Примерни задачи по ЛААГ — 2 част

Въпрос 1. Съставете уравнението на права l в равнината, съдържаща точките $A(3,4)$ и $B(1,-2)$. Намерете проекцията на точка $M(-1,2)$ върху l и точка Q, ортогонално симетрична на M спрямо l.

Въпрос 2. Точките $A(0,2)$ и $B(1,-1)$ са съседни върхове на успоредника $ABCD$, а точка $Q(2,0)$ е пресечната точка на диагоналите му. Съставете уравненията на страните на успоредника.

Въпрос 3. Съставете уравненията на медианата и височината от върха A на триъгълника ABC и намерете ъгъла между тях, ако $A(2,0)$, $B(1,-2)$ и $C(3,6)$.

Въпрос 4. Съставете уравненията на страните на триъгълник, ако са дадени върха му $B(1,-2)$, височина $h: x+4y-2=0$ и медиана $m: x=2$, излизащи от един връх.

Въпрос 5. Съставете уравнението на равнина α, съдържаща точките $A(4,-1,0)$, $B(2,1,2)$ и $C(6,3,2)$ и права l през точките $M(2,-3,4)$ и $N(3,-5,7)$. Определете взаимното положение на l и α.

Въпрос 6. Съставете уравненията на права l през точките $A(-1,3,-5)$ и $B(0,1,-2)$ и на равнина α, която съдържа точка $P(3,3,3)$ и е перпендикулярна на правата l. Намерете най-късото разстояние от точка P до правата l.

Въпрос 7. Съставете уравнението на равнина α, съдържаща токата $P(1,0,1)$ и правата $l: \left|\begin{array}{l} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \end{array}\right.$. Намерете проекцията на точката $Q(-4,1,0)$ върху α.

Въпрос 8. След като се убедите, че следните две прави $l_1: \left|\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda+1 \\ z=\lambda+2 \end{array}\right.$ и $l_2: \left|\begin{array}{l} x=t+2 \\ y=-3t-1 \\ z=3 \end{array}\right.$ се пресичат, съставете уравнението на равнина α, която ги съдържа. Определете взаимното положение на правата $g: \left|\begin{array}{l} x=2s+3 \\ y=-2s+2 \\ z=s-2 \end{array}\right.$ и равнината α. Намерете най-късото разстояние между g и α.

Въпрос 9. След като се убедите, че следните две прави $l_1: \left|\begin{array}{l} x=3\lambda+3 \\ y=6\lambda \\ z=2\lambda+2 \end{array}\right.$ и $l_2: \left|\begin{array}{l} x=3t+1 \\ y=2t \\ z=-2 \end{array}\right.$ са кръстосани, съставете уравнението на равнина α, която да е успоредна на l_1 и да съдържа l_2. Намерете най-късото разстояние между дадените прави.

Въпрос 10. Съставете уравнението на равнина α, съдържаща правите $l_1: \left|\begin{array}{l} x=\lambda+3 \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$ и $l_2: \left|\begin{array}{l} x=\mu+1 \\ y=-\mu \\ z=\mu+4 \end{array}\right.$ и намерете проекцията на правата $l: \left|\begin{array}{l} x=2t+1 \\ y=t+1 \\ z=3t+1 \end{array}\right.$ върху α.

Въпрос 11. В тримерното линейно пространство V с базис e_1, e_2, e_3 е зададен линеен оператор φ, привеждащ векторите a_1, a_2, a_3 съответно във векторите b_1, b_2, b_3, където

$$\begin{array}{ll} a_1=e_1 & \varphi(a_1)=b_1=-e_1-e_3 \\ a_2=e_1+e_2 & \varphi(a_2)=b_2=e_1-e_2 \\ a_3=e_1+e_2+e_3 & \varphi(a_3)=b_3=2e_1+2e_3 \end{array}.$$

а) намерете матрицата на оператора φ в базисите e_1, e_2, e_3 и a_1, a_2, a_3 и $\varphi(2e_1 + 3e_2 - e_3)$ в базиса e_1, e_2, e_3.

б) базис на образа и ядрото на φ.

Въпрос 12. В тримерното линейно пространство V с базис e_1, e_2, e_3 е зададен линеен оператор φ, действащ по правилото

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (\alpha_1 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)e_2 + (2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3)e_3.$$

Ако е възможно, намерете базис, в който матрицата на оператора е диагонална.

Въпрос 13. Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -24 & -12 \\ 4 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ако е възможно, намерете матрица T, такава че $T^{-1}AT$ да е диагонална.

Въпрос 14. Дадена е симетричната матрицата

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Намерете ортогонална матрица U и диагонална матрица D, такива че $U^t AU = D$.

Въпрос 15. Чрез ортогонална трансформация приведете следната квадратична форма в каноничен вид, като укажете формулите на тази трансформация и каноничния вид, където

а) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 3x_3^2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Въпрос 16. Чрез ортогонална трансформация приведете в каноничен вид уравненята на следната крива в равнината

а) $f(x, y) = 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

б) $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 11 = 0$;

в) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.