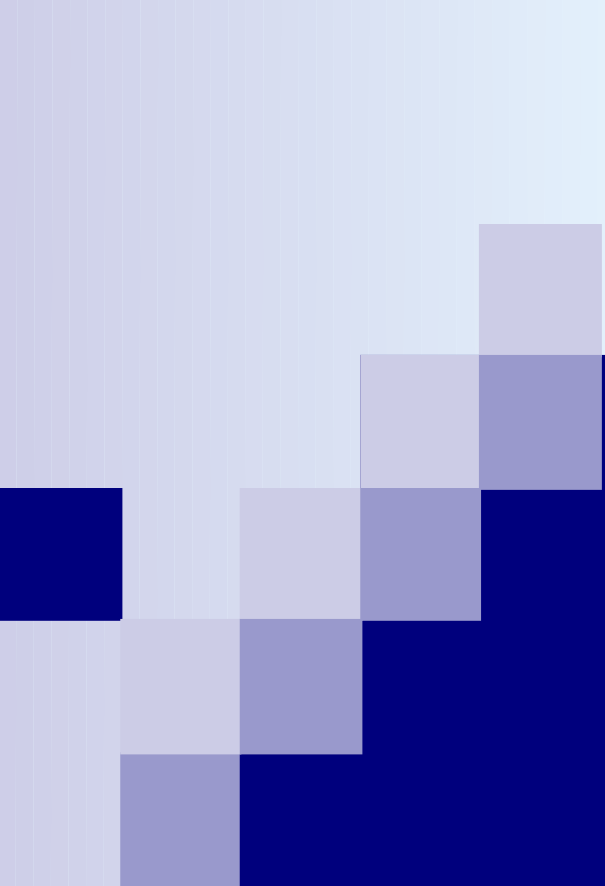




Аналитична геометрия

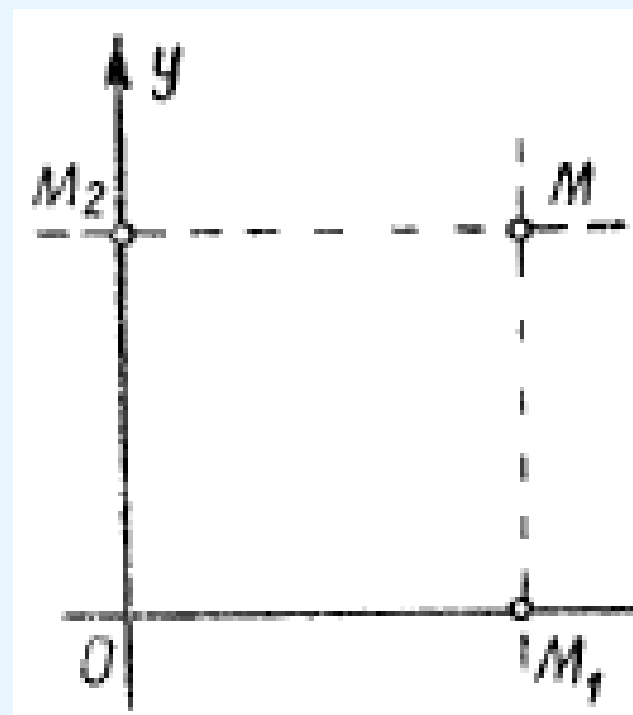
Правоъгълна координатна система в равнината

$$M(x, y) \quad O(0,0)$$

Ox – абсцисна ос

Oy – ординатна ос

$$x = \overline{OM_1} \quad y = \overline{OM_2}$$



Разстояние между две точки

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M(x, y) \quad O(0,0)$$

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Деление на отсечка в дадено отношение

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad M(x, y)$$

$$\overline{AM} : \overline{MB} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1$$

$$M - \text{среда на отсечката} \quad \overline{AM} : \overline{MB} = \lambda = 1$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Общо уравнение на права

$$g : Ax + By + C = 0 \quad A \neq 0, B \neq 0$$

$M(x_1, y_1) \in g \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C = 0$ – *вярно твърдение*

$Ax + By + C < 0$ – *$\forall$ точки от една страна на правата*

$Ax + By + C > 0$ – *$\forall$ точки от другата страна на правата*

Обикновено (декартово) уравнение на права

$$g : y = kx + n \quad g \cap Oy$$

k – ъглов коефициент $k = \operatorname{tg} \alpha$

α – ъгъла, който правата сключва с
положителната посока Ox

n – отреза, който правата отсича от Oy

Уравнение на права

- Уравнение на права, която минава през точка $M_1(x_1, y_1)$ и има ъглов коефициент k

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

- Уравнение на права, която минава през точка $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Ъгъл между две прави

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

k_1, k_2 – ъглови коефициенти на правите

$k_1 = k_2$ – правите са успоредни

$k_1 k_2 = -1$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – правите са перпендикулярни

Непълно общо уравнение на права

- Права минаваща през $O(0,0)$ $C = 0$ $Ax + By = 0, y = -\frac{A}{B}x$
- Права перпендикулярна на Ox $B = 0$ $Ax + C = 0, x = -\frac{C}{A}$
- Права перпендикулярна на Oy $A = 0$ $By + C = 0, y = -\frac{C}{B}$
- Права, която определя Oy $B = 0$ $C = 0$ $Ax = 0$ $x = 0$
- Права, която определя Ox $A = 0$ $C = 0$ $By = 0$ $y = 0$

Отрезово уравнение на права

$$A \neq 0 \quad B \neq 0 \quad C \neq 0 \quad Ax + By + C = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad m = -\frac{C}{A} \quad n = -\frac{C}{B}$$

*m, n – отрезите, които правата отсича
от координатните оси*

Нормално уравнение на права

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

p – дължината на перпендикуляра

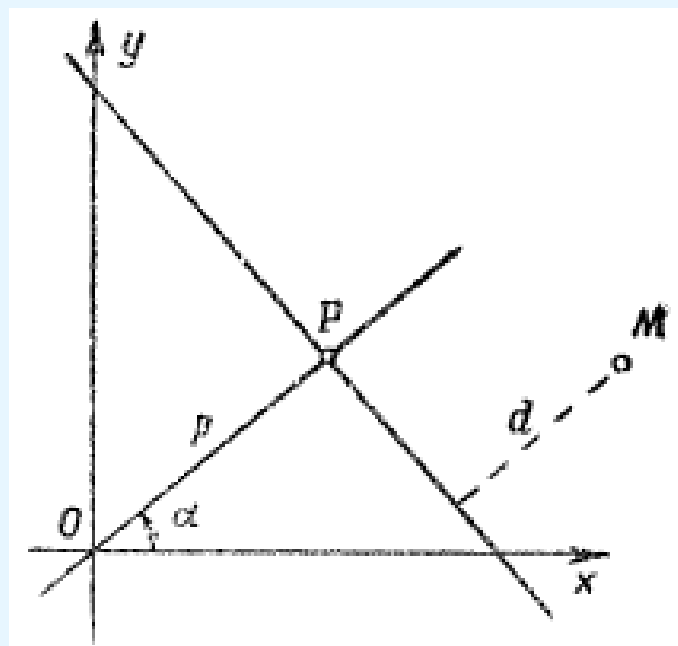
α – ъгълът между правата Ox

$$Ax + By + C = 0 \quad M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Пред корена се взема знак, обратен на знака на свободния член

M – нормиращ множител



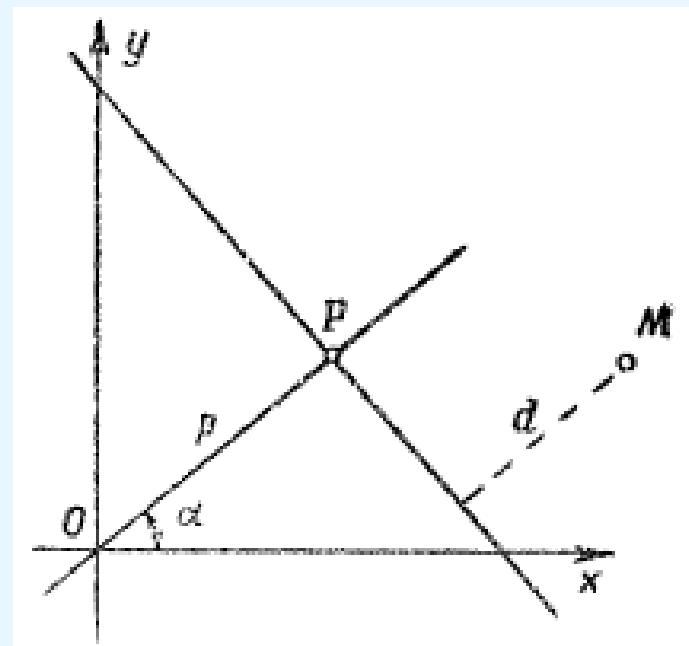
Ориентировано расстояние

$$M_0(x_0, y_0) \quad Ax + By + C = 0$$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\delta = |d|$$

$$d > 0 \quad O, M \in \lambda \quad d < 0 \quad O \in \lambda, M \in \bar{\lambda}$$



Уравнения на криви от втора степен

- Нормално уравнение на окръжност

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

R – радиус на окръжността

$C(a,b)$ – център на окръжността

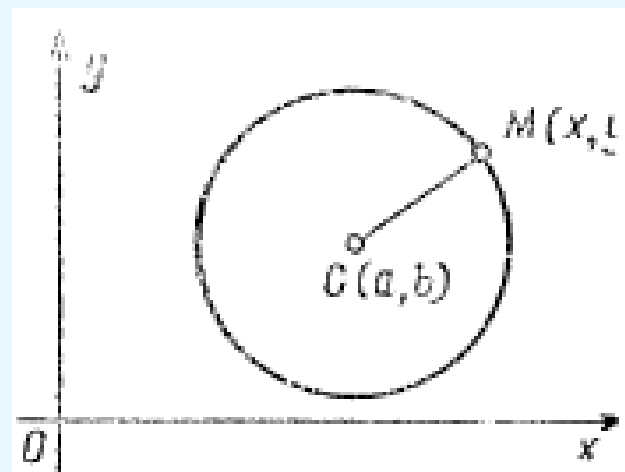
- Общо уравнение на окръжност

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$A = B \neq 0$$

$$C = 0$$

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0$$



Взаимно положение на точка и окръжност

$$M(x_1, y_1) \quad C(a, b) \quad d = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}$$

$d < 0$ – точката лежи вътре в окръжността

$d = 0$ – точката лежи на окръжността

$d > 0$ – точката лежи вън от окръжността

Взаимно положение на права и окръжност

$$k \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$g \equiv Ax + By + C = 0$$

- Правата – секуща, допирателна и няма общи точка

- зависи от разстоянието от правата до центъра на окръжността

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2$$

уравнение на допирателната в $M(x_1, y_1)$

Канонично уравнение на елипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

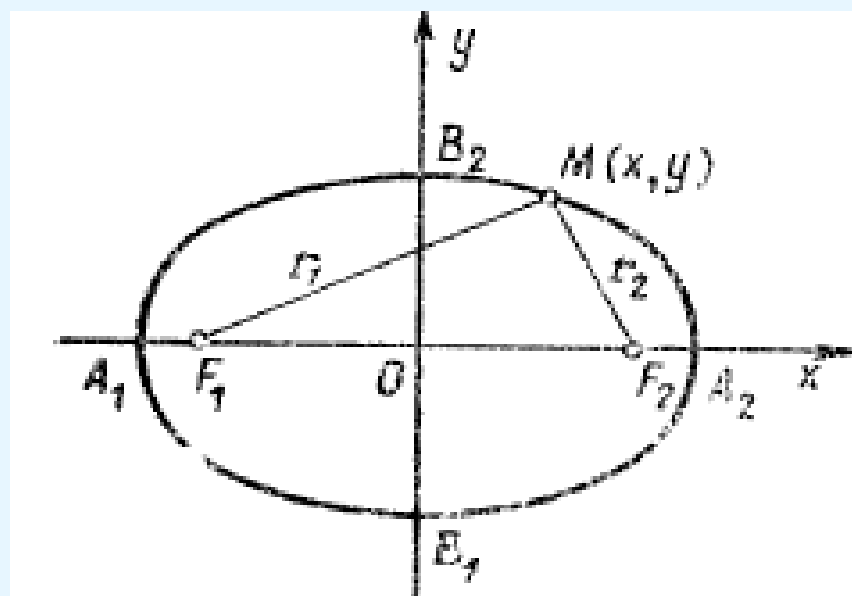
$F_1(-c, 0)$ $F_2(c, 0)$ – фокуси

$F_1F_2 = 2c$ – разстояние между фокуси

$A_1A_2 = 2a$ – голяма ос

$B_1B_2 = 2b$ – малка ос

$e = \frac{c}{a} < 1$ – ексцентрицитет



Взаимно положение на права и елипса

- Правата – секуща, допирателна и няма общи точка

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

уравнение на допирателната в $M(x_1, y_1)$

Канонично уравнение на хипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0) - \text{фокуси}$$

$F_1F_2 = 2c$ – разстояние между фокуси

основен правоъгълник – $2a, 2b$

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x - \text{асимптоти (диагоналите на правоъгълника)}$$

$A_1A_2 = 2a$ – реална ос $B_1B_2 = 2b$ – нереална ос

$$e = \frac{c}{a} > 1 - \text{ексцентрицитет}$$

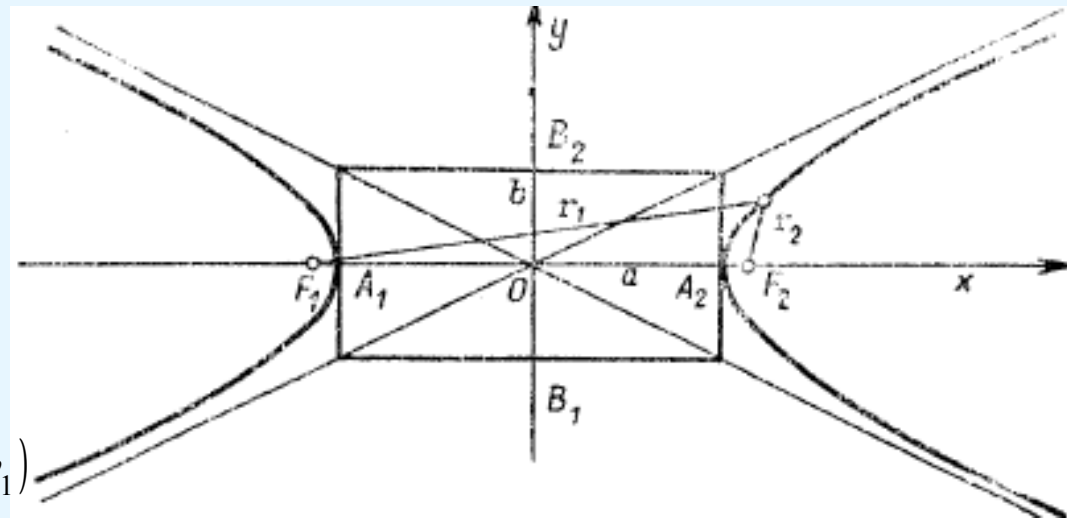
– спрегнати хиперболи

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$F_1(0, -c) \quad F_2(0, c)$ – фокуси

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

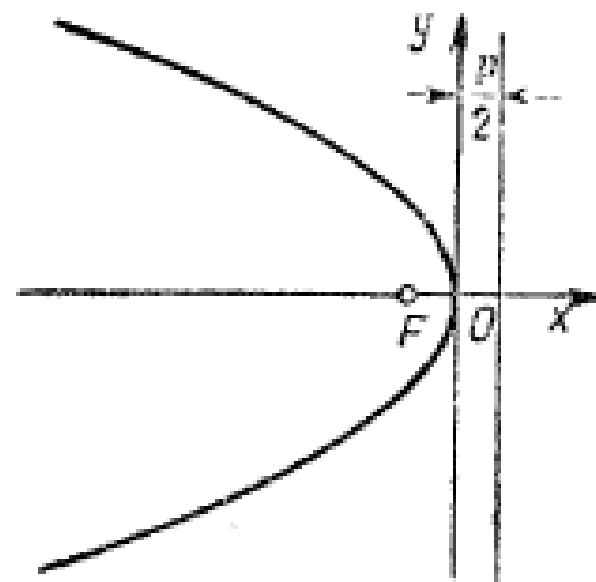
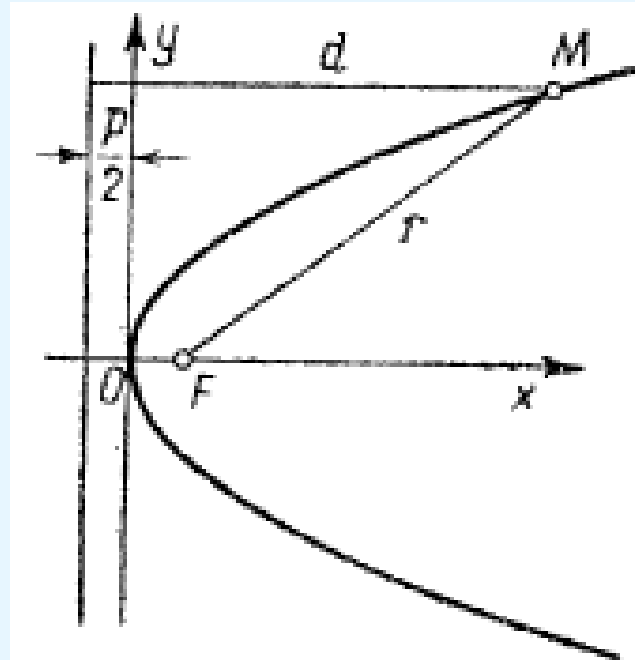
уравнение на допирателната в $M(x_1, y_1)$



Уравнение на парабола

$$y^2 = 2px \quad F\left(\frac{p}{2}, 0\right) - \text{фокус} \quad x = -\frac{p}{2} - \text{директриса}$$

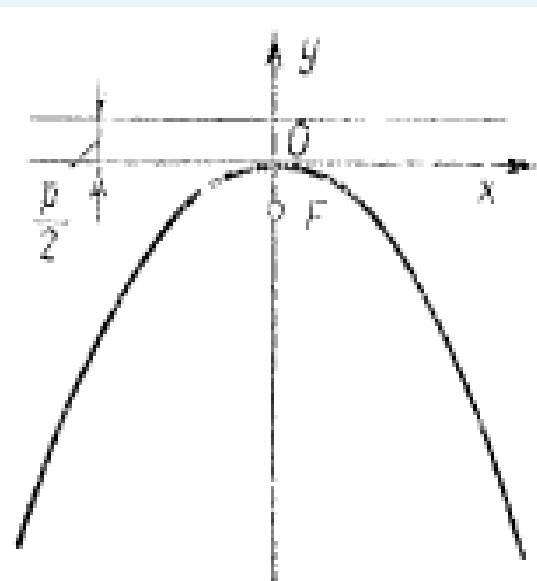
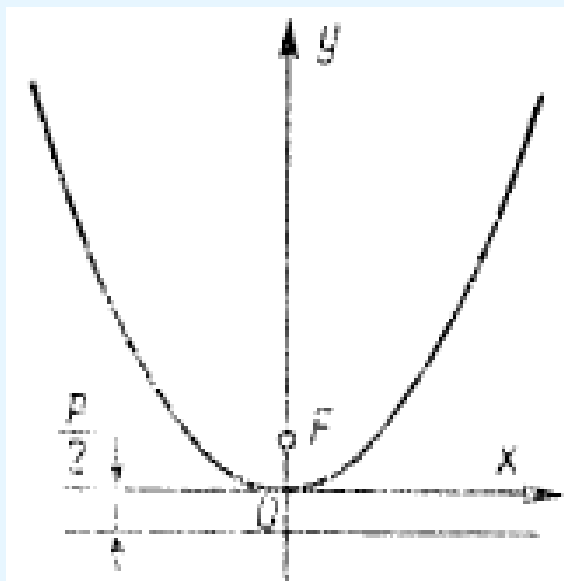
или $y^2 = -2px$ параболата лежи наляво



Уравнение на парабола

$$x^2 = 2py \quad F\left(0, \frac{p}{2}\right) - \text{фокус} \quad y = -\frac{p}{2} - \text{директриса}$$

или $x^2 = -2py$ параболата лежи наляво



Правоъгълна координатна система в пространството

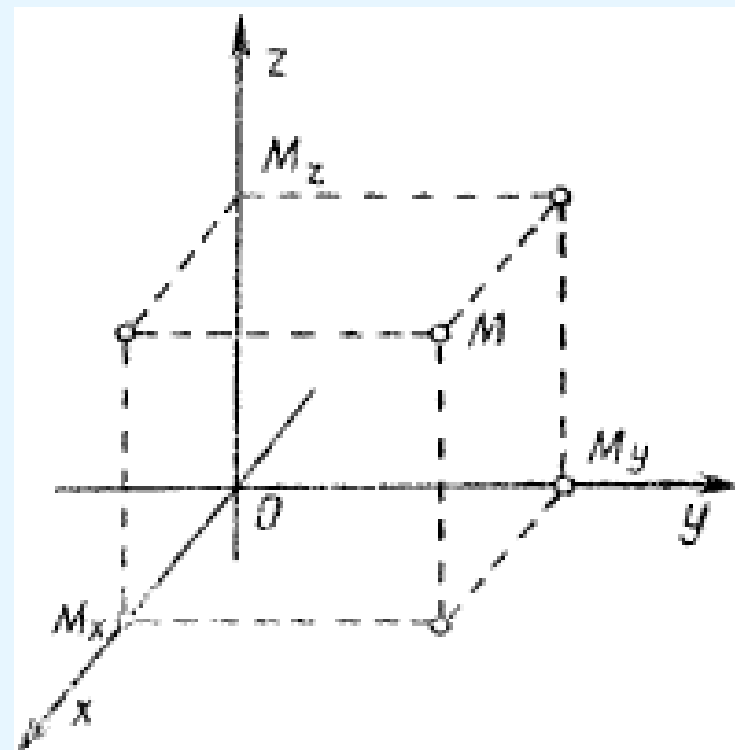
Ox – абсцисна ос

Oy – ординатна ос

Oz – апликатна ос

$$\overline{OM_x} = x \quad \overline{OM_y} = y \quad \overline{OM_z} = z$$

$$M(x, y, z)$$



Разстояние между две точки

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$M(x, y, z) \quad O(0,0)$$

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Деление на отсечка в дадено отношение

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2) \quad M(x, y, z)$$

$$\overline{AM} : \overline{MB} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad \lambda \neq -1$$

$$M - \text{среда на отсечката} \quad \overline{AM} : \overline{MB} = \lambda = 1$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Косинус директории на едно направление

Дадено

- Права определена от точките А и В
- α, β, γ -ъглите, които сключва с координатните оси

Косинус директориите на правата са:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{|AB|}, \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{|AB|}, \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{|AB|}$$

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

Векторно уравнение на равнина

$$n(r - r_0) = 0$$

$$n(A, B, C) \perp \alpha$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{OM_0} = r_0 \quad \overrightarrow{OM} = r - \text{радиус-вектори}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = r_0 - r \in \alpha$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp n$$

Аналитичен вид на векторно уравнение на равнина

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общо уравнение

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

$n(A, B, C)$ – нормален вектор

Отрезово уравнение на равнина

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

*a, b, c – отрезите, които равнината отсича
от координатните оси*

Уравнение на равнина

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \alpha \parallel \vec{a}(l_1, m_1, n_1) \quad \alpha \parallel \vec{b}(l_2, m_2, n_2)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение на равнина

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \quad \alpha \parallel \vec{a}(l, m, n)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение на равнина

$$\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1) & M_2(x_2, y_2, z_2) & M_3(x_3, y_3, z_3) \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ъгъл между две равнини

$$\cos \varphi = \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{|n_{\alpha}| |n_{\beta}|}$$

n_{α}, n_{β} – нормалните вектори на равнините

Нормално уравнение на равнина

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Пред корена се взема знак, обратен на знака на свободния член

M – нормиращ множител

Ориентировано расстояние от точка до равнина

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\delta = |d|$$

Уравнение на права в пространството

■ Канонично уравнение

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{a}(l, m, n)$$

$$g \equiv \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$g \equiv \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение на права в пространството

- Параметрично уравнение

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \vec{a}(l, m, n)$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

$$g \equiv \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

Уравнение на права в пространството

- Пресечница на две равнини

$$g \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Условие за успоредност и перпендикулярност на две прави

$$q_1 \equiv \frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

$$q_2 \equiv \frac{x - a_2}{l_2} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{n_2}$$

$$q_1 \parallel q_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$q_1 \perp q_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие за две прави да лежат в една равнина

$$q_1 \equiv \frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

$$q_2 \equiv \frac{x - a_2}{l_2} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{n_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ъгъл между две прави

$$q_1 \equiv \frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{m_1} = \frac{z - c_1}{n_1}$$

$$q_2 \equiv \frac{x - a_2}{l_2} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{n_2}$$

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Права и равнина

$$\alpha \equiv Ax + By + Cz + D \quad g \equiv \begin{cases} x = lt + a \\ y = mt + b \\ z = nt + c \end{cases} \Rightarrow$$
$$(Al + Bm + Cn)t = -(Aa + Bb + Cc + D)$$

В зависимост от броя на решенията на това уравнение имаме:

- Едно решение – правата и равнината се пресичат
- Няма решение – правата е успоредна на равнината
- Безброй много решения – правата лежи в равнината

Права и равнина

$$g \parallel \alpha \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0 \quad (n_\alpha \cdot a_g = 0)$$

$$g \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad (n_\alpha = p \cdot a_g)$$

$$g \text{ лежи в } \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$$

$$\sin \varphi = \frac{n_\alpha \cdot a_g}{|n_\alpha| |a_g|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$