Лекция 6

§6. Скаларно, векторно и смесено произведение

1. Скаларно произведение. ***Скаларното произведение*** $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$ на векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ се определя като число, равно на произведението от техните дължини и косинуса от ъгъла между тях

(6.1) $\quad \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

Скаларното произведение може да се определи и посредством ***алгебричната проекция*** $\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}}$ на вектора $\vec{\mathbf{a}}$ върху оста l на вектора $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 6.1).

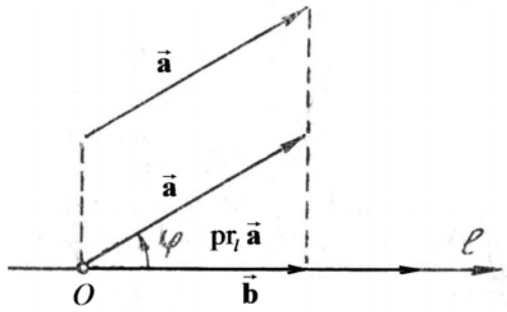

Рис. 6.1.

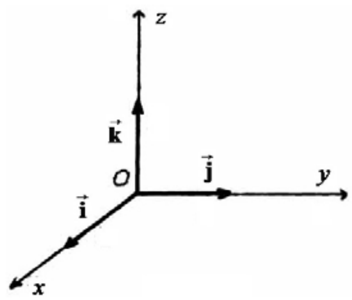

Рис. 6.2.

По определение имаме $\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|\cos\varphi$, следователно $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{a}})|\vec{\mathbf{b}}|$. По същия начин се установява, че $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (\mathrm{pr}_l\,\vec{\mathbf{b}})|\vec{\mathbf{a}}|$ (където l е оста на вектора $\vec{\mathbf{a}}$).

Непосредствено от определението на скаларно произведение чрез формулата (6.1), произтичат следните основни свойства.

1) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}$.

2) $(\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2)\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}_1\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}_2\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_2) = \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}_2$.

3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{\mathbf{a}})\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}(\lambda\vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}$.

4) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}} \ge 0$ и $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}} = 0$, единствено когато $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Два ненулеви геометрични вектора се наричат ***ортогонални***, когато сключват прав ъгъл. По определение нулевият вектор е ортогонален на всеки друг.

5) $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = 0$ тогава и само тогава, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са ортогонални.

6) $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}}}$, дължината на всеки вектор е равна на квадратния корен от скаларното произведение на вектора със себе си.

По нататък навсякъде ще предполагаме, че е зададена декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис от единичните вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$. По определение $|\vec{\mathbf{i}}| = |\vec{\mathbf{j}}| = |\vec{\mathbf{k}}| = 1$, $\vec{\mathbf{i}} \perp \vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{i}} \perp \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \perp \vec{\mathbf{k}}$ (рис. 6.2). Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}}$ и $\vec{\mathbf{b}} = b_1\vec{\mathbf{i}} + b_2\vec{\mathbf{j}} + b_3\vec{\mathbf{k}}$. Съгласно формулата (6.1) за взаимните скаларни произведения на базисните вектори намираме $\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}} = 1$ и $\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}} = 0$, следователно

$$\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = (a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}})(b_1\vec{\mathbf{i}} + b_2\vec{\mathbf{j}} + b_3\vec{\mathbf{k}}) =$$

$$(6.2)\qquad = a_1b_1\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{i}} + a_1b_2\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{j}} + a_1b_3\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} + a_2b_1\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{i}} + a_2b_2\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{j}} + a_2b_3\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}} + a_3b_1\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{k}} + a_3b_2\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{j}} + a_3b_3\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{k}} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Последната формула показва, че скаларното произведение се изразява по твърде лесен начин като сума от произведенията на съответните координати в даден ортонормиран базис и по този начин обосновава предимството на такива базиси. Ако базисът не беше ортонормиран, то формулата (6.2) щеше в общия случай да съдържа девет събираеми. Например ако са дадени векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2,3,1)$, то за тяхното скаларно произведение намираме $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = 1.2 + (-2).3 + 3.1 = -1$.

Дължина на вектор. Съгласно формулата (6.2), за дължината на вектора $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ намираме

(6.3) $\quad |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{a}}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + {}_3^2}$.

Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са зададени чрез техните координати. Тогава за дължината на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ получаваме

(6.4) $\quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Ъгъл между вектори. Ако $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ са два ненулеви вектора, то за ъгъла φ между тях получаваме формулата

(6.5) $$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

В частност векторите са ортогонални тогава и само тогава, когато $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Направляващи косинуси. Да разгледаме ненулевия вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$. По определение базисните вектори имат следните координати, $\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ и $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. Нека α, β и γ са ъглите, които сключва $\vec{\mathbf{a}}$ със съответните базисни вектори (рис. 6.3).

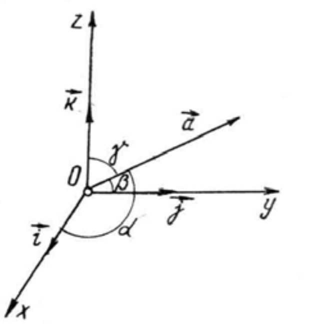

Рис. 6.3.

Тогава съгласно (6.5) намираме

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{i}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{i}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{j}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{k}}||\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

откъдето веднага може да се провери, че

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Единичен вектор. Нека $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ е ненулев вектор. Тогава векторът $\vec{\mathbf{n}}$, който се получава от вектора $\vec{\mathbf{a}}$, след като го разделим на неговата дължина $|\vec{\mathbf{a}}|$, представлява вектор, който има посоката на $\vec{\mathbf{a}}$ и има дължина $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$,

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|} = \frac{a_1\vec{\mathbf{i}} + a_2\vec{\mathbf{j}} + a_3\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{n}} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right) \tag{6.6}$$

Формулите (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) както и формулите за направляващите косинуси се променят по очевиден начин, когато разсъжденията се провеждат в равнината. За да получим техния равнинен еквивалент е достатъчно да отстраним събираемите, които съдържат индекс 3.

2. Векторно произведение. Нека $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са два вектора в пространството. Тяхното ***векторно произведение*** $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ винаги се определя като вектор с дължина $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\varphi$, където φ е ъгълът между тях, $0 \le \varphi \le \pi$. От това определение се вижда, че $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ е нулевият вектор тогава и само тогава, когато $|\vec{\mathbf{a}}| = 0$ или $|\vec{\mathbf{b}}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$, което означава, че $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са колинеарни. Нека $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са неколинеарни (всеки от тях е ненулев и не са успоредни). Тогава тяхното векторно произведение се определя като единственият вектор в пространството, който притежава следните свойства (рис. 6.4).

1) $|\vec{\mathbf{c}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\varphi$.

2) Векторът $\vec{\mathbf{c}}$ е ортогонален на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

3) Векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в този ред образуват ***дясна тройка***.

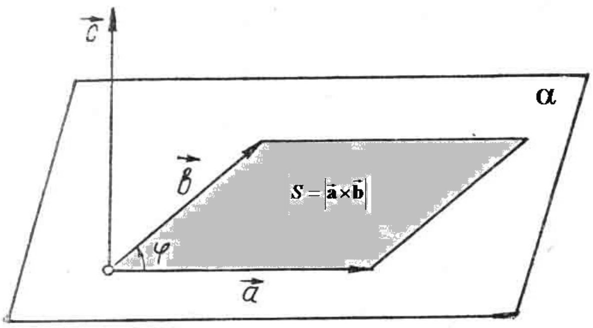

Рис. 6.4.

Ако приложим векторите $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ в една точка, то те определят единствена равнина α. Дължината на векторното произведение по определение е лицето на пространствения успоредник от равнината α, породен от $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, освен това векторът $\vec{\mathbf{c}}$ е перпендикулярен на равнината α. Условията дотук определят точно два вектора, със зададена дължина и перпендикулярни на дадена равнина. Третото условие, векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в този ред да образуват дясна тройка, определя вече $\vec{\mathbf{c}}$ еднозначно.

Векторното произведение притежава следните основни свойства, които лесно се проверяват непосредствено от дадените определения.

1) $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$.

2) $(\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}_1 \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}_2 \times \vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{b}}_2) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}_2$.

3) Ако λ е число, то $(\lambda\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \times (\lambda\vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$.

4) $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{0}}$, единствено когато $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ са колинеарни.

Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2,b_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, при което допълнително предполагаме, че координатната система е положително ориентирана, което означава, че базисните вектори $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, взети в този ред, образуват дясна тройка. Да намерим векторното произведение $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}$. По определение $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}$ е единственият вектор с дължина $|\vec{\mathbf{i}}||\vec{\mathbf{j}}|\sin\frac{\pi}{2}=1$, който е ортогонален едновременно на $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$, следователно $\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}}$. Аналогично се установява, че взаимните векторни произведения на тези вектори имат вида

$$\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{0}},\ \vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{k}}=-\vec{\mathbf{j}},$$
$$\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{i}}=-\vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}=\vec{\mathbf{0}},\ \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{i}},$$
$$\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}=\vec{\mathbf{j}},\ \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{j}}=-\vec{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{0}}.$$

Горната таблица може да се запомни по следния начин. Във редицата $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, векторното произведение на всеки два поредни вектора е равно на вектора след тях и освен това векторното произведение на всеки вектор със себе си дава нулевият вектор, а смяната местата на векторните множители променя единствено знака на произведението. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}&=\left(a_1\vec{\mathbf{i}}+a_2\vec{\mathbf{j}}+a_3\vec{\mathbf{k}}\right)\times\left(b_1\vec{\mathbf{i}}+b_2\vec{\mathbf{j}}+b_3\vec{\mathbf{k}}\right)=\\
&=a_1b_1\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_1b_2\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_1b_3\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{k}}+\\
&+a_2b_1\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_2b_2\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_2b_3\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{k}}+\\
&+a_3b_1\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{i}}+a_3b_2\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{j}}+a_3b_3\vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}=\\
&=a_1b_2\vec{\mathbf{k}}-a_1b_3\vec{\mathbf{j}}+\\
&-a_2b_1\vec{\mathbf{k}}+a_2b_3\vec{\mathbf{i}}+\\
&+a_3b_1\vec{\mathbf{j}}-a_3b_2\vec{\mathbf{i}}=\\
&=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

По този начин векторното произведение може да се разглежда като стойността на формалната детерминанта

$$(6.7)\qquad \vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}},$$

в първия ред на която стоят базисните вектори, във втория ред стоят координатите на левия векторен множител, а в третия ред стоят координатите на десния векторен множител, която детерминанта пресмятаме по адюнгираните количества на първия ред.

Например, ако са дадени векторите $\vec{\mathbf{a}}(1,-2,3)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2,3,1)$, то за тяхното векторно произведение намираме

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=(-11)\vec{\mathbf{i}}+5\vec{\mathbf{j}}+7\vec{\mathbf{k}}.$$

Векторното произведение може да се използва за намиране лицето на пространствен успоредник, ако са известни векторите на две негови съседни страни.

Лице на триъгълник. Нека е даден пространственият триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Тогава неговото лице е половината от лицето на успоредника, определен от двата вектора $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{M_1M_3}$. За координатите на $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ имаме

$$\vec{\mathbf{a}}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \text{ и } \vec{\mathbf{b}}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

следователно

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\left|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\right|,$$

откъдето за търсеното лице намираме формулата

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}\,. \tag{6.8}$$

Да разгледаме сега равнинния триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$, зададени чрез своите координати в декартовата координатна система Oxy с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$ и $\vec{\mathbf{j}}$. Тази равнина можем да разглеждаме като координатна равнина Oxy в пространствената декартова координатна система $Oxyz$ с ортонормиран базис $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$, при което върховете на триъгълника ще имат координати $M_1(x_1,y_1,0)$, $M_2(x_2,y_2,0)$ и $M_3(x_3,y_3,0)$. Сега от (6.8), за лицето на триъгълника получаваме формулата

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\right|.$$

3. Смесено произведение. ***Смесено произведение*** $(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})$ на трите пространствени вектора $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ се нарича числото, което се получава от скаларното произведение на вектора $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$ с вектора $\vec{\mathbf{c}}$

$$(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})=(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}\,.$$

Да разгледаме векторите $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{\mathbf{c}}(c_1,c_2,c_3)$, зададени чрез техните координати в базиса $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ (координатната система се предполага положително ориентирана). Съгласно формулата (6.7) и правилото за пресмятане на скаларно произведение на вектори с известни координати (в ортонормиран базис), за смесеното произведение намираме

$$(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}})=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{\mathbf{c}}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3,$$

следователно смесеното произведение се изчислява като сбор на произведенията на адюнгираните количества на първия ред с координатите на вектора $\vec{\mathbf{c}}$, от което веднага следва, че смесеното произведение е стойността на детерминантата

$$\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

което може да се запише по естествен начин като

$$\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{6.9}$$

От (6.9) следват всичките основни свойства на смесеното произведение.

1) Ако сменим местата на два вектора в смесеното произведение, то се променя единствено знака. Например $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=-\left(\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{c}}\right)$ и т.н.

2) $\left(\lambda\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}},\lambda\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\lambda\vec{\mathbf{c}}\right)=\lambda\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$.

3) $\left(\vec{\mathbf{a}}_1+\vec{\mathbf{a}}_2,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=\left(\vec{\mathbf{a}}_1,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)+\left(\vec{\mathbf{a}}_2,\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$.

Твърдение 6.1. Стойността на смесеното произведение $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)$ е нула тогава и само тогава, когато векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ са компланарни (линейно зависими).

Доказателство. От формулата (6.9) следва, че $\left(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}\right)=0$ тогава и само тогава, когато детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

което от своя страна е налице тогава и само тогава, когато между редовете на тази детерминанта има линейна зависимост. Но всяка линейна зависимост между редовете на детерминантата задава същата линейна зависимост между векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$. ■

Геометрична интерпретация. Да приложим векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$ в една точка O, както е показано на рисунка 6.5 и да разгледаме паралелепипеда, построен върху тези вектори.

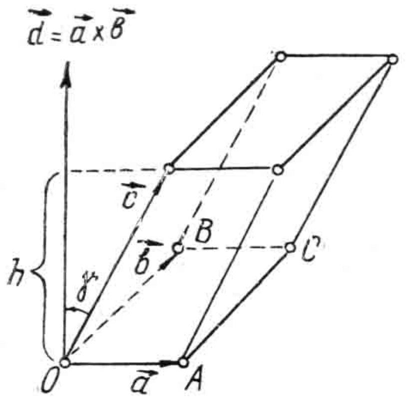

Рис. 6.5.

Да положим $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}$. Тогава за обема на паралелепипеда знаем формулата $V=S_{OABC}h$, където h е неговата височина, която е равна на абсолютната стойност на алгебричната проекция на вектора $\vec{\mathbf{c}}$ върху оста на вектора $\vec{\mathbf{d}}$. По тази причина $h=\left|\left|\vec{\mathbf{c}}\right|\cos\gamma\right|$, където γ е ъгълът между векторите $\vec{\mathbf{c}}$ и $\vec{\mathbf{d}}$, $0\le\gamma\le\pi$. Следователно за обема на паралелепипеда получаваме $V = \left| \left| \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \right| \left| \vec{\mathbf{c}} \right| \cos \gamma \right|$, което според геометричното определение за скаларно произведение представлява абсолютната стойност на скаларното произведение на векторите $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$, откъдето, въз основа на геометричното определение за смесено произведение намираме, че търсеният обем се изразява посредством формулата

(6.10) $V = \left| \left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \right) \right|$.

Понякога е удобно да се говори за ***ориентиран обем*** на паралелепипед, построен върху векторите $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ и $\vec{\mathbf{c}}$, който се определя като стойността на смесеното произведение $\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \right)$.

Обем на тетраедър. Да разгледаме тетраедъра с върхове $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$. Неговият обем е една шеста част от обема на съответния паралелепипед, построен върху векторите

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{M_1 M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$
$$\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{M_1 M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Сега от формулата (6.10) за обем на паралелепипед намираме

$$V_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$