Лекция 7

§7. Права в равнината

1. Общо уравнение на права в равнината. Тук ще разглеждаме равнина в която е зададена положително ориентирана декартова координатна система Oxy с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$ по осите Ox и Oy. Всичките вектори и точки предполагаме зададени чрез техните координати в този базис и в тази координатна система.

Нека е дадена правата g (рис. 7.1). Тя определя единствена права l през началото O на координатната система, която е перпендикулярна на g, $l \perp g$, $O \in l$. Да означим с N пресечната точка на g и l, $N = g \cap l$ и нека $\vec{\mathbf{n}}$ е единичен вектор по направлението на вектора $\overrightarrow{ON}$. Този нормален вектор има координати $\vec{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, където α е ъгълът между оста Ox и вектора $\vec{\mathbf{n}}$, отчетен в положителна посока (посока обратна на движението на часовниковата стрелка).

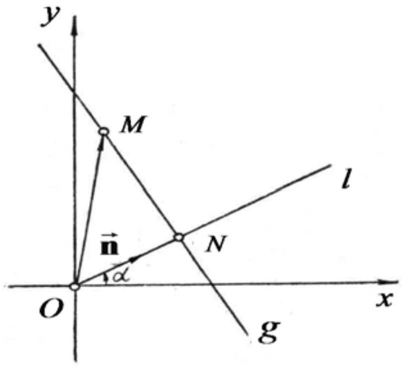

Рис. 7.1.

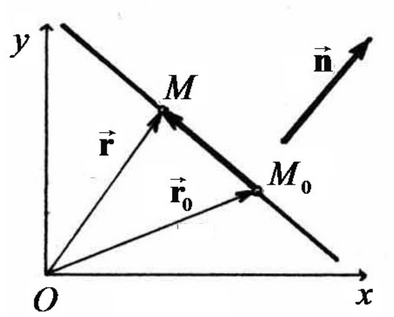

Рис. 7.2.

Нека $M(x,y)$ е някаква точка от правата g (текуща точка), с радиус вектор $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(x,y)$. Правата g се състои от точките $M(x,y)$, за които алгебричната проекция на радиус вектора $\vec{\mathbf{r}}(x,y)$ върху оста l е равна на $p = \left|\overrightarrow{ON}\right|$, което с помощта на скаларно произведение можем да запишем като $g : \vec{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{n}} - p = 0$. Сега чрез правилото за пресмятане на скаларно произведение, за правата g намираме следното координатно уравнение

$$g : x\cos\alpha + y\cos\alpha - p = 0,$$

което се нарича ***нормално уравнение на права***, а векторът $\vec{\mathbf{n}}$ се нарича ***нормален вектор*** към правата g, понеже сключва с правата прав ъгъл.

Една права g напълно се определя от дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, която лежи върху g, $M_0 \in g$, и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$, $\vec{\mathbf{N}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{N}} \perp g$ (рис. 7.2.). Правата g се състои от точките $M(x,y)$, за които векторите $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ и $\vec{\mathbf{N}}$ сключват прав ъгъл. Тук $\vec{\mathbf{r}}$ и $\vec{\mathbf{r}}_0$ са радиус векторите на текущата точка $M(x,y)$ и на дадената точка $M_0(x_0, y_0)$. Това условие с помощта на скаларно произведение записваме като

$$g : (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0)\vec{\mathbf{N}} = 0,$$

откъдето за правата g намираме следното координатно уравнение

(7.1) $\quad g : (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 .$

Например правата g през точката $M_0(2,-3)$ с даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}(1,-2)$ има уравнение

$g : 1.(x-2) - 2.(y+3) = 0$ или $g : x - 2y - 5 = 0$.

Ако в (7.1) положим $c = -ax_0 - by_0$, то последното уравнение може да се запише във вида

$g : ax + by + c = 0$,

което се нарича ***общо уравнение*** на права в равнината.

Вече се убедихме, че всяка права в равнината се задава чрез някакво общо уравнение от вида (7.1). Следващата теорема показва, че е вярно и обратното.

Теорема 7.1. Нека a, b и c са числа такива, че $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогава съвкупността от точки $M(x, y)$ в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството

(7.2) $\quad ax + by + c = 0$,

образуват някаква права g.

Доказателство. Ако разгледаме (7.2) като система от едно уравнение с две неизвестни, то тази система съгласно теоремата на Кронекер-Капели е съвместима и неопределена, следователно има безбройно много решения. Нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са някои (кои да е) две различни решения и да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тези две точки са различни и по тази причина определят единствена права g. Сега ще докажем, че всяка точка $M_3(x_3, y_3)$, чиито координати удовлетворяват равенството (7.2), лежи на същата права g. За тази цел е достатъчно да се убедим, че векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ са колинеарни. По условие имаме

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \left(M_1 \in g\right)$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0 \left(M_2 \in g\right)$$
$$ax_3 + bx_3 + c = 0 \left(M_3 \in g\right)$$

Ако извадим почленно първото равенство от другите две получаваме

$$\begin{array}{l} (x_2 - x_1)a + (y_2 - y_1)b = 0 \\ (x_3 - x_1)a + (y_3 - y_1)b = 0 \end{array}.$$

Последното може да се разглежда като хомогенна система от две уравнения с две неизвестни a и b, която система по условие има ненулево решение. Съгласно общите свойства на хомогенните системи, последното е възможно единствено когато нейната детерминанта е равна на нула,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

което пък означава, че между редовете на детерминантата има линейна зависимост. Тези редове обаче са точно координатите на векторите $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, следователно те са линейно зависими, което и трябваше да докажем. ■

В общото уравнение на права (7.1) винаги се изисква поне един от двата коефициента a или b да бъде различен от нула, което може да се запише $|a| + |b| > 0$. Когато пишем общо уравнение на права винаги ще подразбираме, че това условие е налице.

Нека е дадена права g с общо уравнение $g : ax + by + c = 0$. ***Тогава ненулевият вектор $\vec{\mathbf{N}}(a, b)$ е нормален към правата***. Наистина, нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са някакви (кои да е) точки от g, което означава, че

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0 .$$

Като извадим първото уравнение от второто получаваме равенството

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 ,$$

което показва, че векторите $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ са ортогонални. По този начин получихме, че така определеният вектор $\vec{\mathbf{N}}$ е ортогонален на всеки вектор с начало и край върху правата, което доказва твърдението.

2. Параметрично уравнение. Да разгледаме задачата за намиране на уравнение на права g през дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, $M_0 \in g$, и даден ***направляващ вектор*** $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{a}} \parallel g$ (рис. 7.3).

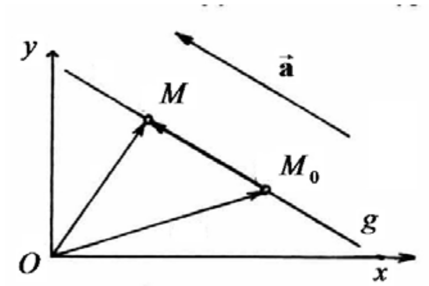

Рис. 7.3.

Тогава векторът $\vec{N}(-a_2, a_1)$ е нормален към правата, понеже скаларното произведение на $\vec{\mathbf{N}}$ и $\vec{\mathbf{a}}$ е нула, $\vec{\mathbf{N}}\vec{\mathbf{a}} = -a_2a_1 + a_1a_2 = 0$, и следователно търсеното уравнение може да бъде получено като уравнение на права през дадена точка M_0 и даден нормален вектор $\vec{\mathbf{N}}$,

$$g : -a_2(x - x_0) + a_1(y - y_0) = 0 .$$

Ако е даден един направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}$ за правата g, то всеки друг вектор $\lambda\vec{\mathbf{a}}$, който се получава от $\vec{\mathbf{a}}$ след умножение с число $\lambda \neq 0$, също се явява направляващ за правата g.

От друга страна, правата g се състои от точките $M(x, y)$, за които векторът $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$ е колинеарен на вектора $\vec{\mathbf{a}}$, което позволява да представим правата като $g : \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = t\vec{\mathbf{a}}$, където t е параметър, или

$$g : \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{a}} ,$$

което се нарича ***векторно параметрично уравнение*** на правата g. Записвайки последното в координатен вид намираме

$$g : \left| \begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \end{aligned} \right. ,$$

което се нарича ***скаларно параметрично уравнение*** на g. Точките от g се получават при различните стойности на параметъра t, който може да бъде всяко реално число.

Като елиминираме от последния запис параметъра t, получаваме

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} ,$$

което обосновава следния запис

$$g : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} ,$$

който се нарича ***канонично уравнение*** на правата g. В този запис знаменателите a_1 или a_2 могат да бъдат нули (но не и двата едновременно), което не е противоречие, понеже това не означава деление на нула.

Ако $a_1 = 0$, то правата g е успоредна на оста Ox, ако $a_2 = 0$, то правата g е успоредна на оста Oy. Нека g не е успоредна на оста Oy, т.е. $a_2 = 0$. Тогава каноничното уравнение може да се преобразува във вида

$$g : y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x + \left(y_0 - x_0\frac{a_2}{a_1}\right)$$

което се записва по следния начин

$$g : y = kx + n .$$

Числото k се нарича ***ъглов коефициент*** на правата g. Другият параметър n задава пресечната точка на g с координатната ос Oy (пресечната точка има координати $(0, n)$).

Преминаването към различните видове уравнения на една права се получава лесно въз основа на дадените определения. Например ако правата g е дадена чрез своето канонично уравнение

$$g : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3},$$

то по условие имаме една точка $M_0(-1,2)$, която лежи върху g и един направляващ вектор $\vec{\mathbf{a}}(2,3)$, следователно скаларното параметрично уравнение на g има вида

$$g : \left| \begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{array} \right. .$$

Един нормален вектор към тази права има координати $\vec{\mathbf{N}}(-3,2)$, следователно общото уравнение на g има вида

$$g : -3(x+1) + 2(y-2) = 0 \text{ или } g : -3x + 2y - 5 = 0 .$$

Уравнение на права през две точки. Да потърсим уравнение на права g по две дадени различни точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, които лежат върху нея. В този случай ненулевият вектор $\vec{\mathbf{a}}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \overrightarrow{M_1M_2}$ се явява направляващ за правата, следователно g има скаларно параметрично уравнение

$$g : \left| \begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{array} \right.$$

и канонично уравнение

$$g = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Например да намерим уравнение на правата g през двете точки $M_1(1,3)$ и $M_2(-3,2)$. Скаларното параметрично и каноничното уравнения имат съответно вида

$$g : \left| \begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 3 - t \end{array} \right. , \quad g : \frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{-1},$$

откъдето лесно се намира и общото уравнение

$$g : (-1)(x-1) = (-4)(y-3) \text{ или } g : -x + 4y - 3 = 0 .$$

Нека правата g е определена от двете различни точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и не се явява успоредна на координатната ос Oy. Тогава $x_1 \neq x_2$ и уравнението на g може да се запише във вида

$$g: y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ или } g: y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left[y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right],$$

което показва, че правата g има ъглов коефициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

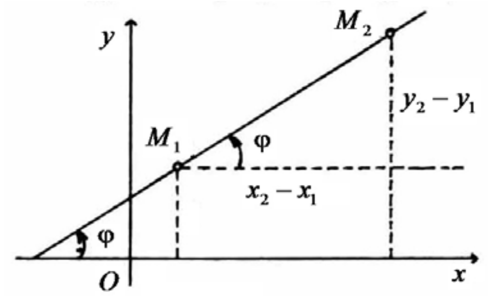

Рис. 7.4.

От друга страна (рис. 7.4.) от правоъгълния триъгълник с хипотенуза M_1M_2 се вижда, че

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

следователно за ъгловият коефициент имаме $k = \operatorname{tg}\varphi$, където φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, е ъгълът, който сключва правата g с оста Ox.

От горното разсъждение веднага се получава, че съотношението

$$g: y = y_0 + k(x - x_0),$$

задава ***уравнение на права*** g***, минаваща през дадена точка*** $M_0(x_0, y_0)$ ***с даден ъглов коефициент*** k.

3. Взаимно разположение на две прави. Нека са дадени двете прави g_1 и g_2 чрез своите общи уравнения

$$g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0\left(|a_1| + |b_1| > 0\right) \text{ и } g_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0\left(|a_2| + |b_2| > 0\right).$$

Различаваме следните три основни взаимни разположения.

1) Правите g_1 и g_2 се пресичат в единствена точка, $M_0(x_0, y_0)$, $M_0 = g_1 \cap g_2$.

2) Правите g_1 и g_2 са успоредни но не се сливат, $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$.

3) Правите g_1 и g_2 се сливат, $g_1 \equiv g_2$.

Тези разположения можем да установим, разглеждайки уравненията на двете прави като система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$a_1x + b_1y = -c_1$$
$$a_2x + b_2y = -c_2$$

с основна и разширена матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ и } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

По условие за ранговете на тези матрици винаги е изпълнено $1 \leq r(A) \leq r(\widetilde{A}) \leq 2$.

Първият случай е налице, когато системата е съвместима и определена – има единствено решение (x_0, y_0), което задава координатите на единствената пресечна точка $M_0(x_0, y_0)$. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$, което е еквивалентно на $r(A) = 2$.

Вторият случай е налице, когато системата не е съвместима – няма решение. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) < r(\widetilde{A})$, което е възможно, само когато $r(A) = 1$ и $r(\widetilde{A}) = 2$.

Третият случай е налице, когато системата е съвместима и неопределена – има безбройно много решения. Според теоремата на Кронекер-Капели, това означава, че $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$, което е еквивалентно на $r(\widetilde{A}) = 1$. В този случай става дума за една и съща права, представена (евентуално) чрез две различни уравнения, едното от които се получава от другото след умножение с някакво различно от нула число.

Например правите

$$g_1 : 2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } g_2 : 4x - 6y + 3 = 0$$

са успоредни, понеже

$$r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right] = 1 \text{ и } r\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}\right] = 2.$$

Ъгъл между две прави. Под ъгъл φ между двете прави $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ се разбира ъгълът между кои да е техни направляващи вектори. По този начин φ се явява ъгълът между техните нормални вектори $\vec{\mathbf{N}}_1(a_1, b_1)$ и $\vec{\mathbf{N}}_2(a_2, b_2)$, следователно за ъгъла между правите g_1 и g_2 получаваме формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{N}}_1\vec{\mathbf{N}}_2}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Това определение дава два ъгъла, които се допълват до π. Когато $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, единият от тях е остър, а другият е тъп. Ако правите не са перпендикулярни, то за ***острия ъгъл*** между тях имаме

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\vec{\mathbf{N}}_2\right|}{\left|\vec{\mathbf{N}}_1\right|\left|\vec{\mathbf{N}}_2\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \ \left(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Например правите $g_1 : 2x + 3y - 1 = 0$ и $g_2 : -3x + 2y - 2 = 0$ са перпендикулярни, понеже

$$\cos\varphi = \frac{2.(-3) + 3.2}{\sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = 0.$$

Ъгълът между две прави може да бъде намерен и с помощта на техните ъглови коефициенти (рис. 7.5). Нека са дадени правите g_1 и g_2, които сключват с координатната ос Ox съответно ъгли α_1 и α_2 и освен това сключват помежду си различен от прав ъгъл φ. Тогава

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

откъдето за ъгъла между правите получаваме формулата

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

където k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на g_1 и g_2.

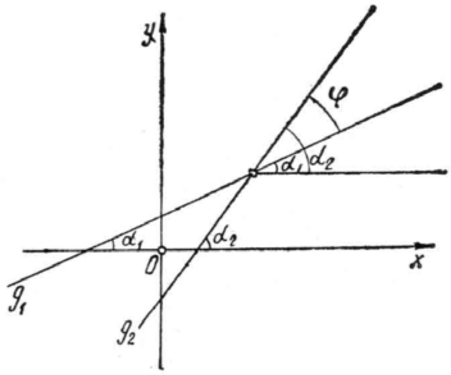

Рис. 7.5.

За да получим формула за ***острия ъгъл*** между правите, трябва да приложим последната формула по абсолютна стойност,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

От тук се вижда, че ако $k_1 = k_2$, то правите са успоредни, и ако $k_1 k_2 + 1 = 0$, то правите са перпендикулярни.

4. Разстояние между точка и права. Да разгледаме правата g, зададена чрез своето общо уравнение

$$g : ax + by + c = 0$$

и някаква точка от равнината $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 7.6).

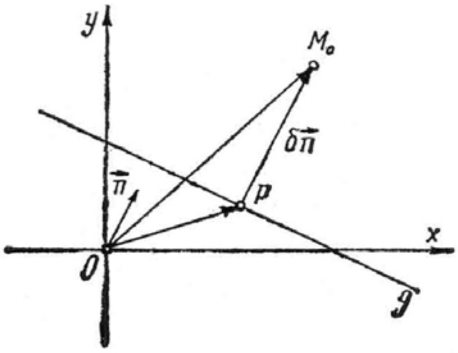

Рис. 7.6.

Тогава векторът $\vec{\mathbf{N}}(a,b)$ е нормален към правата, а векторът

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{N}}}{|\vec{\mathbf{N}}|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

е единичен нормален вектор към g. Нека P е ортогоналната проекция на точката M_0 върху g. Търсим разстоянието $d = d(g, M_0)$ между правата g и точката M_0. Очевидно $d = \left|\overrightarrow{PM_0}\right|$. Векторът $\overrightarrow{PM_0}$ е успореден на $\vec{\mathbf{n}}$, следователно $\overrightarrow{PM_0} = \delta\vec{\mathbf{n}}$, за някое число δ, а за търсеното разстояние получаваме

$$d = |\delta\vec{\mathbf{n}}| = |\delta||\vec{\mathbf{n}}| = |\delta|.$$

От друга страна $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_0} = \overrightarrow{OP} + \delta\vec{\mathbf{n}}$, откъдето за координатите на точката P, които са същевременно и координати на нейния радиус вектор $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_0} - \delta\vec{\mathbf{n}}$ намираме

$$P\left(x_0 - \delta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 - \delta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Числото δ ще определим от условието, че точката P лежи върху правата g, което означава, че нейните координати удовлетворяват уравнението,

$$a\left(x_0 - \delta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\left(y_0 - \delta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + c = 0.$$

След преобразуване на последния израз получаваме

$$\delta = \frac{ax_0 + bx_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

откъдето за търсеното разстояние намираме формулата

$$d = \frac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Например за разстоянието между правата $g: 3x - 4y + 2 = 0$ и точката $M_0(1,0)$ пресмятаме

$$d = \frac{|3.1 - 4.0 + 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1.$$