

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

за специалност Математика и информатика, I курс

Упражнение 5.

Уравнение на права, равнина и сфера в тримерното пространство

Основни необходими сведения

Уравнения на равнина в тримерното пространство:

- скалярно параметрично уравнение на равнина α през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с компланарни вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases} ; \quad (1)$$

- уравнение на равнина α през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с нормален вектор $\vec{N}(A, B, C)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \quad (2)$$

- общо уравнение на равнина α с нормален вектор $\vec{N}(A, B, C)$ (относно ортонормирана координатна система)

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3)$$

Разстояние $d(M, \alpha)$ от точката $M(x_0, y_0, z_0)$ до равнината $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Уравнения на права в тримерното пространство:

- скалярно параметрично уравнение на права l през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b, c)$

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ; \quad (5)$$

- канонично уравнение на права l през точката $M(x_0, y_0, z_0)$ с направляващ вектор $\vec{v}(a, b, c)$

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}; \quad (6)$$

- като пресечница на две равнини

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Сноп равнини с носител правата l . Ако правата l се задава като пресечница на две равнини съответно с уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то всяка равнина, минаваща през l , има уравнение от вида

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \quad (8)$$

Общо уравнение на сфера S с център точката $C(a, b, c)$ и радиус $R > 0$ (относно ортонормирана координатна система)

$$S : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (9)$$

Задачи за семинарни занятия

Задача 1. Дадена е точка $A(1, 2, 3)$. Намерете:

- (а) равнина през A , успоредна на Oxy (съотв. Oxz , Oyz);
- (б) равнина през A , минаваща през Ox (съотв. Oy , Oz);
- (в) права през A , успоредна на Ox (съотв. Oy , Oz).

Задача 2. Дадени са точките $A(3, -2, 2)$, $B(1, 0, 4)$, $C(0, 0, 5)$, правата $g : \frac{x-5}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{1}$ и равнината $\alpha : 2x - 3y + z + 7 = 0$. Намерете уравнението на равнината:

- (а) през A и B , успоредна на g ;
- (б) през A и g ;
- (в) през A и B , перпендикулярна на α ;
- (г) през A , перпендикулярна на g ;
- (д) през B , успоредна на α ;
- (е) през A , B , C .

Задача 3. Намерете уравнението на равнина, която:

- (а) съдържа точката $A(2, 3, 1)$ и правата $l : 3x - 2y + 5z - 2 = 0, x - 4y + z + 3 = 0$;
- (б) съдържа правата $l : 2x + y - z + 1 = 0, x - y + z - 1 = 0$ и е перпендикулярна на равнината $\alpha : x + 2y + 3z + 5 = 0$;
- (в) съдържа правата $l : 2x - 3y - z = 0, 4x + y + 5z - 28 = 0$ и е на разстояние $\sqrt{14}$ от координатното начало.

Задача 4. Дадени са т. $M(1, -3, 4)$ и правата $a : 2x - y + z - 3 = 0, x + 3y - z - 1 = 0$. Намерете уравнението на права през M : (а) успоредна на a ; (б) перпендикулярна на равнината, определена с второто уравнение на a .

Задача 5. Намерете права, която минава през точката $A(2, -1, 1)$, пресича правата $g : x + 2y - z + 5 = 0, x - y + 2z - 1 = 0$ и е успоредна на равнината $\alpha : 3x - y + 2z + 10 = 0$.

Задача 6. Намерете ортогоналната проекция на: (а) точката $A(1, 2, -3)$ в равнината $\alpha : x + y - 3z - 5 = 0$ и разстоянието от A до α ; (б) точката $B(0, 2, 4)$ върху правата $l : x = 2 + s, y = 2 - s, z = 2s$; (в) правата $m : x = 1 - s, y = 3 + 2s, z = -1 - s$ върху равнината $\beta : x + 2y - z + 4 = 0$.

Задача 7. Намерете ортогонално-симетрична точка на точката $M(3, 1, -4)$ относно: (а) точката $A(0, -1, 1)$; (б) равнината $\alpha : x - 4y + z + 7 = 0$ и разстоянието от M до α ; (в) правата $l : x = -1 + 2s, y = -4 - s, z = -1 - s$ и разстоянието от M до l .

Задача 8. Намерете трансверзалата на кръстосаните прави:

- (а) $l : x = 1 + s, y = 2 - s, z = 1 + s, m : x = t, y = 3 + t, z = -3 + 2t$, лежаща в равнината $\alpha : x + y + 2z - 3 = 0$;
 (б) $l : x + y = 0, x - y + z + 4 = 0, m : x + 3y - 1 = 0, y + z - 2 = 0$ през точката $A(2, 3, 1)$;
 (в) $l : \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}, m : \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$, успоредна на правата $n : \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$;
 (г) $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, m : x = 1 + 2s, y = -2s, z = -1 + s$, перпендикулярна на тези прави (ос на правите).

Задача 9. Установете взаимното положение на двойките прави:

- (а) $l : x = 1 + 2s, y = 7 + s, z = 3 + 4s, m : x = 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = -2 + t$;
 (б) $l : x = 2 + 4s, y = -6s, z = -1 - 8s, m : x = 7 - 6t, y = 2 + 9t, z = 12t$;
 (в) $l : x = 3 + s, y = -1 + 2s, z = 4, m : x + y - z = 0, 2x - y + 2z = 0$.

В случай, че се пресичат или са успоредни, намерете уравнението на равнината, която ги съдържа. В случай, че са кръстосани, намерете дължината на ос-отсечката им.

Задача 10. Намерете уравнение на сфера с радиус 6, която се допира до равнината $\alpha : x + 2y - 2z + 1 = 0$ в точката $A(3, y, 2)$, ако сферата и точката $M(0, 1, 2)$ са в едно полупространство относно α .

Задачи за самостоятелна подготовка

Задача 1. Съставете уравнението на равнина:

- (а) минаваща през точката $A(0, -1, 2)$ и правата $l : x = 1 + 5t, y = -1 + t, z = 2t$;
 (б) през точките $A(1, 1, 0), B(2, 0, 2), C(1, -1, -1)$;
 (в) през точката $A(2, 1, -1)$ и перпендикулярна на равнините $\alpha : x - y + z = 0, \beta : 2x + y - 3 = 0$;
 (г) съдържаща точките $A(1, 2, 3), B(0, -1, 1)$ и успоредна на правата $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{3}$;
 (д) успоредна на равнината $\alpha : 6x - 3y + 2z + 5 = 0$ и на разстояние 3 от нея.

Отг. (а) $2x - 12y + z + 10 = 0$; (б) $5x + y - 2z - 6 = 0$; (в) $x - 2y - 3z - 3 = 0$; (г) $13x + y - 8z + 9 = 0$; (д) $6x - 3y + 2z + 26 = 0$ и $6x - 3y + 2z - 16 = 0$.

Задача 2. Намерете уравнението на права:

- (а) през точките $A(2, 0, 1), B(-1, -1, 2)$;
 (б) през точката $A(2, 3, -4)$, успоредна на правата $l : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{5}$;
 (в) през точката $A(1, -1, 1)$ и перпендикулярна на равнината $\alpha : 2x - y - 2z + 7 = 0$;
 (г) през координатното начало, пресичаща правите $l : x - y + z + 2 = 0, x - 2y + 3z - 8 = 0, m : y - z + 1 = 0, x + y - 2z + 4 = 0$.

Отг. (а) $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$; (б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{5}$; (в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$;
 (г) $5x - 6y + 7z = 0, x - 3y + 2z = 0$.

Задача 3. Намерете координатите на точката от оста Oy , която е на равни разстояния от равнините $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и $\beta : x - y + z - 5 = 0$.

Отг. $(0, -3, 0)$.

Задача 4. Намерете уравнението на равнина, която съдържа оста Oy и е равноотдалечена от точките $M(2, 7, 3)$ и $N(-1, 1, 0)$.

Отг. Тъй като търсената равнина съдържа оста Oy , тя минава през координатното начало $O(0, 0, 0)$ и е компланарна с направлението $\vec{e}_2(0, 1, 0)$. Следователно общото уравнение на тази равнина е от вида $Ax + Cz = 0$. Намерете коефициентите A и C , като използвате формулата за разстояние от точка до равнина.

$3x - z = 0$ и $x - z = 0$.

Задача 5. Намерете разстоянието от $P(1, 0, 1)$ до правата $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{2}$ и ортогонално-симетричната точка на P относно l .

Отг. $d(P, l) = 3\sqrt{2}$, $(1, 6, -5)$.

Задача 6. Намерете права m от равнината $\alpha : 2x - y + 3z - 4 = 0$, пресичаща оста Ox и перпендикулярна на правата $l : x = -s, y = 5 + 11s, z = -1 + 3s$.

Отг. Тъй като търсената права минава през точка $A(x, 0, 0)$ от оста Ox и същевременно лежи в равнината α , то точката A също лежи в α , откъдето намираме $A(2, 0, 0)$. Сега търсената права е пресечница на равнината α и равнината през точката A , която е перпендикулярна на правата l .

$m : 2x - y + 3z - 4 = 0, x - 11y - 3z - 2 = 0$.

Задача 7. Дадена е точката $A(2, -1, 0)$. Намерете:

(а) ортогонално-симетричната точка на A относно правата $l : x = 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -1 + t$ и разстоянието от A до l ;

(б) ортогонално-симетричната точка на A относно равнината $\alpha : x + 2y + z + 12 = 0$ и $d(A, \alpha)$.

Отг. (а) $(4, 1, 0)$, $d(A, l) = \sqrt{2}$; (б) $(-2, -9, -4)$, $d(A, \alpha) = 2\sqrt{6}$.

Задача 8. При какви условия за $a \in \mathbb{R}$ правата $l : \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-2}{-1}$:

(а) лежи в равнината $\alpha : 3a^2x + ay + z - 4a = 0$;

(б) е успоредна на равнината α ;

(в) пресича α ?

Отг. (а) $a = \frac{1}{2}$; (б) $a = -\frac{1}{2}$; (в) $a \neq \pm\frac{1}{2}$.

Задача 9. При какви условия за $a \in \mathbb{R}$ правите $l : \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ и $m : \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$:
(а) съвпадат; (б) са успоредни; (в) се пресичат; (г) са кръстосани?

Отг. (а) $a = 1$; (б) $a = -1$; (в) $a = 3$, (г) $a \neq \pm 1, 3$.

Задача 10. В снопа равнини с носител правата $l : x + 2y - 3z + 5 = 0, 4x - y + 3z + 5 = 0$ намерете две взаимно перпендикулярни равнини, едната от които минава през точката $A(1, 3, 1)$.

$$\text{Отг. } x - y + 2z = 0, 13x + 5y - 4z + 30 = 0.$$

Задача 11. Нека $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$, $D(2, 1, -4)$ са върхове на тетраедър. Намерете:

- (а) дължината на височината през върха D (разстоянието от D до равнината на $\triangle ABC$);
- (б) дължината на височината през върха B в $\triangle ABC$ (разстоянието от B до правата AC);
- (в) дължината на ос-отсечката между кръстосаните ръбове AD и BC ;
- (г) ъгъла между ръбовете AD и BC ;
- (д) обема на тетраедъра $ABCD$.

$$\text{Отг. (а) } \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ (б) } 6\sqrt{2}, \text{ (в) } \frac{8}{3\sqrt{41}}; \text{ (г) } \cos \angle(AD, BC) = -\frac{3\sqrt{2}}{10}; \text{ (д) } V = 4.$$

Задача 12. Намерете сфера, която се допира до:

- (а) равнината $\alpha : 6x + 6y - 7z + 42 = 0$ и има за център точката $A(1, 4, -7)$;
- (б) координатната ос Oz и има за център точката $B(6, -8, 3)$.

$$\text{Отг. (а) } (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 121; \text{ (б) } (x - 6)^2 + (y + 8)^2 + (z - 3)^2 = 10.$$

Задача 13. Намерете равнина α през ортогоналната проекция на правата $g : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{0}$ върху равнината $\beta : x + y - 3 = 0$ и допираща се до сферата $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Първо намираме ортогоналната проекция g' на правата g в равнината β . За тази цел са необходими две точки от g' .

Удобно е да използваме скалярно-параметричното уравнение на g , затова записваме

$$g : \begin{cases} x = 2s \\ y = 1 - s \\ z = -2. \end{cases} \quad (10)$$

Една точка, която ще използваме, е прободът A на g и β . Съгласно (10) координатите на тази точка се определят от $A(2s, 1 - s, -2)$ за някоя стойност на параметъра s . След заместване на тези координати в уравнението на β , получаваме следното уравнение за s : $s - 2 = 0$. Следователно $s = 2$ и като заместим в (10), намираме $A(4, -1, -2)$.

Ще получим втора точка от g' , като намерим ортогоналната проекция в β на произволна точка от g . Нека тази произволна точка се получава от (10) при $s = 0$, т.е. имаме точката $B(0, 1, -2) \in g$. Построяваме перпендикулярна права b на β през B :

$$b : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2. \end{cases} \quad (11)$$

Пресечната точка B' на b и β се получава при $t = 1$, т.е. $B'(1, 2, -2)$.

Следователно ортогоналната проекция g' на g в β се определя от една от точките A или B' и направляващия си вектор $\overrightarrow{AB'}(-3, 3, 0) \parallel (1, -1, 0)$.

Тъй като по условие знаем уравнението на една равнина, която съдържа g' (равнината β), е удобно да намерим втора равнина с това свойство и да конструираме снопа равнини с

носител правата g' . По този начин всяка равнина през g' ще се определя от двойка реални параметри (параметрите на уравнението на снопа равнини).

За да построим втора равнина през g' , ни е необходима точка, която не лежи върху g' и изобщо в β . Такава точка например е координатното начало $O(0, 0, 0)$. Тогава построяваме равнина γ , минаваща през точката O и правата g' , както следва

$$\gamma : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

След разписване на горното уравнение имаме $\gamma : 2x + 2y + 3z = 0$.

Всяка равнина през правата g' принадлежи на снопа равнини, определен от уравнението

$$\lambda(x + y - 3) + \mu(2x + 2y + 3z) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0). \quad (13)$$

Следователно търсената равнина α ще има общо уравнение от вида

$$\alpha : (\lambda + 2\mu)x + (\lambda + 2\mu)y + 3\mu z - 3\lambda = 0. \quad (14)$$

Тъй като по условие α се допира до сферата $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (с център $O(0, 0, 0)$ и радиус 2), то разстоянието от точката O до α е равно на 2. Използвайки формулата (4) за разстояние от точка до равнина, имаме

$$\frac{|-3\lambda|}{\sqrt{2(\lambda + 2\mu)^2 + 9\mu^2}} = 2, \quad (15)$$

откъдето след повдигане на втора степен и преобразуване получаваме уравнението

$$\lambda^2 - 32\lambda\mu - 68\mu^2 = 0. \quad (16)$$

Разделяме двете страни на горното уравнение на $\mu^2 \neq 0$ и достигаме до квадратното уравнение

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - 32\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - 68 = 0. \quad (17)$$

Решенията на (17) се определят от

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_{1,2} = 16 \pm \sqrt{256 + 68} = 16 \pm 18 \implies \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 = -2, \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_2 = 34. \quad (18)$$

Следователно за параметрите λ и μ получаваме две двойки решения: $(\lambda, \mu) = (-2, 1)$ и $(\lambda, \mu) = (34, 1)$. След заместването им в (14), намираме двете равнини α_1 и α_2 , които са решения на задачата:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : z + 2 &= 0, \\ \alpha_2 : 12x + 12y + z - 34 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Задача 14. (ВТУ, Олимпиада по математика – вътрешен кръг) Дадени са точката $P(-3, -4, -6)$, правите $a : x = 1 + s, y = 0, z = -2 - s$ и $b : x = 3 - 2t, y = 2 - t, z = t$ и равнината $\alpha : 2x + y - z + 4 = 0$. Намерете:

- (а) скалярно параметричното уравнение на правата, съдържаща светлинен лъч, който се отразява от равнината α в точка P , след което пресича правите a и b ;
 (б) уравнението на правата, съдържаща падащия лъч.

Отг. (а) Правите a и b са кръстосани. Следователно търсената права l' е тяхната трансверзала, минаваща през точката P . Скалярно параметричното ѝ уравнение може да се запише във вида $l' : x = -3 + \lambda, y = -4 + \lambda, z = -6 + \lambda$.

(б) Падащият и отразеният лъч са симетрични относно перпендикуляра $p : x = -3 + 2s, y = -4 + s, z = -6 - s$ към α през точката P . Тогава, за да намерим уравнението на падащия лъч l , е достатъчно да намерим ортогонално-симетричната точка относно p на произволна точка от l' . Нека изберем точката L' от l' , която се получава при $\lambda = 1$. Нейната ортогонално-симетрична точка относно правата p е $L(-\frac{8}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{23}{3})$. Тогава направляващият вектор на търсената права е $\overrightarrow{PL}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}) \parallel (1, -1, -5)$. Окончателно получаваме $l : x = -3 + s, y = -4 - s, z = -6 - 5s$.

Задача 15. Намерете уравнението на сфера, минаваща през ортогонално-симетричната точка на $B(3, 4, -3)$ относно координатната равнина Oxy и пробода на правата $g : x = 1 + s, y = 2, z = 3 + 3s$ с равнината $\alpha : 2x - 5y + z + 10$, ако центърът на сферата лежи върху правата $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Решение. Нека означим с A пробода на правата g и равнината α . След заместване на $x = 1 + s, y = 2$ и $z = 3 + 3s$ в уравнението на равнината, достигаме до следното уравнение за параметъра на правата: $s + 1 = 0$. Така намираме $s = -1$, следователно $A(0, 2, 0)$.

Нека означим с B' ортогонално-симетричната точка на B относно равнината Oxy , чието уравнение е $z = 0$. Спускаме перпендикулярна права m през B към Oxy с уравнение

$$m : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -3 + s. \end{cases} \quad (20)$$

Пресечката точка (прободът) M на m и Oxy се получава при $s = 3$, т.е. $M(3, 4, 0)$. Тази точка е среда на отсечката BB' , следователно $B' = 2M - B = (3, 4, 3)$.

Можем да постъпим по два начина.

I-ви начин. Центърът C на сферата лежи върху правата l , следователно неговите координати са от вида $C(1 + 2s, 1 + 2s, -1 + s)$. Ще намерим стойността на параметъра s на правата l , за която се получава точката C , като използваме, че центърът на сферата е равноотдалечен от всяка точка, лежаща върху сферата, т.е. разстоянията от C до A и от C до B трябва да бъдат равни (на радиуса на сферата). Изпълнено е условието $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. След повдигане на квадрат на двете страни на последното равенство имаме

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BC}^2. \quad (21)$$

Намираме координатите на двата вектора, както следва

$$\overrightarrow{AC}(2s + 1, 2s - 1, s - 1), \quad \overrightarrow{BC}(2s - 2, 2s - 3, s - 4). \quad (22)$$

След заместване в условието (21), достигаем до уравнението $s - 1 = 0$, следователно $s = 1$. Тогава $C(3, 3, 0)$, а $R = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$. Така за уравнението на сферата получаваме

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 10. \quad (23)$$

II-ри начин. Като построим равнина през средата на отсечката AB и перпендикулярна на AB . Тогава центърът на сферата ще бъде пресечната точка на тази равнина и дадената в условието на задачата права l .