2048}(x-4)^3 + R_3,$$

където

$$R_3 = \frac{35}{128}\frac{1}{\sqrt{(4+\theta h)^9}}, \quad h = x-4, \quad \text{при} \quad 0<\theta<1.$$

Задача 6.66: Нека a е произволно реално число. Да се разложат по степените на x функциите:

$$\text{а)}\ \ y = e^{ax}; \quad \text{б)}\ \ y = \sin ax; \quad \text{в)}\ \ y = \cos ax.$$

Решение: а) За всяко цяло $n \geq 0$ имаме, че $y^{(n)}(x) = a^n.e^{ax}$, откъдето се получава, че $y^{(n)}(0) = a^n$. Тогава, развитието на функцията по степените на x ще бъде

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}x^n;$$

$$\text{б)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}; \quad \text{в)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Понякога Тейлоровите развития на някой функции могат да се получат без да се намират последователните производни. За тази цел, може да се използва, че за $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{6.16}$$

Задача 6.67: Да се разложат по степените на x функциите:

$$\text{а)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}; \quad \text{б)} \quad f(x) = \frac{x}{x^2-2x-3};$$

$$\text{в)} \quad f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}; \quad \text{г)} \quad f(x) = \frac{x}{(x^2-4)(x^2+1)}.$$

Решение: а) Ще използваме представянето

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}. \tag{6.17}$$

От горното равенство се получава $A(x+2) + B(x+1) = 1$, т. е. $(A+B)x + (2A+B) = 1$. Това равенство е изпълнено за всяко x, което е възможно когато

$$\left| \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 2A + B = 1. \end{array} \right.$$

Решаваме тази система и се намира, че $A = 1$ и $B = -1$. Тогава от (6.17) се получава следното представяне на функцията

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \tag{6.18}$$

Ще използваме равенството (6.16) за да се получи

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1; \tag{6.19}$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n, \quad |x| < 2. \tag{6.20}$$

От (6.18), (6.19) и (6.20) се получава

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]x^n,\quad |x|<1;$$

$$\text{б)}\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{4}-\frac{1}{4.3^n}\right]x^n,\quad |x|<1;$$

$$\text{в)}\quad f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n,\quad |x|<2;$$

г) За функцията $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-4)(x^2+1)}$ ще използваме представянето

$$\frac{x}{(x^2-4)(x^2+1)}=\frac{x}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

откъдето се получава

$$A(x+2)(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-4)=x.$$

След приравняване на коефициентите пред равните степени на x в лявата и дясната страна на горното равенство, се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} A+B+C=0\\ 2A-2B+D=0\\ A+B-4C=1\\ 2A-2B-4D=0,\end{array}\right.$$

която има решение $A=\frac{1}{10}$, $B=\frac{1}{10}$, $C=-\frac{1}{5}$, $D=0$. Следователно, за функцията е в сила представянето

$$f(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{x^2+1}. \qquad (6.21)$$

Като се използва равенството (6.16) последователно се получава:

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n,\quad |x|<2;$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n,\quad |x|<2;$$

$$\frac{x}{x^2+1} = x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Като се използват равенството (6.21) и последните три представяния се получава

$$f(x) = \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{2^n}x^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{1}{2^{2n+2}}\right]x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

което е един очакван резултат, тъй като функцията е нечетна функция.

Задача 6.68: Да се напише Маклореновото развитие на функцията $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$, $a > 0$ до член с x^2.

Отговор: $f(x) = a\left[1 + \frac{x}{m.a^m} + \frac{(1-m).x^2}{2m^2.a^{2m}}\right] + \mathcal{O}(x^2)$.

Задача 6.69: Да се напише Маклореновото развитие на функцията $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ до член с x^4.

Отговор: $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \mathcal{O}(x^4)$.

Задача 6.70: Да се напише Маклореновото развитие на функцията $f(x) = \ln(a + x)$, $a > 0$ до член с x^n.

Отговор: $f(x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n.a^n} + \mathcal{O}(x^n)$.

6.1.8 Разкриване на неопределености (правила на Лопитал)

Следващите теореми на Лопитал са полезни правила и в известен смисъл алгоритмизират намирането на граници на функции от вида:

$$\text{а)}\ \ \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{б)}\ \ f(x)g(x), \quad \text{в)}\ \ f(x)^{g(x)}, \quad \text{г)}\ \ f(x) - g(x),$$

в случаите, когато не може да се реши въпросът с директно използване на съображения за непрекъснатост.

Типични примери за случая а) се получават, когато числителят и знаменателят едновременно клонят към 0, или ∞. Това обстоятелство записваме със символа $\dfrac{0}{0}$, или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пример за случая б) имаме, когато единият от множителите клони към 0, а другият расте неограничено, което го записваме като $0.\infty$. За случая в), може основата да клони към 1, а степенният показател към ∞, основата да клони към ∞, а степенният показател към 0, основата и степенният показател да клонят едновременно към 0. За случая г) ще се стигне до неопределеност, когато и двете функции клонят към ∞. Така се стига до следните 7 неопределени форми

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}, \infty - \infty.$$

Правило на Лопитал: *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в някаква околност на точката a (като при $x = a$ това не е задължително), като $g'(x) \neq 0$, за всяко x от тази околност, и ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

при условие, че границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (крайна или безкрайна) съществува.

Това правило е приложимо и когато $a = \pm\infty$. Ако след прилагане на правилото за $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ отново се получи неопределеност от същия вид, то правилото може да се приложи няколкократно.

В някои случаи е възможно границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ да не съществува, но границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ да съществува.

Неопределеностите $[0.\infty]$, $[\infty - \infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ могат да се сведат към $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ по следните начини:

Неопределеността $[0.\infty]$ може да се сведе към $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ чрез следните алгебрични преобразования: Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $f(x).g(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}$, т. е. свежда се към $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Може да се постъпи и така: $f(x).g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} \cdot g(x)$, т. е. свежда се към $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Неопределеността от вида $[\infty - \infty]$ може да се сведе към $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ по следния начин:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}}.$$

До неопределености от вида $[0^0]$, $[\infty^0]$ и $[1^\infty]$ може да се достигне при определяне стойността на функцията $y = [f(x)]^{g(x)}$ за $x = a$. В случая чрез предварително логаритмуване имаме

$$\ln y = \varphi(x). \ln f(x).$$

От тук за $\ln y$ при $x = a$ се получават следното: Неопределеностите $[0^0]$ и $[\infty^0]$ се трансформират до $[0.\infty]$ а неопределеността $[1^\infty]$ се трансформира до $[\infty.0]$.

Задача 6.71: Да се намери границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

Решение: Тъй като $\lim\limits_{x\to 0} \sin ax = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \sin bx = 0$, то се получава неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Проверяваме дали са изпълнени условията на правилото на Лопитал. Функциите $\sin ax$ и $\sin bx$ са диференцируеми във всяка околност на точката 0. Тогава са в сила равенствата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim_{x\to 0} \frac{a.\cos ax}{b.\cos bx} = \frac{a}{b}.$$

Задача 6.72: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\mathrm{arctg}\, x). \ln x.$$

Решение: Имаме неопределеност от вида $[0.\infty]$. За нас ще бъде удобно $\ln x$ от числителя да запишем като $\dfrac{1}{\ln x}$ в знаменателя, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\mathrm{arctg} x). \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\mathrm{arctg} x}{\frac{1}{\ln x}}.$$

За $x = \infty$ последният израз приема вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Съгласно правилото на Лопитал се получава

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\mathrm{arctg} x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{-1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x \ln^2 x}{1 + x^2}.$$

Последният израз за $x = \infty$ приема вида стойност $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Отново прилагаме правилото на Лопитал, или

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2 x}{1+x^2} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x + 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x}.$$

Последният израз за $x = \infty$ приема вида стойност $\frac{\infty}{\infty}$. Отново прилагаме правилото на Лопитал, или

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x + 2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Задача 6.73: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

Решение: Нека да положим $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\text{tg}x)^{\text{tg}2x}$ и да логаритмуваме двете страни на това равенство

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\text{tg}x)^{\text{tg}2x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\text{tg}2x\ln\text{tg}x.$$

Последният израз за $x = \dfrac{\pi}{4}$ приема стойност $[\infty.0]$, за това $\text{tg}2x$ ще го поставим в знаменателя, и получаваме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\text{tg}2x\ln\text{tg}x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\text{tg}x}{\frac{1}{\text{tg}2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\text{tg}x}{\operatorname{cotg}2x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\text{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{2\text{tg}x\cos^2 x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{2\sin x\cos x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x = -1.$$

Получихме, че $\ln L = -1$, откъдето се намира, че търсената граница L е $L = e^{-1}$.

Задача 6.74: Да се намери границата

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\text{tg}x - \frac{1}{1-\sin x}\right).$$

Решение: Изразът $\text{tg}x - \dfrac{1}{1-\sin x}$ за $x = \frac{\pi}{2}$ приема стойност $[\infty - \infty]$. За да разкрием тази неопределеност ще използваме следното представяне

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\text{tg}x - \frac{1}{1-\sin x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{1-\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(1-\sin x)-\cos x}{\cos x(1-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin^2 x - \cos x}{\cos x - \sin x\cos x}.$$

Последният израз за $x = \dfrac{\pi}{2}$ приема стойност $\left[\frac{0}{0}\right]$, прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin^2 x - \cos x}{\cos x - \sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x - 2\sin x\cos x + \sin x}{-\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x + \sin x - \sin 2x}{\sin x + \cos 2x} = -\infty.$$

Задача 6.75: Да се намерят границите $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x-\text{tg}x};\quad \text{д)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}-2};\quad \text{е)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2};$$

$$\text{ж)}\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}(a>0);\quad \text{з)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)};\quad \text{и)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3};$$

$$\text{й)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x};\quad \text{к)}\ \lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}};\quad \text{л)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\text{tg}x}{\cos 2x}.$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{6}$; в) 12; г) $\frac{1}{2}$; д) 1; е) 0; ж) $a^a(\ln a - 1)$; з) 2; и) $\frac{1}{6}$; й) $\frac{1}{3}$; к) 0; л) 1.

Задача 6.76: Да се намерят границите $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\text{cotg}ax}{\text{cotg}bx};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to -1}\frac{\ln(1+x)}{\text{tg}\frac{\pi x}{2}};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{5x})}{\ln(6+e^{2x})};\quad \text{д)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^m}(m>0);\quad \text{е)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{a+bx}(b\neq 0).$$

Отговори: а) 1; б) $\frac{b}{a}$; в) 0; г) $\frac{5}{2}$; д) 0; е) $\frac{1}{b}$.

Задача 6.77: Да се намерят границите $[0.\infty]$:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right);\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to 1-0}\ln(1-x)\cdot\ln x;$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)e^{\mathrm{tg}x};\quad \text{д)}\quad \lim_{x\to 0} x^3\mathrm{cotg}x;\quad \text{е)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x.$$

Отговори: а) $\frac{2}{\pi}$; б) 1; в) 0; г) ∞; д) 0; е) -1.

Задача 6.78: Да се намерят границите $[1^\infty]$:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}};\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}};\quad \text{д)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^{x}.$$

Отговори: а) $e^{\frac{2}{\pi}}$; б) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$; в) $\sqrt[3]{e}$; г) $e^{-\frac{a^2}{2}}$; д) $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Задача 6.79: Да се намерят границите $[\infty^0]$:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{x}};\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}\ (x>0);\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{\sin 2x};$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to 0}(\mathrm{cotg}x)^{\sin x};\quad \text{д)}\quad \lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Отговори: а) 1; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1.

Задача 6.80: Да се намерят границите $[0^0]$:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} x^x;\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0} x^{\mathrm{tg}x};\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to 0}(\sin x)^{\mathrm{tg}x};$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}};\quad \text{д)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\cos x}.$$

Отговори: а) 1; б) 1; в) 1; г) ∞; д) 1.

Задача 6.81: Да се намерят границите $[\infty-\infty]$:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right);\quad \text{б)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{cotg}x-\frac{1}{x}\right);\quad \text{в)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right);$$

$$\text{г)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{cotg}^2x\right);\quad \text{д)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right);$$

$$\text{е)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\mathrm{cotg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right).$$

Отговори: а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) -1; г) $\frac{1}{3}$; д) $-\frac{1}{2}$; е) -1.

6.2 Изследване на функция на една реална променлива

Разработеният апарат на диференциалното смятане ще приложим за изследване поведението на функция и построяване на нейната графика. Също така ще бъдат разгледани и въпросите за намиране на локалните и глобални екстремални стойности на функцията.

6.2.1 Признаци за монотонност на функция

Казва се, че функцията f е ненамаляваща (нерастяща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Казва се, че функцията f е строго растяща (строго намаляваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Теорема 6.7: *Необходимо и достатъчно условие функцията f, диференцируема в интервала (a, b), да бъде ненамаляваща (нерастяща) в този интервал, е във всички негови точки $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.*

Теорема 6.8: *За да бъде функцията f строго растяща (строго намаляваща) в интервала (a, b), е достатъчно производната* ѝ *да бъде положителна (отрицателна) в този интервал.*

6.2.2 Екстремуми на функции

Казва се, че функцията $f(x)$ има в точката x_0 локален максимум (минимум), ако функцията е определена в двустранна околност на точката x_0 и за всяко x, такова че $0 < |x - x_0| < \delta$, е изпълнено съответното неравенство $f(x) < f(x_0)$, или $f(x) > f(x_0)$. Локалният максимум и локалният минимум имат общото название *локален екстремум*.

Теорема 6.9: (необходимо условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция) *Ако функцията f е диференцируема в дадена точка x_0 и има в тази точка локален екстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Точките, в които производната f' на функцията f, се анулира се наричат *стационарни точки* за функцията f. Всяка стационарна точка е точка на възможен екстремум на функцията. За да се направи заключението, че в дадена стационарна точка функцията има екстремум, са необходими допълнителни изследвания, т. е. трябва да разполагаме с достатъчни условия за екстремум.

Достатъчни условия за екстремум

Първо правило: Нека функцията f е диференцируема в някоя околност на точката x_0, с изключение може би в самата точка x_0, която се явява стационарна точка, т. е. $f'(x_0) = 0$, или производната $f'(x_0)$ не съществува, и е непрекъсната в тази точка. Ако производната $f'(x_0)$ си сменя знака при преминаване на x през x_0, т. е. съществува такова число $\delta > 0$, че производната f' във всеки интервал $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ има постоянен знак и противоположен знак в различните интервали, то точката x_0 е точка на локален екстремум.

При това, ако за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$, а за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то в точката x_0 функцията има локален максимум, а ако за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$, а за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то в точката x_0 функцията има локален минимум. Първо правило за намиране на екстремум на функция е обобщено в таблица 6.1.

Знак на производната		Извод
$x < x_0$	$x > x_0$	
$+$	$+$	няма екстремум
$+$	$-$	максимум
$-$	$+$	минимум
$-$	$-$	няма екстремум

Табл. 6.1: Първо правило за намиране на екстремум на функция

Второ правило: Ако функцията $f(x)$ има в някоя околност $|x - x_0| < \delta$ първа производна $f'(x)$ и в точката x_0 втора производна $f''(x_0)$ и са изпълнени условията

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

то в тази точка функцията $f(x)$ има екстремум, а именно:

1) ако $f''(x_0) < 0$, то в точката x_0 функцията има *локален максимум*;

2) ако $f''(x_0) > 0$, то в точката x_0 функцията има *локален минимум*.

Трето правило: Нека функцията $f(x)$ има в някоя околност $|x - x_0| < \delta$ производни $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ и в точката x_0 производна

$f^{(n)}(x_0)$, при това

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В този случай:

1) ако n е четно число, то в точката x_0 функцията *има екстремум*, а именно: *максимум* при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и *минимум* при $f^{(n)}(x_0) > 0$;

2) ако n е нечетно число, то в точката x_0 функцията *няма екстремум*.

До сега разгледахме въпроса за съществуване на екстремум на функция f в точка x_0, в която функцията е диференцируема. Ще представим едно достатъчно условие за съществуване на екстремум в точка x_0, в която функцията не е диференцируема, но е диференцируема във всяка друга точка на някоя околност на точката x_0, и освен това е непрекъсната в тази точка.

Теорема 6.10: *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката x_0, с изключение евентуално на точката x_0, и е непрекъсната в тази точка. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката x_0 и отрицателна (положителна) отдясно на точката x_0, то функцията има в точката x_0 локален максимум (минимум). Ако производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на точката x_0, функцията няма екстремум в тази точка.*

Абсолютен екстремум : Най-голямата (най-малката) стойност на непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ се достига или в стационарна точка на тази функция, (т. е. там където производната $f'(x)$ или е равна на нула, или не съществува), или в краищата a и b на този сегмент.

6.2.3 Изпъкналост и вдлъбнатост на графиката на функция

Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и нека $a < x_1 < x_2 < b$. Правата минаваща през точките $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ от графиката на функцията, има уравнение

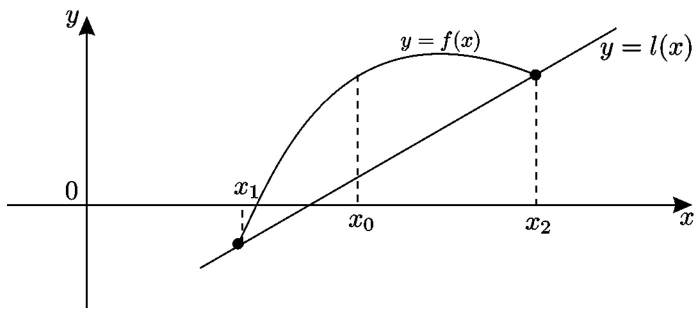
$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Да означим

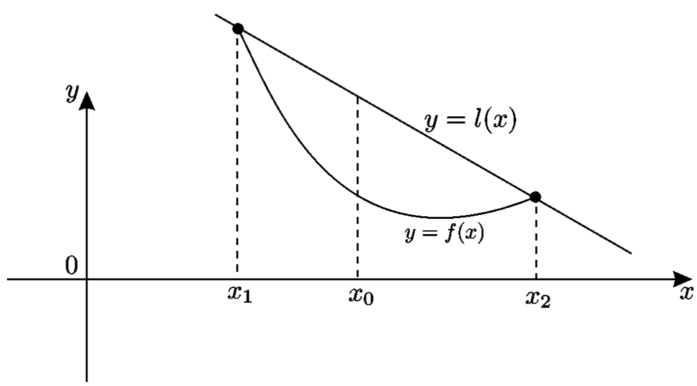
$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Казва се, че функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в интервала (a, b) (виж фиг. 6.3 и фиг. 6.4), ако за всеки две точки x_1 и x_2, такива че

$a < x_1 < x_2 < b$ и за всяка точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, е изпълнено неравенството $l(x_0) \leq f(x_0)$ (съответно $l(x_0) \geq f(x_0)$).



Фиг. 6.3: Графика на изпъкнала в интервала (x_1, x_2) функция $f(x)$



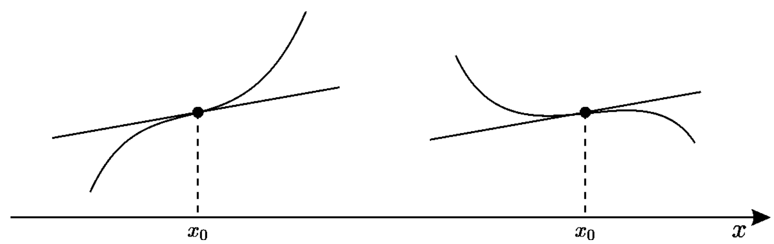
Фиг. 6.4: Графика на вдлъбната в интервала (x_1, x_2) функция $f(x)$

Геометрично това означава, че всяка точка от хордата AB лежи не над (не под) точката от графиката на функцията, съответстваща на същата стойност на аргумента.

Всеки интервал в който функцията е изпъкнала (вдлъбната) се нарича интервал на изпъкналост (вдлъбнатост) на тази функция.

Теорема 6.11: *Нека функцията f е два пъти диференцируема в интервала (a, b). Тогава, ако $f''(x) < 0$ в (a, b), то функцията е изпъкнала в този интервал, и ако $f''(x) > 0$ в (a, b), то функцията е вдлъбната в този интервал.*

Нека функцията f е непрекъсната в точката x_0. Точката x_0 се нарича *инфлексна точка* за функцията f, ако тя се явява едновременно край на интервал на изпъкналост и край на интервал на вдлъбнатост. В този случай точката $(x_0, f(x_0))$ се нарича инфлексна точка за графиката на функцията (фиг. 6.5).



Фиг. 6.5: Инфлексия на функцията $f(x)$ в точката x_0

Теорема 6.12: (**необходимо условие за инфлексия**) *Нека функцията f е два пъти непрекъснато диференцируема в интервала (a, b) и графиката ѝ има инфлексия в точката $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Тогава е в сила равенството $f''(x_0) = 0$.*

Според Теорема 6.12, за да се намерят инфлексните точки на графиката на два пъти диференцируема функция f, трябва да се разгледат всички корени на уравнението $f''(x) = 0$.

Теорема 6.13: (**първо достатъчно условие за инфлексия**) *Ако функцията f е два пъти диференцируема в някоя околност на точката x_0, с изключение може би на самата точка $x_0 \in (a, b)$, в която тя е непрекъсната, и нейната втора производна сменя знака си при преминаване на x през x_0 (т. е. съществува $\delta > 0$, че или $f''(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, или $f''(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$), то точката $(x_0, f(x_0))$ се явява инфлексна точка за графиката на функцията $f(x)$.*

Теорема 6.14: (**второ достатъчно условие за инфлексия**) *Ако функцията f има в точката x_0 крайна трета производна и удовлетворява в тази точка условията $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то точката $(x_0, f(x_0))$ се явява инфлексна точка за графиката на функцията $f(x)$.*

Теорема 6.15: (**трето достатъчно условие за инфлексия**) *Нека $n \geq 3$ е четно число и нека функцията f има производни до n–ти* *ред в някоя околност на точката x_0, и производна от $(n+1)-$ви ред в самата точка x_0. Тогава, ако са изпълнени условията*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

то точката $(x_0, f(x_0))$ се явява инфлексна точка за графиката на функцията $f(x)$.

6.2.4 Асимптоти на графиката на функция

Правата с уравнение $x = a$ се нарича *вертикална асимптота* на графиката на функцията $f(x)$, ако поне една от едностранните граници $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ е равна на $+\infty$, или $-\infty$.

Правата с уравнение $y = b$ се нарича *хоризонтална асимптота* на графиката на функцията $f(x)$, ако $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Правата с уравнение $y = kx + n$ се нарича *наклонена асимптота* на графиката на функцията $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, ако съществуват крайните граници $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = n$.

При изследване изменението на една функция ще използваме следния *алгоритъм*:

1. Определяне на дефиниционната област на функцията.
2. Изследване на функцията по отношение на четност, нечетност, периодичност.
3. Определяне на точките на прекъсване и поведението на функцията в околност на краищата на дефиниционните интервали.
4. Определяне интервалите на монотонност и екстремумите на функцията.
5. Определяне интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията.
6. Намиране на уравненията на асимптотите.
7. Попълване на таблица за изменението на функцията.
8. Построяване графиката на функцията.

6.2.5 Задачи от изследване на функции

Задача 6.82: Да се определят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $y = x.\sqrt{1-x^2}$.

Решение: Функцията е дефинирана в сегмента $[-1, 1]$. Намираме първата производна $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Тази производна е равна на нула при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и не съществува при $x_3 = -1$ и $x_4 = 1$. Имаме, че $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, следователно в този интервал функцията е растяща, а в интервалите $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ функцията е намаляваща. Имаме, че $f''(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, и тъй като $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, то при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ функцията има локален минимум и $f_{min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$. Тъй като $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, то в точката $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ функцията има локален максимум и $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

Задача 6.83: Да се определят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функциите: а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; б) $f(x) = x^2.e^{-x}$; в) $f(x) = 2x^2 - \ln x$; г) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$.

Отговори: а) Растяща в $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ и намаляваща в $(1, 3)$. $f_{max} = f(1) = 9$ и $f_{min} = f(3) = 5$; б) Растяща в $(0, 2)$ и намаляваща в $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $f_{min} = f(0) = 0$ и $f_{max} = f(2) = 4.e^{-2}$; в) $x \in (0, \infty)$, $f' = 4x - \frac{1}{x}$, намаляваща в $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и растяща в $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $f_{min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}$; г) производната $f' = 3(x-2)^2$ е винаги неотрицателна, следователно функцията е растяща за всяко x и няма локални екстремуми.

Задача 6.84: Да се намерят уравненията на асимптотите на графиката на функцията

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Решение: Дефиниционната област на функцията е $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Намираме границите на функцията при x клонящо към краищата на дефиниционните интервали: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = +\infty$. Следователно функцията няма хоризонтални асимптоти. Нека $\varepsilon > 0$ е безкрайно малка величина. Имаме, че $\lim\limits_{x\to-1-\varepsilon} y = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \frac{(-1-\varepsilon-1)^3}{(-1-\varepsilon+1)^2} = -\lim\limits_{\varepsilon\to0} \frac{(2+\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+\varepsilon} \frac{(-1+\varepsilon-1)^3}{(-1+\varepsilon+1)^2} = -\lim\limits_{\varepsilon\to0} \frac{(2-\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} = -\infty$. Следователно правата $x = -1$ е вертикална асимптота. Проверяваме дали функцията има наклонена асимптота. Имаме, че $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x.(x+1)^2} = 1$,

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right] = -5$. Следователно правата $y = x - 5$ е наклонена асимптота.

Задача 6.85: Да се намерят уравненията на асимптотите на графиката на функциите:

$$\text{а)}\ \ y = \frac{x^2-3}{x-2};\ \ \text{б)}\ \ y = xe^{-\frac{1}{x}};\ \ \text{в)}\ \ y = \sqrt{x^2+1};\ \ \text{г)}\ \ y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Отговори: а) Няма хоризонтална асимптота, правата $x = 2$ е вертикална асимптота, правата $y = x + 2$ е наклонена асимптота; б) Правата $x = 0$ е вертикална асимптота, а правата $y = x - 1$ е наклонена асимптота; в) Правите $y = x$ и $y = -x$ са наклонени асимптоти; г) Правите $x = 1$ и $x = -1$ са вертикални асимптоти, а правата $y = x$ е наклонена асимптота.

Задача 6.86: Да се изследва изменението и построи графиката на функцията

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Решение: Дефиниционната област на функцията е $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. В точката $x = -1$ функцията е прекъсната. Функцията е нито четна, нито нечетна, защото $y(-x) = \dfrac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = -\dfrac{(x+1)^3}{(-x+1)^2} \neq \pm y(x)$. Следователно графиката ѝ не е симетрична нито спрямо оста oy, нито спрямо началото на координатната система. Функцията не е периодична. Границите на функцията, както и нейните асимптоти бяха намерени в задача 6.84.

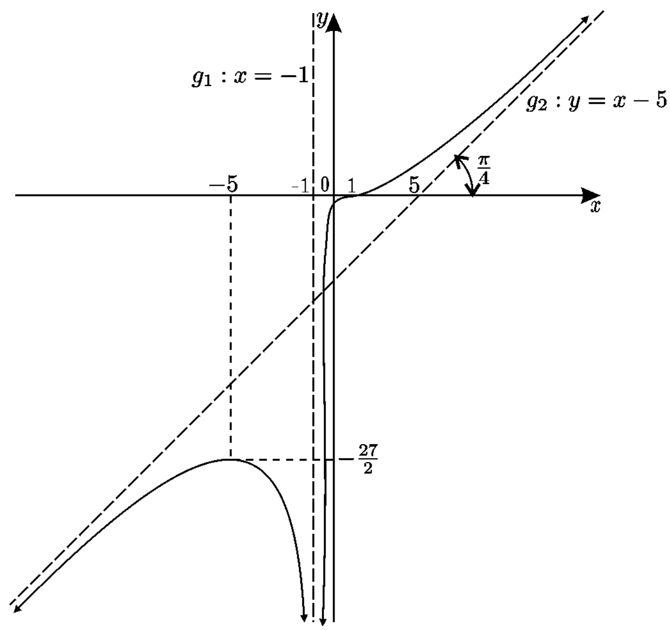
Производните на функцията са $y' = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ и $y'' = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Уравнението $y' = 0$ има двукратен корен $x = 1$ и еднократен корен $x = -5$. Имаме, че $y''(1) = 0$ и $y'''(1) \neq 0$, а $y''(-5) = -\frac{9}{16} < 0$. Следователно $x = 1$ е инфлексна точка, а в точката $x = -5$ функцията има максимум и $y_{max} = y(-5) = -\frac{27}{2}$. Тъй като $y' > 0$ при $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$, то в тези интервали функцията е растяща, а в интервала $(-5, -1)$ е намаляваща. От $y'' > 0$ в интервала $(-\infty, 1)$ следва, че в този интервал функцията е вдлъбната, а в интервала $(1, +\infty)$ функцията е изпъкнала.

Систематизираме резултатите в таблица 6.2.

Графиката на функцията е представена на фигура 6.6.

x	$-\infty$		-5		$-1-\varepsilon$	$-1+\varepsilon$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			$+$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$			$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	max $-\frac{27}{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	inf 0	$\nearrow$	$+\infty$

Табл. 6.2: Поведение на функцията $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$



Фиг. 6.6: Графика на функцията $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

Задача 6.87: Да се изследва изменението и построи графиката на функцията

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}.$$

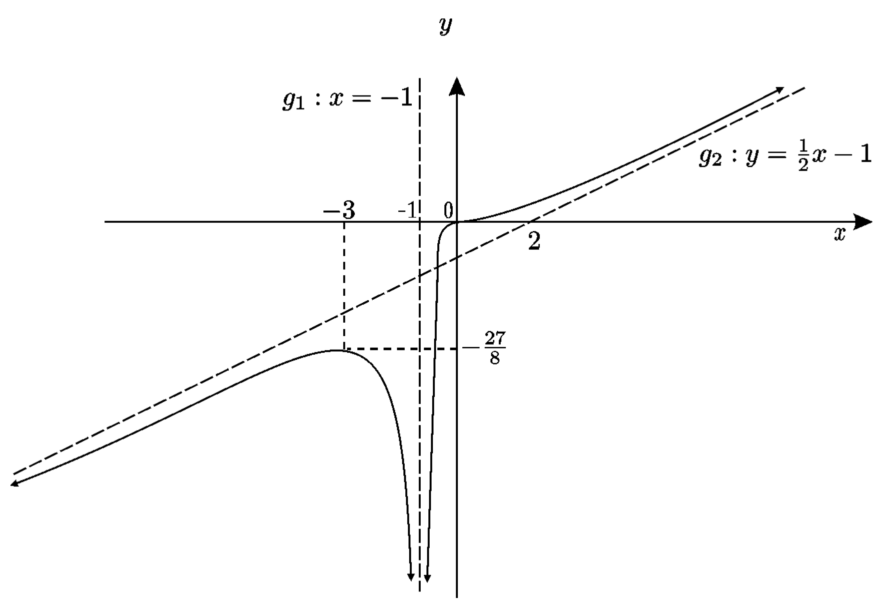
Решение: Дефиниционната област на функцията е $(-\infty, +\infty)$, функцията е нечетна. Функцията е растяща при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и намаляваща при $x \in (-1, 1)$. Локалните екстремуми на функцията са $y_{max} = f(-1) = \sqrt[3]{2}$ и $y_{min} = f(1) = -\sqrt[3]{2}$. Функцията е изпъкнала при

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ и вдлъбната при $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Графиката на функцията има три инфлексни точки за $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$. Правата $y = x$ е наклонена асимптота за графиката на функцията.

Задача 6.88: Да се изследва изменението и построи графиката на функцията

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Решение: Дефиниционната област на функцията е $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Функцията е растяща при $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ и намаляваща при $x \in (-3, -1)$. Функцията има само един локален екстремуми $y_{max} = f(-3) = -\frac{27}{8}$. Функцията е изпъкнала при $x \in (0, +\infty)$ и вдлъбната при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Точката $O(0,0)$ е инфлексна точка за графиката на функцията. Правата $x = -1$ е вертикална асимптота, а правата $y = \frac{1}{2}x - 1$ е наклонена асимптота. Графиката на функцията е изобразена на фигура 6.7.



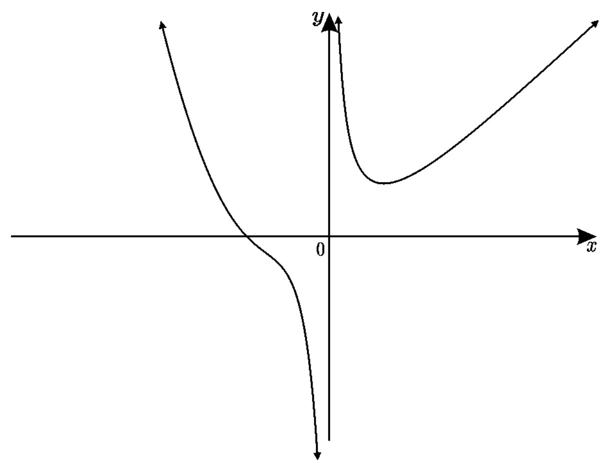
Фиг. 6.7: Графика на функцията $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Задача 6.89: Да се изследва изменението и построи графиката на функциите:

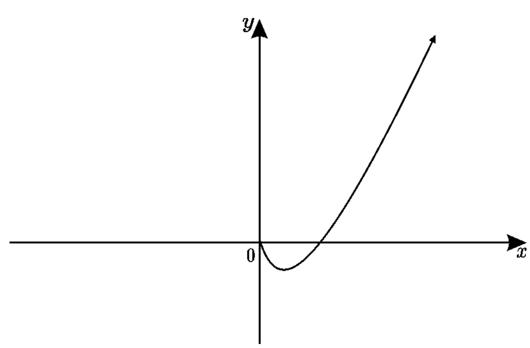
$$\text{а)}\quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x};\quad \text{б)}\quad y = x \ln x;$$

$$\text{в)}\quad y = \ln(x^2 - 1);\quad \text{г)}\quad y = x.\sin x.$$

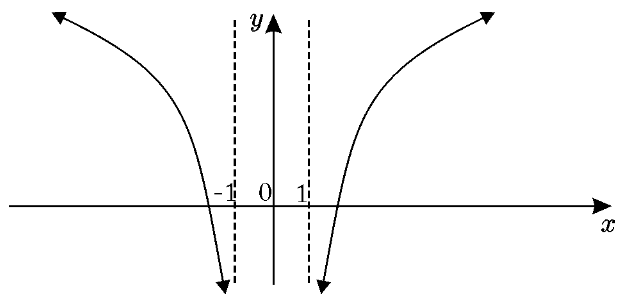
Графиките на функциите са представени на фигури 6.8, 6.9, 6.10 и 6.11.



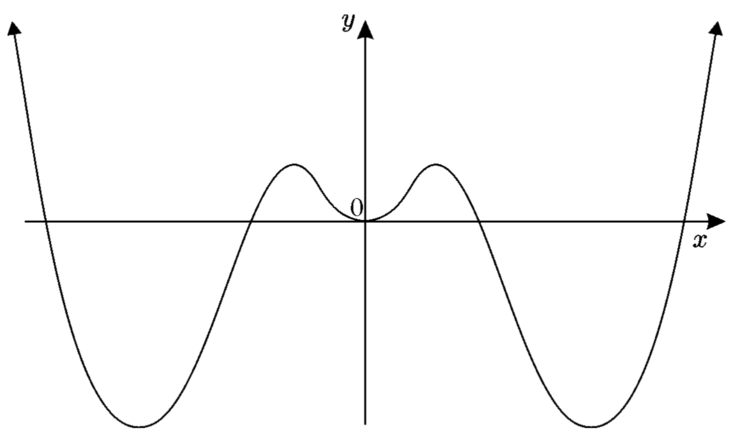
Фиг. 6.8: Графика на функцията $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$



Фиг. 6.9: Графика на функцията $f(x) = x \ln x$



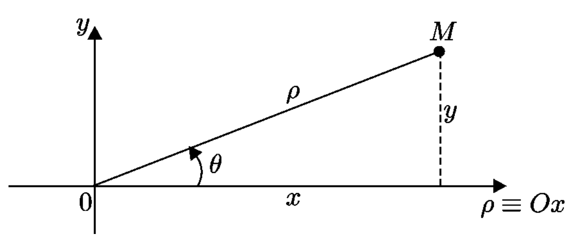
Фиг. 6.10: Графика на функцията $f(x) = \ln(x^2 - 1)$



Фиг. 6.11: Графика на функцията $f(x) = x \sin x$

6.2.6 Изследване на криви в полярни координати

Често употребявана координатна система е полярната. Точка M в



Фиг. 6.12: Полярни координати

равнината спрямо полярната координатна система $O\rho$, има полярни координати ρ и θ, където ρ се нарича полярно разстояние, а θ се нарича полярен ъгъл. Тук θ може да приема произволни реални стойности, а ρ – произволни неотрицателни реални стойности. Ако декартовата координатна система Oxy е както на фигура 6.12, то връзката между полярните и декартовите координати се дава чрез равенствата

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

В полярни координати крива се задава с уравнение от вида $F(\rho, \theta) = 0$, където F е функция на две променливи. Когато това уравнение може да се разреши спрямо ρ, се получава функция от вида

$$\rho = f(\theta).$$

Важна особеност на това задаване на криви в полярни координати е, че θ не се изменя в естествената дефиниционна област на функцията f, а само в онези нейни части, за които $f(\theta) \geq 0$.

Асимптоти могат да се очакват за онези стойности α на θ, за които

$$\lim_{\theta\to\alpha} f(\theta) = \infty.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то асимптотата е вертикална. Тя съществува, точно когато, съществува границата $\lim\limits_{\theta\to\alpha} f(\theta)\cos\theta = \xi$, и декартовото уравнение на асимптотата е $x = \xi$. Ако $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то асимптота съществува, точно когато, съществува границата $\lim\limits_{\theta\to\alpha}(\theta - \alpha)f(\theta) = l$ и има декартово уравнение

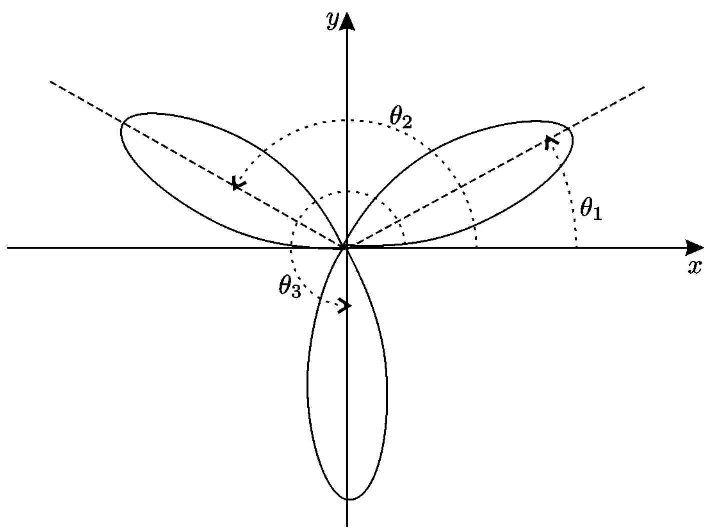
$$y = x.\text{tg}\alpha + \frac{l}{\cos\alpha}. \tag{6.16}$$

При $\lim\limits_{\theta\to\infty} f(\theta) = r$, то окръжност с център в точката O и радиус r е *асимптотична окръжност* за кривата. При $r = 0$ тази окръжност се изражда в полюса, който е асимптотична точка за кривата.

Задача 6.90: Да се изследва изменението и построи графиката на розата $\rho = \sin 3\theta$.

Решение: Ще намерим периода на функцията. От съотношението $\sin 3(\theta + l) = \sin(3\theta + 2k\pi)$ намираме, че $3\theta + 3l = 3\theta + 2k\pi$, $l = \frac{2}{3}k\pi$. При $k = 1$ се получава най-малкият период $L = \frac{2}{3}\pi$.

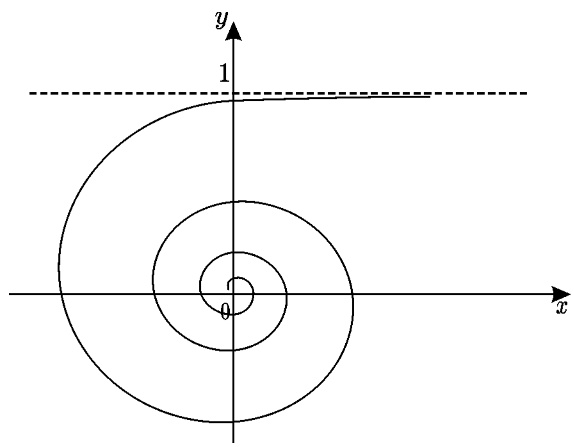
Условието $\sin 3\theta \geq 0$ ни дава, че $3\theta \in [0, \pi]$, т. е. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Сегментът $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ е дефиниционната област на функцията. Намираме $\rho' = 3\cos 3\theta$, и се получава, че $\rho' = 0$, $\cos 3\theta = 0$ за $3\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. За $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ $\rho' \geq 0$ и за $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ $\rho' \leq 0$. Следователно за $\theta = \frac{\pi}{6}$ функцията има локален максимум и $\rho_{max} = \rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. От периодичността на функцията $L = \frac{2\pi}{3}$ осите на симетрия на графиката се получават за стойности на θ $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ и $\theta_3 = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$. Графиката на функцията е показана на фигура 6.13.



Фиг. 6.13: Графика на функцията $\rho = \sin 3\theta$

Задача 6.91: Да се изследва изменението и построи графиката на функцията $\rho = \frac{1}{\theta}$ (хиперболична спирала).

Решение: Дефиниционната област на функцията е $(0, +\infty)$. От $\lim\limits_{\theta\to\infty} \dfrac{1}{\theta} = 0$ се получава, че $r = 0$ е асимптотична точка за графиката. Тъй като $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1}{\theta} = \infty$, то очакваме функцията да има асимптота. Определяме $\lim\limits_{\theta\to 0} \theta.f(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\theta} = 1$. В случая $\alpha = 0$ и от (6.16) намираме, че $y = 1$ е уравнението на асимптотата към графиката на функцията. Намираме $y' = -\dfrac{1}{\theta^2}$ и получаваме, че функцията няма екстремум и е намаляваща в цялата си дефиниционна област. Графиката е начертана на фигура 6.14.



Фиг. 6.14: Графика на функцията $\rho = \dfrac{1}{\theta}$

Задача 6.92: Да се изследват и начертая графиките на розите:

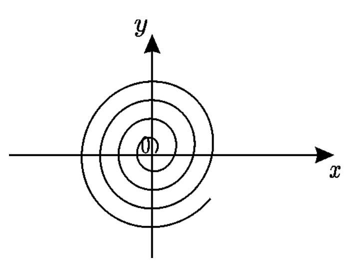
$$\text{а)}\quad \rho = \sin 2\theta; \quad \text{б)}\quad \rho = \sin \frac{5}{3}\theta.$$

Задача 6.93: Да се изследват и начертаят графиките на кривите:

а) $\rho = \theta$ (архимедова спирала) (фиг. 6.15);

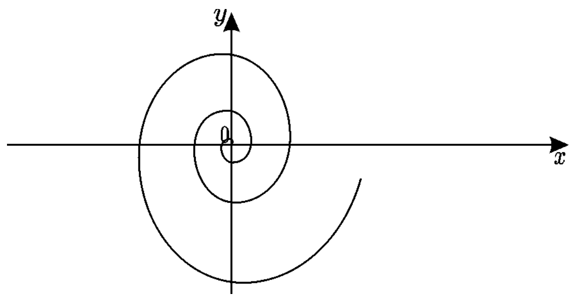
б) $\rho = e^{2\theta}$ (логаритмична спирала) (фиг. 6.16);

в) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$ (жезъл) (фиг. 6.17).

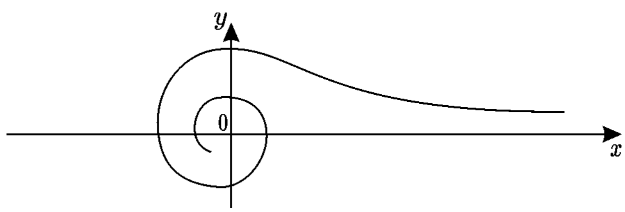


Фиг. 6.15: Архимедова спирала $\rho = \theta$

Задача 6.94: Да се изследват и начертаят графиките на майските бръмбари:



Фиг. 6.16: Логаритмична спирала $\rho = e^{2\theta}$



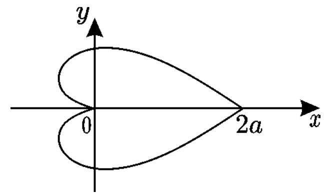
Фиг. 6.17: Жезъл $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$

а) $(\rho - \cos\theta)^2 - 36\cos^2 2\theta = 0$;
б) $(\rho - \cos\theta)^2 - \cos^2 2\theta = 0$;
в) $(\rho - \cos\theta)^2 - \frac{4}{81}\cos^2 2\theta = 0$.

Понякога е за предпочитане кривите с декартови уравнения от вида $f(x, y) = 0$ да се изследват в полярни координати. Полярното уравнение се получава, като се заменят x и y съответно с $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$. Този преход е особено удобен, когато в f се среща групата $x^2 + y^2$. Но $x^2 + y^2 = \rho^2$, което води до значително опростяване на аналитичния израз на функцията.

Задача 6.95: Да се изследва изменението и начертае графиката на кардиоидата
$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad a > 0.$$

Решение: Ще преминем към полярни координати, като положим $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$. Заместваме x и y във формулата $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ и получаваме
$$(\rho^2 - a\rho\cos\theta)^2 = a^2\rho^2, \quad \rho - a\cos\theta = \pm a,$$



Фиг. 6.18: Графика на кривата с уравнение $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2),\ a > 0$ (кардиоида)

$$\rho_1 = a + a\cos\theta, \quad \rho_2 = -a + a\cos\theta.$$

Но за всяка реална стойност на θ имаме, че $\rho_2 \leq 0$, затова ще разгледаме само функцията

$$\rho = a + a\cos\theta.$$

Функцията е периодична с период $l = 2\pi$, затова ще смятаме, че $\theta \in [0, 2\pi]$. Намираме първата производна $\rho' = -a\sin\theta$. Уравнението $\rho' = 0$ има корени $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, и $\theta_3 = 2\pi$. Имаме, че за $\theta \in [0, \pi]$ $\rho' < 0$ и за $\theta \in [\pi, 2\pi]$ $\rho' > 0$. Следователно $\rho_{min} = \rho(\pi) = 0$. Имаме, че $\rho(0) = \rho(2\pi) = 2a$. На фиг. 6.18 е построена графиката на кривата.

Задача 6.96: Да се изследва изменението и начертае графиката на лемнискатата на Бернули (панделка)

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad a > 0.$$

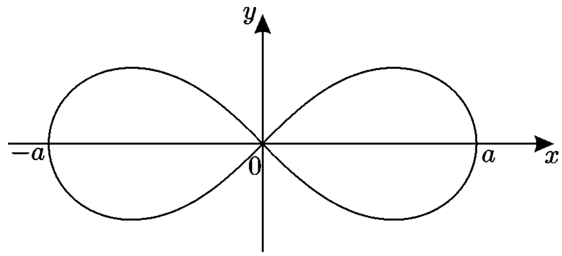
Решение: Ще преминем към полярни координати, като положим $x = \rho\cos\theta$ и $y = \rho\sin\theta$. Заместваме x и y в декартовото уравнение на лемниската, и се получава, че тя има уравнение в полярни координати от вида

$$y = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Дефиниционната област е $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, функцията е периодична с период $l = \pi$. Намираме първата производна

$$\rho' = \frac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Уравнението $\rho' = 0$ има корен $\theta_1 = 0$, за $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ имаме, че $\rho' \geq 0$, за $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ имаме, че $\rho' \leq 0$, следователно $\rho_{max} = \rho(0) = a$. Освен това в двата края на дефиниционната област е изпълнено, че $\rho\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{4}\right) =$



Фиг. 6.19: Лемниската на Бернули $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ a>0$

0. В сегмента $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ се получава първият лист на лемниската, който периодично с период $l=\pi$ се размножава и се получава още един лист в сегмента $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. На фиг. 6.19 е построена графиката на кривата.

Задача 6.97: Да се изследва изменението и начертаят графиките на функциите:

а) строфоида: $y^2 = x^2 \cdot \dfrac{1+x}{1-x}$;
б) цисоида на Диоклес: $y^2(4-x) = x^3$;
в) декартов лист: $x^3+y^3-3xy=0$.

6.2.7 *Изследване на криви, зададени параметрично*

Кривите се задават параметрично с двойка уравнения от вида

$$x = f(t), \quad y = g(t). \tag{6.19}$$

Кривите от вида (6.19) се изследват, като се изследва поотделно всяка една от функциите $x=f(t)$ и $y=g(t)$, след което получената информация се обедини.

При $\lim\limits_{t\to\tau} f(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to\tau} g(t) = \eta$, кривата $y=\eta$ е *хоризонтална асимптота* на кривата (6.19).

При $\lim\limits_{t\to\tau} f(t) = \xi$ и $\lim\limits_{t\to\tau} g(t) = \infty$, правата $x=\xi$ е *вертикална асимптота* на кривата (6.19).

Когато $\lim\limits_{t\to\tau} f(t) = \lim\limits_{t\to\tau} g(t) = \infty$, около τ може да съществува *наклонена асимптота*. Когато границите

$$\lim_{t\to\tau} \frac{f(t)}{g(t)} = k, \quad \lim_{t\to\tau}(g(t)-kf(t)) = n$$

съществуват, то наклонената асимптота има уравнение $y=kx+n$.

Една характерна особеност на параметрично зададена крива е възможността да съществуват *двойни точки.* Една точка (ξ, η) от кривата (6.19) се нарича двойна точка когато се получава за две различни стойности на параметъра t, т. е. те се намират като решение на системата

$$f(t_1) = f(t_2), \quad g(t_1) = g(t_2), \quad t_1 \neq t_2.$$

Задача 6.98: Да се построи графиката на функцията

$$x = \frac{t^2+1}{4(1-t)}, \quad y = \frac{t}{1+t}. \tag{6.20}$$

Решение: Функциите (6.20) са определени за $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Ще покажем поведението на x и y в краищата на интервалите, в които се изменя параметърът t. Имаме, че $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = 1$, откъдето се получава, че $y = 1$ е хоризонтална асимптота към графиката на функцията. Имаме, че $\lim\limits_{t\to1-0} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to1+0} x(t) = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to1} y(t) = \dfrac{1}{2}$, откъдето се получава, че $y = \frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота към графиката на функцията.

Ще ни бъде удобно да съставим таблица на изменение на величините x и y в зависимост от изменението на t, и някои характерни стойности на x и y. Получаваме таблица 6.3

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$-$	$\frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1

Табл. 6.3:

В сила са равенствата

$$x'_t = \frac{1+2t-t^2}{4(1-t)^2}, \quad y'_t = \frac{1}{(1+t)^2}, \quad x'_y = \frac{x'_t}{y'_t} = \frac{(1+t)^2(1+2t-t^2)}{4(1-t)^2}.$$

В нашият случай е по-добре да се разгледа x като функция на y, $y \neq \frac{1}{2}$, $y \neq 1$.

Имаме, че $x'_y = 0$ при $t = -1$ и когато $1 + 2t - t^2 = 0$, т. е. при $t = 1 + \sqrt{2}$ и $t = 1 - \sqrt{2}$. Стойността $t = -1$ не е от дефиниционната област на t, а при $t = 1 + \sqrt{2}$ и $t = 1 - \sqrt{2}$ имаме, че $y = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Съставяме таблица на изменение на производната x'_y и екстремалните точки (табл. 6.4)

t	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		1
x'_y	∞	$-$	0	$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞
Екстремуми					min				max		

Табл. 6.4:

От таблицата е видно, че в точката $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ функцията $x = x(y)$ има максимум, в точката $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$—минимум и е строго монотонна в интервалите $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $(1, +\infty)$.

За изследване на изпъкналостта, вдлъбнатостта и инфлексните точки на функцията намираме x''_{yy} :

$$x''_{yy} = \frac{x'_y}{t'_y} = \frac{(1+t)^3(3+3t-3t^2+t^3)}{2(1-t)^3}.$$

Производната x''_{yy} е равна на нула при $t = -1$ и когато $p(t) = 3 + 3t - 3t^2 + t^3 = 0$.

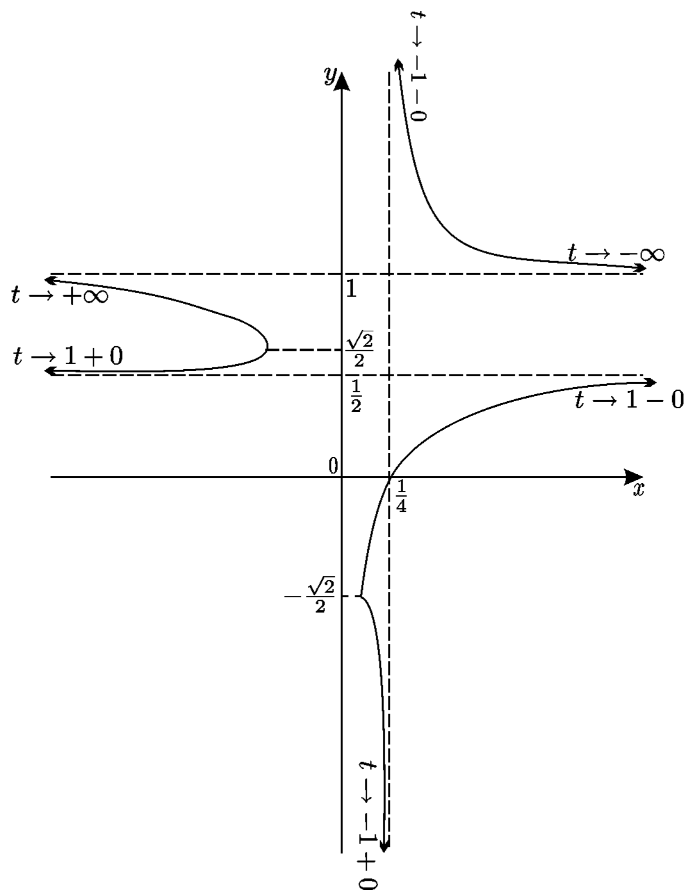
Имаме, че $p'(t) = 3(t-1)^2 \geq 0$, $p' = 0$ когато $t = 1$, следователно $p(t)$ е строго монотонно растяща над цялата реална ос. Следователно има единствено t_0, че $p(t_0) = 0$. Ако $y_0 = \dfrac{t_0}{1+t_0}$, то очевидно $-\infty < y_0 < 0$.

Съставяме таблица на изменение на производната x''_{yy} и определяме интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост на функцията, а също и инфлексните точки (табл. 6.5).

Построяваме графиката на функцията (фиг. 6.20).

t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,t_0)$	t_0	$(t_0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1,+\infty)$	∞	$(-\infty,y_0)$	y_0	$\left(y_0,\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$	1
x''_{yy}		$+$		$-$	0	$+$		$-$	
		вдлъбната		изпъкнала		вдлъбната		изпъкнала	

Табл. 6.5:



Фиг. 6.20: Графика на функцията $x = \dfrac{t^2+1}{4(1-t)}$, $y = \dfrac{t}{1+t}$

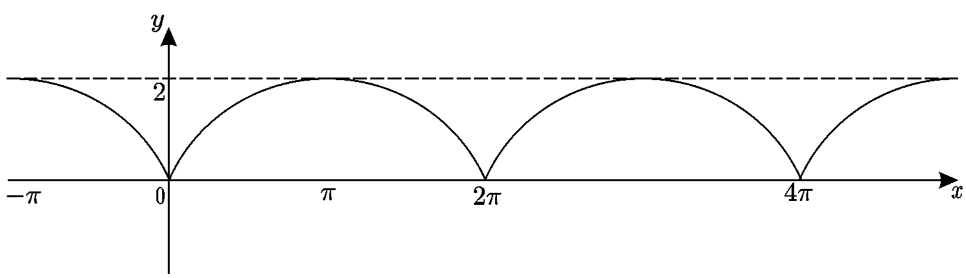
Задача 6.99: Да се изследва и построи графиката на циклоидата

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Решение: Отбелязваме следната периодичност на функцията $y(t+2\pi) = y(t)$ и $x(t+2\pi) = 2\pi + x(t)$. Затова ще смятаме, че $t \in [0, 2\pi]$. Имаме, че $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(2\pi) = 2\pi$ и $y(2\pi) = 0$. За намиране на производната y'_x ще използваме формулата

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

След това, равенството $y'_x = 0$ е възможно когато $t = 0$, $t = \pi$ и $t = 2\pi$. За $t \in (0, \pi)$ $y'_x \geq 0$ и функцията расте, за $t \in (\pi, 2\pi)$ $y'_x \leq 0$ и функцията намалява. Локалният екстремум се достига когато $t = \pi$, но тогава $x(\pi) = \pi$, $y_{max} = y(\pi) = 2$. Начертаваме графиката на циклоидата (фиг. 6.21).



Фиг. 6.21: Графика на циклоидата $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$

Задача 6.100: Да се изследва и построи графиката на декартовия лист

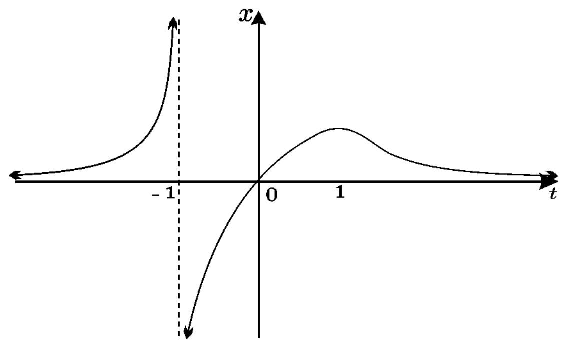
$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}. \tag{6.24}$$

Решение: Дефиниционната област за променливата t е $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Имаме, че $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to -1$, следователно е възможно да съществува наклонена асимптота. За нейното намиране изчисляваме границите $\lim\limits_{t\to-1} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-1} t = -1$, т. е. $k = -1$, $\lim\limits_{t\to-1}(y - kx) = \lim\limits_{t\to-1}\left(\dfrac{t^2}{1+t^3} + \dfrac{t}{1+t^3}\right) = \lim\limits_{t\to-1} \dfrac{t}{1-t+t^2} = -\dfrac{1}{3}$. Получаваме, че наклонена асимптота съществува и нейното уравнение е $y = -x - \frac{1}{3}$.

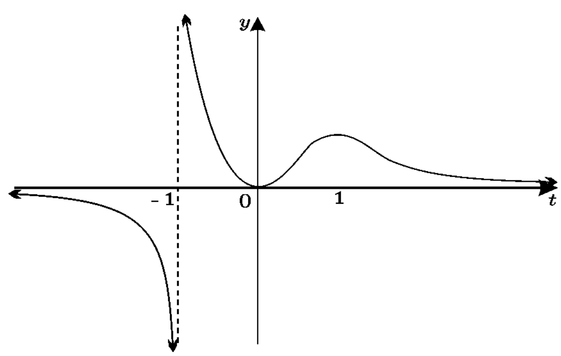
Намираме производните

$$x'_t = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

Производната x'_t се анулира за $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и си изменя знака от $+$ на $-$, значи това е точка на локален максимум. Производната y'_t се анулира при $t = 0$ и си изменя знака от $-$ на $+$, значи това е точка на локален минимум, и при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ си изменя знака от $+$ на $-$, значи това е точка на локален максимум. От тези забележки следва, че графиките на функциите $x(t)$ и $y(t)$ имат вида, показан съответно на фиг. 6.22 и фиг. 6.23.



Фиг. 6.22: Графика на функцията $x = \dfrac{t}{1+t^3}$

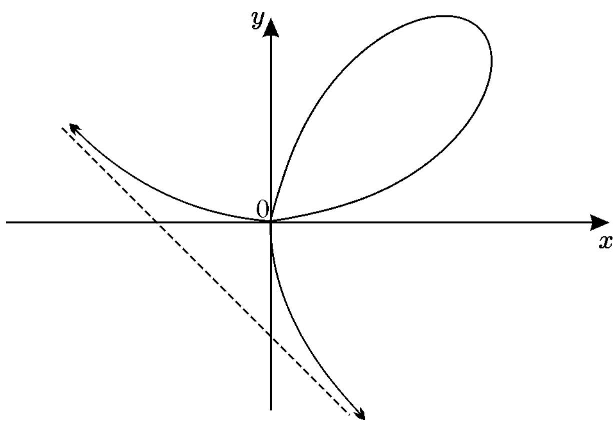


Фиг. 6.23: Графика на функцията $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$

Имаме равенството

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Получаваме следните резултати: $y'_x = 0$ за $t = 0$ и $t = \sqrt[3]{2}$, т. е. в точките $(0,0)$ и $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ допирателната към графиката е успоредна на оста Ox; $y'_t = \infty$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $t = +\infty$, т. е. в точките $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ и $(0,0)$ допирателната към графиката е успоредна на оста Oy. Точката $(0,0)$ се явява точка на самопресичане и съответства на стойности на параметъра $t=0$ и $t=\infty$. Получаваме графиката на функцията, изобразена на фиг. 6.24. Графиката на тази функция се нарича декартов лист.



Фиг. 6.24: Графика на декартовия лист $x = \dfrac{t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$

Функциите (6.24) удовлетворяват равенството $x^3 + y^3 - xy = 0$, което е неявното задаване на декартовия лист.

Задача 6.101: Да се изследват и начертаят графиките на кривите:

а) $x = 2t - \sin t$, $y = 2 - \cos t$ (скъсена циклоида);
б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - 2\cos t$ (удължена циклоида);
в) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;
г) $x = t - e^{-t}$, $y = 2t - e^{-2t}$;
д) $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$;
е) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ (хипоциклоида);
ж) $x = 4\cos t - \cos 4t$, $y = 4\sin t + \sin 4t$ (епициклоида).

7. ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

7.1 Неопределен интеграл. Непосредствено интегриране

Дефиниция 7.1: *Нека функцията f е определена над някой краен или безкраен интервал Δ, т. е. интервал (a, b), полуинтервал (a, ∞), или $(-\infty, b)$, или безкрайната права $(-\infty, +\infty)$. Функцията F, определена над Δ се нарича примитивна функция (или просто примитивна) за функцията f, ако тя е диференцируема във всяка точка x от този интервал и $F'(x) = f(x)$, за всяко $x \in \Delta$.*

Забележка: Може да се въведе понятието примитивна функция за функцията f и в сегмента $[a, b]$, като такава функция F, която има производна F' във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$, равна на f, и още, че има дясна производна $F'(a+0)$, равна на $f(a)$, и лява производна $F'(b-0)$, равна на $f(b)$.

Примери:

1) Функцията $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ е примитивна функция за функцията $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервала $(-1, 1)$, тъй като за всяко $x \in (-1, 1)$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Функцията $F(x) = \ln x$ е примитивна функция за функцията $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в полуинтервала $(0, \infty)$, тъй като за всяко $x \in (0, \infty)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

3) Функцията $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ е примитивна функция за функцията $f(x) = x^2$ в интервала $(-\infty, +\infty)$, тъй като за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Когато една функция $f(x)$ има поне една примитивна $F(x)$ в някой интервал, то тя има и безбройно много примитивни в този интервал, тъй като всяка функция от вида $F(x) + C$, където C е константа, ще бъде също примитивна на $f(x)$.

Дефиниция 7.2: *Множеството от всички примитивни функции на дадена функция в интервала* Δ *се нарича* **неопределен интеграл** *от функцията* f *в този интервал и произволен елемент на това множество се означава със символа*

$$\int f(x)dx.$$

От определението за неопределен интеграл непосредствено следват следните свойства:

I. Операциите диференциране и интегриране са обратни операции в следния смисъл

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \tag{1}$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \tag{2}$$

$$\int df(x) = f(x) + C; \quad \int f'(x)dx = f(x) + C; \tag{3}$$

II. Интегралът от алгебрична сума на няколко функции е равен на алгебричната сума на интегралите от отделните събираеми

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx; \tag{4}$$

III. Константите могат да се изнасят пред знака за интеграл

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx. \tag{5}$$

IV. Видът на интеграла не се изменя, ако независимата променлива x се замени с произволна диференцируема функция на x. Това правило означава следното: Нека да имаме интегралът

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

и нека $u = u(x)$ е диференцируема функция на x. Тогава е в сила формулата

$$\int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + c.$$

Това свойство се нарича *инвариантна* форма на интегрирането.

Намирането на примитивна функция на дадена функция $f(x)$ се нарича *интегриране* на $f(x)$. В основата на интегрирането на функции, или както се казва пресмятането на неопределените интеграли лежи следната таблица:

Основни (таблични) интеграли

(1) $$\int 0dx = C.$$

(2) $$\int 1dx = x + C.$$

(3) $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \quad \alpha \neq -1.$$

(4) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

(5) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 1 \neq a > 0, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

(6) $$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

(7) $$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

(8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

(9) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg} x + C, \quad x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

$$\int \mathrm{sh} dx = \mathrm{ch} x + C. \tag{10}$$

$$\int \mathrm{ch} dx = \mathrm{sh} x + C. \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C. \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{coth} x + C. \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C. \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = \frac{1}{a} \mathrm{Arcth} \frac{x}{a} + C, \quad |x| > a. \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C = \frac{1}{a} \mathrm{Arth} \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a. \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|. \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|, \quad |x| > |a|. \tag{18}$$

Формулите (1) ÷ (18) от табличните интеграли могат да се докажат, като се покаже, че производната на функцията в дясната страна, е равна на подинтегралната функция на интеграла в лявата страна на тези равенства.

Навярно формулата (4) ще предизвика удивление от факта, че вместо $\ln x$ се поставя $\ln |x|$. Това разширява прилагането на формулата (4) и за отрицателни стойности на x. Ако $x > 0$, то формулата (4) е очевидна. Ако $x < 0$, то $|x| = -x$ и

$$(\ln |x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

и следователно, и в този случай $\ln|x|$ служи за примитивна функция на функцията $\frac{1}{x}$. Много често формулата (4) се прилага без модул под знак за логаритъм. Ако при прилагането на формулата (4) имаме отрицателни величини, то логаритъмът винаги трябва да се взема от модулът на тези величини. Аналогична забележка важи и за формулите (15), (16) и (18).

Съгласно свойството инвариантност на интегрирането, имаме, че ако

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{то} \quad \int f(u)du = F(u) + C,$$

където $u = u(x)$ е произволна диференцируема функция на x. Следователно табличните интеграли остават в сила, ако на мястото на x се постави произволна диференцируема функция u на x.

Задача 7.1: Да се реши интегралът

$$\int (5x^2 + 3x + 1)dx.$$

Решение: Като се използват свойствата на интегралите и табличните интеграли последователно се получава

$$\int (5x^2 + 3x + 1)dx = 5\int x^2dx + 3\int xdx + \int 1dx = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

Задача 7.2: Да се реши интегралът

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx.$$

Решение: В сила са равенствата

$$\begin{aligned} &\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx \\ &= 5\int \cos x dx + 2\int dx - 3\int x^2dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\text{arctg}x + C. \end{aligned}$$

Задача 7.3: Да се реши интегралът

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$$

Решение: Преобразуваме подинтегралната функция по следния начин:

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int (x^{-1}-1)^2 dx$$

$$= \int x^{-2}dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

Задача 7.4: Да се реши интегралът

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Решение: В числителя на подинтегралната функция ще прибавим и извадим 1, и се получава

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \mathrm{arctg} x + C.$$

Задача 7.5: Да се пресметнат интегралите:

а) $\int (2x+1)dx$; б) $\int (3x^2+2x-1)dx$; в) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)dx$;

г) $\int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx$; д) $\int x^2(x^2-1)dx$; е) $\int (3e^x - \sqrt[3]{x^2})dx$;

ж) $\int \left(-\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)dx$; з) $\int \left(4\cos x - \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx$;

и) $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)dx$; й) $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$; к) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$;

л) $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$; м) $\int \frac{2x^4-3x^3-x^2+1}{x^2+1}dx$; н) $\int \frac{x^5-x+3}{x^2-1}dx$;

о) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; п) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;

р) $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$; с) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Отговори: а) x^2+x+C; б) x^3+x^2-x+C; в) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln|x|+C$; г) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+C$; д) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+C$; е) $3e^x-\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$; ж) $\cos x+\frac{3}{2}\text{arcsin}x+C$; з) $4\sin x-\frac{1}{3}\text{arcsin}x+C$; и) $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}+C$; й) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; к) $x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; л) $\frac{x^3}{3}-x+\text{arctg}x+C$; м) $\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+4\text{arctg}x+C$; н) За да решим този интеграл трябва числителят да се раздели на знаменателя, т. е. $\dfrac{x^5-x+3}{x^2-1}=x^3+x+\dfrac{3}{x^2-1}$. Чрез почленно интегриране на това равенство се получава $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$; о)$-\text{cotg}x-\text{tg}x+C$; п) Числителят на подинтегралния израз може да се представи във вида $dx=1.dx=(\cos^2 x+\sin^2 x).dx$. Чрез деление числителя на знаменателя последователно се получава

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\sin^2\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\text{coth}x+\text{tg}x+C;$$

р) $\pm(\sin x+\cos x)+C$; с) $\text{arcsin}x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C$.

7.2 Внасяне под знака на диференциал

Ако $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то е в сила равенството

$$\int f(x)\varphi'(x)dx=\int f(x)d\varphi(x). \tag{7.1}$$

Когато прилагаме това равенство, ще казваме, че *внасяме функцията $\varphi'(x)$ под знака на диференциала* или, че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция, т. е. интегрираме функцията $\varphi'(x)$. Следователно е в сила равенството

$$\int f(x)\varphi'(x)dx=\int f(x)d[\varphi(x)+C], \tag{7.2}$$

където C е произволна константа.

Като се използват равенствата (7.1) и (7.2)

$$k\int f(x)d\varphi(x)=\int f(x)d(k\varphi(x))=\int f(x)d[k\varphi(x)+C], \tag{7.3}$$

където k и C са константи, а $\varphi(x)$ е диференцируема функция.

Правило: *За да се внесе дадена функция под знака на диференциала, трябва да се реши интегралът от тази функция и полученият резултат се поставя под знака на диференциала с подходяща константа.*

Задача 7.6: Да се пресметнат интегралите

$$\text{а)} \quad \int \frac{dx}{x+a}; \quad \text{б)} \quad \int \sin 2x dx; \quad \text{в)} \quad \int \sin x \cos x dx.$$

Решение: а) За да се сведе интегралът $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}$ към табличен интеграл от вида $\displaystyle\int \frac{du(x)}{u(x)}$, където $u(x)$ е някоя функция, трябва под знака за диференциал да се появи функцията $x+a$. Но е в сила равенството $dx = d(x+a)$. Следователно за интеграла се получава

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

б) За да се приведе даденият интеграл към табличен интеграл от вида $\int \sin u(x) du(x)$, трябва под знака за диференциал да има функцията $2x$. Като се използва (7.3) се получава

$$\int \sin 2x dx = \frac{2}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d2x = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Този интеграл може да се реши и така:

$$\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx = -2 \int \cos x d \cos x$$

$$= -2 \cdot \frac{\cos^2 x}{2} + C = -\cos^2 x + C;$$

$$\int \sin 2x dx = \int 2 \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d \sin x$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + C = \sin^2 x + C.$$

На пръв поглед, трите отговора са различни. Разликата се изразява в това, какво се разбира под C. Действително,

$$-\frac{1}{2} \cos 2x + C = -\frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + C = -\cos^2 x + \frac{1}{2} + C.$$

Ако произволната константа $\dfrac{1}{2} + C$ отново я означим с C, то се получава второто решение. По този начин първото решение се различава от второто само по константа. Аналогично, първото решение чрез формулата $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ може да се преобразува в третото, или второто решение в третото и т. н.

в) Отговор: $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$, или $\dfrac{\sin^2 x}{2} + C$.

Задача 7.7: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\ \int \frac{dx}{x-3};\quad \text{б)}\ \int \frac{dx}{5+6x^2};\quad \text{в)}\ \int (4^x + 5^x)^2 dx;$$

$$\text{г)}\ \int (e^{-x} + e^{-3x})dx;\quad \text{д)}\ \int (\cos 6x + \cos 3\alpha)dx;\quad \text{е)}\ \int \frac{dx}{1+\cos x};$$

$$\text{ж)}\ \int \frac{dx}{1-\cos x};\quad \text{з)}\ \int \frac{dx}{1+\sin x};\quad \text{и)}\ \int \frac{dx}{1-\sin x};$$

$$\text{й)}\ \int \frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}};\quad \text{к)}\ \int \frac{xdx}{9+x^4};\quad \text{л)}\ \int \sin^7 x \cos x dx;$$

$$\text{м)}\ \int \frac{\ln^3 x}{x}dx;\quad \text{н)}\ \int \frac{dx}{x\ln x};\quad \text{о)}\ \int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)};$$

$$\text{п)}\ \int \frac{dx}{\sin x};\quad \text{р)}\ \int \frac{dx}{\cos x};\quad \text{с)}\ \int \frac{dx}{x\sin^2(3+\ln x)};$$

$$\text{т)}\ \int \frac{\text{arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}dx;\quad \text{у)}\ \int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx;\quad \text{ф)}\ \int \frac{dx}{e^x+1};$$

$$\text{х)}\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}};\quad \text{ц)}\ \int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2};\quad \text{ч)}\ \int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}-2}.$$

Отговори: а) $\ln|x-3|+C$; б) $\frac{1}{\sqrt{30}}\text{arctg}\sqrt{\frac{6}{5}}x+C$; в) $\frac{16^x}{\ln 16}+\frac{2\cdot 20^x}{\ln 20}+\frac{25^x}{\ln 25}+C$; г) $-e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; д) $\frac{1}{6}\sin 6x + x\cdot\cos 3\alpha + C$; е) Прилагаме формулата $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ и получаваме

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \text{tg}\frac{x}{2} + C;$$

ж) $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$; з)$-\operatorname{tg}\left(45^o-\frac{x}{2}\right)+C$; и) $\operatorname{cotg}\left(45^o-\frac{x}{2}\right)+C$; й) Внасяме x под знака на диференциал и получаваме

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(2-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\int(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(2-x^2)=-\sqrt{2-x^2}+C;$$

к) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}+C$; л) $\frac{\sin^8 x}{8}+C$; м) Внасяме $\frac{1}{x}$ под знака на диференциала и получаваме

$$\int\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int\ln^3 x d\ln x=\frac{\ln^4}{4}+C;$$

н) $\ln|\ln x|+C$; о) За да решим интеграла $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ внасяме $\dfrac{1}{x}$ под знака на диференциала и получаваме

$$\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{\ln x\ln(\ln x)}. \tag{7.4}$$

Ще внесем и $\dfrac{1}{\ln x}$ под знака на диференциала, където вече имаме функцията $\ln x$. За целта решаваме интеграла $\displaystyle\int\frac{du}{u}$ $(u=\ln x)$. Като заместим $u=\ln x$ се получава

$$\int\frac{d\ln x}{\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)}=\ln[\ln(\ln x)]+C. \tag{7.5}$$

От (7.4) и (7.5) имаме $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\ln[\ln(\ln x)]+C$; п) Като използваме формулата $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ последователно се получава

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C; \tag{7.6}$$

р) Ще използваме следните преобразования

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(90^o-x)}=-\int\frac{d(90^o-x)}{\sin(90^o-x)}$$

$$= -\ln\left|\mathrm{tg}\frac{90^o - x}{2}\right| + C = -\ln\left|\mathrm{tg}\left(45^o - \frac{x}{2}\right)\right| + C,$$

като за получаване на последното равенство сме използвали резултата (7.6); с) $-\mathrm{cotg}(3+\ln x) + C$; т) $\frac{1}{2}(\mathrm{arcsin}x)^2 + C$; у) $\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2 + C$; ф) В сила са следните преобразования

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dx}{e^x(1+e^{-x})} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

$$= -\int \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C;$$

х) $4\sqrt{1-e^{-\frac{x}{2}}} + C$; ц) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} + C$; ч) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2x}} + C$.

7.3 Пресмятане на интеграли от вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралите от тези видове се пресмятат с отделяне на точен квадрат от тричлена ax^2+bx+c, т. е. като се използва, че

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}, \quad (a \neq 0).$$

Задача 7.8: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{2x+11}{x^2+6x+11}dx.$$

Решение: Най-напред ще намерим производната на знаменателя. Имаме, че $(x^2+6x+11)' = 2x+6$. Същият този израз $2x+6$ ще трябва да се отдели и в числителя. По този начин последователно се получава

$$\int \frac{2x+11}{x^2+6x+11}dx = \int \frac{2x+6+5}{x^2+6x+11}dx$$

$$= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx + 5\int \frac{dx}{x^2+6x+11}dx = I_1 + I_2. \tag{7.7}$$

В сила са представянията

$$I_1 = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx = \int \frac{d(x^2+6x+11)}{x^2+6x+11} = \ln(x^2+6x+11). \tag{7.8}$$

Ще отделим точен квадрат от израза $x^2+6x+11$. В сила е равенството $x^2+6x+11 = (x+3)^2+2^2$. По този начин за интеграла I_2 се получава

$$I_2 = 5\int \frac{dx}{x^2+6x+11}dx = 5\int \frac{d(x+3)}{2^2+(x+3)^2} = \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C. \tag{7.9}$$

От (7.7), (7.8) и (7.9) окончателно се намира, че

$$\int \frac{2x+11}{x^2+6x+11}dx = \ln(x^2+6x+11) + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

Интегралът I_2 може да се реши като се използва т. н. субституция на Хорнер. В общия случай субституцията на Хорнер се отнася до квадратния тричлен ax^2+bx+c и е от вида

$$x = t - \frac{b}{2a}.$$

Чрез тази субституция коефициентът пред първата степен на t се получава 0, което опростява израза в знаменателя на подинтегралната функция.

За да решим интегралът $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$ полагаме $x = t-3$. Получаваме последователно $x^2+6x+11 = (t-3)^2+6(t-3)+13 = t^2+4$, $dx = dt$ и

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C.$$

Достатъчно е да заместим в последния израз $t = x+3$ и получаваме

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$$

Задача 7.9: Да се пресметнат интегралите:

а) $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$; б) $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$; в) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$;

г) $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$; д) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$; е) $\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$;

ж) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$; з) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$; и) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$;

й) $\int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$; к) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3+x+x^2}}dx$; л) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

м) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$; н) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$; о) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx$;

п) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$.

Отговори: а) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; б) $\frac{2}{3}\ln(3x^2+2x+5) - \frac{2}{3}\ln 3 + \frac{20}{3\sqrt{14}}\ln\frac{3x+1}{\sqrt{14}} + C$; в) $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C$; г) $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2) - \frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$; д) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+5}\right| + C$; е) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3}} + C$; ж) $\operatorname{arctg}(x+3) + C$; з) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$; и) 1) Ако $b^2-4ac<0$, $I = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$; 2) Ако $b^2-4ac>0$, $I = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C$; 3) Ако $b^2-4ac=0$, $I = -\frac{2}{2ax+b} + C$; й) $-5\sqrt{5-4x-x^2} - 3\arcsin\frac{x+2}{3} + C$; к) $3\sqrt{3+x+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{3+x+x^2}\right| + C$; л) $\sqrt{x^2+x-2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-2}\right| + C$; м) $-\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$; н) В сила са последователните преобразования

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$= \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}} + a\int \frac{d\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + a.\arcsin\frac{a}{x} + C;$$

о) $\sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}\right) + C$; п) Ще извършим следните преобразования:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\cdot\frac{d(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}d\sqrt{x^2-a^2} = \int \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2+(a^2-x^2)}}d\sqrt{x^2-a^2}$$

$$= \int \frac{d\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)^2}} = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}} + C.$$

7.4 Интегриране по части

Важна техника за пресмятане на неопределените интеграли е т. н. формула за интегриране по части. Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две функции, дефинирани и непрекъснато диференцируеми в някой интервал Δ. Тогава е в сила равенството

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx \tag{7.10}$$

Равенството (7.10) се нарича *формула за интегриране по части.* На практика, за да се пресметне интегралът в лявата страна на равенството (7.10), трябва да се пресметне интегралът в дясната му страна. Обикновено вторият интеграл е по-достъпен за пресмятане.

За да се приложи формулата за интегриране по части, необходимо е в подинтегралния израз да се направи подходящ подбор на функциите u и v. Обикновено, интегрирането по части се предхожда от предварително внасяне под знака на диференциала на част от подинтегралната функция.

Задача 7.10: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int \ln x dx; \quad \text{б)} \int x \ln x dx; \quad \text{в)} \int x \cos x dx;$$

$$\text{г)} \int x e^{2x} dx; \quad \text{д)} \int e^x \sin x dx.$$

Решение: а) Ще пресметнем интегралът $\int \ln x dx$. В този интеграл смятаме, че $u(x) = \ln x$, а функцията $v(x) = x$. Използваме формулата (7.10) и получаваме

$$\int \ln x dx = x.\ln x - \int x.(\ln x)'dx = x.\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x.\ln x - x + C;$$

б) Ще решим интегралът

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 (\ln x)'dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C;$$

в) Ще решим интегралът

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x.\sin x - \int \sin x dx = x\cdot\sin x + \cos x + C;$$

г) Ще решим интегралът

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int xe^{2x}d2x = \frac{1}{2}\int xde^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}d2x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C;$$

д) Нека да въведем означението $I = \int e^x \sin x dx$. Последователно се получава

$$I = \int e^x\sin x dx = \int \sin x de^x = e^x\sin x - \int e^x\cos x dx$$

$$= e^x\sin x - \int \cos x de^x = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x dx$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - I.$$

От последното равенство намираме, че $2I = e^x(\sin x - \cos x)$, откъдето се получава, че

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Задача 7.11: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\quad \int\sqrt{a^2+x^2}dx \;\; \text{в интервала} \;\; (-\infty,\infty);$$

$$\text{б)}\quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx \;\; \text{в интервала} \;\; (-a,a);$$

$$\text{в)}\quad \int\sqrt{x^2-a^2}dx \;\; \text{в интервалите} \;\; (-\infty,-a) \;\; \text{и} \;\; (a,+\infty), \quad a>0.$$

Решение: а) Ще пресметнем подробно първият интеграл. Другите два интеграла се пресмятат по аналогичен начин. Нека да положим $I = \int\sqrt{a^2+x^2}dx$. Последователно се получава

$$I = \int\sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| - I.$$

По този начин се получава равенството

$$2I = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|,$$

откъдето се намира, че

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|\right] + C;$$

Отговори: б) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right] + C$; в) $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right] + C$.

Задача 7.12: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$$

Решение: Ще направим подходящи преобразования в подинтегралната функция и ще използваме формулата за интегриране по части. Последователно се получава

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.xdx}{(a^2+x^2)^2}$$
$$= \frac{1}{a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{xd(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int xd\frac{1}{a^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= \frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} + C.$$

Задача 7.13: Нека n е цяло положително число и a е константа. Да се пресметне интегралът

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Решение: Пресмятането на интеграла I_n може се сведе към пресмятането на интеграла I_{n-1} :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n} \\ &= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x(a^2+x^2)^{-n}d(a^2+x^2) \\ &= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2(-n+1)a^2}\int xd(a^2+x^2)^{-n+1} \\ &= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right] \\ &= \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

И така, получихме следната рекурентна връзка

$$I_n = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Като приложим този метод $n-1$ пъти, ще изразим I_n в крайна сметка посредством интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$, който се пресмята непосредствено.

Ако подинтегралната функция е произведение от логаритмична или обратна тригонометрична функция и алгебрична функция (полином), то за u обикновено се приема $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arccotg} x$ и $\ln x$. Ако подинтегралната функция е произведение от тригонометрична или показателна функция и алгебрична функция, то за u обикновено се приема алгебричната функция.

Задача 7.14: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\ \int xe^x dx;\quad \text{б)}\ \int x^2e^{-x}dx;\quad \text{в)}\ \int x\sin 2x dx;$$

$$\text{г)}\ \int x\sin^2 x dx;\quad \text{д)}\ \int x\cos x dx;\quad \text{е)}\ \int x.\arcsin x dx;$$

$$\text{ж)}\ \int \mathrm{arctg} x dx;\quad \text{з)}\ \int x.\mathrm{arctg} x dx.$$

Решение: а) $xe^x - e^x + C$; б) $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C$; в) $-\dfrac{1}{2}x\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$; г) Ще използваме формулата $\sin^2 x = \dfrac{1-\sin 2x}{2}$. За интеграла се получава

$$\int x.\sin^2 x dx = \int x \cdot \frac{1-\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\sin 2x dx$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C;$$

д) $x\sin x + \cos x + C$; е) Следвайки по-горните указания трябва функцията x да се внесе под знака на диференциал, за да се получи

$$\int x.\text{arcsin}x dx = \frac{1}{2}\int \text{arcsin}x dx^2 = \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\text{arcsin}x.$$

Съгласно задача 6.11 б) имаме, че

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsin}x\right).$$

По този начин се получава, че

$$\int x.\text{arcsin}x dx = \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsin}x\right) - \frac{1}{2}\text{arcsin}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\text{arcsin}x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\text{arcsin}x + C;$$

ж) $x.\text{arctg}x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$; з) $\dfrac{1}{2}x^2\text{arctg}x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\text{arctg}x + C$.

7.5 Пресмятане на интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Задача 7.15: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int \sin^2 x dx; \quad \text{б)} \int \cos^2 x dx; \quad \text{в)} \int \sin^4 x dx; \quad \text{г)} \int \cos^4 x dx;$$

$$\text{д)} \int \sin^3 x dx; \quad \text{е)} \int \cos^3 x dx; \quad \text{ж)} \int \sin^7 dx; \quad \text{з)} \int \cos^7 x dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad \text{й)} \int \frac{dx}{\cos^3 x}; \quad \text{к)} \int \frac{dx}{\sin^4 x}; hbox) \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Решение: От формулите $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ се получават равенствата

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \tag{7.11}$$

които се наричат формули за понижаване на степента.

а) Използваме първата от формулите (7.11) и се получава

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

б) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$; в) В сила са равенствата

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x.$$

Ще използваме втората формула на (7.11) и получаваме

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Тогава интегралът се решава по следния начин:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$$

г) $\dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{32}\sin 4x + C$; д) Ще използваме представянето

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x . \sin x dx$$

$$= -\int \sin^2 x d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x) d\cos x$$

$$= -\int d\cos x + \int \cos^2 x d\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C;$$

е) $\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$; ж) $-\cos x + \cos^3 x - \dfrac{3}{5}\cos^5 x + \dfrac{1}{7}\cos^7 x + C$; з) $\sin x - \sin^3 x + \dfrac{3}{5}\sin^5 x - \dfrac{1}{7}\sin^7 x + C$; и) Ще използваме представянето

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \int \frac{\cos x . \cos x}{\sin^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\cos x d \sin x}{\sin^3 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos x d\frac{1}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}. \tag{7.12}$$

В равенството (7.6) беше показано, че

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \tag{7.13}$$

От (7.12) и (7.13) се получава, че

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

й) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(45^o - \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$; к) $-\mathrm{cotg} x - \dfrac{1}{3}\mathrm{cotg}^3 x + C$; л) $\mathrm{tg} x + \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C$;

Задача 7.16: Нека $m = 2, 3, \ldots$ да бъде произволно цяло. Да се докажат тъждествата:

а) $$\int \sin^m x dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x\cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx;$$

б) $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1}\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x};$$

в) $$\int \cos^m x dx = \frac{1}{m}\sin x \cos^{m-1} x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x dx;$$

г) $$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \frac{1}{m-1}\frac{\sin x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\cos^{m-2} x}.$$

Задача 7.17: Нека m и n са произволни цели числа. Да се пресметне интегралът

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx. \tag{7.14}$$

Решение: Ще разгледаме различните случаи, в зависимост от стойностите на m и n. Ако $m = 1$ или $n = 1$ пресмятането на интеграла $I_{m,n}$ е непосредствено. Наистина имаме

$$I_{m,1} = \int \sin^m x \cos x dx = \int \sin^m x d \sin x$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x + C, & \text{при} \quad m \neq -1 \\ \ln|\sin x| + C, & \text{при} \quad m = -1, \end{cases}$$

$$I_{1,n} = \int \sin x \cos^n x dx = -\int \cos^n x d \cos x$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C, & \text{при} \quad n \neq -1 \\ -\ln|\cos x| + C, & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$$

Ако поне един от степенните показатели m и n е нечетно число, например $n = 2k + 1$, където k е цяло положително число, то работим по следния начин:

$$I_{m,2k+1} = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d \sin x.$$

Като развием $(1 - \sin^2 x)^k$ по формулата за нютоновия бином, ще представим $I_{m,2k+1}$ като сума от интеграли от вида $I_{s,1}$.

Аналогично постъпваме с интегралите от вида $I_{2k+1,n}$, които пък представяме като сума на интеграли от вида $I_{1,s}$.

Като пример ще решим интегралът

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int \sin^6 x \cos^4 x d \sin x = \int \sin^6 x (1-\sin^2 x)^2 x d \sin x$$

$$= \int \sin^6 x d \sin x - \int \sin^8 x d \sin x + \int \sin^{10} x d \sin x$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{9}\sin^9 x + \frac{1}{11}\sin^{11} x + C.$$

Ние ще посочим начините за получаване на три рекурентни формули, с помощта на които можем да доведем пресмятането на интеграла (7.14) до някой от разгледаните да сега типове интеграли.

I. При $m \neq -1$ преобразуваме интеграла по следния начин:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{n-1} x d \sin x = \frac{1}{m+1}\int \cos^{n-1} x d \sin^{m+1} x$$

$$= \frac{1}{m+1}\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x - \frac{1}{m+1}\int \sin^{m+1} x d \cos^{n-1} x$$

$$= \frac{1}{m+1}\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx.$$

По този начин се получава рекурентното равенство

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+1}\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}.$$

Аналогично при $n \neq -1$ получаваме рекурентното равенство

$$I_{m,n} = \frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n+2}.$$

II. Можем да преобразуваме $I_{m,n}$ по следния начин:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{m-2} x (1-\cos^2 x)\cos^n x dx,$$

откъдето се получава рекурентното равенство

$$I_{m,n} = I_{m-2,n} - I_{m-2,n+2}.$$

По аналогичен начин може да се докаже, че е в сила следното рекурентно равенство

$$I_{m,n} = I_{m,n-2} - I_{m+2,n-2}.$$

III. Когато $m \leq 0$ и $n \leq 0$ може да се работи по следния начин

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^n x(sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx + \int \sin^m x \cos^{n+2} x dx,$$

откъдето се получава рекурентното равенство

$$I_{m,n} = I_{m+2,n} + I_{m,n+2}.$$

7.6 Интегриране чрез смяна на променливата

Един метод, който често се използва при пресмятането на неопределени интеграли е т. н. интегриране чрез смяна на променливите, или интегриране чрез субституция. Този метод се основава на следната теорема:

Теорема 7.1: *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала Δ, а функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцируема в интервала Δ_1, като при това производната ѝ $\varphi'(t)$ е строго положителна (отрицателна) в интервала Δ_1. Да смятаме още, че множеството от стойностите на функцията $\varphi(t)$ съвпада с Δ. Ако за интервала Δ_1 е изпълнено равенството*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C,$$

то за интервала Δ имаме

$$\int f(x)dx = F[\psi(x)] + C,$$

където $\psi(x)$ е обратната функция на функцията $\varphi(t)$.

Теоремата за смяна на променливата ще използваме по следния начин: Когато желаем да пресметнем интегралът

$$\int f(x)dx$$

се подбира функцията $\varphi(t)$, удовлетворяваща условието на теорема 7.1 и се получава интегралът

$$\int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

който обикновено е по-лесен за решаване. След като пресметнем интегралът $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ се връщаме отново към старата променлива x, като в полученият резултат $F(t)$, заместваме t с функцията $\psi(x)$, обратна на функцията $\varphi(t)$.

Обикновено при решаване на задачи от този тип казваме, че извършваме субституцията $x = \varphi(t)$.

Задача 7.18: Да се пресметне интегралът

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a > 0, \quad \text{в интервала} \ \ (-a, a).$$

Решение: Да направим субституцията $x = a\sin t$, където t се мени в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В този интервал имаме $(a\sin t)' = a\cos t > 0$. Лесно се проверява, че условията на теоремата за смяна на променливата са изпълнени. Тогава ще имаме

$$F(t) = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}da\sin t = a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt$$

$$= a^2\int|\cos t|\cos tdt = a^2\int\cos^2 tdt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int\cos 2td2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}. \tag{7.15}$$

Обратната функция на функцията $x = a\sin t$ е $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$, дефинирана в интервала $(-a, a)$. Заместваме $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ в равенството (7.15). Като вземем предвид, че $\sin t = \sin\arcsin\dfrac{x}{a} = \dfrac{x}{a}$ се получава

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Задача 7.19: Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}, \quad a > 0, \quad \text{в интервала} \ \ (-\infty, +\infty).$$

Решение: Да направим субституцията $x = a.\mathrm{tg}t$, където t се мени в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тук имаме $(a.\mathrm{tg}t)' = \dfrac{a}{\cos^2 t} > 0$. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{d(a.\mathrm{tg}t)}{(a^2 + a^2\mathrm{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2a^3}t + \frac{1}{4a^3}\sin 2t + C. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Обратната функция на $x = a.\mathrm{tg}t$ е функцията $t = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$, дефинирана за всяко x. Заместваме в равенството (7.16) $t = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$ и получаваме

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + a\cdot\frac{x}{a^2+x^2}\right).$$

Задача 7.20: Да се пресметнат интегралите

$$\text{а)} \quad \int \frac{dx}{x^2-3x+4}; \quad \text{б)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} \quad \text{при} \quad x > 1.$$

Решение: а) Да направим субституцията $x = t + \dfrac{3}{2}$ (това на практика е субституцията на Хорнер), откъдето намираме $x^2 - 3x + 4 = t^2 + \dfrac{7}{4}$, $dx = dt$. За интеграла са в сила равенствата

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+4} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}} + C.$$

Тъй като $t = x - \dfrac{3}{2}$, то получаваме окончателно

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+4} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}} + C;$$

б) $\ln|x + 1 + \sqrt{x^2+2x-3}| + C$.

Задача 7.21: Да се пресметнат интегралите

$$\text{а)} \quad \int \sqrt{a^2+x^2}dx, \quad a>0; \quad \text{б)} \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad a>0;$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad a>0; \quad \text{г)} \quad \int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^3}dx, \quad a>0.$$

Възможно е да бъдат направени следните полагания: а) $x = a\mathrm{tg}t$, може да се използва и полагането $x = a\mathrm{sh}t$; б) $x = a\mathrm{tg}t$, или $x = a\mathrm{sh}t$; в) $x = a\cos t$, или $x = a\sin t$; г) $x = a\mathrm{tg}t$, или $x = a\mathrm{sh}t$. Ще се получат следните отговори: а) $\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln a + C$; (константата $-\frac{a^2}{2}\ln a$ може да се изпусне); б) $\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$; в) $\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$; г) $\dfrac{x^4}{4a^2(a^2+x^2)^2} + C$.

7.7 Интегриране на рационални функции

Дефиниция 7.3: *Дроб от вида*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

където коефициентите $a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$ *са реални числа и* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, *се нарича рационална функция.*

Ако степента на полинома в числителя е по-малка от степента на полинома в знаменателя, рационалната дроб се нарича правилна. В противен случай, рационалната дроб се нарича неправилна.

Рационалните дроби от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

където a, p, q, A, M и N са реални числа, k е цяло положително число и квадратният тричлен $x^2 + px + q$ няма реални корени (т. е. $p^2 - 4q < 0$), се наричат елементарни дроби.

Ако степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя, чрез деление числителя на знаменателя, отделяме цялата част и получаваме правилна рационална функция, т. е. в сила е представянето

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

където $S(x)$ и $R(x)$ са полиноми, при това степента на $R(x)$ е по-ниска от степента на $Q(x)$.

Когато се намерят всички корени на уравнението $Q(x) = 0$, полиномът $Q(x)$ може да се разложи така

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{r_j},$$

където за $1 \le \tau \le j$ $p_\tau^2 - 4q_\tau < 0$ и $k_1 + \ldots + k_i + 2r_1 + \ldots + 2r_j =$степента на полинома $Q(x)$.

В това разлагане на $Q(x)$ биномните множители съответстват на реалните корени на уравнението $Q(x) = 0$, а неразложимите квадратни тричлени от вида $x^2 + px + q$- на спрегнатите комплексни корени на уравнението $Q(x) = 0$.

Теорема 7.2: *Всяка правилна рационална дроб*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}}$$

може да се представи еднозначно (с точност до местата на събираемите) в сума в елементарни дроби от вида

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1,1}}{x-x_1} \\ &+ \frac{A_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{A_{2,k_2-1}}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \ldots \\ &+ \frac{A_{i,k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} + \frac{A_{i,k_i-1}}{(x-x_i)^{k_i-1}} + \ldots + \frac{A_{i,1}}{x-x_i} \\ &+ \frac{M_{1,r_1}x + N_{1,r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \ldots + \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} \\ &+ \frac{M_{2,r_2}x + N_{2,r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{M_{2,1}x + N_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots \\ &+ \frac{M_{j,r_j}x + N_{j,r_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{r_j}} + \ldots + \frac{M_{j,1}x + N_{j,1}}{x^2+p_jx+q_j}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Коефициентите в равенството (7.17) могат да се определят, като се използва метода на неопределените коефициенти. Същността на този метод практично ще обясним чрез следващия пример.

Функцията $\dfrac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$ да се представи като сума от елементарни дроби.

Тук $P(x) = 1$ и $Q(x) = (x+1)^3(x-1)^2$. Уравнението $Q(x) = 0$, или $(x+1)^3(x-1)^2 = 0$ има трикратен корен -1 и двукратен корен 1. Като се има предвид, че на всеки многократен корен отговарят толкова елементарни дроби, колкото е неговата кратност, то е в сила следното представяне

$$\frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$$

$$= \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}. \tag{7.18}$$

Привеждаме под общ знаменател, освобождаваме се от него и се получава

$$1 = A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)^2+C(x+1)^2(x-1)^2+D(x+1)^3+E(x-1)(x+1)^3.$$

Извършваме означените действия в дясната страна на това тъждество и подреждаме получения полином по степените на x

$$1 = (C+E)x^4 + (B+D+2E)x^3 + (A-B-2C+3D)x^2$$

$$+(-2A-B+3D-2E)x + A+B+C+D-E. \tag{7.19}$$

За да бъде изпълнено това равенство за всяко x (тъждествено), трябва коефициентите пред равните степени на x от двете страни на равенството (7.19) да са равни, т. е. получава се системата

$$\left| \begin{array}{l} C+E=0 \\ B+D+2E=0 \\ A-B-2C+3D=0 \\ -2A-B+3D-2E=0 \\ A+B+C+D-E=1. \end{array} \right.$$

Като решим тази система се намира, че $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$, $C = \dfrac{3}{16}$, $D = \dfrac{1}{8}$, и $E = -\dfrac{3}{16}$. От (7.18) се получи разлагането

$$\frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-1}. \tag{7.20}$$

Задача 7.22: Да се представи като сума от елементарни дроби функцията $\dfrac{x^3}{(x-1)(x^3-1)}$.

Решение: Разлагаме знаменателя на множители и получаваме

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя. Представяме тази функция като сума от елементарни дроби така:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Получаваме

$$x^3 = (B+M)x^3 + (A-2M+N)x^2 + (A+M-2N)x + A - B + N.$$

От последното равенство получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} B+M=1 \\ A-2M+N=0 \\ A+M-2N=0 \\ A-B+N=0. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $M = \frac{1}{3}$ и $N = \frac{1}{3}$, и следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Задача 7.23: Да се представи като сума от елементарни дроби функцията

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3}. \tag{7.21}$$

Решение: В сила са равенствата

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3} = \frac{x+2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

Освобождаваме се от знаменателя и получаваме

$$x+2 = A(x-3) + B(x+1). \tag{7.22}$$

Функцията (7.21) не е дефинирана за $x = -1$ и $x = 3$, докато равенството (7.22) е определено за всяко x. Специално при $x = -1$ намираме $1 = -4A$, т. е. $A = -\frac{1}{4}$, а при $x = 3$ намираме $5 = 4B$, $B = \frac{5}{4}$. По този начин се получава представянето

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Задача 7.24: Да се представи като сума от елементарни дроби функцията $\dfrac{1}{x^4+1}$.

Решение: Имаме представянето

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2,$$

откъдето се получава, че

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Съгласно Теорема 7.2 е в сила представянето на функцията $\dfrac{1}{x^4+1}$ като сума от елементарни дроби във вида

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Като се освободим от знаменателя, получаваме

$$1=(Mx+N)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Px+Q)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Чрез сравняване на коефициентите се получава следната система

$$\left|\begin{array}{l} M+P=0 \\ N+Q+\sqrt{2}(P-M)=0 \\ M+P+\sqrt{2}(Q-N)=0 \\ N+Q=1. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е $M=\dfrac{1}{1\sqrt{2}}$, $P=-\dfrac{1}{1\sqrt{2}}$, $N=Q=\dfrac{1}{2}$. Окончателно се получи разлагането

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Нека $x=a$ е прост корен (еднократен корен) на уравнението $Q(x)=0$. Тогава $Q(x)$ може да се представи във вида $Q(x)=(x-a)\varphi(x)$. Съгласно Теорема 7.2, представяме $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ във вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{h(x)}{\varphi(x)},$$

където A е константа и $h(x)$ е полином. Коефициентът A се пресмята по формулата

$$A = \frac{P(a)}{Q'(a)},$$

която е известна като *формула на Остроградски-Лиувил.*

С помощта на Теорема 7.2, пресмятането на интеграли от правилни рационални дроби се свежда до пресмятането на интеграли от елементарните дроби

$$\int \frac{A}{x-a}dx, \quad \int \frac{A}{(x-a)^k}dx, \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx, \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Първите два интеграла са таблични, а другите два се решават като се направи *субституцията на Хорнер*

$$x = t - \frac{p}{2}.$$

Задача 7.25: Да се реши интегралът

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}.$$

Решение: В равенството (7.20) е получено разлагането на подинтегралната функция

$$\frac{1}{(x+1)^3(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Като се интегрира лявата и дясната страна на горното равенство се получава

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C.$$

Задача 7.26: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\quad \int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx;\quad \text{б)}\quad \int \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+3)};$$

$$\text{в)}\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}dx;\quad \text{г)}\quad \int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}dx;$$

$$\text{д)}\quad \int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}dx.$$

Отговори: а) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; б) $\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2+3}}+C$; в) $\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)+C$; г) Уравнението $(x-2)(x^2+x+1)^2=0$ има един реален корен $x_1=2$ и два двойни комплексни корена $x_{2,3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $x_{4,5}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. По този начин е в сила следното представяне на функцията $\dfrac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}$ като сума от елементарни дроби

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Px+Q}{x^2+x+1}.$$

Намираме, че $A=1$, $M=2$, $N=1$, $P=1$ и $Q=-3$, следователно

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-3}{x^2+x+1}.$$

Тогава за интеграла се получава следното представяне

$$\int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2}+\int\frac{(x-3)dx}{x^2+x+1}$$

$$=\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\int\frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}+I=\ln|x-2|-\frac{1}{x^2+x+1}+I.$$

За да решим интеграла $I=\displaystyle\int\frac{(x-3)dx}{x^2+x+1}$ правим субституцията $t=x+\dfrac{1}{2}$, откъдето се получава, че $x=t-\dfrac{1}{2}$, $dx=dt$, $x^2+x+1=t^2+\dfrac{3}{4}$. По този начин се получава следното

$$I=\int\frac{t-\frac{7}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{7}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+\frac{3}{4})}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{7}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] - \frac{7}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{7}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

д) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+2)^2}{|x+1|} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Задача 7.27: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx; \quad \text{б)} \int \frac{4x^2-15x+19}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+3)(x+4)}dx; \quad \text{г)} \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}dx; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{x^3+1}dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx; \quad \text{з)} \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{xdx}{x^3-1}dx; \quad \text{й)} \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)};$$

$$\text{к)} \int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}; \quad \text{л)} \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx;$$

$$\text{м)} \int \frac{x^6dx}{x^4-1}; \quad \text{н)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx; \quad \text{о)} \int \frac{x^2dx}{1-x^4};$$

$$\text{п)} \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx; \quad \text{р)} \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx; \quad \text{с)} \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}.$$

Отговори: а) $\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$; б) $\ln\left|\frac{(x-2)(x+3)^5}{(x-1)^2}\right| + C$; в) $\frac{1}{20}\ln|x-1| - \frac{45}{20}\ln|x+3| + \frac{16}{5}\ln|x+4| + C$; г) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$; д) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + C$; е) $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; ж) $-\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}\right| - \frac{8}{25}\text{arctg}(x+1) + C$; з) $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; и) $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; й) $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}x -$

$\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{3}+C$; к) $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C$; л) $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\mathrm{arctg}x+C$; м) $\ln\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{x^3}{3}+C$; н) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; о) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$; п) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\mathrm{arctg}x-\frac{7}{x-1}+C$; р) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; с) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$.

7.8 Интегриране на някои ирационални функции

За интегриране на ирационални функции не съществува общ метод, както при интегриране на рационални функции. Част от ирационалните функции притежават примитивни, които изобщо не могат да се изразят чрез елементарни функции. Общ принцип е намирането на подходяща субституция, която позволява да сведем пресмятането на даден интеграл от ирационална функция към пресмятане на интеграл от рационална функция.

7.8.1 Интеграли от рационална функция на x и на радикали на една и съща дробно-линейна функция на x

Интеграли от вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx,$$

където R е рационална функция, a, b, c и d са константи, такива че $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, $p_1, \dots, p_n$ са цели числа, $q_1, \dots, q_n$ са естествени числа, се свежда към интеграли от рационални функции, чрез субституцията

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

където k е най-малкото общо кратно на знаменателите $q_1, \dots, q_n$.

Задача 7.28: Да се реши интегралът

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$$

Решение: Интегралът може да се представи във вида

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})}dx.$$

Тук $q_1 = 3$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, и $q_4 = 3$. Имаме, че $[3,1,2,3] = 6$, затова полагаме $x = t^6$, откъдето последователно се намира $dx = 6t^5dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$ и интегралът добива вида

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{t^2.6t^5}{t^6(t^3+t^2)}dt = 6\int \frac{dt}{t(t+1)}$$

$$= 6\int \frac{1+t-t}{t(t+1)}dt = 6\int \frac{dt}{t} - 6\int \frac{dt}{1+t} = 6\ln|t| - 6\ln|1+t| + C$$

$$= 6\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C = \ln\frac{t^6}{(1+t)^6}$$

От направената субституция имаме, че $t = \sqrt[6]{x}$, откъдето за интеграла се получава

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \ln\frac{x}{(1+\sqrt[6]{x})^6} + C.$$

Задача 7.29: Да се реши интегралът

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Решение: Полагаме $\dfrac{1-x}{1+x} = t$, откъдето пък се намира, че

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

За интеграла е в сила представянето

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = -4\int \frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}dt.$$

Представяме подинтегралната функция като сума от елементарни дроби

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t}.$$

Лесно може да се пресметне, че $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $C = \dfrac{1}{4}$, $D = \dfrac{1}{4}$, следователно е в сила представянето

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t}.$$

За интеграла се получава

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = -4\int\frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}dt$$

$$= 2\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{dt}{1-t} - \int\frac{dt}{1+t}$$

$$= 2\mathrm{arctg}t + \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C$$

$$= 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + C$$

$$= 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + C.$$

Задача 7.30: Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x}}$;

г) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$; е) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

ж) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$; з) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$;

и) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}dx$; й) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

к) $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Отговори: а) $-\frac{x}{2} - 2\sqrt{x} - 2\ln|1-\sqrt{x}| + C$; б) $-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C$; в) $\ln|3\sqrt[3]{x}+1| + C$; г) $6\left[\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1|\right] + C$; д) $4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} + \ln(\sqrt[4]{x}+1)\right] + C$; е) $x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1}-1| + C$; ж) $2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{1+x}) + C$; з) Ще използваме следното представяне на интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{(x-1)^3(x-2)^4}{(x-2)^3}}} = \int \frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3}}.$$

След това полагаме $\dfrac{x-1}{x-2} = t^2$ и последователно се получава $x = \dfrac{1-2t^2}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{-2t}{(1-t^2)^2}dt$, $x-2 = \dfrac{-1}{1-t^2}$ и интегралът добива вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{-2t}{(1-t^2)^2}\frac{1}{\frac{1}{(1-t^2)^2}\cdot t^3}dt$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{t} + C = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.$$

Интегралът може да бъде решен и като се използват преобразованията

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^4\frac{x-2}{x-1}}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}.$$

Положете $\dfrac{x-2}{x-1} = t^2$; и) $-\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} + 2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1| + C$; й) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right] + C$; к) $\ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t^2+1}{\sqrt{3}}$ при $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

7.8.2 Биномен диференциал

Интегралите от вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \tag{7.23}$$

където a и b са различни от нула константи, а m, n и p са рационални числа, се наричат интеграли от биномен диференциал, или диференциален бином. Съществуват три случая, когато тези интеграли могат да се решат чрез елементарни функции. Тези случаи са:

$$p - \text{цяло} \quad \text{число}; \tag{7.24}$$

$$\frac{m+1}{n} - \text{цяло} \quad \text{число}; \tag{7.25}$$

$$\frac{m+1}{n} + p - \text{цяло} \quad \text{число}. \tag{7.26}$$

При (7.24) интегралът (7.23) е интеграл от рационална функция на радикали на x и неговото пресмятане беше вече разгледано. Трябва да се положи $x = u^k$, където k е най-малкото общо кратно на знаменателите на m и n.

При (7.25) интегралът (7.23) се свежда до интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$a + bx^n = u^k,$$

където k е знаменателят на p.

При (7.26) интегралът (7.23) трябва да се преобразува по следния начин:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p dx.$$

Интегралът в дясната страна на горното равенство е нов диференциален бином, за който $m_1 = m + np$, $n_1 = -n$ и $p_1 = p$. В сила е, че

$$\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$$

и на основание (7.26) се получава, че $\dfrac{m_1+1}{n_1}$ е цяло число, т. е. отново се достига до случая (7.25). Прави се субституцията $b + ax^{-n} = u^k$, където k е знаменателят на p.

Когато числата m, n и p не удовлетворяват никое от условията (7.24)-(7.26) интегралът (7.23) не може да се реши в елементарни функции. Този резултат е получен от П. Л. Чебишов.

Задача 7.31: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx, \quad x > 0.$$

Решение: Записваме интегралът във вида

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx = \int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Тук имаме $m = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$. В този случай имаме, че числото $\frac{m+1}{n} = 0$ е цяло. Полагаме $1+\sqrt{x} = u^2$, $u > 0$ и получаваме $x = (u^2-1)^2$, $dx = 4(u^2-1)udu$. По този начин за интеграла се получава

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx = \int (u^2-1)^{-2}.u.4.(u^2-1).u.du$$

$$= 4\int \frac{u^2}{u^2-1}du = 4\int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}du = 4\int du + 4\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$= 4u + 4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}\right| + C.$$

Задача 7.32: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0.$$

Решение: Тук имаме интеграл от диференциален бином, където $m = -2$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$. В случая числото $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ е цяло число. Поради това правим преобразованието

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}.$$

Полагаме $1 + \frac{1}{x^2} = u^2$, откъдето се получава $x = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, $dx = \frac{-udu}{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}}$. Сега вече решаваме самият интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$\int \frac{-u}{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{1}{\frac{-u}{(u^2-1)\sqrt{u^2-1}}}du = -\int du = -u + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Задача 7.33: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int \sqrt{x^3+x^4}dx; \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}; \quad \text{в)} \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$$

$$\text{г)} \int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}; \quad \text{е)} \int \sqrt[3]{3x-x^3}dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}; \quad \text{з)} \int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx; \quad \text{и)} \int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx.$$

Отговори: а) $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C$; б) Положете $x = t^6$, $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21\text{arctg}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + C$; в) $\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C$, където $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$; г) $-t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C$, където $t = \sqrt{1-x^2}$; д) Ще покажем пресмятането на интегралът

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}dx.$$

Параметрите на този интеграл са $m = 0$, $n = 3$, и $p = -\dfrac{1}{3}$. Последователно се проверява, че $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$, което е цяло число. Ще преобразуваме интегралът по следния начин

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^{-3}}} = \int x^{-1}(1+x^{-3})^{-\frac{1}{3}}dx.$$

Сега вече полагаме $1 + x^{-3} = u^3$, откъдето се получава $x = (u^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx = -\dfrac{1}{3}(u^3-1)^{-\frac{4}{3}}.3u.du$. Интегралът добива вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int (u^3-1)^{\frac{1}{3}}.u^{-1}.(-1)(u^3-1)^{-\frac{4}{3}}.u.du$$

$$= -\int (u^3-1)^{-1}du = -\int \frac{du}{u^3-1} = -\int \frac{du}{(u-1)(u^2+u+1)}.$$

В сила е следното разлагане

$$\frac{1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{u+2}{u^2+u+1}.$$

Това вече ни позволява да решим интегралът

$$-\int \frac{du}{(u-1)(u^2+u+1)} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} + \frac{1}{3}\int \frac{u+2}{u^2+u+1}du$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u-1| + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln(u^2+u+1) + \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u-1| + \frac{1}{6}\ln(u^2+u+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} - 1\right| + \frac{1}{6}\ln\left(\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} + 1\right)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\cdot\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

е) $\frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln(t^2-t+1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$, където $t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$; ж) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$; з) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{18}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3x - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$; и) $\frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C$.

7.8.3 Субституции на Ойлер

Интегралите от вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{7.27}$$

където R е рационална функция на променливите x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, a, b, и c са константи, такива че $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, се свеждат към интеграли от рационални функции, като се прилагат т. н. субституции на Ойлер.

I) Първа субституция на Ойлер- при $a > 0$ се полага

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \sqrt{a}x + t \\ \sqrt{a}x - t. \end{cases} \tag{7.28}$$

II) Втора субституция на Ойлер- тя може да бъде използвана в случая, когато квадратното уравнение $ax^2+bx+c = 0$ има два различни реални корена, т. е. когато $D > 0$. Ако тези корена са α и β, то е в сила разлагането $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. Тогава, втората субституция на Ойлер се дава с равенството

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\begin{cases} t(x-\alpha) \\ t(x-\beta). \end{cases} \tag{7.29}$$

III) Трета субституция на Ойлер- при $c>0$ се полага

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} tx+\sqrt{c} \\ tx-\sqrt{c}. \end{cases} \tag{7.30}$$

Случаите (7.28) $\div$ (7.30) са единствените, в които квадратният тричлен ax^2+bx+c е положителен в някой интервал. Ето защо, трите субституции на Ойлер (7.28) $\div$ (7.30) са достатъчни за свеждане на всеки интеграл от вида (7.27) към интеграл от рационална функция.

Задача 7.34: Да се реши интегралът

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Решение: В този интеграл $a=1>0$, $D=-3<0$, $c=1>0$. Следователно е възможно да се направят първата и третата субституция на Ойлер. Специално ще приложим първата субституция на Ойлер. За тази цел да положим

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t. \tag{7.31}$$

Повдигаме на квадрат равенството (7.31) и се получава

$$x^2+x+1=x^2+2xt+t^2.$$

От горното равенство определяме $x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}$, $dx=2\dfrac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt$. Връщаме се отново в субституцията (7.31) и определяме, че

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-1}{1-2t}+t=\frac{-t^2+t-1}{1-2t}.$$

По този начин за интеграла се получава

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int 2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}\frac{1}{\frac{t^2-1}{1-2t}\cdot\frac{-t^2+t-1}{1-2t}}dt$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

От (7.31) имаме, че $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$. Окончателно се получава

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C.$$

Задача 7.35: Да се реши интегралът

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Решение: Квадратното уравнение $x^2+3x-4=0$ има дискриминанта $D=25>0$, следователно е възможно да се направи втората субституция на Ойлер. Квадратното уравнение $x^2+3x-4=0$ има корени $x_1=1$ и $x_2=-4$ и е в сила разлагането $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$. Използваме (7.29) и полагаме

$$\sqrt{(x-1)(x+4)} = t(x-1).$$

Повдигаме на квадрат горното равенство и се получава

$$(x-1)(x+4) = t^2(x-1)^2,$$

откъдето последователно намираме

$$x = \frac{t^2+4}{t^2-1}, \quad dx = \frac{-10t}{(t^2-1)^2}dt, \quad \sqrt{x^2+3x-4} = \frac{5t}{t^2-1}, \quad x+4 = \frac{5t^2}{t^2-1}.$$

По този начин за интеграла се получава

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{-10t}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{5t^2}{t^2-1}\cdot\frac{5t}{t^2-1}}dt$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t} + C.$$

От направената субституция намираме, че

$$t = \frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x-1} = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}} + C,$$

следователно

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$$

Задача 7.36: Да се реши интегралът

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}.$$

Решение: Ще използваме третата субституция на Ойлер, като полагаме

$$\sqrt{x^2-5x+4} = tx+2.$$

Повдигаме на квадрат горното равенство и последователно се намира:

$$x^2-5x+4 = t^2x^2+4tx+4, \quad x^2-5x = t^2x^2+4tx,$$

$$x-5 = t^2x+4t, \quad x = \frac{5+4t}{1-t^2},$$

$$dx = 2\cdot\frac{2t^2+5t+2}{(1-t^2)^2}dt, \quad \sqrt{x^2-5x+4} = \frac{2t^2+5t+2}{1-t^2}.$$

За интеграла се получава

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \int 2\cdot\frac{2t^2+5t+2}{(1-t^2)^2}\cdot\frac{1}{\frac{2t^2+5t+2}{1-t^2}}dt$$

$$= 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C.$$

От направената субституция намираме, че $t = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}-2}{x}$, откъдето пък за интеграла се получава

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2-5x+4}-2}{x}+1}{\frac{\sqrt{x^2-5x+4}-2}{x}-1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-5x+4}+x-2}{\sqrt{x^2-5x+4}-x-2}\right| + C.$$

Задача 7.37: Да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+3x+1}}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$:

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$; г) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

$$\text{д)}\ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}; \quad \text{е)}\ \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$\text{ж)}\ \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx; \quad \text{з)}\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\text{и)}\ \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}; \quad \text{й)}\ \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x+x^2})^2};$$

$$\text{к)}\ \int \frac{1+\sqrt{6x-x^2-5}}{(x+1)\sqrt{6x-x^2-5}}dx; \quad \text{л)}\ \int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Отговори: а) $\frac{1}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{11}}{t+\sqrt{11}}\right| + C$, където $t = \sqrt{x^2+3x+1} - x$; б) $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{2+x+\sqrt{x^2+x+1}} + C$; в) $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{\sqrt{2}x} + C$; г) $\frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|} + C$, където $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$; д) $\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}\right| + C$, където $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$; е) $-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})} + C$; ж) $-\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{17}{108}\ln|t+1|$, където $t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+2}$; з) $\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\mathrm{arctg}t + C$, където $t = \frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; и) $\ln\left|\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}}\right| + C$; й) $\frac{2(3-4t)}{5(1-t-T^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t}\right| + C$, където $t = -x + \sqrt{x+x^2}$; к) $-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{5-x}{3(x-1)}} + \ln|x+1| + C$; л) $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}{(2+x+2\sqrt{x^2+x+1})^2} + C$.

7.9 Интегриране на трансцедентни функции

7.9.1 Пресмятане на интеграли от вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Интегралите от вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{7.32}$$

където $R(u, v)$ е рационална функция на променливите u и v, могат винаги да бъдат пресметнати в интервала $(-\pi, \pi)$ чрез субституцията

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}. \tag{7.33}$$

За $x \in (-\pi, \pi)$ са изпълнени равенствата

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

откъдето се получава

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{7.34}$$

Освен това от (7.33) се получава равенството

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{7.35}$$

От (7.34) и (7.35) е ясно, че след заместване на $\sin x$, $\cos x$ и dx в интеграла (7.32) се получава интеграл от рационална функция на t.

Субституцията (7.33) често води до необходимостта от извършване на сложни изчисления, затова ще я използваме само в случаите, когато не е възможно да се намерят други начини за решаване на интеграла (7.32).

Ако подинтегралната функция $R(u, v)$ има едно от свойствата:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (подинтегралната функция е нечетна относно $\sin x$);

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (подинтегралната функция е нечетна относно $\cos x$);

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (подинтегралната функция е четна относно $\sin x$ и $\cos x$),

то за пресмятане на интеграла (7.32) е удобно да се използват съответно субституциите:

1) $t = \cos x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $t = \sin x, \quad x \in (0, \pi)$;

3) $t = \mathrm{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Отбелязваме факта, че в третия случай на зависимост на $R(u, v)$ от $\sin x$ и $\cos x$, тези функции са повдигнати на четни степенни показатели. За $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ са в сила тъждествата

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x},$$

откъдето се получава

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Задача 7.38: Да се реши интегралът

$$\int \frac{dx}{2+\cos x}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Решение: Използваме субституцията (7.33), като полагаме $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. От (7.34) и (7.35) се получава

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Задача 7.39: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}dx; \quad \text{б)} \quad \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx.$$

Решение: а) За рационалната функция $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1}$ е в сила равенството $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т. е. налице е случаят 1). За да решим интегралът постъпваме по следния начин:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx = \int \frac{\sin^2 x.\sin x dx}{\cos^2 x+1} = -\int \frac{\sin^2 x d\cos x}{\cos^2 x+1}$$

$$= -\int \frac{(1-\cos^2 x)d\cos x}{\cos^2 x+1} = \int \frac{(\cos^2 x-1)d\cos x}{\cos^2 x+1}$$

$$= \int \frac{(t^2-1)dt}{t^2+1} = \int \frac{(t^2+1-2)dt}{t^2+1} = \int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= t - 2\operatorname{arctg} t + C = \cos x - 2\operatorname{arctg}\cos x + C,$$

където е ясен смисълът на полагането $t = \cos x$.

б) В сила е равенството $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т. е. налице е случаят 2). За да решим интегралът постъпване по следния начин:

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x.\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x d\sin x}{1+\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)d\sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = -\int \frac{(t^2-1)dt}{1+t^2}$$

$$= -\int \frac{t^2+1-2}{1+t^2}dt = -\int dt + 2\int \frac{dt}{1+t^2}dt = -t + 2\operatorname{arctg} t + C$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sin x - \sin x + C.$$

Задача 7.40: Да се реши интегралът

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

Решение: В сила е равенството $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, така, че е налице случаят 3). Полагаме $t = \mathrm{tg}x$, използваме равенствата (7.36) и се получава

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{1+\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{tdt}{(1+t^2)^2 \cdot \frac{2t^4+2t^2+1}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{tdt}{2t^4+2t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{2(t^2)^2+2t^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{2u^2+2u+1} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2+u+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2u+1)+C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2t^2+1)+C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}^2 x+1)+C.$$

Задача 7.41: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3};$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}; \quad \text{г)} \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{\sin x}{\cos x(2+\sin 2x)} dx; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$$

$$\text{ж)} \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}; \quad \text{з)} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x+2\sin x} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x+\cos x} dx; \quad \text{й)} \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx.$$

Отговори: а) $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C$; б) $\mathrm{arctg}\left(1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$; в) $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$; г) $-\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}x+1|+\frac{1}{4}\ln(\mathrm{tg}^2 x+1)+\frac{x}{2}+C$; д) Положете $\mathrm{tg}x = t$ и се получава за отговор $\ln\sqrt[4]{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{2\mathrm{tg}x}+C$; ж) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}+C$; з) В сила е равенството $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, затова се полага $\cos x = t$. За интеграла се получава стойност $\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+\frac{4}{3}\ln(\cos x+2)+C$; и) В сила е равенството $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, затова се полага $\operatorname{tg} x=t$. За интеграла се получава следното

$$\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

$$=\int\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{t-1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)\cos x+C;$$

й) В сила са следните представяния на интеграла

$$\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=2\int\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$=2\int\frac{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^4 x(1+\operatorname{tg}^4 x)}{\cos^2 x}}dx=2\int\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^4x}\cdot\frac{dt}{\cos^2 x}=2\int\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^4x}d\operatorname{tg}x$$

$$=\int\frac{d\operatorname{tg}^2x}{1+(\operatorname{tg}^2x)^2}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C.$$

Вместо тези пресмятания, директно може да се използва субституцията $\operatorname{tg}x=t$.

7.9.2 Пресмятане на интеграли от вида $\int\sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x dx$ и $\int\sin\alpha x\cos\beta x dx$

Тези интеграли могат да се пресметнат като се използват следните формули:

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x]; \tag{7.37}$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x]; \tag{7.38}$$

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x]. \tag{7.39}$$

Задача 7.42: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\quad\int\sin 2x.\sin 5x dx;\quad\text{б)}\quad\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2x}{3}dx;$$

$$\text{в)} \int \sin x . \cos 4x dx; \quad \text{г)} \quad \int \cos^2 x . \sin 3x dx;$$

$$\text{д)} \quad \int \cos x . \cos 2x . \cos 3x dx.$$

Решение: а) От равенството (7.37) се получава

$$\sin 2x . \sin 5x = \frac{1}{2} \cdot [\cos 3x - \cos 7x].$$

Като се интегрира дясната страна на горното равенство се получава, че интегралът е равен на $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$; б) $3\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{7}\cos\frac{7x}{6} + C$; в) $\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$; г) Ще използваме формулата $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, след това равенството (7.39) и се получава, че интегралът е равен на $-\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{20}\cos 5x + C$; д) Ще използваме два пъти формулата (7.38) за да се получи представянето

$$\begin{aligned}
&(\cos x . \cos 2x) . \cos 3x \\
&= \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) . \cos 3x = \frac{1}{2}\cos x \cos 3x + \frac{1}{2}\cos^2 3x \\
&= \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1+\cos 6x}{4}.
\end{aligned}$$

Интегралът е равен на $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 4x + \dfrac{1}{6}\sin 6x + x\right) + C$.

7.9.3 Пресмятане на интеграли от вида $\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$

Функциите $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ се наричат съответно хиперболичен косинус и хиперболичен синус и се означават $\mathrm{ch}x$ и $\mathrm{sh}x$, т. е.

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

В сила е формулата

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

Отношенията $\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ и $\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ по аналогия с кръговите тригонометрични функции се наричат хиперболичен тангенс и хиперболичен котангенс и се означават

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}, \quad \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}.$$

В сила са следните равенства

$$\mathrm{sh}2x = 2.\mathrm{sh}x.\mathrm{ch}x, \quad \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x.$$

$$\mathrm{sh}x = \frac{2\mathrm{th}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{x}{2}}.$$

Хиперболичните функции имат следните производни:

$$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x, \quad (\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x,$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad (\mathrm{cth}x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

Интегралите от вида

$$\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx,$$

където $R(u,v)$ е рационална функция на променливите u и v, с помощта на хиперболичната субституция $t = \mathrm{th}\dfrac{x}{2}$ се свежда до интеграли от рационални функции

$$2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}.$$

Задача 7.43: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{2\mathrm{sh}x + 3\mathrm{ch}x}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x}dx.$$

Решение: Представяме числителят на подинтегралната функция като линейна комбинация на знаменателя и производната на знаменателя

$$2\mathrm{sh}x + 3\mathrm{ch}x = \alpha(4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x) + \beta(4\mathrm{ch}x + 5\mathrm{sh}x).$$

За α и β се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} 4\alpha + 5\beta = 2 \\ 5\alpha + 4\beta = 3, \end{array}\right.$$

т. е. $\alpha = \dfrac{7}{9}$, $\beta = -\dfrac{2}{9}$. Следователно

$$\int \frac{2\mathrm{sh}x + 3\mathrm{ch}x}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x}dx = \frac{7}{9}\int dx - \frac{2}{9}\int \frac{4\mathrm{ch}x + 5\mathrm{sh}x}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x}dx$$

$$= \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\int \frac{d(4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x)}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x} = \frac{7}{9}x - \frac{2}{9}\ln(4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x) + C.$$

Задача 7.44: Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x dx}{\mathrm{sh}^3 x}.$$

Решение: Ще приложим интегрирането по части, в представянето на интеграла от вида

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x dx}{\mathrm{sh}^3 x} = \int \frac{\mathrm{ch}x.\mathrm{ch}x dx}{\mathrm{sh}^3 x} = \int \frac{\mathrm{ch}x d\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}^3 x}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{ch}x d\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\mathrm{sh}x}.$$

Решаваме последния интеграл

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}x} = \int \frac{dx}{2\mathrm{sh}\frac{x}{2}\mathrm{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}}{\frac{\mathrm{sh}\frac{x}{2}\mathrm{ch}\frac{x}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{d\mathrm{th}\frac{x}{2}}{\mathrm{th}\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Окончателно се получава, че

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x dx}{\mathrm{sh}^3 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Задача 7.45: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\ \int \mathrm{ch}^3 x\mathrm{sh}x dx;\quad \text{б)}\ \int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{ch}^3 x dx;$$
$$\text{в)} \int \mathrm{sh}^2 x\mathrm{ch}\frac{x}{2}dx;\quad \text{г)}\ \int \mathrm{sh}^3 x\mathrm{ch}2x dx.$$

Отговори: а) $\frac{\mathrm{ch}^4 x}{4} + C$; б) $\frac{\mathrm{sh}^5 x}{5} + \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + C$; в) $\frac{8}{5}\mathrm{sh}^5\frac{x}{2} + \frac{8}{3}\mathrm{sh}^3\frac{x}{2} + C$; г) $\frac{2}{5}\mathrm{ch}^5 x - \mathrm{ch}^3 x + \mathrm{ch}x + C$.

Задача 7.46: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\ \int \frac{dx}{4+3\mathrm{sh}^2 x};\quad \text{б)}\ \int \frac{dx}{10\mathrm{ch}^2 x - 2\mathrm{sh}2x - 1};\quad \text{в)} \int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{1-\mathrm{sh}^2 x}dx;$$
$$\text{г)}\ \int \frac{\mathrm{ch}2x}{\mathrm{sh}^4 x + \mathrm{ch}^4 x}dx;\quad \text{д)}\ \int \frac{\mathrm{sh}2x}{1+\mathrm{sh}^4 x}dx;\quad \text{е)}\ \int \frac{dx}{(\mathrm{ch}2x + \mathrm{ch}^2 x)^2};$$
$$\text{ж)}\ \int \frac{4\mathrm{ch}x - 3\mathrm{sh}x}{2\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}dx;\quad \text{з)}\ \int \frac{dx}{\mathrm{sh}x + 2\mathrm{ch}x};\quad \text{и)}\ \int \frac{dx}{2\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x};$$
$$\text{й)}\ \int \frac{\mathrm{sh}^4 x}{\mathrm{ch}^6 x}dx;\quad \text{к)}\ \int \frac{\mathrm{ch}^5 x}{\mathrm{sh}x}dx;\quad \text{л)}\ \int \frac{dx}{(1+\mathrm{ch}x)^2};\quad \text{м)}\ \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^4 x\mathrm{ch}^2 x}.$$

Отговори: а) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\text{th}x-2}{\text{th}x+2}\right| + C$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{\text{th}x-2}{\sqrt{5}} + C$; в) $-x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\text{th}x+1}{\sqrt{2}\text{th}x-1}\right| + C$; г) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\text{sh}2x} + C$; д) $\text{arctg}(2\text{th}^2x - 1) + C = \text{arctgsh}^2x + C$; е) $\frac{3\text{th}x}{4(\text{th}^2x+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{th}x}{\sqrt{2}} + C$; ж) Работи се както в задача 7.43 и се получава резултат $\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\ln(2\text{ch}x - \text{sh}x) + C$; з) $\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2\text{th}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C$; и) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\text{th}\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}{\text{th}\frac{x}{2}-2-\sqrt{3}}\right| + C$; й) $\frac{\text{th}^5x}{5} + C$; к) $\frac{\text{sh}^4x}{4} + \text{sh}^2x + \ln|\text{sh}x| + C$; л) $\frac{1}{2}\text{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\text{th}^3\frac{x}{2} + C$; м) $\text{th}x + 2\text{cth}x - \frac{\text{cth}^3x}{3} + C$.

7.10 Общи задачи от интеграли

Задача 7.47: Да се пресметнат интегралите:

$$1)\ \int \frac{x^3-x^2}{x+3}dx;\quad 2)\ \int \frac{x^4+3x^3-1}{x^2+2x+1}dx;\quad 3) \int \frac{x^2}{x^2+12x+35}dx;$$

$$4)\ \int \frac{x^4}{x^2+4}dx;\quad 5)\ \int \frac{xdx}{x^3+8};\quad 6)\ \int \frac{dx}{(x+1)(9x^2+6x+4)};$$

$$7)\ \int \frac{(5-x)dx}{(x-3)(x^2-5x+7)};\quad 8)\ \int \frac{(x^3+x^2)dx}{(x-2)(2x^2-x+2)};$$

$$9)\ \int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}dx;\quad 10)\ \int \frac{dx}{x^4-x^3};$$

$$11)\ \int \frac{x^2dx}{(x^2+12x+35)^2};\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^4+x^2+1};\quad 13)\ \int \frac{x^5dx}{x^6+9x^3+8};$$

$$14)\ \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2};\quad 15)\ \int \frac{dx}{(x^4-1)^3};\quad 16)\ \int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1};$$

$$17)\ \int \frac{x^2dx}{1-x^4};\quad 18)\ \int \frac{(3x^2+x+3)dx}{(x-1)^3(x^2+1)};\quad 19)\ \int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8};$$

$$20)\ \int \frac{x^3+x-1dx}{(x^2+2)^2};\quad 21)\ \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)};\quad 22)\ \int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2};$$

$$23)\ \int \frac{dx}{(x^2+9)^2};\quad 24)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}};\quad 25)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}};$$

$$26)\ \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx;\quad 27)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}};$$

$$28)\quad \int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx;\quad 29)\quad \int \frac{1-\sqrt[6]{1+x}}{1+x+\sqrt[3]{(1+x)^4}}dx;$$

$$30)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}};\quad 31)\quad \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx;\quad 32)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}};$$

$$33)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}};\quad 34)\quad \int x^3\sqrt{x^2-1}dx;\quad 35)\quad \int x^4\sqrt{1-x^2}dx;$$

$$36)\quad \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}};\quad 37)\quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}};\quad 38)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}};$$

$$39)\quad \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}};\quad 40)\quad \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}};$$

$$41)\quad \int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}};\quad 42)\quad \int \sqrt{4x^2-4x+3}dx;$$

$$43)\quad \int \sqrt{1-4x-x^2}dx;\quad 44)\quad \int \frac{xdx}{(x^2+x+1)\sqrt{4x^2+4x+3}};$$

$$45)\quad \int \frac{(1+x^2)dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Отговори: 1) $\frac{x^3}{3}-2x^2+12x-36\ln|x+3|+C$; 2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+\frac{3}{x+1}+5\ln|x+1|+C$; 3) $x+\frac{1}{2}(25\ln|x+5|-49\ln|x+7|)+C$; 4) $\frac{x^3}{3}-4x+8\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$; 5) $\frac{1}{12}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; 6) $\frac{1}{14}\ln\frac{(x+1)^2}{9x^2+6x+4}+\frac{2}{7\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$; 7) $\ln\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+7}-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{3}}+C$; 8) $\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{8}\ln(2x^2-x+2)+\frac{\sqrt{15}}{12}\mathrm{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{15}}+C$; 9) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x+1}-3\mathrm{arctg}(2x-1)+C$; 10) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$; 11) $\frac{35}{4}\ln\left|\frac{x+7}{x+5}\right|-\frac{37x+210}{2(x^2+12x+35)}+C$; 12) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C$; 13) $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|+C$; 14) $\frac{4x^3+6x^2+8x+3}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; 15) $\frac{1}{32}\left(\frac{7x^5-11x}{(x^4-1)^2}+\frac{21}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{2}\mathrm{arctg}x\right)+C$; 16) $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\mathrm{arctg}x+C$; 17) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$; 18) $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\mathrm{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C$; 19) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$; 20) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 21) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$; 22) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\mathrm{arctg}\frac{x-3}{2}+C$; 23) $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C$; 24) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$; 25) $\frac{4}{3}(\sqrt[4]{x^3}-\ln(1+\sqrt[4]{x^3}))+C$; 26) $6\sqrt[6]{x}+$

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 6\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C$; 27) $\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{\sqrt{3x}}{1-x} + C$; 28) $\ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x-2+2\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}} + C$; 29) $\ln(1+x) - 3\ln(1+\sqrt[3]{1+x}) - 6\text{arctg}\sqrt[6]{1+x} + C$; 30) $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2 + 2\ln|1-\sqrt[4]{2x-1}| + C$; 31) $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x} + C$; 32) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$; 33) $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) + C$; 34) $\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$; 35) $\left(\frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{6} - x\right)\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2} + C$; 36) $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2} + C$; 37) $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2} + C$; 38) $\frac{1}{4}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$, $t = \sqrt[3]{x^2+1}$; 39) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{|x-1|} + C$; 40) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{(x-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{|x-1|}\right) + C$; 41) $\frac{1}{8}\left(\frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x} - 3\arcsin\frac{1}{|x+1|}\right) + C$; 42) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3} + \frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}) + C$; 43) $\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C$; 44) $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7(4x^2+4x+3)}-\sqrt{5}(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+2}} + C$; 45) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}x}{|x^2-1|} + C$.

Задача 7.48: Да се пресметнат интегралите:

$$1)\ \int\frac{dx}{1-\sin x};\quad 2)\ \int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx;\quad 3)\int\frac{\sin x dx}{1+\sin x};$$

$$4)\ \int\sin^2 x.\cos^2 3x dx;\quad 5)\ \int\cos^3 x.\sin^5 x dx;\quad 6)\ \int\sin^4 x.\cos^5 x dx;$$

$$7)\ \int\frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x};\quad 8)\ \int\frac{\cos^5 x dx}{\sin^2};\quad 9)\ \int\frac{\cos^2 x dx}{\sin x\cos 3x};$$

$$10)\ \int\frac{3\cos x+7\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx;\quad 11)\ \int\frac{dx}{2+\sin 2x+\cos 2x};$$

$$12)\ \int\frac{3\sin x+2\cos x+1}{\sin x+3\sin^2 x}dx;\quad 13)\ \int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx;$$

$$14)\ \int\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx;\quad 15)\ \int\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2};\quad 16)\ \int\frac{\text{tg}x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}};$$

$$17)\ \int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}};\quad 18)\ \int\frac{(\cos x-\sin x)dx}{\sqrt{1+\sin 2x}};\quad 19)\ \int x^3\sin x^2 dx;$$

$$20)\ \int\frac{x\sin x dx}{(1+\cos x)^2};\quad 21)\ \int\text{sh}x.\text{sh}2x.\text{sh}3x dx;\quad 22)\ \int\text{sh}^3 x.\text{ch}^4 x dx;$$

$$23)\ \int\frac{\text{sh}3x}{\text{ch}^6 x}dx;\quad 24)\ \int\frac{\text{ch}3x}{\text{sh}^3 x}dx;\quad 25)\ \int\frac{\text{ch}x dx}{4\text{ch}x-3\text{sh}x};$$

$$26)\ \int\frac{\text{th}x dx}{\sqrt{1-\text{th}x}};\quad 27)\ \int\frac{\text{sh}x dx}{\sqrt{\text{ch}2x}};\quad 28)\ \int\text{sh}ax.\text{ch}bx,\quad a^2+b^2\neq 0.$$

Отговори: 1) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$; 2) $\ln(1 + \sin x) + C$; 3) $x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C$; 4) $\frac{1}{4}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{6} - \frac{\sin 8x}{16}\right) + C$ (използвайте, че $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, или факта, че $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$); 5) $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$; 6) $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$; 7) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$; 8) $\frac{\sin^3 x}{3} - 2\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$; 9) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{|4\sin^2 x - 1|} + C$; 10) $x - \ln|5\cos x + 2\sin x| + C$ (работете както в задача 7.43); 11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C,\ \ |x| < \frac{\pi}{2}$; 12) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\frac{3\sin x + 1}{\sin x}\right| + C$; 13) $x + \cos x + 2\ln(1 + \sin x) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$; 14) $\frac{2}{3}\ln|\sin^3 x + \cos^3 x| + C$; 15) $\frac{3\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{tg} x}{4\operatorname{tg}^2 x + 8} + C, |x| < \frac{\pi}{2}$; 16) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C$; 17) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin - \cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + C$; 18) $\ln(\sin x + \cos x) + C$, ако $\sin x + \cos x > 0$ и $\ln\frac{1}{|\sin x + \cos x|} + C$, ако $\sin x + \cos x < 0$; 19) $\frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2\cos x^2) + C$ (използвайте представянето $\int x^3 \sin x^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin x^2 d(x^4) = \frac{1}{2}\int t\sin t dt$); 20) $\frac{x}{1+\cos x} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$; 21) $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ch} 6x}{6} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{2}\right) + C$; 22) $\frac{\operatorname{ch}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{ch}^5 x}{5} + C$; 23) $\frac{1}{5\operatorname{ch}^6 x} - \frac{4}{3\operatorname{ch}^3 x} + C$; 24) $4\ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x + C$; 25) $\frac{1}{7}(4x + 3\ln|4\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} x|) + C$; 26) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1 + e^{2x}} + \ln(e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-2x}})\right) + C$; 27) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}) + C$; 28) $\frac{\operatorname{ch}(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\operatorname{ch}(a-b)x}{2(a-b)} + C$, ако $a^2 \neq b^2$; $\frac{\operatorname{ch} 2bx}{4b} + C$, ако $a = b$; $-\frac{\operatorname{ch} 2bx}{4b} + C$, ако $a = -b$.

Задача 7.49: Да се пресметнат интегралите:

$$1)\ \int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x};\quad 2)\ \int \frac{1+e^{2x}dx}{(1+e^x)^2};\quad 3)\int \frac{xe^x dx}{(1+e^x)^2};$$

$$4)\ \int e^{2x}\sqrt{e^x + e^{2x}}dx;\quad 5)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};\quad 6)\ \int (x\ln x)^2 dx;$$

$$7)\ \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;\quad 8)\ \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx;\quad 9)\ \int \frac{x\ln(1-x+x^2)}{(1+x^2)^2}dx;$$

$$10)\ \int \frac{\ln(1-x^2)}{5\sqrt{1-x}}dx;\quad 11)\ \int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx;$$

$$12)\ \int (x^3+x)\operatorname{arctg} x dx;\quad 13)\ \int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}dx;\quad 14)\ \int \frac{2x^2+1}{x^2+1}\operatorname{arctg} 2x dx;$$

$$15)\ \int \frac{x^4}{x^2+1}\operatorname{arctg} x dx;\quad 16)\ \int x\arcsin(x-1)dx;\quad 17)\ \int \operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})dx;$$

$$18)\ \int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx;\quad 19)\ \int \frac{x\arcsin x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$20)\quad \int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx.$$

Отговори: 1) $e^x - \ln(1+e^x) + C$; 2) $x + \frac{2}{1+e^x} + C$; 3) $\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{(e^x+e^{3x})^3} - \frac{1}{8}(1+2e^x)\sqrt{e^x+e^{2x}} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{e^x}) + C$; 5) $\arcsin\ln x + C$; 6) $\frac{1}{27}x^3(9\ln^2 x - 6\ln x + 2) + C$; 7) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C$; 8) $2\mathrm{arctg}x - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + C$; 9) $\frac{1}{4}\ln\frac{1-x-x^2}{1+x^2} - \ln\frac{1-x-x^2}{2(1+x^2)} - \mathrm{arctg}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; 10) $2\sqrt{1-x}(4-\ln(1-x^2)) - 2\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}} + C$; 11) $-x + \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$; 12) $\frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + \frac{(x^2+1)^2}{4}\mathrm{arctg}x + C$; 13) $\ln\frac{x^2}{1+4x^2} - \frac{\mathrm{arctg}2x}{x} + C$; 14) $2x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x - \ln(1+x^2) + C$; 15) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x - x\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\mathrm{arctg}x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C$; 16) $\frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4}\arcsin(x-1) + C$; 17) $x.\mathrm{arctg}(1-\sqrt{x}) + \sqrt{x} + \ln(x-2\sqrt{x}+2) + C$; 18) $\frac{\arcsin^2 x - x^2}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\arcsin x + C$; 19) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + C$; 20) $x.\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$.

8. РИМАНОВ ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИЯ НА ЕДНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА

8.1 Интегруемост в риманов смисъл

Нека $[a, b]$ е даден сегмент. Ще казваме, че е дадено едно деление на сегмента $[a, b]$, ако са дадени точките $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, за които $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Това деление на сегмента $[a, b]$ ще означаваме със символа $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$. Сегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ще наричаме междинни (частични) сегменти, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ е дължината на този междинен сегмент. Величината $d = d(\tau) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ ще наричаме диаметър на делението τ. Във всеки междинен сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ да изберем произволна точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, която ще наречем междинна точка.

Нека да смятаме, че функцията $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ е ограничена над сегмента $[a, b]$. Като използваме функцията f и даденото деление τ на сегмента $[a, b]$, да съставим сумата $\sigma(f; \xi_i) = \sigma(f; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$$\sigma(f; \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{8.1}$$

която се нарича риманова интегрална сума за функцията f.

Числото I се нарича граница на интегралните суми (8.1), когато диаметърът d на делението τ клони към нула, ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува такова число $\delta = \delta(\epsilon)$, че за всяко деление, за което $d < \delta$, неравенството $|I - \sigma(f; \xi_i)| < 0$ е изпълнено за всеки избор на междинните точки ξ_i.

Функцията f се нарича интегруема по Риман (интегруема в риманов смисъл) в сегмента $[a, b]$, ако за тази функция в дадения сегмент съществува границата I на интегралните ѝ суми (8.1), когато диаметърът d на делението τ клони към нула. Числото I се нарича определен риманов интеграл от функцията f в граници от a до b и се означава със символа

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции са интегруеми по Риман в този сегмент. Функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$ и имаща само краен брой точки на прекъсване, е интегруема в този сегмент. Всяка монотонна в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема в този сегмент. Има и други класове от функции, които са интегруеми по Риман в този сегмент.

По определение се полага

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad a < b.$$

Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава са изпълнени следните свойства на интеграла на Риман:

1) $$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \quad (C = \mathrm{Const});$$

2) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

3) Ако функцията f е интегруема в сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, то f е интегруема и в сегмента $[a, b]$, и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

4) Ако за всяко $x \in [a, b]$ функцията е неотрицателна, т. е. $f(x) \geq 0$, то е в сила неравенството

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0;$$

5) Ако за всяко $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

6) Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то и функцията $|f|$ е интегруема в този сегмент, и е в сила неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7) *Формула за средните стойности*: Нека всяка от функциите f и g е интегруема в сегмента $[a, b]$, а функцията g има постоянен знак в този сегмент. Нека $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогава съществува такова число μ, $m \leq \mu \leq M$, че е в сила формулата

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Ако f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ то съществува точка $\xi \in [a, b]$, че е изпълнено равенството

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

8.2 Формула на Лайбниц-Нютон

Теорема 8.1: (**Основна теорема на интегралното смятане**) *За да се пресметне определеният интеграл от непрекъснатата функция f в сегмента $[a, b]$, трябва да се пресметнат стойностите на произволна нейна примитивна в точката b и в точката a, и от първата стойност да се извади втората стойност, т. е. ако $F(x) = \int f(x)dx$, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \tag{8.2}$$

Формулата (8.2) се нарича *формула на Лайбниц-Нютон.*

Задача 8.1: Да се реши интегралът

$$\int_1^3 x^3 dx.$$

Решение: Теорема 8.1 показва начина за решаване на определени интеграли. Най-напред трябва да се реши съответния неопределен интеграл, т. е.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$$

Отбелязваме факта, че в горната стойност на интеграла не е необходимо прибавянето на произволна константа. Нуждаем се само от една примитивна функция, като на практика вземаме тази, която съответства на стойност на константата $C = 0$. Следователно $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ и като се приложи формулата (8.2) се получава

$$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$$

Задача 8.2: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)}\ \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx;\quad \text{б)}\ \int_1^4 \sqrt{x}dx;\quad \text{в)}\ \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2};$$

$$\text{г)}\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx;\quad \text{д)}\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad \text{е)}\ \int_0^2 |1-x|dx;$$

$$\text{ж)}\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx;\quad \text{з)}\ \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}};\quad \text{и)}\ \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx;$$

$$\text{й)}\ \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2};\quad \text{к)}\ \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$$

$$\text{л)}\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};\quad \text{м)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$$

Отговори: а) $2\frac{5}{8}$; б) $\frac{14}{14}$; в) $\frac{1}{4}$; г) Тъй като подинтегралната функция е четна функция и границите на интеграла са симетрични относно нулата, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} d\cos x = -\frac{4}{3}\left.(\cos x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3};$$

д) $\frac{\pi}{3}$; е) Ще използваме представянето

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 |1-x|dx + \int_1^2 |1-x|dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = -\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_1^2 = 1;$$

ж) $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = 2\left.\mathrm{tg}x\right|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4-\pi}{2};$$

з) $\frac{\pi}{2}$; и) $\frac{3}{2}$; й) $e - \sqrt{e}$; к) $\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$; л) $\mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}2$; м) $\frac{2}{7}$.

8.3 Интегриране по части при определените интеграли

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцируеми функции в сегмента $[a, b]$ и имат непрекъснати първи производни. Тогава е в сила следната формула:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

която се нарича *формула за интегриране по части при определените интеграли.*

Формулата за интегриране по части при определените интеграли ще бъде удобно да се запише във вида

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{8.3}$$

В лявата страна на равенството (8.3) имаме функцията $u(x)$ пред знак за диференциал и функцията $v(x)$ под знак за диференциал. Решаването на интеграла $\int_a^b u(x)dv(x)$ се свежда до решаване на интеграла $\int_a^b v(x)u'(x)dx$, който при разумна схема на работа, обикновено се решава по-лесно, отколкото интегралът $\int_a^b u(x)dv(x)$. Както при неопределените интеграли, и при определените интеграли, интегрирането по части обикновено се предхожда от внасяне на част от подинтегралната функция под знак за диференциал.

Задача 8.3: Да се пресметне интегралът

$$\int_1^e \ln x dx.$$

Решение: Следвайки формулата (8.3), в нашия пример $u(x) = \ln x$, а x под знака d за диференциал ще бъде функцията $v(x)$, т. е. $v(x) = x$. Прилагаме формулата (8.3) и последователно се получава

$$\int_1^e \ln x dx = x.\ln x|_1^e - \int_1^e x.(\ln x)' dx$$

$$= e.\ln e - 1.\ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e dx = e - x|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

Задача 8.4: Да се пресметне интегралът

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Решение: Интегрираме по части

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \sin x$$

$$= x \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Задача 8.5: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \quad \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{б)} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{в)} \quad \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx;$$

$$\text{г)} \quad \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx; \quad \text{д)} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad \text{е)} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0;$$

$$\text{ж)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx; \quad \text{з)} \quad \int_1^e \ln^3 x dx.$$

Отговори: а) $1 - \frac{2}{e}$; б) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $\pi^3 - 6\pi$; г) 1; д) Функцията $\sqrt{1-x^2}$ не е диференцируема при $x = -1$ и $x = 1$. Прилагаме формулата за интегриране по части към интеграла

$$F(\epsilon) = \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \sqrt{1-x^2} dx,$$

където $0 < \epsilon < 1$. Последователно се получава

$$F(\epsilon) = x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} - \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} - \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} - I(\epsilon) + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} - I(\epsilon) + \mathrm{arcsin}x|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon}.$$

Извършваме граничен преход при $\epsilon \to 0$ в равенството

$$F(\epsilon) = x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} - I(\epsilon) + \mathrm{arcsin}x|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon}$$

и се получава

$$F(0) = x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} - F(0) + \mathrm{arcsin}x|_{-1}^{1} = -F(0) + \pi.$$

По този начин се намира, че $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2};$$

е) $\frac{\pi a^2}{4}$; ж) Нека да въведем означението $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$. Ще интегрираме по части, като предварително внасяме тригонометричната функция под знак за диференциал. Последователно се получава

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d\sin x = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$$

$$= e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d\cos x = e^{\pi} + 2e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4I.$$

От последното равенство се получава, че $5I = e^{\pi} - 2$, откъдето се намира, че $I = \dfrac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$, т. е.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2);$$

з) Нека да положим $I_3 = \int_1^e \ln^3 x dx$. Интегрираме по части и се получава

$$I_3 = x \ln^3 x \big|_1^e - 3 \int_1^e \ln^2 x dx = e - 3 \int_1^e \ln^2 x dx,$$

т. е. в сила е рекурентното равенство $I_3 = e - 3I_2$, с начално условие $I_1 = \int_1^e \ln x dx = 1$. Решаваме рекурентното равенство и се намира

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 3I_1) = 9I_1 - 2e = 9 - 2e.$$

Окончателно е в сила равенството

$$\int_1^e \ln^3 x dx = 9 - 2e.$$

Задача 8.6: Нека $n \geq 1$ да бъде произволно фиксирано цяло число. Да се пресметне интегралът

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Решение: Ще използваме последователните представяния

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x$$

$$= - \sin^{n-1} x \cos x \big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

При въведените означения, последното равенство може да се запише във вида $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, откъдето се получава

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{8.4}$$

По същият начин имаме, че

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

откъдето се получава

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Продължавайки по този начин се стига до I_0, или до I_1, в зависимост от това дали n е четно или нечетно число.

Ако n е четно число, $n = 2m$ се получава

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0.$$

Ако n е нечетно число, $n = 2m+1$ се получава

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1.$$

За двете начални условия имаме

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Окончателно се получава

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}; \tag{8.5}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}. \tag{8.6}$$

От тези формули се получава формулата на Валлис, изразяваща числото $\frac{\pi}{2}$ във вид на безкрайно произведение. Чрез почленно деление на (8.5) и (8.6) се получава

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2.4.6 \ldots 2m}{3.5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \tag{8.7}$$

Ще докажем, че $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$. За $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ са в сила неравенствата $\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$. Интегрираме тези неравенства в граници от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и се получава $I_{2m-1} \geq I_{2m} \geq I_{2m+1}$, откъдето

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1. \tag{8.8}$$

От равенството (8.4) следва, че $\dfrac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \dfrac{2m+1}{2m}$, откъдето се получава, че

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m+1}{2m} = 1. \tag{8.9}$$

От (8.8) и (8.9) се получава $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1$.

Извършваме граничен преход в (8.7) при $m \to \infty$ и получаваме формулата на Валлис

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{2.4.6\dots 2m}{3.5\dots(2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Последната формула може да се запише в следния вид

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1} \right).$$

Задача 8.7: Да се пресметне интегралът

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Решение: Чрез интегриране по части последователно се получава

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-1} x d \sin x = \frac{1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d \sin^{m+1} x$$

$$= \frac{1}{m+1} \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{n-1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x (-\sin x) dx$$

$$= \frac{n-1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx,$$

т. е. в сила е рекурентното равенство

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}. \tag{8.10}$$

Нека m и $n = 2s$ са четни числа. Прилагаме равенството (8.10) $s-$пъти и се получава

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2} = \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} I_{m+4,n-4}$$

$$= \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} \cdot \frac{n-5}{m+5} \cdots \frac{1}{m+n-1} \cdot I_{m+n,0},$$

т. е.

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)!!(1.3.5.(m-1))}{1.3.5\ldots(m-1)(m+1)(m+3)\ldots(m+n-1)} \cdot I_{m+n,0},$$

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)!!.(m-1)!!}{(m+n-1)!!} \cdot I_{m+n,0}. \tag{8.11}$$

За пресмятане на $I_{m+n,0}$ ($m+n$ е четно) използваме равенството (8.5) и се получава

$$I_{m+n,0} = \frac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{8.12}$$

От (8.11) и (8.12) се получава

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Във всички останали случай на четност и нечетност на m и n се използва рекурентното равенство (8.10), полученият резултат (8.6) и се получава

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Задача 8.8: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение: а) Нека да положим

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx. \tag{8.13}$$

След интегриране по части се получава

$$I_n = -\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d \cos nx$$

$$= -\frac{1}{n} \cos^n x \cos nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x dx,$$

откъдето

$$I_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \cos^{n-1} x \sin x dx. \tag{8.14}$$

Събираме (8.13) и (8.14) и се получава

$$2I_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x - \cos nx \sin x)dx$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)xdx = \frac{1}{n} + I_{n-1}.$$

По този начин се получава рекурентното равенство $I_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2} \cdot I_{n-1}$. След неговото решаване се получава $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}(n-k)}$; б) работи се както в а) и се получава $\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

8.4 Интегриране чрез субституция при определените интеграли

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, а функцията $\varphi(t)$ е диференцируема и притежава непрекъсната производна в сегмента $[\alpha, \beta]$, като нейните функционални стойности принадлежат на $[a, b]$. Нека освен това $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогава е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{8.15}$$

За разлика от теоремата за смяна на променливите в неопределените интеграли, тук не се предполага нито обратимост на φ, нито пък в случай, че тя е обратима, диференцируемост на обратната функция. Не се предполага даже и факта, че $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$, нито да са в сила неравенствата $a < b$ или $\alpha < \beta$. В лявата страна на формулата (8.15) фигурират само стойностите на f в сегмента $[a, b]$, а в дясната страна могат да фигурират и стойности на f за аргументи извън $[a, b]$.

На практика, смяната на променливите при определените интеграли се извършва по следния начин: Търсим подходяща субституция

$$x = \varphi(t) \tag{8.16}$$

за пресмятане на неопределения интеграл $\int f(x)dx$. В (8.16) заместваме x със "старите"интеграционни граници a и b, и от така получените уравнения намираме "новите"интеграционни граници α и β. От (8.16) се намира, че $dx = \varphi'(t)dt$. В интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ заместваме x и dx с равните им стойности, сменяме старите граници с новите и получаваме интеграла (8.15). След това интегралът (8.15) се решава директно, без да има нужда да се връщаме към старата променлива x.

Задача 8.9: Да се пресметне интегралът

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Решение: Нека да направим субституцията $x = a\sin t$. Функцията $a\sin t$ ще я разглеждаме в сегмента $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, защото имаме $a\sin 0 = 0$, $a\sin\frac{\pi}{2} = a$. Условията на теоремата за смяна на променливите са изпълнени, следователно са в сила равенствата

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}da\sin t = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2td2t = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Интегралът може да се реши и като се приложи интегриране по части, и се използва равенството

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\text{arcsin}\frac{x}{a}\right).$$

Задача 8.10: Да се пресметнат интегралите:

$$\text{а)} \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx; \quad \text{б)} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx; \quad \text{в)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx;$$

$$\text{г)} \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}; \quad \text{д)} \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}; \quad \text{е)} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx;$$

$$\text{ж)} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}; \quad \text{з)} \int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx; \quad \text{и)} \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx;$$

$$\text{й)} \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a>0; \quad \text{к)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}};$$

$$\text{л)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}; \quad \text{м)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5};$$

$$\text{н)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}; \quad \text{о)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}.$$

Отговори: а) За да решим интегралът, полагаме $1 + x = t^2$, $t > 0$. Тогава $dx = 2tdt$, новите граници на интегрирането са: за $x = 0$, $t = 1$ и за $x = 1$, $t = \sqrt{2}$. По формулата (8.15) се получава

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t^2 dt.$$

Задачата се свежда до изчисляване на интеграла

$$\int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t^2 dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15}(\sqrt{2} + 1).$$

По този начин се получава

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = \frac{4}{15}(\sqrt{2} + 1);$$

б) Ще използваме субституцията $x = t^2$, откъдето се получава $dx = 2tdt$. Новите интеграционни граници ще определим от равенствата

$$4 = \alpha^2 \ \text{ и } \ 9 = \beta^2. \tag{8.16}$$

Едно решение на горната система е например $\alpha = 2$ и $\beta = 3$. За интеграла се получава

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}dx = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int_2^3 \frac{t^2 - 1}{t - 1}dt + 2\int_2^3 \frac{dt}{t-1}$$

$$= (t+1)^2\Big|_2^3 + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 = 7 + 2\ln 2.$$

Наред с решенията $\alpha = 2$ и $\beta = 3$ системата (8.16) има и други решения. Ще дискутираме кои от тях са подходящи за нови граници и кои не. Максималният интервал, който съдържа точките 4 и 9 и в който функцията $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ е дефинирана е $(1, +\infty)$. Необходимо е α и β да бъдат такива, че за всяко $t \in [\alpha, \beta]$ да е в сила $t^2 > 1$. Съобразяваме, че само решенията $\alpha = -2$, $\beta = -3$ на (8.16) удовлетворяват всички изисквания теоремата за смяна на променливите. Неподходящо решение на (8.16) е например $\alpha = -2$, $\beta = 3$, т. к. $0 \in [-2, 3]$, но не се изпълнява изискването $t^2 > 1$; в) $2 - \frac{\pi}{2}$; г) $\frac{32}{3}$; д) Ще направим следните преобразования

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^{-x}}\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int_0^1 \frac{de^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}. \tag{8.17}$$

Полагаме $e^x = t$, $t > 0$, при $x = 0$, $t = 1$, при $x = 1$, $t = e$. За интеграла (8.17) се получава следното

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_1^e = \ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}};$$

е) Ще направим следните преобразования

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{x\sqrt{x^{-2}-1}}{x^6}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^{-5}\sqrt{x^{-2}-1}dx.$$

Полага се $-1 + x^{-2} = t^2$. Ще се получи $\dfrac{8}{15}$ за стойност на интеграла; ж) Положете $1 + x^2 = t^2$, $t \geq 1$. Интегралът ще бъде равен на $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}$; з) За $x \neq 0$ полагаме $t = x - \frac{1}{x}$ и за съответния неопределен интеграл се получава

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$$

и следователно

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0. \tag{8.18}$$

Тъй като

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

то функцията

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ако} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ако} \quad x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{ако} \quad x < 0 \end{cases} \tag{8.19}$$

е непрекъсната над $(-\infty, +\infty)$ и съгласно (8.18)

$$F'(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0. \tag{8.20}$$

От непрекъснатостта на функцията $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, равенството (8.20) е вярно и при $x=0$. По този начин се получава, че функцията (8.19) е примитивна функция за $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$. Следователно

$$\int_{-1}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = F(2)-F(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}+\pi\right);$$

и) $\frac{\pi}{16}$; й) $\frac{\pi}{4}$; к) Да направим субституцията $\dfrac{1}{x-2}=z$. Тогава $x=2+\dfrac{1}{z}$ и

$$\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}} = -\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{6}{z}-3}} = \frac{-|z|dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}.$$

Тъй като $x<2$, то $z<0$ и следователно $|z|=-z$. За интеграла се получава следното

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}} = \int_{-\frac{1}{3}}^{-1}\frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{(z+1)dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}-2z-z^2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{(z+1)\sqrt{3}}{2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

л) Разглеждаме интегралът $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$. За да решим съответния неопределен интеграл, полагаме $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и се получава

$$\int\frac{dx}{3+\cos x} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$

Ако формално се направи субституцията $\text{tg}\frac{x}{2} = t$ в определения интеграл, то тъй като $\text{tg}0 = \text{tg}\pi = 0$, се получава

$$\int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0.$$

Но от друга страна $\dfrac{1}{3+\cos x} \geq \dfrac{1}{2}$ и следователно

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} \geq 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Субституцията е направена неправилно, тъй като е нарушено условието за непрекъснатост на функцията $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ над $[0, 2\pi]$. Функцията $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\dfrac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$ не е примитивна функция за $f(x) = \dfrac{1}{3+\cos x}$ над $[0, 2\pi]$, тъй като F е прекъсната в точката $x = \pi$. За да получим примитивна за f над $[0, 2\pi]$ отбелязваме, че функцията

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

има производна, равна на f за $x \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$. Функцията $G(x)$ ще бъде примитивна за f над $[0, 2\pi]$, ако тя е непрекъсната в точката $x = \pi$. За тази цел константата C трябва да удовлетворява

$$\lim_{x\to\pi-0} F(x) = \lim_{x\to\pi+0} F(x) + C; \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C, \quad C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Сега можем да приложим формулата на Лайбниц-Нютон и получаваме

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+t^2} = G(2\pi) - G(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

м) Полагаме $\text{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Ще използваме последователните представяния: $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $2\sin x - \cos x + 5 = \dfrac{2(3t^2+2t+2)}{1+t^2}$; когато $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $t = -1$, когато $x = \dfrac{\pi}{2}$, $t = 1$. Получава се следния резултат

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2(3t^2+2t+2)}{1+t^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{\sqrt{5}} + \mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right);$$

н) В сила са следните последователни преобразувания

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x dx}{\cos^4 x(1+\mathrm{tg}^4 x)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \frac{dx}{\cos^2 x}}{\cos x(1+\mathrm{tg}^4 x)}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}x d\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\mathrm{tg}^2 x)}{1+(\mathrm{tg}^2 x)^2}$$

$$= \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

о) Ще извършим следните преобразувания

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x(1+\mathrm{tg}^4 x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\mathrm{tg}^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^4 x} d\mathrm{tg}x = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2 x - 1}{1+\mathrm{tg}^4 x} d\mathrm{tg}x. \tag{8.21}$$

В интеграла (8.21) полагаме $\mathrm{tg}x = t$ и намираме, че ако $x = 0$, то $t = 0$, и ако $x = \frac{\pi}{4}$, то $t = 1$. От (8.21) се получава, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = -\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^4+1} dt \tag{8.22}$$

За да се реши съответния неопределен интеграл в дясната страна на равенството (8.22) ще използваме представянето

$$t^4+1 = t^4+2t^2+1-2t^2 = (t^2+1)^2-2t^2 = (t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1).$$

Ще решим неопределения интеграл

$$\int \frac{t^2-1}{t^4+1} dt. \tag{8.23}$$

Ще представим подинтегралната функция на интеграла (8.23) като сума от елементарни дроби във вида

$$\frac{t^2-1}{t^4+1} = \frac{At+B}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+\sqrt{2}t+1}. \tag{8.24}$$

От последното равенство се получава

$$(At+B)(t^2+\sqrt{2}t+1) + (Ct+D)(t^2-\sqrt{2}t+1) = t^2-1,$$

$$(A+C)t^3+(B+D+\sqrt{2}A-\sqrt{2}C)t^2+(A+C+\sqrt{2}B-\sqrt{2}D)t+B+D=t^2-1.$$

По този начин се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D+\sqrt{2}A-\sqrt{2}C=1 \\ A+C+\sqrt{2}B-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=-1. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad B=-\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad D=-\frac{1}{2}. \tag{8.25}$$

От (8.24) и (8.25) се получава представянето

$$\frac{t^2-1}{t^4+1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}.$$

Тогава за интегралът (8.23) се получава

$$\int \frac{t^2-1}{t^4+1}dt=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt+\int \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt=I_1+I_2. \tag{8.26}$$

Ще решим интегралът I_1.

$$I_1=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t^2-\sqrt{2}t+1)}{t^2-\sqrt{2}t+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1). \tag{8.27}$$

По аналогичен начин се показва, че

$$I_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1). \tag{8.28}$$

От (8.22), (8.26), (8.27) и (8.28) се получава

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)\Big|_0^1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$$

8.5 Общи задачи от определени интеграли

Задача 8.11: Да се пресметнат интегралите:

$$1)\ \int_1^2 (x^2-2x+3)dx;\quad 2)\ \int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx;\quad 3)\ \int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx;$$

$$4)\ \int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6};\quad 5)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 xdx;\quad 6)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 xdx;$$

$$7)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};\quad 8)\ \int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx;\quad 9)\ \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx;$$

$$10)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}};\quad 11)\ \int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}};\quad 12)\ \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$13)\ \int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1};\quad 14)\ \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}};\quad 15)\ \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}dx}{x^3};$$

$$16)\ \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx;\quad 17)\ \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}dx;\quad 18)\ \int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx;$$

$$19)\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}};\quad 20)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 xdx;\quad 21)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 xdx;$$

$$22)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x};\quad 23)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x};\quad 24)\ \int_0^1 xe^{-x}dx;$$

$$25)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x};\quad 26)\ \int_1^3 \ln xdx;\quad 27)\ \int_1^2 x\ln xdx;$$

$$28)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \text{arcsin}xdx;\quad 29)\ \int_0^{\pi} x^3\sin xdx;\quad 30)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx;$$

$$31)\ \int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}dx,\quad a>0,\quad n\in\mathbb{N};\quad 32)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}dx;$$

$$33)\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a+b\sin x},\ \ 0<b<a;\ 34)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x},\ \ a>0,\ \ b>0;$$

$$35)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx;\quad 36)\ \int_1^{16} \text{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx;$$

$$37)\ \int_{\sqrt{e}}^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}};\quad 38)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx;$$

$$39) \quad \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx; \quad 40) \quad \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx.$$

Отговори: 1) $\frac{7}{3}$; 2) $\frac{19}{15}$; 3) $\frac{45}{4}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) π; 6) π; 7) $\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{4}{7}$; 8) $\frac{11}{2}+7\ln 2$; 9) $\frac{\pi}{4}$; 10) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 11) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 12) $4-2\ln 3$; 13) $7+2\ln 2$; 14) $2-\ln 2$; 15) $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$; 16) $\sin 1$; 17) $\frac{\pi}{4}$; 18) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 19) Задачата може да се реши така:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{e^{-x}(1+e^{2x})} = \int_0^1 \frac{de^x}{1+e^{2x}}$$
$$= \text{arctg}e^x|_0^1 = \text{arctg}e - \frac{\pi}{4}.$$

Може да се работи и така:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(1+e^{-2x})} = -\int_0^1 \frac{de^{-x}}{1+(e^{-x})^2}$$
$$= -\,\text{arctg}e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \text{arctg}\frac{1}{e};$$

20) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$; 21) $\frac{7\sqrt{2}}{12}-\frac{4}{3}$; 22) Може да се положи $\text{tg}\frac{x}{2}=t$ и да се използват представянията: при $x=0$ $t=0$, при $x=\frac{\pi}{2}$ $t=1$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $1+\sin x+\cos x=\frac{2(t+1)}{1+t^2}$. За интеграла се получава следното

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)|_0^1 = \ln 2;$$

23) Може да се положи $\text{tg}x=t$ и да се използват представянията: при $x=0$ $t=0$, при $x=\frac{\pi}{4}$ $t=1$; $\sin^2 x=\frac{2t}{1+t^2}$. За интеграла се получава следното:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{d(\sqrt{3}t)}{1+(\sqrt{3}t)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\sqrt{3}t\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

24) $1-\frac{2}{e}$; 25) $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; 26) $\ln 27-2$; 27) $\ln 4-\frac{3}{4}$; 28) $\frac{\pi}{12}-1$; 29) $\pi^3-6\pi$; 30) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$; 31) Полагаме $x=a\cos t$ и последователно се получава: при $x=0$ $t=\frac{\pi}{2}$, при $x=a$ $t=0$; $a^2-x^2=a^2\sin^2 t$; $dx=-a\sin t dt$. За интеграла се получава

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}dx = a^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|^{2n-1}\sin t dt = a^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt.$$

Сега прилагаме формулата (8.5) и се получава

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{2n-1}{2}}dx = a^{2n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

32) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 33) Полагаме $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ и се получава: при $x=-\pi$ $t=-\infty$, при $x=\pi$ $t=\infty$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. За интеграла се получава следното

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+2\frac{b}{a}t+1}=\frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2+\left(t+\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}-\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{at+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}};$$

34) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{tg}x}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{b}\int_0^{\infty}\frac{d(bt)}{a^2+(bt)^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{ab}\left[\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}-\operatorname{arctg}0\right]=\frac{\pi}{2ab}\quad(a>0,\quad b>0);$$

35) $\frac{4}{3}$; 36) Интегрираме по части и се получава

$$\int_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$$

$$=x.\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\Big|_1^{16}-\int_1^{16}\frac{x}{1+(\sqrt{\sqrt{x}-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx$$

$$=16\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}.$$

За решаване на последния интеграл полагаме $\sqrt{x}-1=t^2$ и се получава

$$\int_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx=\frac{16\pi}{3}-\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4(t^2+1)tdt}{t}$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{t^3}{3}\bigg|_0^{\sqrt{3}} - t|_0^{\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3};$$

37) $\frac{\pi}{2}$; 38) Нека да въведем означението $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$. Ще интегрираме по части и последователно се получава

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x de^{2x} = \frac{1}{2}\cos x e^{2x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x de^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I,$$

т. е. получи се уравнението $I = \dfrac{e^\pi}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}I$. Намираме, че

$$\frac{5}{4}I = \frac{e^\pi}{4} - \frac{1}{2}, \quad I = \frac{e^\pi - 2}{5}.$$

39) Използвайте факта, че $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, след това се интегрира по части и се получава отговор $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$; 40) Директно ще интегрираме по части и се получава

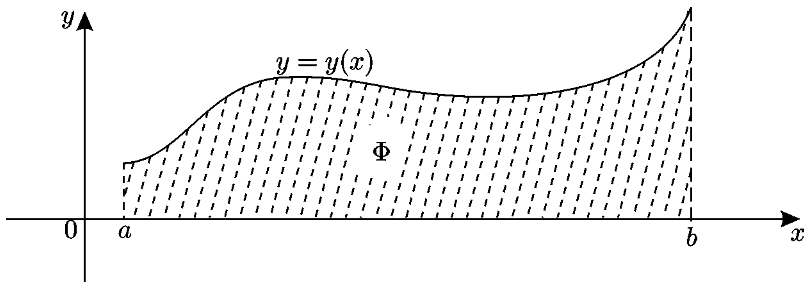
$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = x.\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\bigg|_0^3$$

$$-\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \cdot dx = \pi - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}.$$

В последния интеграл се полага $x = t^2$ и се получава

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

$$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} dt + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$



Фиг. 8.1: Криволинеен трапец

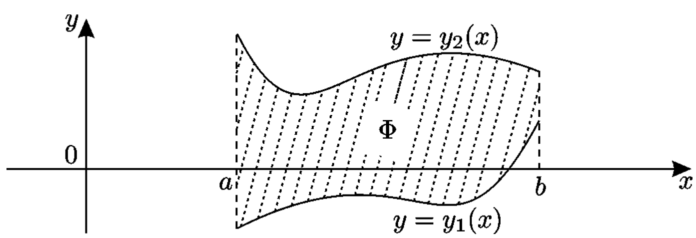
8.6 Лица на равнинни фигури

А) Лица на равнинни фигури, зададени в декартови координати

Нека функцията $y = y(x)$ е непрекъсната и неотрицателна над сегментът $[a, b]$. Лицето на фигурата Φ (фиг. 8.1), ограничена от графиката на функцията $y = y(x)$, сегмента $[a, b]$ от остта Ox и правите $x = a$, и $x = b$ е равно на

$$S = \int_a^b y(x)dx. \tag{8.29}$$

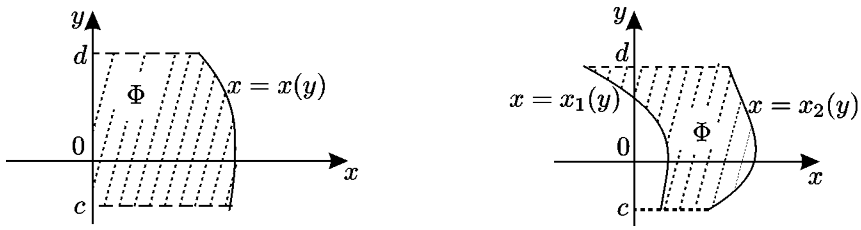
Фигурата Φ се нарича криволинеен трапец.



Фиг. 8.2:

Нека функциите $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ са непрекъснати над сегмента $[a, b]$ и $y_2(x) \geq y_1(x)$, $x \in [a, b]$. Лицето на фигурата Φ (фиг. 8.2), ограничена от графиките на функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и правите $x = a$, и $x = b$ е равно на

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx. \tag{8.30}$$



Фиг. 8.3:

При аналогични предложения (виж фиг. 8.3) за дадените функции за лицето на фигурата Φ са в сила формулите

$$S = \int_c^d x(y)dy,$$

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]dy. \tag{8.31}$$

Б) Лица на равнинни фигури, зададена в параметричен вид

Нека функцията $y = y(x)$ е зададена чрез параметричните уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

където функцията $x(t)$ има непрекъсната и неотрицателна производна над $[\alpha, \beta]$, а функцията $y(t)$ е непрекъсната и неотрицателна над $[\alpha, \beta]$. Тогава лицето на фигурата Φ е равно на

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt, \tag{8.32}$$

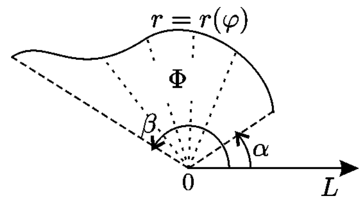
и аналогично

$$S = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt.$$

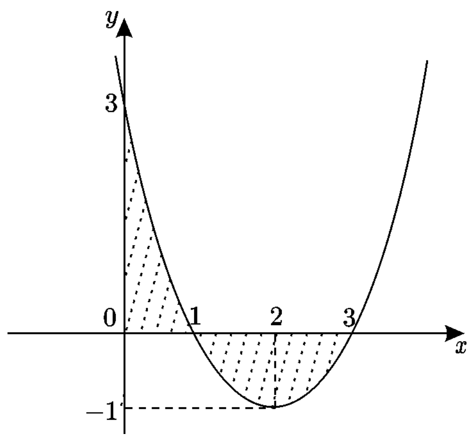
В) Лице на криволинеен сектор

Нека функцията $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, където $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ (фиг. 8.4) е непрекъсната и неотрицателна над $[\alpha, \beta]$. Лицето на сектора Φ, ограничен от графиката на функцията $r = r(\varphi)$ в полярни координати и съответните лъчи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ е равно на

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \tag{8.33}$$



Фиг. 8.4:



Фиг. 8.5:

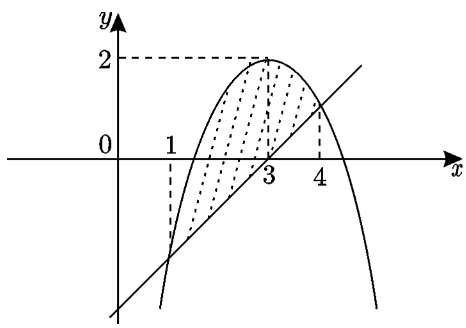
Задача 8.12: Да се пресметне лицето на фигурата, ограничена от кривата $y = x^2 - 4x + 3$ и координатните оси (фиг. 8.5).

Решение: Кривата е парабола. Пресечните ѝ точки с абсцисната ос се получават като решение на уравнението $x^2 - 4x + 3 = 0$ (фиг. 8.5). Така се намира $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. По формулата (8.29) се получава

$$S = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx \right|$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 \right| = \frac{26}{3}.$$

Задача 8.13: Да се пресметне лицето на фигурата, ограничена от параболата $y = 6x - x^2 - 7$ и правата $y = x - 3$. (фиг. 8.6)

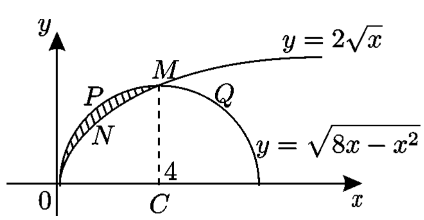


Фиг. 8.6:

Решение: Намираме абсцисите на пресечните точки на двете криви (фиг. 8.6). От уравнението $6x-x^2-7=x-3$ се получава $x_1=1$ и $x_2=4$. По формулата (8.30) се намира

$$S=\int_1^4[(6x-x^2-7)-(x-3)]dx=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\frac{9}{2}.$$

Задача 8.14: Да се пресметнат лицата на фигурата, ограничена от кривите $y=\sqrt{8x-x^2}$ и $y=2\sqrt{x}$ (фиг. 8.7).



Фиг. 8.7:

Решение: Първата крива е полуокръжност, разположена над оста Ox. За да намерим координатите на центъра и радиуса ѝ, на уравнението $y=\sqrt{8x-x^2}$ даваме вида $y^2=8x-x^2$, или $(x-4)^2+(y-0)^2=4^2$. Следователно $C(4,0)$ и $R=4$. Втората крива е полупарабола, разположена над оста Ox. За да намерим абсцисите на пресечните точки на двете криви решаваме системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} y=\sqrt{8x-x^2} \\ y=2\sqrt{x}. \end{array}\right.$$

Последователно се получава $\sqrt{8x-x^2}=2\sqrt{x}$, $8x-x^2=4x$, $x^2-4x=0$, следователно $x_1=0$ и $x_2=4$. Тогава имаме

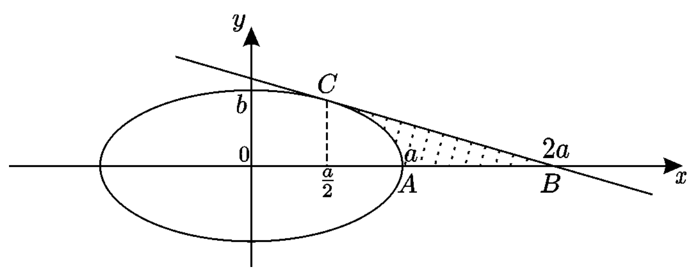
$$S_{OCMNO}=\int_0^4 2\sqrt{x}=2\cdot\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4=\frac{32}{3},$$

$$S_{OCMPO}-S_{OCMNO}=\frac{1}{4}\pi 4^2-\frac{32}{3}=4\pi-\frac{32}{3}.$$

Задача 8.15: Към елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

е построена допирателната в точката $C\left(\frac{a}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$. Намерете лицето на криволинейния триъгълник ABC (фиг. 8.8).



Фиг. 8.8:

Решение: Дъгата AC от елипсата и отсечката BC са графиките на функциите

$$x_1(y)=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},\quad x_2(y)=a\left(2-\frac{y\sqrt{3}}{b}\right),\quad 0\le y\le\frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Съгласно формулата (8.31) се получава

$$S=\int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}}[x_2(y)-x_1(y)]dy. \tag{8.34}$$

Интегралът от функцията $x_2(y)$ се смята непосредствено

$$\int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}}x_2(y)dy=\int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}}a\left(2-\frac{y\sqrt{3}}{b}\right)dy=\frac{b\sqrt{3}}{8}ab. \tag{8.35}$$

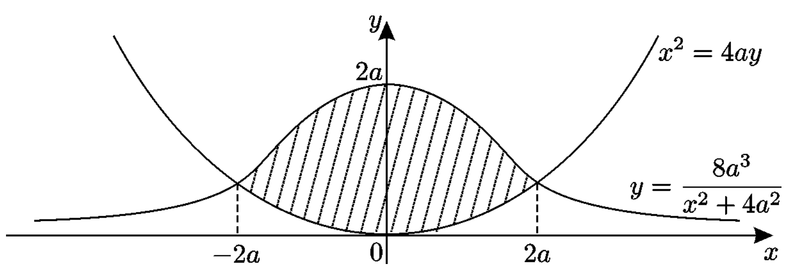
За да решим интегралът от функцията $x_1(y)$ полагаме $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ и получаваме

$$\int_0^{\frac{b\sqrt{3}}{2}} x_1(y)dy = ab\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) ab. \tag{8.36}$$

От (8.34), (8.35) и (8.36) се получава

$$S = \frac{ab}{6}(3\sqrt{3} - \pi).$$

Задача 8.16: Да се пресметне лицето на фигурата, ограничена от кривите $x^2 = 4ay$ и $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ $a > 0$ (фиг. 8.9).



Фиг. 8.9:

Решение: Първата крива е парабола с ос оста Oy, а втората е къдрица на Мария Айнези (фиг 8.9). Фигурата, ограничена от тези линии е симетрична спрямо оста Oy, затова ще намерим лицето на половината ѝ, и полученият резултат ще удвоим. Ще намерим абсцисите на пресечните точки на тези две линии. За тази цел ще решим системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = 4ay \\ y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}. \end{array} \right.$$

Тя има решение $x_1 = -2a$ и $x_1 = 2a$. Тогава

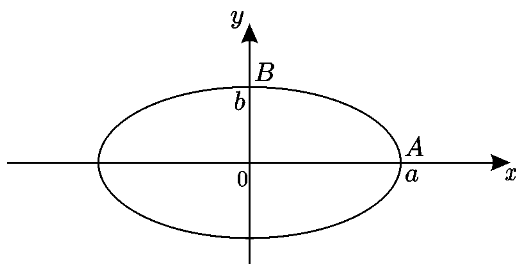
$$S = 2\int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right) dx = 2\int_0^{2a} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}dx - 2\int_0^{2a} \frac{x^2}{4a}dx$$

$$= 2.8a^3 \int_0^{2a} \frac{dx}{(2a)^2 + x^2} - \frac{2}{4a}\int_0^{2a} x^2dx$$

$$= \frac{2.8a^3}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{2a}\Big|_0^{2a} - \frac{2}{4a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2a}$$

$$= 8a^2(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) - \frac{1}{2a}\cdot\frac{8a^3}{3} = 8a^2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{4a^2}{3} = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)a^2.$$

Задача 8.17: Да се намери лицето на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (фиг. 8.10).



Фиг. 8.10: Елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Решение: Елипсата е симетрична спрямо осите Ox и Oy, затова е достатъчно да намерим лицето на частта ѝ, разположена в първи квадрант и резултата да умножим по 4. От уравнението на елипсата се определя, че $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Специално за горната част на елипсата имаме, че $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. За лицето на елипсата се получава

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

За да решим интеграла полагаме $x = a\cos t$ и последователно се получава $dx = -a\sin t dt$, при $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, при $x = a$, $t = 0$, $\sqrt{a^2 - x^2} = |\sin t|$. Следователно

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a|\sin t|(-a)\sin t dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\, t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

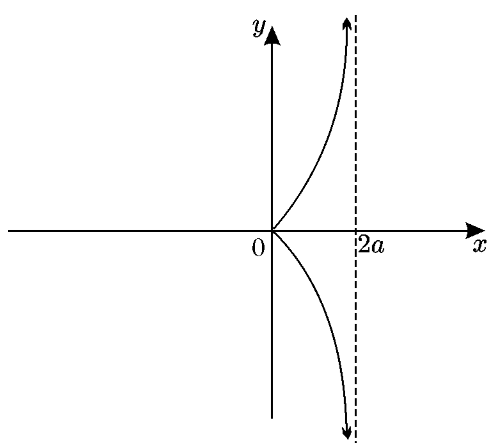
За лицето на елипсата се получава

$$S = \frac{4b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

Задачата може да се реши и така: Дъгата на елипсата, лежаща в първи квадрант, може да се параметризира като: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, където смисълът на сегмент от вида $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ е, че за точките $B(0,b)$ и $A(a,0)$ имаме, че $B\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ и $A(x(0), y(0))$. Тогава за лицето на елипсата се получава

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a)\sin t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Задача 8.18: Да се намери лицето на безкрайната фигура, заградена от кривата $y^2(2a-x) = x^3$, $a > 0$ и асимптотата ѝ (фиг. 8.11).



Фиг. 8.11: Цисоида на Диоклес $y^2(2a-x) = x^3$, $a > 0$

Решение: Кривата се нарича цисоида на Диоклес. Тя е симетрично разположена спрямо оста Ox, затова ще намерим лицето на половината фигура и полученият резултат ще удвоим. От уравнението на цисоидата намираме $y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$. Пред корена вземаме знака $+$, защото разглеждаме частта от кривата над оста Ox. Тогава се получава, че

$$S = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx.$$

За да решим горният интеграл полагаме $\dfrac{x}{2a-x}=t^2$, откъдето последователно се намира $x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{4at}{(1+t^2)^2}dt$. Сменяме границите на интегрирането, при $x=0$, $t=0$, при $x=2a$, $t=+\infty$. За лицето на фигурата се получава

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^2)^3}. \tag{8.37}$$

Ще пресметнем интеграла като интегрираме по части:

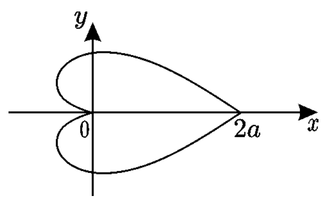
$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{t^4dt}{(1+t^2)^3}=\int_0^{+\infty}t^3\cdot\frac{t}{(1+t^2)^3}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)^3}d(1+t^2)\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^3d\frac{1}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{(1+t^2)^2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{3t^2dt}{(1+t^2)^2}\\
&=-\frac{1}{4}\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)^2}-0\right]+\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t.t}{(1+t^2)^2}dt\\
&=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}d(1+t^2)=-\frac{3}{8}\int_0^{+\infty}td\frac{1}{1+t^2}\\
&=-\frac{3}{8}\frac{t}{1+t^2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\\
&=-\frac{3}{8}\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t}{1+t^2}-0\right]+\frac{3}{8}\mathrm{arctg}t\bigg|_0^{+\infty}\\
&=\frac{3}{8}(\mathrm{arctg}(+\infty)-\mathrm{arctg}0)=\frac{3\pi}{16}.
\end{aligned} \tag{8.38}$$

От (8.37) и (8.38) се получава $S=3a^2\pi$.

Задача 8.19: Да се намери лицето на кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\theta), \quad a>0$$

(фиг. 8.12).



Фиг. 8.12: Кардиоида $\rho = a(1+\cos\theta), \quad a>0$

Решение: Като се използва формулата (8.33) се получава

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\theta+2\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= a^2\pi + \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}a^2. \end{aligned}$$

Задача 8.20: Да се намери лицето на фигурата, ограничена от първата дъга на циклоидата

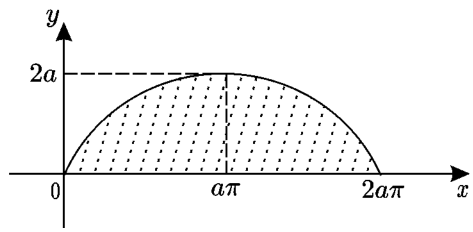
$$\left| \begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array} \right.$$

и абсцисната ос, където $a>0$ (фиг. 8.13).

Решение: Циклоидата е начертана на фиг. 8.13. Ординатите на точките O и A са равни на нула, затова стойностите на t, които съответстват на тези точки, се определят от уравнението $a(1-\cos t)=0$, т. е. $\cos t = 1$ и съответно $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$. Като се използва формулата (8.32) за лицето се получава

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t).a(1-\cos t)dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$



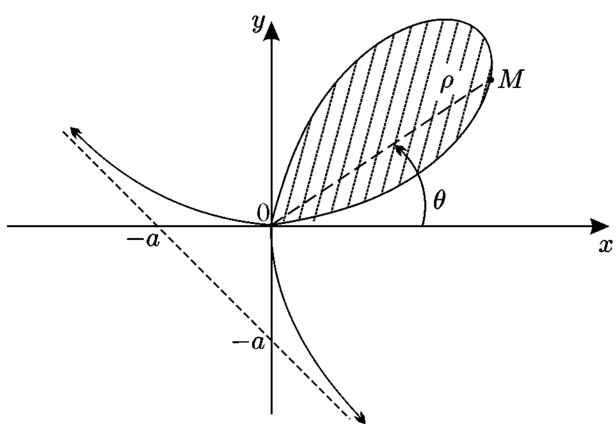
Фиг. 8.13: Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

$$= a^2.t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$
$$= 2\pi a^2 + \frac{1}{2} a^2.t\ \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} a^2 \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Задача 8.21: Да се намери лицето на буклата на декартовия лист

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

(фиг. 8.14).



Фиг. 8.14: Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$

Решение: В задача 6.100 беше начертана графиката на декартовия лист. За да намерим лицето на неговата букла, ще бъде удобно да въведем полярни координати, като използваме връзките

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{array} \right.$$

Намираме, че уравнението на декартовия лист в полярни координати е

$$\rho^3 \cos^3\theta + \rho^3 \sin^3\theta - 3a\rho\cos\theta\rho\sin\theta = 0,$$

$$\rho(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3a\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\rho = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

За да опише точката M контура на буклата (фиг. 8.14), θ ще се изменя от 0 до $\frac{\pi}{2}$. За лицето на буклата се получава

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}d\theta \tag{8.39}$$

Ще пресметнем интеграла в горното равенство. В сила са последователните преобразования

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta\left(1 + \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\right)^2}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta(1 + \mathrm{tg}^3\theta)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{(1 + \mathrm{tg}^3\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2\theta d\mathrm{tg}\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\theta)^2}. \tag{8.40}$$

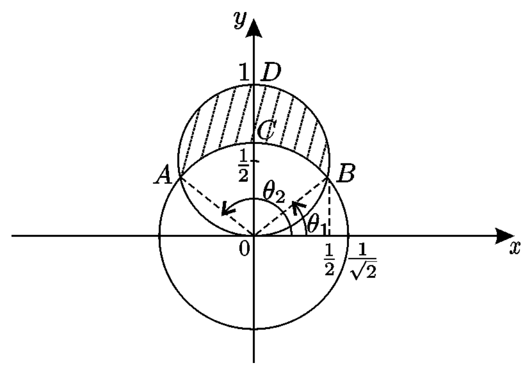
В последния интеграл полагаме $\mathrm{tg}\theta = t$ и използваме, че за $\theta = 0$, $t = 0$ и за $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = +\infty$. Получаваме следния резултат

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2\theta d\mathrm{tg}\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\theta)^2} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2} = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{d(1 + t^3)}{(1 + t^3)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1 + t^3}\bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{3}\left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1 + t^3} - 1\right] = \frac{1}{3}. \tag{8.41}$$

От (8.39), (8.40) и (8. 41) окончателно се получава

$$S = \frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3a^2}{2}.$$



Фиг. 8.15: Луничка, ограничена от линиите $x^2 + y^2 - y = 0$ и $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Задача 8.22: Да се намери лицето на луничката, ограничена от линиите $x^2 + y^2 - y = 0$ и $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$, както е показано на фиг. 8.15.

Решение: Кривите, които ограничават луничката са окръжности, разположени една спрямо друга, както е показано на фиг. 8.15. Очевидно е изпълнено, че

$$S_{ADBC} = S_{OADBO} - S_{OACBO}. \tag{8.42}$$

За да намерим лицата на секторите от горната формула ще преминем към полярни координати чрез равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta. \end{array} \right.$$

Уравненията на двете окръжности в полярни координати са $\rho = \sin\theta$ и $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. За намиране на координатите на двете пресечни точки A и B решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} \rho = \sin\theta \\ \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array} \right.$$

Получаваме $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откъдето $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $\theta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$. Така се получава

$$S_{OADBO} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta - \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2\theta d2\theta = \frac{1}{4}\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{8}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}; \quad (8.43)$$

$$S_{OACBO} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{8}. \quad (8.44)$$

От (8.42), (8.43) и (8.44), окончателно се получава

$$S_{ADBC} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}.$$

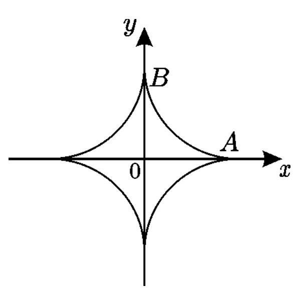
Задача 8.23: Да се намери лицето на луничката, ограничена от линиите $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ и $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Отговор: $\frac{1}{4}$.

Задача 8.24: Да се намери лицето на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0$$

(фиг. 8.16).



Фиг. 8.16: Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

Решение: Кривата е симетрична относно осите Ox и Oy (фиг. 8.16). Ще намерим лицето на четвъртината на дадената фигура, лежаща в първи квадрант, т. е. криволинейният триъгълник AOB. Задаваме кривата чрез параметричните уравнения

$$x = a\sin^3 t, \quad y = a\cos^3 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

така, че $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. Дъгата AB съответства на $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Лицето на криволинейния триъгълник AOB по формулата (8.32) е равно на

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)dt. \tag{8.45}$$

Към формулата (8.45) прилагаме интегриране по части, отчитаме, че $y(t)x(t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ и получаваме

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y'(t)dt. \tag{8.46}$$

Събираме (8.45) и (8.46) и получаваме

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [y(t)x'(t) - x(t)y'(t)]dt.$$

Използвайки горната формула се намира

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [a\cos^3 t 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t(-3a)\cos^2 t\sin t]dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t]dt$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2t}{4}dt$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2\pi}{32}.$$

Окончателно, лицето на астроидата е равна на $\dfrac{3a^2\pi}{8}$.

Задача 8.25: Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

$$\text{а)}\quad ax = y^2, ay = x^2 \quad (a > 0); \quad \text{б)}\quad y = x^2, \quad x + y = 2;$$

$$\text{в)}\quad y = 2x - x^2, \quad x + y = 0.$$

Отговори: а) $\frac{a^2}{3}$; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{9}{2}$.

Задача 8.26: Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) от хипоциклоидата: $x = a(2\cos t - cos 2t)$, $y = a(-2\sin t + \sin 2t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$;

б) от еволютата на елипсата $x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$, $a > b > 0$, $t \in [0, 2\pi]$;

в) от циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ и правата $y = 0$.

Отговори: а) $6\pi a^2$; б) $\frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{8ab}$; в) $3\pi a^2$.

Задача 8.27: Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите, с полярни уравнения: :

а) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta, \quad a > 0-$ лемнискатата на Бернули;

б) $\rho = a(1 + \cos\theta), \quad a > 0-$ кардиоида;

в) $\rho = a\sin 2\theta, \quad a > 0-$ двулистна роза;

г) $\rho = a\cos\theta + b, \quad 0 < a < b-$ охлюв на Паскал.

Отговори: а) a^2; б) $\frac{3\pi a^2}{2}$; в) $\frac{\pi a^2}{4}$; г) $\frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2)$.

Задача 8.28: Да се намерят лицата на фигурите, заградени от кривите:

а) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0-$ лемнискатата на Бернули;

б) $x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0-$ декартов лист;

в) $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad a > 0, \quad b > 0-$ подера на елипсата.

Отговори: а) a^2; б) $\frac{3}{2}a^2$; в) $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$.

8.7 Дължина на равнинна дъга

Дъга от кривата L се нарича образът на сегмента $[\alpha, \beta]$ чрез непрекъснато биективно изображение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и означаваме

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \tag{8.47}$$

В този случай се казва, че кривата L е зададена в параметричен вид. Множеството от точки, с координати $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$, се нарича графика на дъгата (8.47). Точката с координати $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ се нарича начало на дъгата, а точката $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ се нарича неин край.

С помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

делим сегмента $[\alpha, \beta]$ на n части. На всяка една от делящите точки t_i отговаря една точка $P_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ от кривата L. Съединявайки всеки две съседни точки от редицата $P_0, P_1, \ldots, P_n$ с праволинейни отсечки, получаваме една начупена линия, за която казваме, че е вписана в дъгата L.

Ако множеството от дължините на всички начупени линии е ограничено множество, се казва, че дъгата L може да бъде ректифицируема (изправена). Под дължина на дъга, която може да бъде ректифицируема, ще разбираме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии.

А) Ако функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ от параметричното представяне (8.47) на кривата L са диференцируеми и производните им са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L е ректифицируема, и дължината ѝ l се пресмята по формулата

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{8.48}$$

Б) В специалния случай, когато имаме дъга, зададена в декартов вид

$$y = f(x), \quad a \le x \le b,$$

или по-точно дъгата $x = t$, $y = f(t)$, където $a \le t \le b$, формулата (8.48) добива вида

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

В) Под дъга, зададена в полярни координати с уравнение $\rho = f(\theta)$, където $\alpha \le \theta \le \beta$, се разбира дъгата, дефинирана в параметричен вид със следните уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta, \end{array} \right.$$

където $\alpha \le \theta \le \beta$. В този случай формулата (8.48) за дължина на дъгата добива вида

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}d\theta. \tag{8.49}$$

Задача 8.29: Да се намери дължината l на дъгата от циклоидата

$$\left| \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{array} \right.$$

където $a > 0$ и $0 \le t \le 2\pi$.

Решение: Очевидно имаме

$$\left| \begin{array}{l} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t, \end{array} \right.$$

откъдето последователно се пресмята

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

$$= 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad 0 \le \frac{t}{2} \le \pi, \quad \sin\frac{t}{2} \ge 0.$$

По формулата (8.48) за дължината l на дъгата се получава

$$l = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -\,4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

Задача 8.30: Да се намери дължината на дъгата от параболата

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad p > 0,$$

където $0 \le t \le a$.

Решение: Очевидно имаме, че $x' = \dfrac{t}{p}$, $y' = 1$, откъдето по формулата (8.48) се получава

$$l = \int_0^a \sqrt{\frac{t^2}{p^2}+1}dt = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{t^2+p^2}dt. \tag{8.50}$$

Ще решим интеграла в дясната страна на горното равенство:

$$I = \int_0^a \sqrt{t^2+p^2}dt = t\sqrt{t^2+p^2}\bigg|_0^a - \int_0^a \frac{t.2t}{2\sqrt{t^2+p^2}}dt$$

$$= a\sqrt{a^2+p^2} - \int_0^a \frac{t^2+p^2-p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}dt$$

$$= a\sqrt{a^2+p^2} - \int_0^a \sqrt{t^2+p^2}dt + p^2\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}}$$

$$= a\sqrt{a^2+p^2} - I + p^2\ln|t+\sqrt{t^2+p^2}|\bigg|_0^a$$

$$= a\sqrt{a^2+p^2} - I + p^2(\ln(a+\sqrt{a^2+p^2} - \ln p).$$

Получи се равенството

$$2I = a\sqrt{a^2+p^2} + p^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p},$$

откъдето се намира, че

$$I = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+p^2} + \frac{p^2}{2} \ln \frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}. \tag{8.51}$$

От (8.50) и (8.51) се получава, че

$$l = \frac{a}{2p}\sqrt{a^2+p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}.$$

Задача 8.31: Да се намери дължината l на кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\theta), \quad a > 0,$$

където $0 \le \theta \le 2\pi$.

Решение: Имаме, че $\rho' = -a\sin\theta$, откъдето се получава

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$= a\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

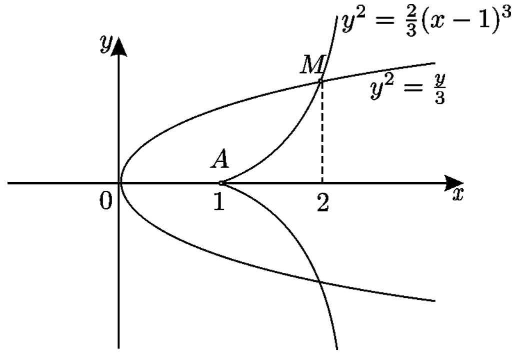
$$= a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

Оттук по формулата (8.49) се получава

$$l = 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta + 2a\int_{\pi}^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - 4a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 8a.$$

Задача 8.32: Да се намери дължината на дъгата от семикубичната парабола $y^2 = \dfrac{2}{3}(x-1)^3$, заключена вътре в параболата $y^2 = \dfrac{x}{3}$ (фиг. 8.17).



Фиг. 8.17:

Решение: Семикубичната парабола е разположена симетрично спрямо абсцисната ос, затова ще намерим дължината на дъгата AM (фиг. 8.17), разположена над оста Ox и полученият резултат ще удвоим.

Търсим абсцисата на пресечната точка M на двете криви. За целта решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2 = \frac{x}{3}. \end{array}\right.$$

След изключване на y получаваме $2x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = 0$. Установява се, че $x = 2$ е корен на това уравнение. Последователно от уравнението на семикубичната парабола се получава

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(x-1)^3}, \quad y' = \sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{3x-1}{2}}.$$

По този начин се намира, че

$$l = 2\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3x-1}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^2 (3x-1)^{\frac{1}{2}}d(3x-1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left.\frac{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

Задача 8.33: Да се намери дължината на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Решение: Астроидата е разположена симетрично спрямо координатните оси (фиг. 8.16). Ще пресметнем дължината на частта ѝ в първи квадрант и полученият резултат ще умножим по 4, т. е.

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+y'^2}dx.$$

Уравнението $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ определя y като неявна функция на x. Диференцираме по x уравнението на астроидата и се получава

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}y' = 0, \quad x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}y' = 0,$$

$$y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

като сме използвали факта, че от уравнението на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Освен това имаме, че

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Тогава за дължината на астроидата се получава, че

$$l = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx = 4a^{\frac{1}{3}}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a = 6a.$$

Задача 8.34: Да се намери дължината на дъгата на Архимедовата спирала

$$\rho = a\theta, \quad a > 0,$$

където $0 \le \theta \le \alpha$.

Отговор: $\frac{a}{2}\left[\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + \alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right]$.

Задача 8.35: Да се намери дължината на дъгата на кривата

$$\rho = \frac{1}{\cos^3\frac{\theta}{3}},$$

където $-\pi \le \theta \le \pi$.

Отговор: $12\sqrt{3}$.

Задача 8.36: Да се пресметнат дължините на дъгите на кривите с полярни уравнения:

а) $\rho = ae^{m\theta}$, $a > 0$, $m > 0$, (логаритмична спирала) в сегмента $[0, 2\pi]$;

б) $\rho = a\cos\theta + b$, $a > 0$, $b > 0$, (охлюв на Паскал) в сегмента $[0, \pi]$.

Отговор: а) $a\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\left(e^{2m\pi}-1\right)$; б) $2(a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\theta}d\theta$.

Задача 8.37: Да се пресметне дължината на дъгата от кривата $5y^3 = x^2$ (полукубична парабола), заключена вътре в окръжността $x^2+y^2 = 6$.

Отговор: $\frac{134}{27}$.

Задача 8.38: Да се пресметне дължината на дъгата от кривата

$$\left| \begin{array}{l} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ x = e^t(\cos t - \sin t), \end{array} \right.$$

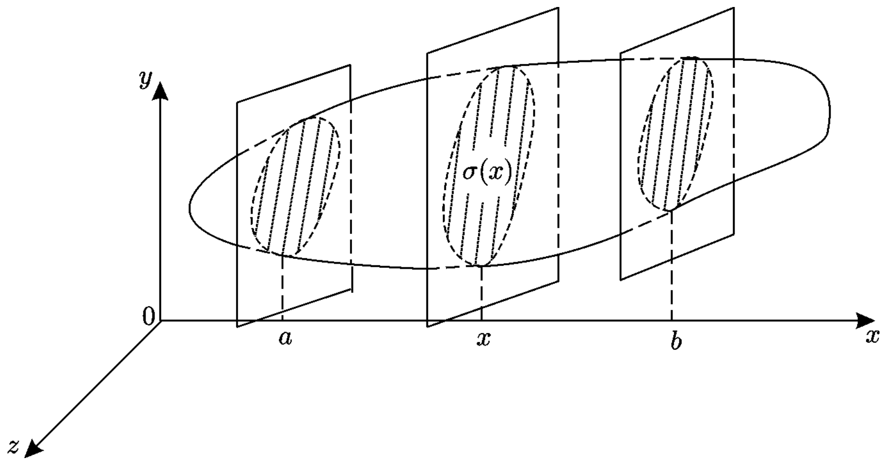
заключена между точките, съответстващи на $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$.

Отговор: $2(e-1)$.

Задача 8.39: Да се пресметне дължината на дъгата от кривата $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, заключена между координатните оси.

Отговор: $\frac{a}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) + a$.

8.8 Обем на ротационни тела



Фиг. 8.18:

А) Ако лицето $\sigma(x)$ на сечението на едно тяло (фиг. 8.18) с равнина, перпендикулярна на някоя ос, която се приема за абсцисна, е дадена функция на x, то обемът V на тялото, заключено между равнините $x = a$ и $x = b$ е

$$V = \int_a^b \sigma(x)dx. \tag{8.52}$$

Б) Нека функцията $y = y(x)$ е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[a, b]$. Обемът V на тялото, образувано от въртенето около оста Ox на фигурата Φ (фиг. 8.19), ограничена от графиката на функцията $y(x)$, отсечките от правите $x = a$ и $x = b$, и отсечката $[a, b]$ от оста Ox, е равен на

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx. \tag{8.53}$$

Ако функцията $y = y(x)$ е зададена чрез параметричните уравнения

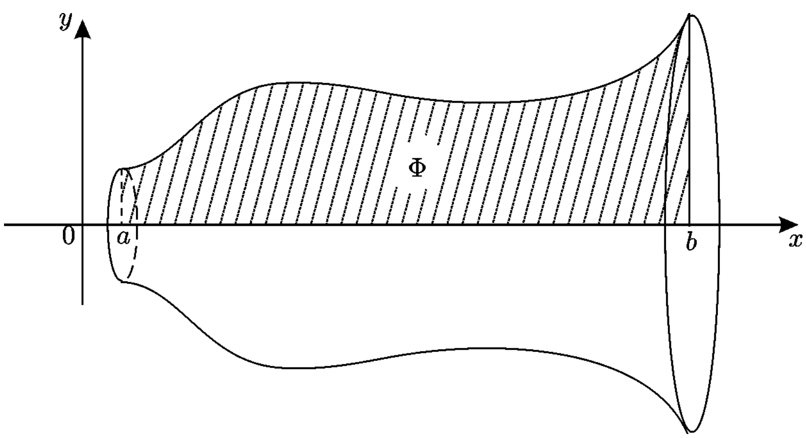
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

където функцията $x(t)$ има непрекъсната и неотрицателна първа производна в $[\alpha, \beta]$, и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функцията $y(t)$ е непрекъсната и неотрицателна в $[\alpha, \beta,]$ то обемът V на тялото, образувано от въртенето на фигурата Φ (фиг. 8.19) около оста Ox, е равен на

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt. \tag{8.54}$$

Ако функцията $x(t)$ е намаляваща и $x(\alpha) = b$, $x(\beta) = a$, то при горните условия

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt. \tag{8.55}$$



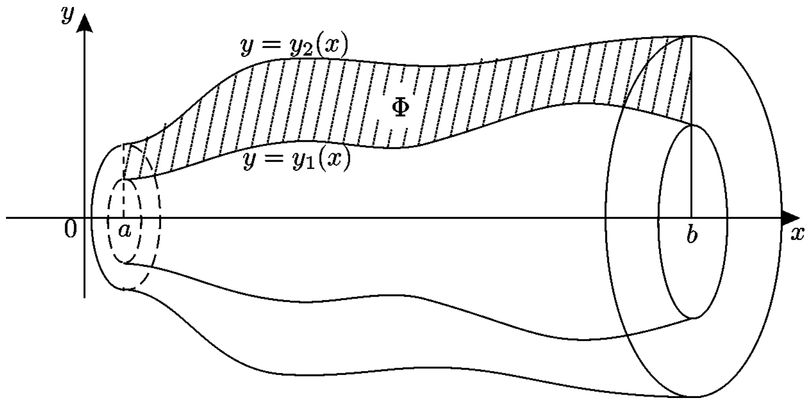
Фиг. 8.19:

Нека функциите $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ са непрекъснати в сегмента $[a, b]$, и $y_2(x) \geq y_1(x)$, за $x \in [a, b]$. Обемът V на тялото, образувано от въртенето около оста Ox на фигурата Φ (фиг. 8.20), ограничена от графиките на функциите $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, и отсечките от правите $x = a$ и $x = b$, е равен на

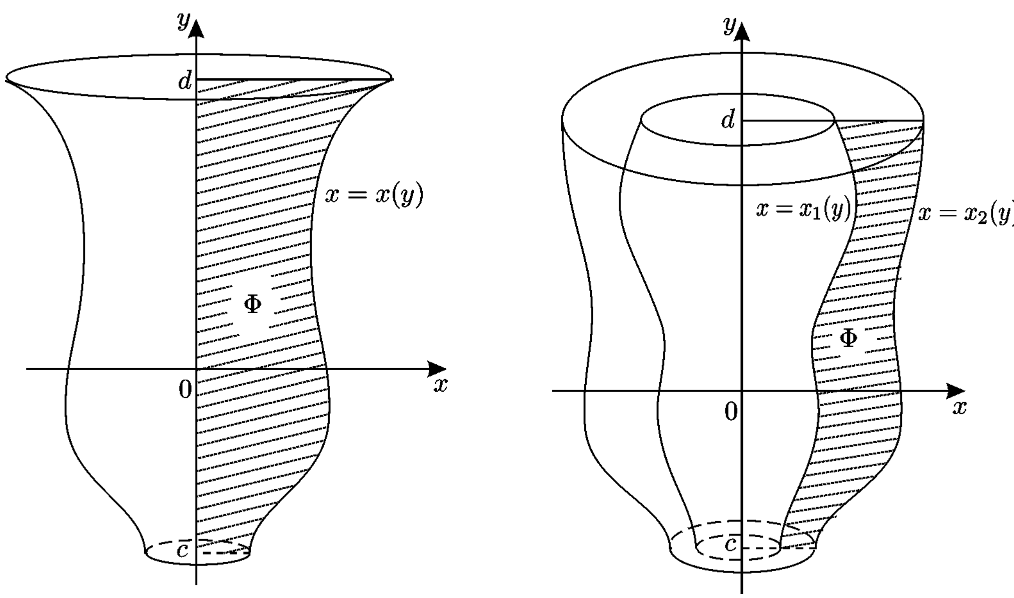
$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx.$$

За телата, образувани от въртенето на фигурите Φ (фиг. 8.21) около оста Oy при аналогични предположения относно дадените функции, са в сила следващите формули за обемите:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y)dy;$$



Фиг. 8.20:



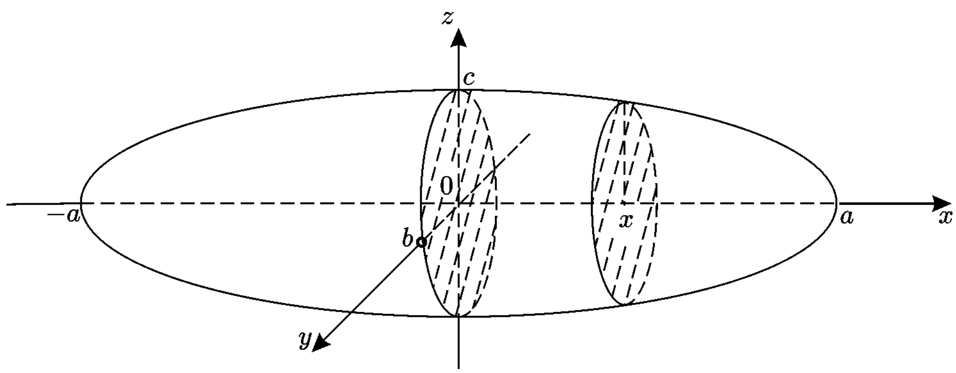
Фиг. 8.21:

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2(t) y'(t) dt;$$

$$V = \pi \int_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)] dy.$$

Задача 8.40: Да се пресметне обемът на триосния елипсоид (фиг. 8.22)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Фиг. 8.22: Триосен елипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Решение: Сеченията на елипсоида с равнини, перпендикулярни на оста Ox са елипси. Ще намерим техните лица. От уравнението на елипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ се получава

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Следователно, полуосите на елипсата, която е сечението на елипсоида и равнина, перпендикулярна на оста Ox са $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Лицето на елипсата (виж задача 8.17) е

$$\sigma(x) = \pi \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

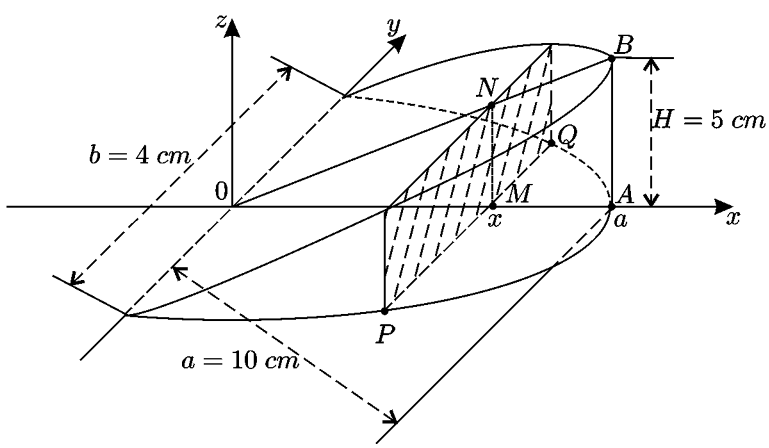
Обемът на елипсоида е

$$V = \int_{-a}^{a} \sigma(x)dx = \int_{-a}^{a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$
$$= 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = 2\pi bc \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частност, ако $a = b = c = R$ ще имаме сфера с радиус R. В този случай, изведената формула за обема на триосният елипсоид ни дава, че обемът на сферата е равен на

$$V = \frac{4}{3}\pi.R.R.R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Задача 8.41: Цилиндър, основата на който е елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ е пресечен с равнина, която минава през малката ос на елипсата (фиг. 8.23). Да се пресметне обемът на тялото, получено по този начин. Размерите на тялото са дадени на чертежа.



Фиг. 8.23:

Решение: Сеченията на тялото с равнина, перпендикулярна на оста Ox е правоъгълник с лице $\sigma(x) = PQ.MN$. Тук имаме, че $PQ = 2MQ$, а MQ е ординатата на точката Q от елипсата, която ще определим от уравнението $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Последователно се получава

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

или $MQ = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. За определяне на MN, разглеждаме подобните триъгълници OAB и OMN. От пропорционалността на страните следва $\dfrac{H}{MN} = \dfrac{a}{x}$, откъдето $MN = \frac{H}{a} \cdot x$. Лицето на сечението ще бъде

$$\sigma(x) = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{H}{a} \cdot x = \frac{2bH}{a^2} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

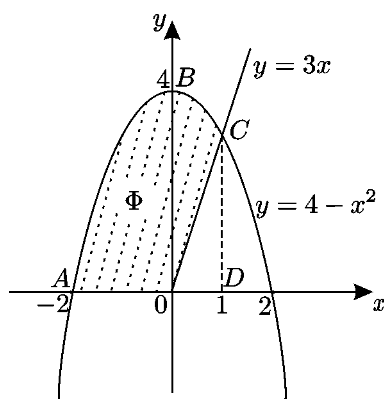
Тогава, обемът на тялото е

$$V = \int_0^a \frac{2bH}{a^2} \cdot x\sqrt{a^2 - x^2}dx = -\frac{bH}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2)$$

$$= -\frac{bH}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a = \frac{bH}{a^2} \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{2abH}{3}.$$

За числените данни $a = 10$, $b = 4$ и $H = 5$ намираме $V = \dfrac{400}{3}$ см^2.

Задача 8.42: Фигура е ограничена от дъгата на параболата $y = 4 - x^2$, отсечката $[-2, 0]$ от оста Ox и отсечката от правата $y = 3x$ (фиг. 8.24). Намерете обема на тялото, образувано от въртенето на тази фигура около оста Ox.



Фиг. 8.24:

Решение: Ще намерим абсцисата x_c на точката C от пресичане на параболата $y = 4 - x^2$ и правата $y = 3x$, като решим уравнението $4 - x^2 = 3x$. То има корени $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$, откъдето се намира, че $x_c = 1$. Търсеният обем е равен на разликата на обемите V_1 и V_2 на телата, образувани при въртенето на криволинейният трапец $ADCB$ и триъгълникът ODC около остта Ox. По формулата (8.53) се намира

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{1} (4 - x^2) dx = \frac{153}{5}\pi,$$

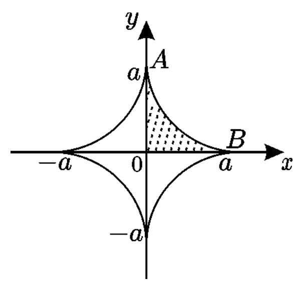
$$V_2 = \pi \int_{0}^{1} (3x)^2 dx = 3\pi.$$

Следователно, обемът на даденото тяло е равен на $V_1 - V_2 = \dfrac{138}{5}\pi$.

Задача 8.43: Намерете обемът на тялото, образувано от въртенето на астроидата

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

около остта Ox (фиг. 8.25).



Фиг. 8.25: Астроида $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

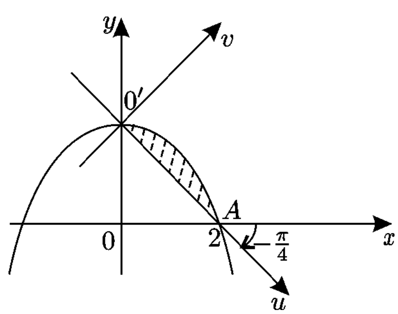
Решение: Астроидата е симетрична спрямо осите Ox и Oy, затова търсеният обем е равен на $2V$, където V е обемът на тялото, получено от въртенето на криволинейният триъгълник OAB (фиг. 8.25) около оста Ox. По формулата (8.55) се получава

$$V = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t.3a\cos^3 t(-\sin t)dt$$

$$= -3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t d\cos t = \frac{16}{105}\pi a^3.$$

Следователно обемът на тялото е $V = \dfrac{32}{105}\pi a^3$.

Задача 8.44: Намерете обемът на тялото, образувано от въртенето на фигурата, ограничена от параболата $2y = 4 - x^2$ и правата $x+y-2=0$, около правата $x+y-2=0$ (фиг. 8.26).



Фиг. 8.26:

Решение: Ще извършим завъртане и пренасяне на координатната система Oxy в координатната система $O'uv$, оста $O'u$ на която е разположена по оста на завъртане- правата $x+y-2=0$ (фиг. 8.26). Ъгълът на завъртане е $-\frac{\pi}{4}$. Формулите на прехода имат вида

$$u = \frac{x-y+2}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y-2}{\sqrt{2}}.$$

В тази координатна система параболата $2y = 4 - x^2$ ще се задава чрез параметричните уравнения

$$\left| \begin{array}{l} u = u(x) = \frac{x-y(x)+2}{\sqrt{2}} \\ v = v(x) = \frac{x+y(x)-2}{\sqrt{2}}, \end{array} \right.$$

където $y(x) = \dfrac{4-x^2}{2}$.

Дъгата $O'A$ от параболата съответства на $0 \leq x \leq 2$. По формулата (8.54) се получава

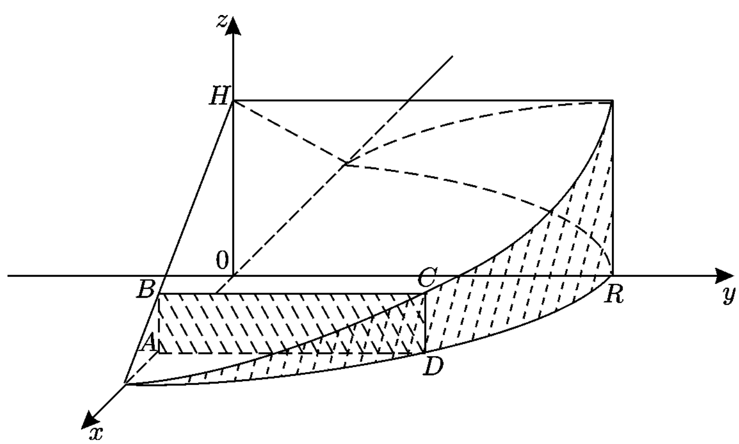
$$V = \pi \int_0^2 v^2(x)u'(x)dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{8}(2x-x^2)^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{x^2}{2}\right)' dx$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)(1+x)dx = \frac{2\sqrt{2}}{15}\pi.$$

Задача 8.45: Намерете обемът на тялото, ограничено от повърхнините $x^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = a^2$.

Отговор: $\frac{16a^3}{3}$.

Задача 8.46: Намерете обемът на тялото, ограничено от цилиндъра $x^2 + y^2 = R^2$ и равнините $y = 0$, $z = 0$, $\dfrac{x}{R} + \dfrac{z}{H} - 1 = 0$ и $\dfrac{x}{R} - \dfrac{z}{H} + 1 = 0$ (фиг. 8.27).



Фиг. 8.27:

Решение: Тялото е симетрично спрямо равнината $x = 0$ (фиг. 8.27), затова обемът на тялото е равен на 2 пъти обемът на частта на тялото, което се намира в първи октант. Всяко сечение на тялото с равнина, перпендикулярна на остта Ox е правоъгълника $ABCD$. Нека да означим $OA = x$. Тогава от уравнението на окръжността $x^2+y^2 = R^2$ се получава, че $AD = y = \sqrt{R^2 - x^2}$. От уравнението на равнината $\dfrac{x}{R} + \dfrac{z}{H} - 1 = 0$ се получава, че $AB = z = \dfrac{H}{R}(R - x)$. За лицето на правоъгълника $ABCD$ се получава $S(x) = AD.AB$, следователно

$$S(x) = \frac{H}{R}(R - x)\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Тогава за обема на тялото се получава следното

$$V = 2\int_0^R \frac{H}{R}(R - x)\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{2H}{R}\int_0^R (R - x)\sqrt{R^2 - x^2}dx. \quad (8.56)$$

За решаване на интеграла полагаме $x = R\cos t$ и последователно се получава

$$\int_0^R (R - x)\sqrt{R^2 - x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 R(1 - \cos t)R\sin t(-R)\sin t dt$$

$$= R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos t)\sin^2 t dt = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt - R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^2 t dt$$

$$= R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1 - \cos 2t}{2}dt - R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t d\sin t$$

$$= \frac{R^3}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{R^3}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{R^3}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3\pi}{4} - \frac{R^3}{3}. \quad (8.57)$$

От (8.56) и (8.57) се получава

$$V = \frac{2H}{R}\left(\frac{R^3\pi}{4} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{HR^2(3\pi - 4)}{6}.$$

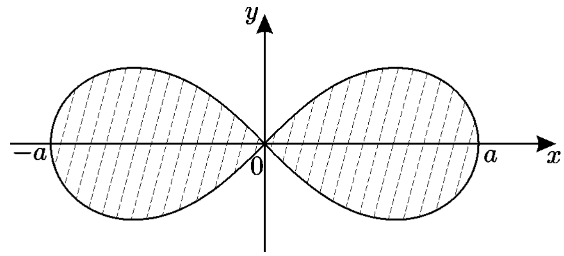
Задача 8.47: Намерете обемът на тялото, получено от въртенето около оста Ox на фигурата, заградена от лемнискатата на Бернули $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ (фиг. 8.28).

Решение: Обемът на тялото е равен на

$$V = \pi\int_{-a}^a y^2(x)dx = 2\pi\int_0^a y^2(x)dx.$$

Уравнението на лемнискатата $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ще разрешим спрямо y^2. Последователно се получава:

$$(y^2)^2 + (a^2 + 2x^2)y^2 + x^4 - a^2x^2 = 0$$



Фиг. 8.28: Лемниската на Бернули $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ a>0$

$$y_{1,2}^2 = \frac{-(a^2+2x^2) \pm a\sqrt{a^2+8x^2}}{2}.$$

Понеже $y^2 > 0$ пред корена вземаме само знака плюс, т. е.

$$y^2 = -\frac{1}{2}a^2 - x^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+8x^2}.$$

Сега вече за обемът се получава

$$V = 2\pi\int_0^a \left(-\frac{1}{2}a^2 - x^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+8x^2}\right)dx$$

$$= -\pi a^2\int_0^a dx - 2\pi\int_0^a x^2dx + \pi a\int_0^a \sqrt{a^2+8x^2}dx$$

$$= -\frac{5\pi a^3}{3} + \pi a\int_0^a \sqrt{a^2+8x^2}dx. \tag{8.58}$$

Интегралът в последното равенство ще решим чрез интегриране по части

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2+8x^2}dx = x\sqrt{a^2+8x^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{x.8.2x}{2\sqrt{a^2+8x^2}}dx$$

$$= 3a^2 - \int_0^a \sqrt{a^2+8x^2}dx + a^2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+8x^2}}$$

$$= 3a^2 - I + \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^a \frac{d(2\sqrt{2}x)}{\sqrt{a^2+(2\sqrt{2}x)^2}}$$

$$= 3a^2 - I + \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x + \sqrt{a^2+8x^2})\Big|_0^a$$

$$= 3a^2 - I + \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} + 3),$$

следователно

$$2I = 3a^2 + \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} + 3),$$

откъдето пък се получава, че

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 + 8x^2}dx = \frac{3}{2}a^2 + \frac{a^2}{4\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} + 3). \tag{8.59}$$

От (8.58) и (8.59) се получава, че

$$V = -\frac{5\pi a^3}{3} + \pi a \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{a^2}{4\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} + 3)\right),$$

т. е.

$$V = \pi a^3 \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} + 3) - \frac{1}{6}\right].$$

Забележка: Задачата може да се реши и като предварително се намери уравнението на лемнискатата в полярни координати. От връзките $x = \rho \cos\theta$, и $y = \rho \sin\theta$ се получава, че уравнението на лемнискатата в полярни координати е

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Тогава вече се намира, че параметричното представяне на лемниската-та е следното:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \\ y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{array} \right. \tag{8.60}$$

От фиг. 8.28 е ясно, че от симетрията спрямо осите Ox и Oy

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2(\theta)x'(\theta)d\theta. \tag{8.61}$$

Като се използват (8.60) и (8.61) се получава

$$V = -4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \sin^2\theta \left(\frac{\sin 2\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\right) d\theta.$$

Задача 8.48: Намерете обемът на тялото, получено от въртенето около оста Ox на фигурата, ограничена от дадените криви:

а) $y^2 = 2px, \quad y = 0, \quad x = a, \quad p > 0;$

б) $xy = a^2, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = 2a, \quad a > 0;$

в) $\dfrac{y}{b} = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x \geq 0, \quad a > 0;$

г) $y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y = 0;$

д) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0;$

е) $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x \leq R, \quad y \leq R, \quad R > 0;$

ж) $y^2(2a - x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq a, \quad x = a.$

Отговори: а) $\pi p a^2$; б) $\frac{\pi a^3}{2}$; в) $\frac{3\pi a b^2}{7}$; г) $\frac{\pi^2}{4}$; д)$\frac{4}{3}\pi a b^2$; е) $\frac{\pi R^3(10-3\pi)}{6}$; ж) $\frac{\pi a^3}{3}(24 \ln 2 - 16)$.

8.9 Лица на ротационни повърхнини

Нека $y = y(x)$ е непрекъснато диференцируема в сегмента $[a, b]$ функция. Лицето S на повърхнината, образувана при въртене на графиката на тази функция около оста Ox е равно на

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \tag{8.62}$$

Нека крива се задава чрез параметричните си уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

където $x(t)$ и $y(t)$ са непрекъснато диференцируема в сегмента $[\alpha, \beta]$ функции, и е разположена в полуравнината $y \geq 0$. Лицето S на повърхнината, образувана при въртене на дадената крива около оста Ox е равно на

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \tag{8.63}$$

Ако кривата е разположена в полуравнината $y \leq 0$, то

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

При аналогични условия, лицето S на повърхнината, образувана при въртене на графиката на тази функция около оста Oy, съответно е равно на

$$S = 2\pi \int_c^d |x(t)|\sqrt{1 + x'^2(y)}dy,$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, \quad x(t) \geq 0,$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, \quad x(t) \leq 0.$$

Лицето на повърхнината, образувана при въртене около полярната ос на кривата с полярно уравнение $\rho = \rho(\theta)$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, е равно на

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\sin\theta d\theta,$$

и където $\rho(\theta)$ е непрекъснато диференцируема в сегмента $[\theta_1, \theta_2]$ функция.

При тези условия, лицето на повърхнината, образувана при въртене около лъча $\varphi = \frac{\pi}{2}$ на кривата $\rho = \rho(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$, е равно на

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\cos\theta d\theta.$$

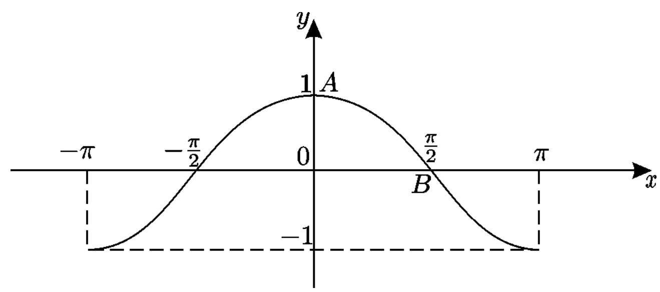
Нека монотонна крива с дължина s_0 е разположена от едната страна на правата l, $r(s)$ е разстоянието от дъгата на кривата с дължина s до правата l и нека $r(s)$ е непрекъсната функция на $s \in [0, s_0]$. Лицето S на повърхнината, образувана при въртене на кривата около правата l е равно на

$$S = 2\pi \int_0^{s_0} r(s)ds. \tag{8.64}$$

Задача 8.49: Намерете лицето на ротационната повърхнина, получена от завъртане на кривата с уравнение $y = \cos x$ около оста Ox, разгледана в сегмента $[-\pi, \pi]$ (фиг. 8.29).

Решение: Поради това, че кривата (фиг. 8.29) е симетрична спрямо ординатната ос, ще пресметнем лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на дъгата $\hat{AB}$ и полученият резултат ще умножим по 4. Имаме следния резултат

$$S = 4.2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{1 + y'^2}dx = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}dx$$



Фиг. 8.29: $y = \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$

$$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x} d\sin x. \tag{8.65}$$

За да решим интеграла полагаме $\sin x = t$, така, че при $x = 0$, $t = 0$ и при $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$ и се получава

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x} d\sin x = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t.2t}{2\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= \sqrt{2} - I + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 = \sqrt{2} - I + \ln(1+\sqrt{2}).$$

Получи се равенството

$$2I = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}),$$

откъдето пък се намира

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}). \tag{8.66}$$

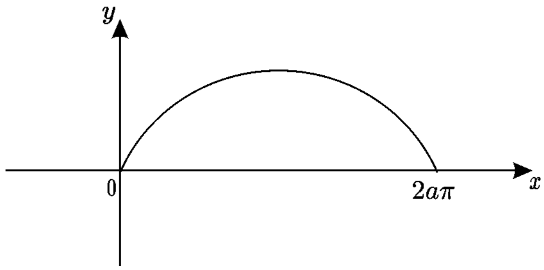
От (8.65) и (8.66) се получава

$$S = 4\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

Задача 8.50: Намерете лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на първата дъга на циклоидата

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0:$$

а) около абсцисната ос; б) около ординатната ос; в) около правата $y = 2a$; г) около правата $x = \pi a$.



Фиг. 8.30: Циклоида $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0$

Решение: а) Ще намерим лицето на повърхнината (виж фиг. 8.30), като използваме формулата

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Последователно намираме, че

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a\sin t,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} = \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$= 2a\left|\sin \frac{t}{2}\right| = 2a \sin \frac{t}{2}, \quad 0 \le \frac{t}{2} \le \pi.$$

За лицето на повърхнината се получава

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)2a \sin \frac{t}{2}dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a.2\sin^2 \frac{t}{2} \cdot 2a \sin \frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}dt = 16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} d\frac{t}{2}$$

$$= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\cos \frac{t}{2}$$

$$= -16\pi a^2 \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{16}{3}\pi a^2 \cos^3 \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2;$$

б) За намиране на лицето ще използваме формулата

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Получаваме следните резултати:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin t \sin\frac{t}{2}dt.$$

Ще решим интегралите в горните равенства:

$$\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt = -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi;$$

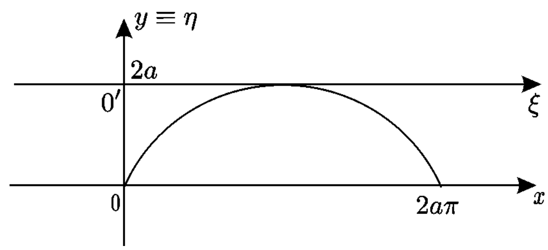
$$\int_0^{2\pi} \sin t\sin\frac{t}{2}dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Тогава, за лицето окончателно се получава

$$S = 4\pi a^2 4\pi = 16\pi^2 a^2.$$

в) Правим транслацията

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 + \xi \\ y = 2a + \eta. \end{array}\right.$$



Фиг. 8.31:

Параметричните уравнения на циклоидата спрямо новата координатна система $O'\xi\eta$ (виж фиг. 8.31) са

$$\left|\begin{array}{l} \xi = a(t-\sin t) \\ \eta = -2a + a(1-\cos t). \end{array}\right.$$

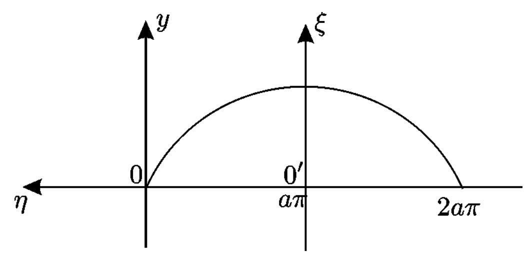
За лицето на повърхнината е в сила формулата

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} \eta(t)\sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}dt.$$

Имаме, че

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1+\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

г) Преместваме началото на координатната система в точката $O'(\pi a, 0)$ (виж фиг. (8.32)) и завъртаме на ъгъл $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Трансформа-



Фиг. 8.32:

ционните формули ще бъдат

$$\left|\begin{array}{l} \xi = x - \pi a \\ \eta = y, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \xi_1 = \xi\cos\frac{\pi}{2} - \eta\sin\frac{\pi}{2} \\ \eta_1 = \xi\sin\frac{\pi}{2} + \eta\cos\frac{\pi}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \xi_1 = -\eta \\ \eta_1 = \xi, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \xi = \eta_1 = y = a(1-\cos t) \\ \eta = -\xi_1 = \pi a - x = \pi a - a(t - \sin t), \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \xi = a(1-\cos t) \\ \eta = a(\pi - t + \sin t). \end{array}\right.$$

За лицето е в сила формулата

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} |\eta(t)|\sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}dt,$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} a(\pi - t + \sin t) 2a \sin\frac{t}{2} dt$$
$$= 4\pi^2 a^2 \int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2} dt - 4\pi a^2 \int_0^{\pi} t \sin\frac{t}{2} dt + 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin t \sin\frac{t}{2} dt.$$

След решаване на интегралите, се получават следните резултати:

$$\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 2; \quad \int_0^{\pi} t \sin\frac{t}{2} dt = 4; \quad \int_0^{\pi} \sin t \sin\frac{t}{2} dt = \frac{4}{3}.$$

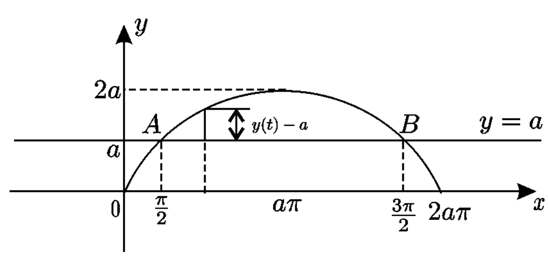
Окончателно се получава, че

$$S = 8\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\pi a^2.$$

Задача 8.51: Правата $y = a$ пресича дъгата на циклоидата

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0$$

в точките A и B. Намерете лицето на повърхнината, образувана при въртене на дъгата AB от циклоидата около правата $y = a$, (фиг. 8.33).



Фиг. 8.33:

Решение: Точките A и B съответстват на стойности на параметъра $t = \dfrac{\pi}{2}$ и $t = \dfrac{3\pi}{2}$, а дъгата AB съответства на $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Лицето ще определим, чрез формулата

$$S = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (y(t) - a)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Тук вместо стоящото в (8.63) разстояние $y(t)$ от точка от кривата до остта Ox, стои разстоянието $y(t) - a$ от точка от дъгата AB до правата $y = a$, явяваща се в случая ос на въртене. Последователно се изчислява

$$y(t) - a = -\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}$$
$$= 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Тогава се получава

$$S = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-a)\cos t.2a\sin\frac{t}{2}dt = -4\pi a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\sin\frac{t}{2}dt.$$

Интегралът ще пресметнем като използваме преобразованията

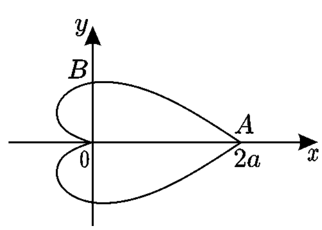
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)d\cos\frac{t}{2} = -\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

За лицето окончателно се получава, че

$$S = -4\pi a^2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi a^2.$$

Задача 8.52: Да се пресметне лицето на повърхнината, образувана от въртенето около полярната ос на кардиоидата $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ (фиг. 8.34).



Фиг. 8.34: Кардиоида $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$

Решение: Поради симетрията на кардиоидата относно оста Ox, то горната и долната част на тази крива ще опишат една и съща ротационна повърхнина. Следователно, ще използваме само горната част на кардиоидата $\rho = a(1+\cos\theta)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Лицето ще намерим като използваме формулата

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \rho(\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} \sin\theta d\theta.$$

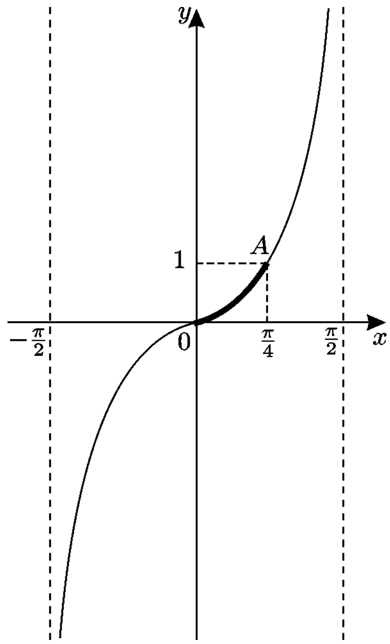
В сила са пресмятанията: $\rho'(\theta) = -a\sin\theta$, $\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = 2a^2(1+\cos\theta)$. За лицето се получава

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi a\sqrt{2}a \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \sin\theta d\theta \\ &= -2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}} d(1+\cos\theta) \\ &= -2\sqrt{2}\pi a^2 \left. \frac{(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_0^{\pi} = \frac{32\pi a^2}{5}. \end{aligned}$$

Задача 8.53: Дъгата от тангенсоидата $y = \operatorname{tg} x$ (фиг. 8.35), заключена между точките $O(0,0)$ и $A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, се върти около абсцисната ос. Да се пресметне лицето на ротационната повърхнина, получена при това въртене.

Решение: Съгласно формулата (8.62) (виж също така и (8.63)) за лицето на ротационната повърхнина се получава

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} y\sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \sqrt{\cos^4 x + 1} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \\ &= -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} \frac{d\cos x}{\cos^3 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} d\frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \pi \left. \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{4\cos^3 x(-\sin x)}{2\sqrt{\cos^4 x + 1}} dx \\ &= \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{\cos^4 x + 1}} dx \end{aligned}$$



Фиг. 8.35: $y = \operatorname{tg} x$

$$= \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x d \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + 1}}$$

$$= \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \cos^2 x}{\sqrt{(\cos^2 x)^2 + 1}}$$

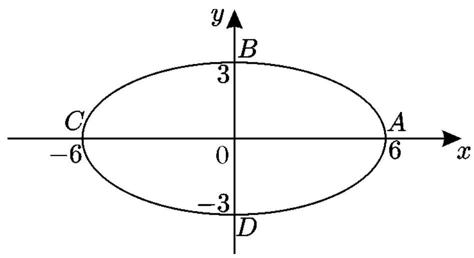
$$= \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \pi \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \pi \ln \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{5}}.$$

Задача 8.54: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на елипсата $x^2 + 4y^2 = 36$ около:

а) абсцисната ос Ox; б) ординатната ос Oy.

Решение: а) Дъгата от елипсата ABC (фиг. 8.36) може да се разглежда като графика на функцията $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$, $-6 \leq x \leq 6$. Но тази функция няма производна при $x = \pm 6$, което показва, че формулата



Фиг. 8.36: Елипса $x^2 + 4y^2 = 36$

(8.62) не може да се приложи в този случай. За това ще параметризираме елипсата, а именно

$$x = 6\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Лицето на повърхнината, образувано от въртене на дъгата ABC от елипсата около остта Ox намираме, като използваме формулата (8.63), а именно

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt,$$

$$S = 6\pi \int_0^{\pi} \sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt. \tag{8.67}$$

Ще покажем пресмятането на интеграла в горното равенство. За тази цел, полагаме $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$ и последователно получаваме: $36\sin^2 t + 9\cos^2 t = 36(1-\cos^2 t) + 9\cos^2 t = 36\cos^2\varphi$. При $t = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ и при $t = \pi$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$. Тогава са в сила равенствата

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt &= -\int_0^{\pi} \sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}d\cos t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} 6\cos\varphi d\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi = \frac{12}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{12}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{6}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \frac{6}{2\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\varphi d2\varphi \\
&= \frac{6}{\sqrt{3}}\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3.
\end{aligned} \tag{8.68}$$

От (8.67) и (8.68) се получава

$$S = 6\pi\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3\right) = 2\sqrt{3}\pi(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

б) Дъгата DAB (фиг. 8.36) от елипсата ще я параметризираме във вида

$$x = 6\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

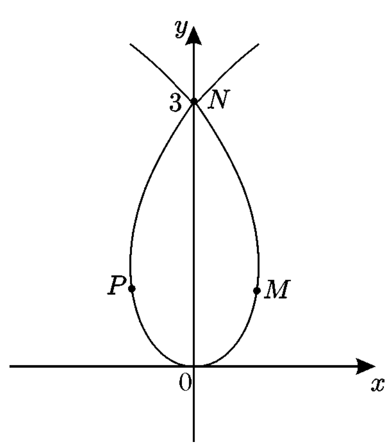
Лицето на повърхнината, образувана при завъртане на елипсата около остта Ox намираме по формулата

$$S = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6cost\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}dt.$$

В горния интеграл полагаме $\sin t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sh}\varphi$ и получаваме

$$S = 12\sqrt{3}\int_{-\mathrm{arsh}\sqrt{3}}^{\mathrm{arsh}\sqrt{3}} \mathrm{ch}^2\varphi d\varphi = 24\sqrt{3}\pi(2\sqrt{3} + \ln(2\sqrt{3})).$$

Задача 8.55: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на примката на кривата $9x^2 = y(3-y)^2$ (фиг. 8.37) около:



Фиг. 8.37: $9x^2 = y(3-y)^2$

а) абсцисната ос Ox; б) ординатната ос Oy.

Решение: От уравнението на кривата се получава, че

$$x = \pm\frac{\sqrt{y}}{3}|3-y|.$$

Примката на кривата съответства на стойности на $y \in [0,3]$ (фиг. 8.37). Въвеждаме параметър t, полагайки $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ и задаваме кривата чрез параметричните уравнения

$$\left|\begin{array}{l} y = t^2 \\ x = \pm\frac{|t|}{3}(3-t^2) \\ t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]. \end{array}\right.$$

а) Поради симетрията на кривата относно остта Oy, може да се намери лицето на повърхнината, получена от въртене на около остта Ox на дъгата OMN и полученият резултата да се умножи по 2. Специално в този случай, дъгата има параметрични уравнения от вида

$$\left|\begin{array}{l} y = t^2 \\ x = \frac{t}{3}(3-t^2) \\ t \in [0, \sqrt{3}]. \end{array}\right.$$

За лицето на повърхнината, като се използва формула (8.63), се получава

$$S = 2.2\pi\int_0^{\sqrt{3}} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Последователно намираме: $x'(t) = -t^2+1$, $y'(t) = 2t$, $x'^2(t)+y'^2(t) = (t^2+1)^2$. Следователно, за лицето е в сила, че

$$S = 2.2\pi\int_0^{\sqrt{3}} t^2\sqrt{(t^2+1)^2}dt = 4\pi\int_0^{\sqrt{3}} t^2(t^2+1)dt$$
$$= 4\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}} t^4dt + \int_0^{\sqrt{3}} t^2dt\right) = \frac{56\pi\sqrt{3}}{5}.$$

б) Поради симетрията на кривата относно остта Oy, при въртенето около остта Oy двете дъги на кривата OMN и OPN ще опишат една и съща повърхнина. Дъгата OMN съответства на $t \in [0, \sqrt{3}]$, и така

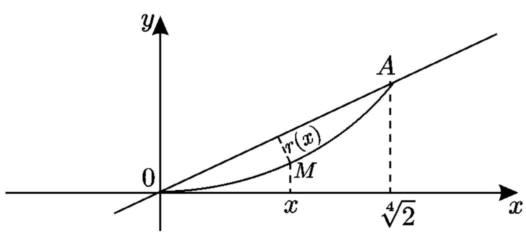
$$S = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{3}(3-t^2)(t^2+1)dt = 3\pi.$$

Задачата може да се реши и така: определяме $x = \frac{\sqrt{y}}{3}(3-y)$, $y \in [0,3]$ и

$$S = 2\pi \int_0^3 |x(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}dy.$$

Задача 8.56: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на кривата $y = \frac{x^3}{3}$, $0 \le x \le \sqrt[4]{2}$ около правата $3y - \sqrt{2}x = 0$ (фиг. 8.38).



Фиг. 8.38:

Решение: Нормалното уравнение (фиг. 8.38) на правата е $\frac{3y-\sqrt{2}x}{\sqrt{11}} = 0$. Всяка точка M от кубичната парабола $y = \frac{x^3}{3}$ има координати $M\left(x, \frac{x^3}{3}\right)$, $0 \le x \le \sqrt[4]{2}$. Тогава разстоянието $r(x)$ от точката M до правата ще бъде

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{11}}\left|x^3 - \sqrt{2}x\right| = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(\sqrt{2}x - x^3\right), \quad 0 \le x \le \sqrt[4]{2}.$$

Лицето на ротационната повърхнина ще определим по формулата (8.64)

$$S = 2\pi \int_0^{s_0} r(s)ds.$$

Елементът ds на дължина по кубичната парабола е $ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+x^4}dx$. За лицето получаваме

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt[4]{2}} r(x)\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{11}} \left(\sqrt{2} \int_0^{\sqrt[4]{2}} x\sqrt{1+x^4}dx - \int_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}dx \right).$$

Ще пресметнем интегралите в горното равенство. Имаме следните резултати:

$$\int_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt[4]{2}} (1+x^4)^{\frac{1}{2}} d(1+x^4)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}.$$

Използваме полагането $x^2 = \mathrm{sh}\varphi$ и се получава

$$\sqrt{2}\int_0^{\sqrt[4]{2}} x\sqrt{1+x^4}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\mathrm{arsh}\sqrt{2}} \mathrm{ch}^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По този начин окончателно се намира, че

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{22}}(3\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}).$$

Задача 8.57: Намерете лицето на повърхнините, получени при въртенето около остта Ox на кривите:

1) $y = \sqrt{x}, \quad \frac{5}{4} \le x \le \frac{21}{4};$

2) $y = x^3, \quad 0 \le x \le 1;$

3) $y = e^{-x}, \quad 0 \le x \le a;$

4) $y = a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}, \quad |x| \le b;$

5) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$

6) $2ay = a^2 + x^2, \quad 0 \le x \le a;$

7) $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \le x \le 1;$

8) $y = \dfrac{1}{x}, \quad 1 \le x \le a.$

Отговори: 1) $\frac{98\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi(10^{\frac{3}{2}}-1)}{27}$; 3) $\pi\left(\sqrt{2} - e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}} - \ln\frac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$; 4) $2\pi a\left(b + \frac{a}{2}\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$; 5)

$2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$; 6) $\frac{\pi a^2}{8}(3\ln(\sqrt{2}+1)+7\sqrt{2})$; 7) $\frac{\pi}{9}(7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1))$; 8) $\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}+\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+a^2}{\sqrt{2}+1}\right)$.

Задача 8.58: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето около оста Ox на кривите:

1) $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$, (трактиса);

2) $x = a(\cos t - \cos 2t)$, $y = a(\sin t - \sin 2t)$;

3) $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$, $|t| \le 2\sqrt{2}$;

4) $x = 2\sqrt{3}\cos t$, $y = \sin 2t$.

Отговори: 1) $4\pi a^2$; 2) $\frac{128\pi a^2}{5}$; 3) $59,2\pi$; 4) $\frac{15\pi}{8}(4+\ln 5)$.

Задача 8.59: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на кривата L около правата l, по дадени:

1)
$$L: \begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
ако а) $l: y = 0$; б) $l: x = 0$;

2) $L: x = \sqrt{2}\sin t$, $y = \dfrac{1}{4}\sin 2t$, $0 \le t \le \pi$, ако а) $l: y = 0$; б) $l: x = 0$;

3)
$$L: \begin{cases} x = a(t + \sin t\cos t) \\ y = a\sin^2 t \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
ако а) $l: y = 0$; б) $l: x = 0$;

4)
$$L: \begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \\ 0 \le t \le \pi, \quad a > 0, \end{cases}$$
ако а) $l: y = 0$; б) $l: x = -a$;

5)
$$L: \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0, \end{cases}$$
ако а) $l: y = 0$; б) $l: x = a$;

Отговори: 1) а) $18\pi^2 a^2$, б) $24\pi a^2$; 2) а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{10\sqrt{2}\pi}{3}$; 3) а) $\frac{4\pi a^2}{3}$, б) $\frac{2\pi(3\pi-4)a^2}{3}$; 4) а) $6\pi^2 a^2$, б) $3\pi(\pi^2-4)a^2$; 5) а) $\frac{12\pi a^2}{5}$, б) $12\pi a^2$.

Задача 8.60: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на кривата L около правата l, като предварително се подбере непрекъснато диференцируемо параметрично представяне на кривата L, по дадени:

1) $L : x^2 + (y-b)^2 = a^2, \quad b \geq a > 0$, ако $l : y = 0$;

2) $L : 4x^2 + y^2 = 4$, ако а) $l : y = 0$; б) $l : x = 0$;

3) $L : y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12), \quad 0 \leq x \leq 12$, ако $l : y = 0$;

4) $L : 16y^2 = 2x^2 - x^4$, ако а) $l : y = 0$; б) $l : x = 0$;

5) $L : 3x^2 + y^4 = y^2$, ако $l : x = 0$;

6) $L : y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, ако а) $l : y = 0$; б) $l : x = 0$.

Отговори: 1) $4\pi^2 ab$; 2) а) $8\pi + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$, б) $2\pi + \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$; 3) 48π; 4) а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{10\sqrt{2}\pi}{3}$; 5) $\frac{5\pi(4+\ln 5)}{32}$; 6) а) $\frac{2\pi(3\pi-4)}{3}$, б) $\frac{4\pi}{3}$.

Задача 8.61: Намерете лицето на повърхнината, получена при въртенето на кривата $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ около абсцисната ос.

Отговор: $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

Задача 8.62: Дъгата от окръжността $x^2 + y^2 = a^2$, лежаща в първи квадрант, се върти около хордата, която я стяга. Намерете лицето на получената ротационна повърхнина.

Отговор: $\pi a^2\sqrt{2}\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задача 8.63: Астроидата

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

се върти около правата $y = x$. Намерете лицето на повърхнината на полученото ротационно тяло.

Отговор: $\dfrac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2}-1)$.

8.10 Приложение на определения интеграл за решаване на задачи от физиката

8.10.1 Задачи, свързани с криви равнинни линии

Нека по равнинна крива L с дължина l е разпределена маса с плътност $\rho(s)$, която се явява функция на дължината на дъгата s. Чрез следващите формули се изчисляват съответно:

масата на кривата:

$$m = \int_0^s \rho(s)ds; \tag{8.69}$$

статистическите моменти на кривата относно осите Ox и Oy :

$$M_x = \int_0^s y(s)\rho(s)ds, \quad M_y = \int_0^s x(s)\rho(s)ds; \tag{8.70}$$

координатите на центъра на масата:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}; \tag{8.71}$$

моментите на инерцията относно осите Ox и Oy :

$$I_x = \int_0^s y^2(s)\rho(s)ds, \quad I_y = \int_0^s x^2(s)\rho(s)ds. \tag{8.72}$$

Ако кривата Γ е графика на еднозначна неотрицателна функция $y = f(x)$, то статистическия момент M_x на кривата относно оста Ox и лицето L_x на повърхнината, образувана от въртенето на графиката на функцията f около оста Ox, са свързани с равенството

$$2\pi M_x = L_x.$$

Съвсем по аналогичен начин е в сила и равенството

$$2\pi M_y = L_y,$$

където е ясен смисълът на M_y и L_y.

Като се използва формулата (8.63) се получава, че статистическият момент на графиката на функцията

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

относно оста Ox се дава чрез формулата

$$M_x = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx, \quad y(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b \tag{8.73}$$

и съответно

$$M_x = \int_c^d x(y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy.$$

В случай на крива, зададена в параметричен вид

$$L: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то са в сила формулите

$$M_x = \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \tag{8.74}$$

и

$$M_y = \int_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \tag{8.75}$$

В случай на крива, зададена в полярна форма

$$L: \quad r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

са в сила формулите

$$M_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\sin\theta d\theta \tag{8.76}$$

и

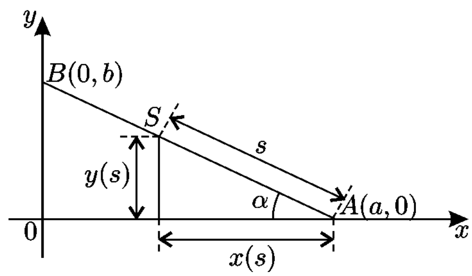
$$M_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\cos\theta d\theta. \tag{8.77}$$

Задача 8.64: Намерете масата, статистическите моменти M_x и M_y, координатите на центъра на масата, и моментите на инерцията I_x, и I_y на кривата

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

считайки, че плътността на разпределение на масата е $\rho(x) = 1$.

Решение: Търсената крива е отсечката AB от фиг. 8.39. Определяме, че отсечката AB има дължина $\sqrt{a^2+b^2}$ и, че $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Нека да въведем параметър $s = |AS|$, очевидно



Фиг. 8.39: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0$

$0 \leq s \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Ясно е, че $x(s) = s.\cos\alpha$ и $y(s) = s.\sin\alpha$. Окончателно отсечката има следното параметрично представяне

$$\begin{cases} x = \frac{a.s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \\ y = \frac{b.s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \\ 0 \leq s \leq \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Като се използват формулите (8.69)-(8.73) последователно се получават следните резултати:

$$m = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} ds = \sqrt{a^2+b^2};$$

$$M_x = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b.s.ds}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$M_y = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a.s.ds}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{b}{2};$$

$$I_x = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} y^2(s)\rho(s)ds = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b^2s^2}{a^2+b^2}ds = \frac{b^2}{3}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_y = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} x^2(s)\rho(s)ds = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{a^2s^2}{a^2+b^2}ds = \frac{a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Задача 8.65: Намерете центъра на масата на циклоидата

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0,$$

ако плътността на разпределение на масата е $\rho(x) = 1$.

Решение: В задача 8.29 е намерено, че дължината на циклоидата е $l = 8a$. Следователно се получава, че масата m на циклоидата е също така $8a$, т. е. $m = 8a$. По формулата (8.74) се получава

$$M_x = \int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Имаме последователните резултати:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = -a\sin t,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad 0 \le \frac{t}{2} \le \pi,$$

откъдето се намира

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt \\
&= 2a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\sin\frac{t}{2}dt \\
&= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2} + 4a^2\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)d\cos\frac{t}{2} \\
&= -4a^2\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{8}{3}\,a^2\cos^3\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} - 4a^2\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{32a^2}{3}.
\end{aligned}$$

По аналогичен начин се получава, че

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \\
&= \int_0^{2\pi} a(t - \sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2.
\end{aligned}$$

За координатите на центъра на масата се получава

$$x_c = \frac{M_y}{m} = a\pi, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{3}a.$$

Окончателно намерихме, че $x_c = a\pi$ и $y_c = \dfrac{4}{3}a$.

Задача 8.66: Намерете координатите на центъра на масата на кардиоидата

$$r = a(1+\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad a > 0,$$

ако плътността на разпределение на масата е $\rho(x) = 1$.

Решение: В задача 8.31 е намерена дължината $8a$ на кардиоидата, така че в нашия случай имаме, че $m = 4a$.

В сила са последователните пресмятания:

$$r(\theta) = a(1+\cos\theta), \quad r'(\theta) = -a\sin\theta,$$

$$\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2}.$$

Като се използват формулите (8.76) и (8.77) се получават следните резултати:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^\pi r(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\sin\theta d\theta \\
&= \int_0^\pi a(1+\cos\theta)2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta \\
&= 2a^2\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= 8a^2\int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -16a^2\int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}d\cos\frac{\theta}{2} \\
&= -\frac{16a^2}{5}\cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = \frac{16a^2}{5},
\end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^\pi a(1+\cos\theta)2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta d\theta = 4a^2\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^\pi \cos^5\frac{\theta}{2}d\theta - 4a^2\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}d\theta.$$

Ще покажем пресмятането на интегралите в горното равенство:

$$\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}d\theta = \int_0^\pi \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2\int_0^\pi\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\int_0^\pi d\sin\frac{\theta}{2} - 2\int_0^\pi \sin^2\frac{\theta}{2}d\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi - \frac{2}{3}\sin^3\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = \frac{4}{3};$$

$$\int_0^\pi \cos^5 \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2\int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} d\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\int_0^\pi \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 d\sin\frac{\theta}{2} = \frac{16}{15}.$$

За величината M_y се получава, че

$$M_y = 8a^2 \cdot \frac{16}{15} - 4a^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16a^2}{5}.$$

Така, окончателно се намират координатите на центъра на масата на кардиоидата

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{4}{5}a, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{5}a.$$

Задача 8.67: Намерете координатите x_c и y_c на центъра на масата на кривите, считайки плътността на разпределението на масата $\rho(x) = 1$:

а) $y = a\text{ch}\dfrac{x}{a}, \quad |x| \le b, \quad a > 0;$

б) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y, \quad 1 \le y \le 2;$

в) $r = ae^\theta, \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \quad a > 0;$

г) $x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad 0 < \alpha \le \varphi \le \pi;$

д) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad a > 0.$

Отговори: а) $x_c = 0$, $y_c = \frac{a\text{sh}\frac{2b}{a} + 2b}{4\text{sh}\frac{b}{a}}$; б) $x_c = \frac{27 - 16\ln 2 - 4\ln^2 2}{8(3 + \ln 4)}$, $y_c = \frac{20}{3(3+\ln 4)}$; в) $x_c = -\frac{a}{5} \cdot \frac{2e^{2\pi} + e^\pi}{e^\pi - e^{\frac{\pi}{2}}}$, $y_c = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\pi} - 2e^\pi}{e^\pi - e^{\frac{\pi}{2}}}$, г) $x_c = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot R$, $y_c = 0$; д) $x_c = y_c = \frac{2a}{5}$.

8.10.2 Задачи, свързани с равнинни фигури

Нека равнинната фигура Φ се задава като

$$\Phi : \quad a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x),$$

където $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са непрекъснати функции в сегмента $[a, b]$. Нека на Φ е разпределена маса с плътност $\rho(x)$. Масата m, статистическите моменти M_x и M_y, моментите на инерцията I_x и I_y относно осите Ox и Oy се изчисляват по формулите

$$m = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\rho(x)dx; \tag{8.78}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))\rho(x)dx; \tag{8.79}$$

$$M_y = \int_a^b x.(y_2(x) - y_1(x))\rho(x)dx; \tag{8.80}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b (y_2^3(x) - y_1^3(x))\rho(x)dx; \tag{8.81}$$

$$I_y = \int_a^b x^2(y_2(x) - y_1(x))\rho(x)dx. \tag{8.82}$$

Нека сектор се задава в полярни координати чрез неравенствата

$$0 \le r \le r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,$$

където $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi$, $r(\varphi)$ е непрекъсната функция в $[\varphi_1, \varphi_2]$ и нека в сегмента е разпределена маса с плътност $\rho(\varphi)$. Тогава са в сила равенствата:

$$m = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\rho(\varphi)d\varphi; \tag{8.83}$$

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\sin\varphi\rho(\varphi)d\varphi; \tag{8.84}$$

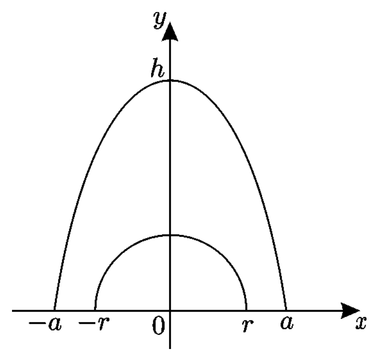
$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\cos\varphi\rho(\varphi)d\varphi; \tag{8.85}$$

$$I_x = \frac{1}{4}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi)\sin^2\varphi\rho(\varphi)d\varphi; \tag{8.86}$$

$$I_y = \frac{1}{4}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^4(\varphi)\cos^2\varphi\rho(\varphi)d\varphi. \tag{8.87}$$

Координатите на центъра на масата се изчисляват по формулите:

$$x_c = \frac{M_y}{m} \text{ и } y_c = \frac{M_x}{m}.$$



Фиг. 8.40:

Задача 8.68: Фигура е ограничена от параболата $y = h\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, полуокръжността $x^2 + y^2 = r^2$ и остта Ox, (фиг. 8.40), където $h > 0$, $a > r > 0$. Считаме фигурата хомогенна и $\rho = 1$. Да се намерят координатите на центъра на масата на фигурата и нейният момент относно оста Oy.

Решение: Търсените величини ще намерим по формулите (8.83), (8.84), (8.85) и (8.86). Полагаме $y_2(x) = h\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, $y_1(x) = 0$, при $r < |x| \le a$, $y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $|x| \le r$. От (8.78) за масата се получава

$$m = \int_{-a}^{a} (y_2(x) - y_1(x))dx = 2\int_0^a (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

Тъй като $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са четни функции, и понеже за $r \le x \le a$ имаме, че $y_1(x) = 0$, се получава

$$m = 2\int_0^a h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{6}(8ah - 3\pi r^2).$$

Първият интеграл се интегрира непосредствено, а вторият може да се реши като се положи $x = r\sin t$.

По формулата (8.79) намираме

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx$$

$$= \int_0^a h^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx - \int_0^r (r^2 - x^2)dx = \frac{2}{15}(4ah^2 - 5r^3).$$

По формулата (8.80) намираме

$$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2(x) - y_1(x))\rho(x)dx = 0,$$

тъй като функцията $x(y_2(x) - y_1(x))$ е нечетна функция.

Тогава се получава, че

$$x_c = \frac{M_y}{m} = 0 \quad \text{и} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4(4ah^2 - 5r^3)}{5(8ah - 3\pi r^2)}.$$

Моментът на инерцията I_y намираме по формулата (8.82)

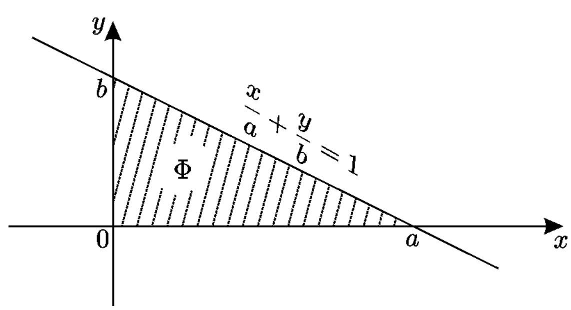
$$I_y = \int_{-a}^{a} x^2(y_2(x) - y_1(x))dx$$

$$= 2h\int_0^a x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Първият интеграл се решава непосредствено, а за да се реши вторият интеграл, може да се положи $x = r\sin t$ и така се получава

$$I_y = \frac{4}{15}a^3h - \frac{\pi}{8}r^4.$$

Задача 8.69: Намерете статистическите моменти M_x и M_y на фигурата, ограничена от правите $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$, $b > 0$ (фиг. 8.41), считайки функцията $\rho(x) = 1$.



Фиг. 8.41: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$,

Решение: От уравнението на първата права определяме, че $y = \frac{b}{a}(a-x)$, така че съгласно фиг. 8.41, фигурата Φ допуска следното представяне

$$\Phi : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \frac{b}{a}(a-x). \end{cases}$$

Ще използваме формулите (8.79) и (8.80) за да се получи:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a (y_2^2(x) - y_1^2(x))\rho(x)dx$$

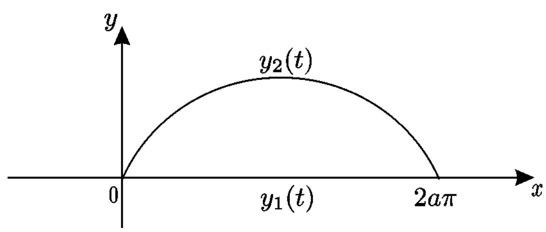
$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a-x)^2 dx = -\frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a-x)^2 d(a-x) = \frac{ab^2}{6};$$

$$M_y = \int_0^a x(y_2(x) - y_1(x))\rho(x)dx = \int_0^a x \cdot \frac{b}{a}(a-x)dx = \frac{ba^2}{6}.$$

Задача 8.70: Да се намерят координатите x_c и y_c на центъра на масата на циклоидата

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad y > 0, \quad a > 0,$$

(фиг. 8.42), считайки функцията $\rho(x) = 1$.



Фиг. 8.42: Циклоида $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0$

Решение: Съгласно формула (8.78) за масата на фигурата се получава

$$m = \int_0^{2\pi} (y_2(t) - y_1(t))x'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 3a^2\pi,$$

т. е.

$$m = 3a^2\pi.$$

Съгласно формулите (8.79) и (8.80) за статистическите моменти се получават следните резултати:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(y_2^2(t) - y_1^2(t))x'(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{3a^3}{2}\int_0^{2\pi}\cos t dt + \frac{3a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$-\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cos t dt = \frac{5}{2}a^3\pi;$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} x(t)(y_2(t) - y_1(t))x'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt = 3a^3\pi^2.$$

Вече можем да намерим координатите на центъра на масата

$$x_c = \frac{M_y}{m} = a\pi \quad \text{и} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{5a}{6}.$$

Задача 8.71: Да се намерят координатите x_c и y_c на центъра на масата на кардиоидата

$$r = a(1+\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

считайки функцията $\rho(x) = 1$.

Решение: Съгласно формула (8.83) за масата на фигурата намираме

$$m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3a^2\pi}{2},$$

т. е.

$$m = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

По формулите (8.84) и (8.85) последователно намираме:

$$M_x = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} r^3(\theta)\sin\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+3\cos\theta)^3 d(1+\cos\theta) = 0;$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} r^3(\theta)\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + 3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta + 3\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta\right].$$

За решаване на интегралите ще използваме следните представяния:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta.\cos\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta = \int_0^{2\pi} d\sin\theta - \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\sin\theta = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta = \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

По този начин за M_y се получава, че

$$M_y = \frac{5a^3\pi}{4}.$$

За координатите на центъра на масата се получава

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{5}{6}a \ \text{ и } \ y_c = \frac{M_x}{m} = 0.$$

Задача 8.72: Намерете статистическите моменти M_x и M_y на фигурите, ограничени от кривите, считайки, че функцията на разпределение $\rho(x) = 1$ ако:

а) $y = \cos x, \quad |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y = 0;$

б) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y = \dfrac{1}{2};$

в) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x};$

г) $y = \dfrac{2}{1+x^2}, \quad y = x^2, \quad x \ge 0;$

д) $y^2 = 2px, \quad y = 0, \quad x = a, \quad a > 0, \quad y \ge 0;$

е) $x = a\sin t, \quad y = b\cos t, \quad |t| \le \dfrac{\pi}{2}, \quad y = 0;$

ж) $r = a\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$

Отговори: а) $M_x = \frac{\pi}{4}, \ M_y = 0$; б) $M_x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}, \ M_y = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$; в) $M_x = M_y = \frac{3}{20}$; г) $M_x = \frac{2}{5} + \frac{\pi}{4}, \ M_y = \ln 2 - \frac{1}{4}$; д) $M_x = \frac{pa^2}{2}, \ M_y = \frac{2\sqrt{2p}\cdot a^{\frac{5}{2}}}{5}$; е) $M_x = \frac{2ab^2}{3}, \ M_y = 0$; ж) $M_x = \frac{\pi a^3(\pi^2-6)}{3}, \ M_y = a^3(4 - \pi^2)$.

Задача 8.73: Намерете координатите x_c и y_c на центъра на масата на фигурите, ограничени от кривите, считайки, че функцията на разпределение $\rho(x) = 1$ ако:

а) $x^2 + y^2 = R^2, \quad y \ge 0, \quad y = 0;$

б) $y = ax^n, \quad 0 \le x \le b, \quad y = 0, \quad x = b, \quad n > 0;$

в) $y^2 = \dfrac{x^3}{a}, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y \ge 0, \quad a > 0.$

г) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y = 0;$

д) $y = \cos x, \quad |x| \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2}$;

е) $y = \dfrac{2}{\pi}x, \quad y = \sin x, \quad y = 0$;

ж) $y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py, \quad p > 0$;

з) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0$;

и) $y^2 = 2x, \quad x + y = 4$;

й) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = 0, \quad y = 0$;

к) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0$;

л) $x^2 + y^2 = a^2, \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$;

м) полувитката на архимедовата спирала $r = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ и лъчите $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$;

н) дясната примка на лемнискатата на Бернули $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

о) кривата $r = a \sin 2\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

п) кривите $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\theta$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.

Отговори: а) $x_c = 0, \quad y_c = \frac{4R}{3\pi}$; б) $x_c = \frac{n+1}{n+2}b, \quad y_c = \frac{n+1}{2(2n+1)}ab^n$; в) $x_c = \frac{5a}{7}, \quad y_c = \frac{5a}{16}$; г) $x_c = \frac{\pi}{2}, \quad y_c = \frac{5}{8}$; д) $x_c = 0, \quad y_c = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-\pi)}$; е) $x_c = \frac{\pi^2+12\pi-12}{3(\pi+4)}, \quad y_c = \frac{5\pi}{6(\pi+4)}$; ж) $x_c = y_c = \frac{9p}{10}$; з) $x_c = y_c = \frac{a}{5}$; и) $x_c = \frac{16}{5}, \quad y_c = -1$; й) $x_c = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_c = \frac{4b}{3\pi}$; к) $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$; л) $x_c = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_c = \frac{4(a+b)}{3\pi}$; м) $x_c = \frac{6(4-\pi^2)a}{\pi^3}, \quad y_c = \frac{2(\pi^2-6)a}{\pi^2}$; н) $x_c = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}, \quad y_c = 0$; о) $x_c = y_c = \frac{128a}{105\pi}$; п) $x_c = 0, \quad y_c = \frac{\pi}{2}$.

8.10.3 Задачи, свързани с тела в пространството

Нека тяло Ω в пространството $Oxyz$ има сечение с равнината $x = const$ $S(x)$, $a \leq x \leq b$ и $S(x)$ е непрекъсната функция, и нека по Ω е разпределена маса с плътност $\rho(x)$. Масата m, статистическият момент M_{Oyz} и моментът на инерцията I_{Oyz} относно равнината Oyz се изчисляват по формулите:

$$m = \int_a^b S(x)\rho(x)dx; \tag{8.88}$$

$$M_{Oyz} = \int_a^b xS(x)\rho(x)dx; \tag{8.89}$$

$$I_{Oyz} = \int_a^b x^2 S(x)\rho(x)dx, \tag{8.90}$$

а абсцисата на центъра на масата- по формулата

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m}.$$

Ако тялото Ω е получено чрез въртене около оста Ox на фигурата, зададена чрез неравенствата

$$0 \leq y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

където $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са непрекъснати функции, то във формулите (8.88) (8.89) и (8.90) трябва да се постави

$$S(x) = \pi(y_2^2(x) - y_1^2(x)). \tag{8.91}$$

Моментът на инерцията I_{xx} на такова ротационно тяло относно оста на въртене Ox се намира по формулата

$$I_{xx} = \frac{\pi}{2}\int_a^b \left(y_2^4(x) - y_1^4(x)\right)\rho(x)dx,$$

а моментът на инерцията I_{yy} относно оста $Oy-$ по формулата

$$I_{yy} = \frac{1}{2}I_{xx} + \pi\int_a^b x^2\left(y_2^4(x) - y_1^4(x)\right)dx.$$

Нека повърхнината S се образува от въртене около оста Ox на графиката на непрекъснато диференцируемата функция

$$y = y(x), \quad y(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$$

и нека по тази повърхнина е разпределена маса с плътност $\rho(x)$. Масата m, нейният статистически момент M_{Oyz}, моментът на инерцията I_{Oyz} относно равнината Oyz и моментът на инерцията I_{xx} относно оста Ox се изчисляват по формулите

$$m = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\rho(x)dx, \tag{8.92}$$

$$M_{Oyz} = 2\pi \int_a^b x.y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\rho(x)dx,$$

$$I_{Oyz} = 2\pi \int_a^b x^2.y^2(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\rho(x)dx,$$

$$I_{xx} = 2\pi \int_a^b y^3(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\rho(x)dx, \qquad (8.93)$$

а абсцисата на центъра на масата се изчислява по формулата

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m}.$$

Нека цилиндричната повърхнина с направляващи $x(s)$, $y(s)$ от равнината Oxy се ограничава от образователните и кривата

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad z(s) \geq 0,$$

и има плътност $\rho = \rho(s)$, $0 \leq s \leq l$. Масата m и статистическите моменти M_{oyz}, M_{Ozx}, M_{oxy} се намират по формулите:

$$m = \int_0^l \rho(s)z(s)ds,$$

$$M_{Oyz} = \int_0^l \rho(s)x(s)z(s)ds, \quad M_{Ozx} = \int_0^l \rho(s)y(s)z(s)ds,$$

$$M_{oxy} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(s)z^2(s)ds,$$

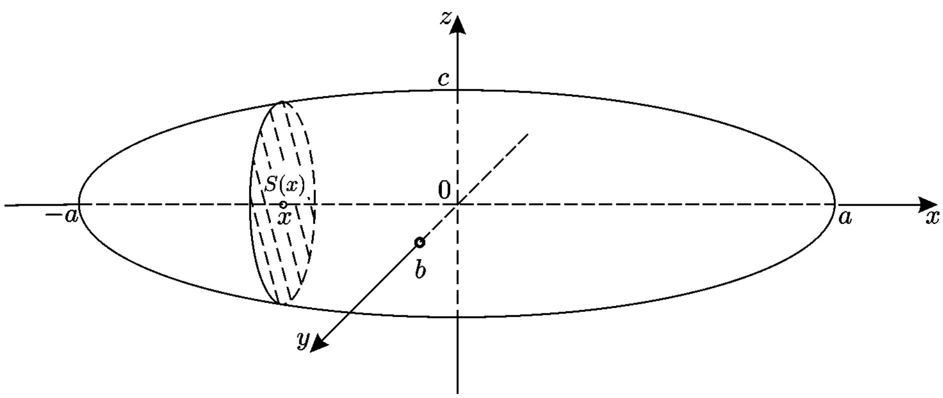
а координатите на центъра на масата- по формулите

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{Ozx}}{m} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{M_{oxy}}{m}.$$

Задача 8.74: Даден е триостният елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

(фиг. 8.43). Намерете масата m, статистическият момент M_{Oyz}, моментът на инерцията I_{Oyz} и координатите на центъра на масата на това тяло, считайки, че функцията на разпределение $\rho(x) = 1$.



Фиг. 8.43: Триосен елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Решение: За всяко фиксирано $x = const$ сечението на елипсоида с равнината $x = const$ е елипса. От фиг. 8.43 е ясно, че $-a \le x \le a$. От уравнението на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

се получава, че

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}=1. \tag{8.94}$$

Знае се, че лицето на елипсата с уравнение от вида $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ е равно на $\pi\alpha\beta$. Следователно от (8.94) се получава, че

$$S(x)=\pi\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

Съгласно формулата (8.88) за масата на елипсоида се получава

$$m=\int_{-a}^{a}S(x)\rho(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

От (8.89) се получава, че

$$M_{Oyz} = \int_{-a}^{a} x \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 0,$$

защото подинтегралният израз е нечетна функция.

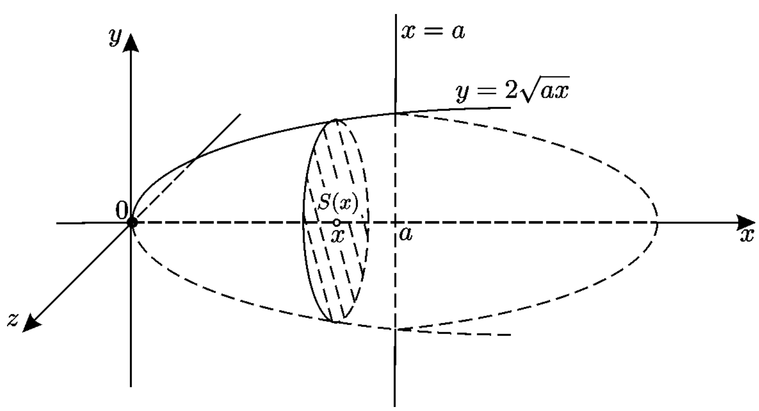
От (8.90) се получава, че

$$I_{Oyz} = \int_{-a}^{a} x^2 \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2} \int_{0}^{a} x^2(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

От симетрията на триосният елипсоид относно осите Ox, Oy и Oz е ясно, че центърът на масата е в т. O. По формулата $x_c = \dfrac{M_{Oyz}}{m}$ и $M_{Oyz} = 0$, се получава, че $x_c = 0$.

Задача 8.75: Да се определят координатите на центъра на тежестта на хомогенно тяло с $\rho(x) = 1$, получено от въртенето около остта Ox на фигурата, ограничена от параболата $y^2 = 4ax$ и правата $x = a$, $a > 0$ (фиг. 8.44).



Фиг. 8.44:

Решение: От формулите (8.88) и (8.89) последователно се получава:

$$m = \pi \int_{0}^{a} 4ax dx = 4a\pi \int_{0}^{a} x dx = 2a^3\pi;$$

$$M_{Oyz} = \pi \int_0^a xy^2(x)dx = \pi \int_0^a x.4axdx = 4a\pi \int_0^a x^2 dx = \frac{4}{3}a^4\pi;$$

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m} = \frac{2}{3}a.$$

От симетрията на тялото спрямо оста Ox имаме, че $y_c = 0$. Следователно, координатите на центъра на масата са $x_c = \dfrac{2}{3}a$ и $y_c = 0$.

Задача 8.76: Фигурата, зададена чрез неравенствата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le e^x$ се върти: около оста Ox; около оста Oy; Намерете:

а) масата на тялото, получено при въртенето около оста Ox.

б) моментите на инерцията спрямо осите на въртене, ако считаме получените тела за хомогенни и $\rho(x) = 1$,

Решение: а) Съгласно формула (8.92) се получава

$$m = 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}de^x.$$

Ще покажем пресмятането на интеграла: полагаме $e^x = t$ и имаме, че при $x = 0$, $t = 1$ и при $x = 1$, $t = e$. По този начин намираме, че

$$I = \int_1^e \sqrt{1+t^2}dt = t\sqrt{1+t^2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \int_1^e \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - I + \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - I + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\Big|_1^e$$

$$= e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - I + \ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}},$$

$$2I = e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}},$$

$$I = \frac{e}{2}\sqrt{1+e^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Тогава за масата m се получава равенството

$$m = \pi\left(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

б) Съгласно формулата (8.93) се получава

$$I_{xx} = 2\pi\int_0^1 y^3(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx = 2\pi\int_0^1 e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}dx.$$

За да решим горния интеграл полагаме $e^x = t$, при $x = 0$, $t = 1$, при $x = 1$, $t = e$ и се получава

$$\int_0^1 e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}dx = \int_1^e t^3\sqrt{1+t^2}\frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^e t^2\sqrt{1+t^2}dt = \int_1^e t^3\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt.$$

За да решим последния интеграл полагаме $1+\frac{1}{t^2} = u^2$, $t = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, $dt = \frac{-udu}{\sqrt{u^2-1}(u^2-1)}$, при $t = 1$ $u = \sqrt{2}$ и при $t = e$ $u = \frac{\sqrt{e^2+1}}{e}$ и се получава

$$\int_1^e t^3\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{e^2+1}}{e}} \frac{1}{u^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot u\cdot\frac{-udu}{\sqrt{u^2-1}(u^2-1)}$$

$$= -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{e^2+1}}{e}} \frac{u^2du}{(u^2-1)^3}.$$

За да се реши последния интеграл трябва подинтегралната функция да се разложи в сума от елементарни дроби. Ще се получи следният окончателен резултат

$$I_{xx} = \frac{\pi}{8}(e^4-1).$$

За да се намери I_{yy} ще използваме следните представяния: $x = \ln y$, $1 \le y \le e$. От формулата (8.93), но адаптирана за I_{yy}, се получава

$$I_{yy} = 2\pi\int_1^e x^3(y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy$$

$$= 2\pi\int_1^e \ln^3 y\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}dy = 2\pi\int_1^e \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}\ln^3 ydy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^e \sqrt{y^2+1}d\ln^4 y.$$

Последният интеграл се интегрира по части и ще се получи, че

$$I_{yy} = 4\pi(3-e).$$

Задача 8.77: Да се определят координатите на центъра на масата на частта от кръга $x^2+y^2 \leq r^2$, която е разположена в първи квадрант, ако плътността ρ е постоянна.

Отговор: $C\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right)$.

Задача 8.78: Да се определят координатите на центъра на масата на хомогенна равнинна фигура, ограничена от линиите с уравнения $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$.

Отговор: $C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

Задача 8.79: Да се изчисли статистическият момент на дъгата от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, лежаща в първи квадрант, относно абсцисната ос, ако плътността ρ е постоянна.

Отговор: $I = \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2e}\mathrm{arcsin}e$, $e-$ ексцентрицитетът на елипсата.

Задача 8.80: Да се изчисли инерционният момент на хомогенен кръг с радиус a, спрямо един от диаметрите му.

Отговор: $I = \frac{1}{4}Ma^2$, $M = \pi a^2$.

Задача 8.81: Астроидата с уравнения $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ е завъртяна на ъгъл 2π около права, която минава през два нейни съседни върха. Да се изчисли обемът и повърхнината на полученото тяло.

Отговор: $V = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3$, $S = 6\sqrt{2}\pi a^2$.

Задача 8.82: Да се намерят моментът на инерцията относно диаметъра на основата на еднороден:

а) цилиндър с радиус R и височина h;

б) конус с радиус на основата R и височина h.

Отговори: а) $\frac{\pi}{12}hR^2(3R^2+4h^2)$; б) $\frac{\pi}{60}hR^2(3R^2+2h^2)$;

Задача 8.83: Да се намерят центъра на масата на частта от повърхността на цилиндъра, заключена между равнините $z = 0$ и $z = \dfrac{hy}{R}$, $y \geq 0$, ако цилиндърът се задава с уравненията:

а) $x^2 + y^2 = R^2$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

Отговори: а) $x_c = 0$, $y_c = \frac{\pi R}{4}$, $z_c = \frac{\pi h}{8}$; б) $x_c = 0$, $y_c = \frac{5R}{8}$, $z_c = \frac{5h}{16}$.

Задача 8.84: Да се намери моментът на инерцията на:

а) околната повърхнина на цилиндър с радиус R и височина h, относно неговите оси;

б) околната повърхнина на конус с радиус на основата R и височина h, относно неговите оси;

в) сфера с радиус R, относно нейния диаметър.

Отговори: а) $2\pi h R^3$; б) $\dfrac{\pi}{2} R^3 \sqrt{R^2 + h^2}$; в) $\dfrac{8}{3}\pi R^4$.

Задача 8.85: Да се намери моментът на инерцията на хомогенни:

а) прав кръгов конус с височина h и радиус на основата R, относно равнината на основата му;

б) полукълбото с радиус R, относно равнината на основата му.

Отговори: а) $\frac{\pi}{30} R^2 h^3$; б) $\dfrac{2}{15}\pi R^5$.

Библиография

[1] Г. С. Бараненков, Б. П. Демедович, В. А. Ефименко, Ф. А. Ефименко, С. М. Коган, Г. Л. Лунц, Е. Ф. Поршнева, Е. П. Сычева, С. Е. Фролов, Р. Я. Шостяк, А. Р. Янпольский, Задачи и упражнения по математическому анализу, Наука, Москва, 1968.

[2] Г. Брадистилов, Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане, II част, Техника, София, 1961.

[3] П. Данко, А. Попов, Высшая математика в упражнения и задачах, I и II част, Наука, Москва, 1980.

[4] Б. М. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, изд. 13, Изд-во Московского университета и изд-во ЧеРо, Москва, 1997.

[5] В. Димова-Нанчева, Г. Попов и др., Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, II част, Техника, София, 1977.

[6] В. Димова-Нанчева, Г. Попов и др., Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, III част, Техника, София, 1977.

[7] Г. И. Запорожец, Руководство по решению задач по математическому анализу, изд. 4, Высшая школа, Москва, 1966.

[8] О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова, Высшая математика, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2001.

[9] В. А. Илин, В. А. Садовничи, Математически анализ, том 1, Наука и изкуство, София, 1984.

[10] Н. И. Казимиров, Математический анализ, ПГУ, Петрозаводск, 2002.

[11] В. Кортенска и др. Ръководство за решаване на задачи по висша математика, II част, Техника, София, 1979.

[12] Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин, Сборник задач по математическому анализу, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1986.

[13] Е. Любенова, П. Недевски, Ръководство по математически анализ, Наука и изкуство, София, 1977.

[14] И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, Математический анализ, Едиториал УРЛС, Москва, 2003.

[15] В. П. Минорский, Сборник задач по высшей математике - 14-е изд., испр. Издательство Физико-математической литературы, Москва, 2000.

[16] Д. Пантелеев, К. Йорджев, П. Петров, Лекции и задачи по математически анализ, Тракийски университет - Технически колеж, Ямбол, 1996.

[17] И. Проданов, Н. Хаджииванов, И. Чобанов, Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане, Университетско издателство „Климент Охридски“, София, 1992.

[18] Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров, Математический анализ, Челяб. гос. ун-т., Челябинск, 1999.

[19] Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поршкеян, Практикум по высшей математике, изд. 3-е, Феникс, Ростов на Дону, 2006.

[20] И. А. Шведов, Компактный курс математического анализа, част 1, Функции одной переменной, Новосиб. гос. университет, Новосибирск, 2003.

[21] А. Т. Цветков, Задачник-практикум по матеметическому анализу, УЧПЕДГИЗ, Москва, 1962.

Васил Грозданов
Красимир Йорджев
Анка Марковска

РЪКОВОДСТВО ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ПЪРВА ЧАСТ

Рецензенти: проф. д-р м. н. Кирил Н. Чимев
доц. д-р Методи Аслански

Оформление на корица: Университетско издателство

Тираж 300 Формат 60/80/16 Печатни коли 25
Пореден номер 142 от Издателския план за 2012 г.

Издател: Университетско издателство
"Неофит Рилски", 2700 Благоевград,
ул. Иван Михайлов 66

Печат: Печатна база при ЮЗУ „Неофит Рилски",
2700 Благоевград, ул. Александър фон Хумболдт 4