

Лекции и семинарни занятия по аналитична геометрия

Писани са от мен, Иван Димитров Георгиев (вече завършил) студент по информатика, електронната ми поща е ivandg@yahoo.com.

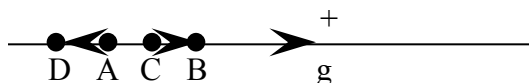
Четени са през зимния семестър на учебната 2001/2002 година. Лектор тогава беше доц. Чавдар Лозанов, семинарните занятия тогава водеше Яна Алексиева (сега тя е вече асистент). Семинарните занятия са само частично написани.

Използвал съм само и единствено мои записки (и на мои колеги) от лекции и семинарни занятия.

2 октомври

Афинни операции с вектори

Ос наричаме права, върху която условно сме избрали положителна посока.



Насочена отсечка наричаме отсечка, на която единият край приемаме за първи, а другият за втори; означава се $\overrightarrow{AB}$

Алгебрична мярка на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ спрямо оста $\underline{g}$ означаваме с $AB = \epsilon |AB|$, където $\epsilon = 1$, ако $\underline{g} \uparrow \overrightarrow{AB}$ или $\epsilon = -1$, ако $\underline{g} \downarrow \overrightarrow{AB}$. На чертежа $AB = |AB|$, а $CD = -|CD|$

Релация на Шал: За всеки три точки върху една права е изпълнено:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Две **насочени отсечки** ($\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$) са **равни**, ако $|AB| = |CD|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$.

Нулева насочена отсечка е тази, чиито краища съвпадат; по дефиниция всички нулеви насочени отсечки са равни, т.е.
 $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{O}$ за всеки две точки A и B.

Геометричен вектор е множеството от всички насочени отсечки равни на дадена (включително и самата нея). Означение:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots = \underline{a}$; отделните насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ се наричат представители на вектора $\underline{a}$. Релацията “представител на” е знакът за равенство, т.е. $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$

Ако е даден вектор $\underline{a}$ и точка O, съществува единствен представител на вектора започващ в точка O.

Нулев вектор е множеството от всички нулеви насочени отсечки. Означава се с $\underline{o}$.

Нека е даден векторът $\underline{a} = \overrightarrow{AB}$, векторът с представител $\overrightarrow{BA}$ се означава с $-\underline{a}$ и се нарича **противоположен** на $\underline{a}$.

Два вектора са **колинеарни** ако два техни представителя лежат на една и съща права или са успоредни.

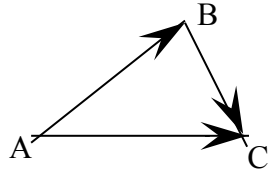
Три вектора са **компланарни** ако три техни представителя лежат в една равнина.

Събиране на вектори: имаме два вектора $\underline{a}$ и $\underline{b}$, вектор $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ се нарича **сбор** на векторите $\underline{a}$ и $\underline{b}$;

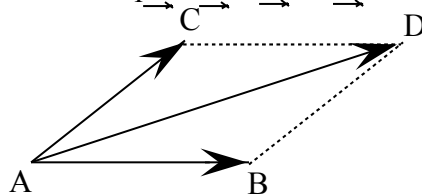
III

Избираме произволна точка A и нанасяме от нея вектора $\vec{a}$. Нека другият край на вектора $\vec{a}$ е точката B . От точка B нанасяме вектора $\vec{b}$, означаваме другият му край C . Тогава $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$

Това е известното **правило на триъгълника**.



Ако векторите не са колинеарни, тогава може да се приложи **правило на успоредника**. То гласи, че сборът на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторът, който се получава като диагонал на успоредник, с върхове произволна t . A и краищата на представителите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ започващи в нея. Тук $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{AD}$



Свойства на събирането

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (\vec{a} - \vec{a} = \vec{0})$
- $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

Умножение на вектор с число:

Нека са дадени вектора $\vec{a}$ и реалното число λ ; тогава $\lambda \cdot \vec{a}$ е векторът $\vec{b}$, за който е изпълнено: $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \ (\lambda > 0)$ и $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \ (\lambda < 0)$; ако $\lambda = 0$, $\vec{b} = \vec{0}$

Свойства на умножението на вектор с число

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $(k + 1) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{a}$
- $(k \cdot 1) \cdot \vec{a} = k \cdot (1 \cdot \vec{a})$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

Векторно (линейно) пространство

$V = \{\vec{a}, \vec{b}, \dots\}$ – множество V , елементите на което сме нарекли вектори

Дефинираме две операции:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \in V \text{ (сбор)}$$

$(\lambda \in \mathbb{R}, \vec{a}) \rightarrow (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$ (умножение с число)

Аксиоми – горепосочените осем свойства на операциите

Ако са налице тези условия казваме, че множеството V е линейно векторно пространство

Примери: всички геометрични вектори колинеарни с дадена права **-едномерно векторно пространство**; всички геометрични вектори компланарни с дадена равнина – **двумерно векторно пространство**; всички геометрични вектори – **тримерно векторно пространство**; множеството от всички наредени n -торки реални числа $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $a_i \in \mathbb{R}$ с дефинирани операции събиране: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$ и умножение с число $\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n)$; $\mathbb{R}^n$ – **векторно пространство на n -мерните вектори**

Линейна зависимост и независимост на вектори

Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Тогава векторът $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ е **линейна комбинация** на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ако някое $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) тогава линейната комбинация се нарича **нетривиална**. Ако $\lambda_i = 0$ за всяко i , тогава линейната комбинация се нарича **тривиална**.

Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са **линейно зависими**, ако съществува тяхна нетривиална линейна комбинация равна на нулевия вектор ($\vec{0}$). Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са **линейно независими**, ако поне един от тях е линейна комбинация на останалите.

Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са **линейно независими**, ако единствената им линейна комбинация равна на нулевия вектор е тривиалната. Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са **линейно независими** тогава и само тогава когато :

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \mu_n \vec{a}_n = \vec{0} \rightarrow \lambda_i = \mu_i; \lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \dots; \lambda_n = \mu_n$$

Линейна зависимост и независимост на геометрични вектори

Всеки ненулев вектор е линейно независим, а нулевият вектор е линейно зависим.

Два геометрични вектора са линейно зависими, ако са колинеарни.

Три геометрични вектора са линейно зависими, ако са компланарни.

Четири геометрични вектора винаги са линейно зависими.

9 октомври

Афинни координати

Нека V е векторно пространство. Избираме n линейно независими вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in V$, такива че всеки вектор $\vec{a} \in V$ може да се представи като $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$; тогава $K = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$ се нарича **векторна база** на векторното пространство V .

От паралелната дефиниция за линейно независими вектори $\rightarrow$ числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ са единствени за вектора $\vec{a}$.

Тази наредена n -торка числа се нарича (афинни) **координати** на $\vec{a}$ спрямо векторната база K ; съответствието между координати на вектор спрямо дадена векторна база и самият вектор е взаимнооднозначно.

Нека $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_s \vec{b}_s$;
 Фиксирана е векторна база $K (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ в която векторът $\vec{a}$ има координати $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$, а векторът $\vec{b}_i (i = 1, 2, \dots, s)$ има координати $(b_1^i, b_2^i, \dots, b_n^i)$, т.е.
 $\vec{b}_i = b_1^i \vec{e}_1 + b_2^i \vec{e}_2 + \dots + b_n^i \vec{e}_n$. Тогава:

$$\begin{aligned} a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n &= \lambda_1 (b_1^1 \vec{e}_1 + b_2^1 \vec{e}_2 + \dots + b_n^1 \vec{e}_n) + \lambda_2 (b_1^2 \vec{e}_1 + b_2^2 \vec{e}_2 + \dots + b_n^2 \vec{e}_n) + \\ &\dots + \lambda_s (b_1^s \vec{e}_1 + b_2^s \vec{e}_2 + \dots + b_n^s \vec{e}_n) = (\lambda_1 b_1^1 + \lambda_2 b_1^2 + \dots + \lambda_s b_1^s) \vec{e}_1 + (\lambda_1 b_2^1 + \lambda_2 b_2^2 + \dots + \lambda_s b_2^s) \vec{e}_2 + \dots + \\ &(\lambda_1 b_n^1 + \lambda_2 b_n^2 + \dots + \lambda_s b_n^s) \vec{e}_n \end{aligned}$$

Тъй като векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ са линейно независими $\rightarrow$

$$a_i = (\lambda_1 b_1^i + \lambda_2 b_1^2 + \dots + \lambda_s b_1^s) \text{ за } 1 \leq i \leq n$$

i – тата координата на $\vec{a}$ е същата линейна комбинация от i -тите координати на $\vec{b}$.

Координатите на линейна комбинация от вектори са равни на същата линейна комбинация от координатите на векторите.

Афинни координати във V_1

Ако е даден ненулев вектор $\vec{e}$ от V_1 , то всеки вектор $\vec{a}$ колинеарен на $\vec{e}$ принадлежи на V_1 и може да се представи като $\lambda \vec{e}$, където λ е реално. Спрямо фиксираната база $K \{ \vec{e} \}$ векторът $\vec{a}$ има единствена координата λ .

Афинни координати във V_2

Нека са дадени два неколинеарни вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ от V_2 . Тогава те са линейно независими и всеки вектор $\vec{a}$ компланарен с $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ принадлежи на V_2 и може да се представи като $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$, където λ и μ са реални. Спрямо фиксираната база $K \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ векторът $\vec{a}$ има единствени координати λ и μ .

Афинни координати във V_3

Нека са дадени три некомпланарни вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ от $\vec{V}_3$. Тогава те са линейно независими и всеки вектор $\vec{a}$ от $\vec{V}_3$ може да се представи като $\lambda \cdot \vec{e}_1 + \mu \cdot \vec{e}_2 + \nu \cdot \vec{e}_3$, където λ, μ и ν са реални. Спрямо фиксираната база $K \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ векторът $\vec{a}$ има единствени координати λ, μ и ν .

Координатни условия за колинеарност и компланарност на вектори

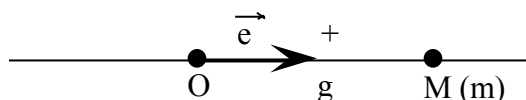
Нека имаме база $K \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ във $\vec{V}_2$. Дадени са два вектора $\vec{a} (a_1, a_2)$ и $\vec{b} (b_1, b_2)$ с координати спрямо K . Тогава:

$$\vec{a}, \vec{b} - \text{колинеарни} \Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \vec{0}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

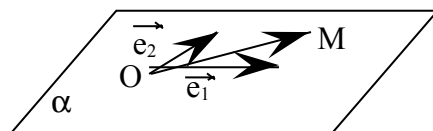
Нека имаме база $K \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ във $\vec{V}_3$. Дадени са три вектора $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} (c_1, c_2, c_3)$ с координати спрямо K . Тогава:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарни} \Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}, (\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

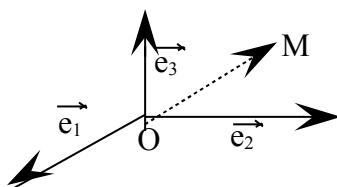
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$



Нека върху оста g да фиксираме т. О и ненулев вектор $\vec{e}$ с начало в т. О; на т. М можем еднозначно да съпоставим вектора $\vec{OM} (m)$, където m е такова, че $\vec{OM} = m \cdot \vec{e}$. Числото m наричаме **координата** на точката m спрямо K . При тези дефиниции сме фиксирали $K \{ O, \vec{e} \}$ – **афинна координатна система** върху правата g ; т. О се нарича **начало** на координатната система (K) . Векторът $\vec{OM}$ се нарича **радиус-вектор** на точката M .



В равнината α фиксираме т. О и два неколинеарни вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, т.е. фиксирали сме афинна координатна система $K \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$; на т. М съответства радиус-векторът $\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{e}_1 + \mu \cdot \vec{e}_2$; т.е. на $\vec{OM}$ съответстват λ и μ ; т. М има координати λ, μ спрямо K .



В пространството фиксираме т.О и три некомпланарни вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$; казваме, че сме фиксирали афинна координатна система $K \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$; на т. М съответства радиус-векторът

$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{e_1} + \mu \cdot \vec{e_2} + \nu \cdot \vec{e_3}$; т.е. на OM съответстват λ, μ и ν , а на т.М – координати λ, μ и ν спрямо K .

Координатите на една точка са координатите на радиус-вектора на точката спрямо фиксирана координатна система K .

Афинно пространство

Нека е дадено множество $A = \{ A, B, \dots \}$, елементите на което са наречени точки. Дадени са:

- V – векторно пространство
- съответствие ϕ : на двойката точки A и B се съпоставя вектор a от V ; записваме $AB = a$
- за всяка точка $A \in A$ и всеки вектор $a \in V$ съществува единствена точка $B \in A$, такава че $AB = a$
- за всеки три точки $A, B, C \in A$ е в сила $AB + BC = AC$

При тези условия множеството A се нарича **афинно пространство**.

Правя g в афинното пространство: взимаме една фиксирана

т. $O \in A$, един фиксиран вектор $e \in V$ и разглеждаме всички точки

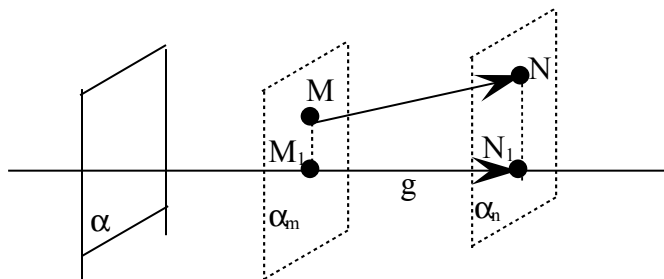
$M \in A$, такива че $OM = \lambda e$; казваме, че тези точки образуват правя $g: \{ O, e \}$

Равнина α в афинното пространство: взимаме една фиксирана

т. $O \in A$, два неколинеарни вектора e_1 и e_2 и разглеждаме всички точки $M \in A$,

такива че $OM = \lambda e_1 + \mu e_2$; казваме, че тези точки образуват равнина $\alpha: \{ O, e_1, e_2 \}$

Проекция на вектор върху ос



Нека са дадени насочена отсечка MN , правя g и равнина α , която не е успоредна на g . През точка M може да се прекара единствена равнина успоредна на α - това е равнината α_m ; нека α_m пресича g в точка M_1 ; казваме, че M_1 е проекция на точка M върху правата g , успоредна на α . Аналогично N_1 е проекция на точка N върху правата g , успоредна на α . M_1N_1 е проекция на насочената отсечка MN върху правата g , успоредна на α .

VIII

В частност ако $\alpha \perp g$, говорим за ортогонална проекция. Ако g е ос, говорим за проекция върху ос.

Ако $\vec{a}$ има представител $\overrightarrow{AB}$ и проекцията на $\overrightarrow{AB}$ върху g е $\overrightarrow{A_1B_1}$, която е представител на a_1 , говорим че a_1 е проекция на a върху g , успоредна на α

Афинните операции се запазват при проектиране:

$$\begin{aligned} \text{Ако } \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b}, \text{ то } c_1 = a_1 + b_1 \\ \text{Ако } \vec{b} &= \lambda \cdot \vec{a}, \text{ то } b_1 = \lambda \cdot a_1 \end{aligned}$$

Алгебрична проекция на вектор върху ос – това е алгебричната мярка на проекцията на даден вектор върху дадена ос

16 октомври

Скалярно произведение на два вектора

Скалярно произведение на геометрични вектори: ако a и b са геометрични вектори, тогава:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle a, b)$$

Ако $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нулевият вектор, тогава скалярното произведение е равно на 0.

Скалярното произведение съпоставя на всеки два вектора едно число.

Скалярното произведение на два вектора a и b е произведението на алгебричната проекция на a върху ос, еднопосочно ориентирана с b , и дължината на b .

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \overrightarrow{\text{пр.}_a^b |\vec{b}|} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \overrightarrow{\text{пр.}_b^a |\vec{a}|} \end{aligned}$$

Свойства на скалярното произведение:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
2. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b}); k \in \mathbb{R}$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$

Доказателство на 1: чрез определението за проекциите и чрез свойствата на проекциите

Косинусът на ъгъла между a и b е равен на: $\vec{a} \cdot \vec{b} / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$

Дължината на един вектор $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$
 $a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (за $a, b \neq 0$)

Евклидово пространство.

Нека V е векторно пространство. Нека на всеки два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да съпоставим число, което ще означаваме $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и ще наричаме скалярно произведение; за него да важат горните четири свойства; такова векторно пространство ще наричаме **евклидово пространство** (векторно пространство с въведено скалярно произведение).

Нека A е афинно пространство, V е евклидово пространство. Тогава ако на всеки две точки от A сме съпоставили вектор от евклидовото пространство V , вместо от векторно пространство казваме, че A е **точково евклидово пространство**.

В евклидовото пространство можем да дефинираме ъгъл между два ненулеви вектора и дължина на вектор; именно:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Разстоянието между две точки A и B се дефинира като дължината на вектора, чийто представител е насочената отсечка AB .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

За да е дефиниран правилно ъгъла между два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$ трябва да е в интервала $(-1, 1)$;

Нека $x \in \mathbb{R}$ и $\vec{c}$ е вектор от V , такъв че $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + \vec{b}$; повдигаме на квадрат двете страни:

$$\vec{c}^2 = (x \cdot \vec{a} + \vec{b})^2 \Leftrightarrow \vec{c}^2 = x^2 \cdot \vec{a}^2 + 2x \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

тъй като лявата част е ≥ 0 за всеки вектор $\vec{c} \Rightarrow$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ дясната част е ≥ 0 , но $\vec{a}^2 > 0 \Rightarrow$ дискриминантата $D = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| - \text{ъгълът е коректно дефиниран}$$

Горните дефиниции позволяват да дефинираме ортогоналност на два ненулеви вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални ($\vec{a} \perp \vec{b}$), ако косинусът на ъгъла между тях е 0

Нека е дадена векторна база $K = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$. Базата K е **ортонормирана**, ако са изпълнени следните две условия:

- $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ за всяко $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$)
- $|\vec{e}_i| = 1$ за всяко i ($1 \leq i \leq n$)

По същия начин се дефинира ортономирана координатна система $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$.

Координатно представяне на скалярно произведение

Нека имаме векторна база $K = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$.

Дадени са два вектора $a (a_1, a_2, a_3)$ и $b (b_1, b_2, b_3)$;

Тогава:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 b_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3$$

Ако K е ортонормирана имаме:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2};$$

Ако $M (m_1, m_2, m_3)$ и $N (n_1, n_2, n_3)$ са две точки при фиксирана ортонормирана координатна система $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$, тогава:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2}$$

Нека K е ортонормирана координатна система $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$;

Даден е вектор $a (a_1, a_2, a_3)$; Тогава:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad | \cdot \vec{e}_1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a_1$$

Вижда се, че i -тата координата на един вектор a е скалярното му произведение с $\vec{e}_i$.

Ако $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ е единичен вектор, тогава $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

Освен това:

$$a_1 = |\vec{a}| |\vec{e}_1| \cos(\vec{a}, \vec{e}_1) = \cos(\vec{a}, \vec{e}_1);$$

$$a_2 = |\vec{a}| |\vec{e}_2| \cos(\vec{a}, \vec{e}_2) = \cos(\vec{a}, \vec{e}_2);$$

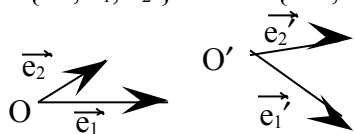
$$a_3 = |\vec{a}| |\vec{e}_3| \cos(\vec{a}, \vec{e}_3) = \cos(\vec{a}, \vec{e}_3);$$

➔ координатите на a са косинусите на ъглите, които a сключва с трите вектора от базата; наричат се **директорни косинуси**.

Смяна на координатна система

Нека в равнината имаме две фиксирани координатни системи:

$$K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} \text{ и } K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2' \}$$



Фиксираме вектор $\vec{p}$ в равнината. Спрямо двете координатни системи $\vec{p}$ има координати:

$$\vec{p}(p_1, p_2) = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \vec{p}(p_1', p_2') = p_1' \cdot \vec{e}_1' + p_2' \cdot \vec{e}_2'$$

$$\begin{aligned} \text{Нека } \vec{e}_1' &= \alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{21} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' &= \alpha_{12} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Тогава:

$$p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 = p_1' (\alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{21} \cdot \vec{e}_2) + p_2' (\alpha_{12} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2)$$

Тъй като $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ са линейно независими $\Rightarrow$

$$p_1 = p_1' \cdot \alpha_{11} + p_2' \cdot \alpha_{21}$$

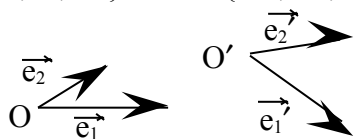
$$p_2 = p_1' \cdot \alpha_{12} + p_2' \cdot \alpha_{22}$$

Матрицата (α_{ij}) се нарича матрица на прехода от K в K' ;

23 октомври

Нека имаме точка M и две фиксирани координатни системи

$$K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} \text{ и } K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2' \};$$



Спрямо K - M има координати x, y , т.е. фиксиран е радиус-векторът $\vec{OM}(x, y)$;

Спрямо K' - M има координати x', y' , т.е. фиксиран е радиус-векторът $\vec{O'M}(x', y')$;

Нека спрямо K точката O' има координати (x_0, y_0) ; т.е. нека фиксираме векторът $\vec{OO'}(x_0, y_0)$;

Тогава спрямо K :

$$\vec{O'M} = \vec{O'O} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OO'} = (x - x_0, y - y_0);$$

Ако $C = (\alpha_{ij})$ е матрица на прехода от K в K' , тогава:

$$x = x_0 + \alpha_{11}.x' + \alpha_{12}.y'$$

$$y = y_0 + \alpha_{21}.x' + \alpha_{22}.y'$$

Смяна на ортонормирани координатни системи

Нека са дадени две ортонормирани бази $K \{ e_1, e_2 \}$ и $K' \{ e'_1, e'_2 \}$; $\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}'_1$ $\vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}'_2$

Ако $C = (\alpha_{ij})$ е матрицата на прехода от K в K' , тогава имаме:

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}.\vec{e}_1 + \alpha_{21}.\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = \alpha_{12}.\vec{e}_1 + \alpha_{22}.\vec{e}_2$$

Ако повдигнем на квадрат получаваме:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1 \quad (1)$$

$$\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1 \quad (2)$$

Ако умножим скалярно e'_1 и e'_2 получаваме:

$$\alpha_{11}.\alpha_{12} + \alpha_{21}.\alpha_{22} = 0 \quad (3)$$

От (1) $\Rightarrow$ можем да изберем ъгъл α , такъв че $\alpha_{11} = \cos\alpha$, $\alpha_{21} = \sin\alpha$;

От (2) $\Rightarrow$ можем да изберем ъгъл β , такъв че $\alpha_{12} = \sin\beta$, $\alpha_{22} = \cos\beta$;

Като използваме (3) получаваме, че $\alpha + \beta = k.\pi$; тогава:

$$\alpha_{12} = -\epsilon.\sin\alpha, \quad \alpha_{22} = \epsilon.\cos\alpha \quad (\epsilon = \pm 1);$$

Матрицата на прехода C е **ортогонална** (удоволетворява (1), (2) и (3), освен това $\det C = \epsilon = \pm 1$);

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\epsilon.\sin\alpha \\ \sin\alpha & \epsilon.\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ориентация в равнината

Нека са дадени две векторни бази $K \{ e_1, e_2 \}$ и $K' \{ e'_1, e'_2 \}$; матрицата на прехода от K в K' е $C = (\alpha_{ij})$; освен това $\det C \neq 0$

Казваме, че K и K' са **еднакво ориентирани** тогава и само тогава, когато $\det C > 0$;

Казваме, че K и K' са **противоположно ориентирани** тогава и само тогава, когато $\det C < 0$;

Проверка дали релацията “еднакво ориентирани” е релация на еквивалентност:

Нека $K' \equiv K$; Тогава матрицата на прехода C е:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det C = 1 > 0; \text{ т.е. всяка база е еднакво ориентирана със себе си (рефлексивност);}$$

Лесно се доказва свойството симетричност (ако K е еднакво ориентирана с K' , то K' е еднакво ориентирана с K – получава се, че матрицата на прехода от K' в K има детерминанта $1/\det C$)

Нека сега имаме три координатни системи K, K', K'' ; матрицата на прехода от K в K' е C ; матрицата на прехода от K' в K'' е C_1 ; матрицата на прехода от K в K'' е C_2 ; тогава:

$C_2 = C.C_1$ и $\det C_2 = \det C \cdot \det C_1$; ако $\det C$ и $\det C_1$ са положителни, тогава $\det C_2$ също е положително (транзитивност);

Нека $K' = \{ \vec{e}_2, \vec{e}_1 \}$; тогава:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det C = -1 < 0; \text{ т.е. съществува противоположно ориентирана база на } K.$$

Доказаното по-горе ни позволява да фиксираме база K в равнината и всички останали бази да ги разделим на два класа: еднакво ориентирани с K и противоположно ориентирани с K ; тези два класа наричаме **посоки на въртене в равнината**.

Насочен ъгъл – нека е даден ъгъл с начало т. O и два лъча $\vec{p}$ и $\vec{q}$; казваме, че ъгълът е насочен (ориентиран), ако единият лъч ($\vec{p}$) е избран за първи, а другият ($\vec{q}$) е избран за втори;

Смяна на координатна система в пространството

Дадени са две координатни системи:

$$K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \} \text{ и } K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3' \}; \vec{e}_i \rightarrow$$

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}.\vec{e}_1 + \alpha_{21}.\vec{e}_2 + \alpha_{31}.\vec{e}_3 \quad \rightarrow$$

$$\vec{e}_2' = \alpha_{12}.\vec{e}_1 + \alpha_{22}.\vec{e}_2 + \alpha_{32}.\vec{e}_3 \quad \rightarrow$$

$$\vec{e}_3' = \alpha_{13}.\vec{e}_1 + \alpha_{23}.\vec{e}_2 + \alpha_{33}.\vec{e}_3 \quad \rightarrow$$

Освен това т. O' има координати (x_0, y_0, z_0) спрямо K .

Взимаме един вектор $\vec{p}$, който има координати (p_1, p_2, p_3) спрямо K и (p_1', p_2', p_3') спрямо K' . Тогава:

$$p_1 = \alpha_{11}.p_1' + \alpha_{12}.p_2' + \alpha_{13}.p_3'$$

$$p_2 = \alpha_{21}.p_1' + \alpha_{22}.p_2' + \alpha_{23}.p_3'$$

$$p_3 = \alpha_{31}.p_1' + \alpha_{32}.p_2' + \alpha_{33}.p_3'$$

Матрицата $C = (\alpha_{ij})$ е матрица на прехода; $\det C \neq 0$, тъй като базисните вектори на K са линейно независими;

Нека имаме точка M с координати x, y, z спрямо K и x', y', z' спрямо K' ; тогава радиус-векторът $O'M$ има координати $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ спрямо K . Получаваме:

$$x = x_0 + \alpha_{11}.x' + \alpha_{12}.y' + \alpha_{13}.z'$$

$$y = y_0 + \alpha_{21}.x' + \alpha_{22}.y' + \alpha_{23}.z'$$

$$z = z_0 + \alpha_{31}.x' + \alpha_{32}.y' + \alpha_{33}.z'$$

Ориентация в пространството

Нека са дадени две векторни бази $K \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ и $K' \{ \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \}$; матрицата на прехода от K в K' е $C = (\alpha_{ij})$; освен това $\det C \neq 0$

Казваме, че K и K' са **еднакво ориентирани** тогава и само тогава, когато $\det C > 0$;

Казваме, че K и K' са **противоположно ориентирани** тогава и само тогава, когато $\det C < 0$;

Проверка дали релацията “еднакво ориентирани” е релация на еквивалентност:

Нека $K' \equiv K$; Тогава матрицата на прехода C е:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det C = 1 > 0; \text{ т.е. всяка база е еднакво ориентирана със себе си (рефлексивност);}$$

Лесно се доказва свойството симетричност (ако K е еднакво ориентирана с K' , то K' е еднакво ориентирана с K – получава се, че матрицата на прехода от K' в K има детерминанта $1/\det C$)

Нека сега имаме три координатни системи K, K', K'' ; матрицата на прехода от K в K' е C ; матрицата на прехода от K' в K'' е C_1 ; матрицата на прехода от K в K'' е C_2 ; тогава:

$C_2 = C.C_1$ и $\det C_2 = \det C.\det C_1$; ако $\det C$ и $\det C_1$ са положителни, тогава $\det C_2$ също е положително (транзитивност);

Нека $K' = \{ \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \}$; тогава:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det C = -1 < 0; \text{ т.е. съществува противоположно ориентирана база на } K.$$

Доказаното по-горе ни позволява да фиксираме база K в пространството и всички останали бази да ги разделим на два класа: еднакво ориентирани с K и противоположно ориентирани с K ; тези два класа наричаме **витлови посоки в пространството**; те са положителни или отрицателни спрямо фиксирана база

Векторно и смесено произведение на вектори в ориентирано тримерно евклидово пространство

Тримерно евклидово пространство в което е фиксирана координатна система и определената от нея витлова посока е взета за положителна се нарича **ориентирано тримерно евклидово пространство**.

Векторно произведение на два вектора

Нека са дадени два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тяхното векторно произведение е вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, такъв че:

- $\vec{c} = \vec{0}$, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни; това включва и случая, когато единият от тях или и двата са нулеви
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
- $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
- $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^+$, т.е. ако вземем база с тези три вектора (те са линейно независими) тя има положителна витлова посока

Смесено произведение на три вектора

Нека са дадени три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогава тяхното смесено произведение е число $a \cdot b \cdot c = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

25 октомври – семинарни занятия

Нека е дадена произволна афинна координатна система. Тогава:

- два вектора $\vec{a} (a_1, a_2)$ и $\vec{b} (b_1, b_2)$ са колинеарни, ако $a_1/b_1 = a_2/b_2 = k \Leftrightarrow a_1 a_2$
- три вектора $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} (c_1, c_2, c_3)$ са компланарни, ако $a_1 a_2 a_3$
- три точки $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$ и $C (x_3, y_3)$ лежат на една права, ако $x_1 y_1 1$
- четири точки $A (x_1, y_1, z_1)$, $B (x_2, y_2, z_2)$, $C (x_3, y_3, z_3)$ и $D (x_4, y_4, z_4)$ лежат в една равнина, ако $x_1 y_1 z_1 1$

Нека са дадени две прави, всяка от тях е определена с две точки A_i и B_i ($i = 1, 2$)
Взаимно положение на две прави в равнината:

1. Проверяваме дали A_1, B_1, A_2, B_2 са компланарни. Ако не са, тогава правите са кръстосани – към 4., иначе - към 2.;
2. Проверяваме дали векторите $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{A_2B_2}$ са линейно зависими. Ако не са, тогава правите се пресичат – към 4., иначе към 3.;
3. Проверяваме дали A_1B_1 и A_1B_2 са линейно зависими. Ако не са, тогава правите са успоредни, иначе правите съвпадат; към 4.
4. Край.

Взаимно положение на права (определена с две точки A, B) и равнина (определена с три точки C, D, E) в пространството:

1. Определяме дали CD и CE са линейно зависими, ако са – C, D, E са колинеарни и не образуват равнина – към 4., иначе – към 2.;
2. Определяме дали AB, CD, CE са линейно независими, ако са – правата AB пробоща равнината (CDE) – към 4., иначе - към 3.;

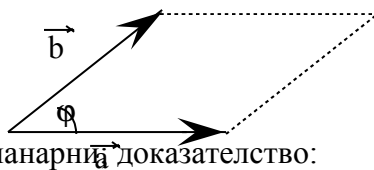
3. Определяме дали AC, AD, AE са компланарни, ако са – правата AB лежи в равнината (CDE), ако не са – правата AB е успоредна на равнината (CDE); към 4.;
4. Край.

30 октомври

Свойства на смесено и векторно произведение

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{a,b}$ – абсолютната стойност на векторното произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора; доказателство – следва непосредствено от дефиницията на векторно произведение и формулата за лице на успоредник – $S = a \cdot b \cdot \sin \varphi$;

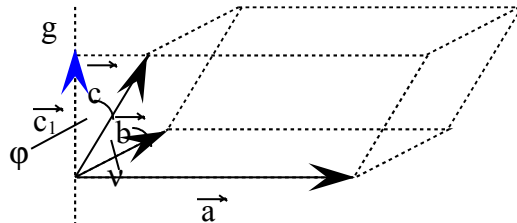
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарни; доказателство:



$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, тогава векторното им произведение е нулевият вектор и твърдението е доказано;

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими; тогава равнината $(\vec{a}, \vec{b})$ е перпендикулярна на вектора $\vec{a} \times \vec{b}$; ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни $\Rightarrow \vec{c} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; ако $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \vec{c} \in (\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни;

3. $|\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}| = V_{a,b,c}$ – абсолютната стойност на смесеното произведение на три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ е равна на обема на паралелепипеда, образуван от трите вектора; доказателство:



Нека c_1 е проекцията на вектор $\vec{c}$ върху ос, еднакво ориентирана с вектора $\vec{a} \times \vec{b}$; тогава c_1 се явява височина на паралелепипеда; по паралелната дефиниция за скалярно произведение получаваме:

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |c_1| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \cdot |c_1| = S \cdot h = V$; тук c_1 означаваме алгебричната мярка на вектор $\vec{c}_1$ върху оста g , която е еднакво ориентирана с $\vec{a} \times \vec{b}$;

от това свойство $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \epsilon V_{a,b,c}$, където $\epsilon = \pm 1$; ако ъгъл φ е остър, тогава $\epsilon = 1$, ако ъгъл φ е тъп, тогава $\epsilon = -1$ ($\vec{c}$ лежи в различни полупространства относно $\vec{a} \times \vec{b}$); ако $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^+$, тогава $\epsilon = 1$, ако $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^-$, тогава $\epsilon = -1$;

4. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{c} \times \vec{b}$; доказателство: ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни, тогава твърдението е тривиално (шестте смесени произведения са нули);

ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не са компланарни $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са линейно независими $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуват база; $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^+$;

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \rightarrow \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$; нека матрицата на прехода е C ;

тогава $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det C = -1 \Rightarrow \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\} \in S^-$;

$|\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c}| = V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c}$; аналогично и за останалите;

5. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – **антикомутативност на векторното произведение**; доказателство: от свойство 4 – $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c} = 0 \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$; последното твърдение е вярно за всеки вектор $\vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

6. $\lambda \vec{a} \times \mu \vec{b} = \lambda \mu \vec{a} \times \vec{b}$; доказателство: ще докажем, че тези два вектора имат равни дължини и еднакви посоки: ако λ или $\mu = 0$ или $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, твърдението е тривиално (и двете страни са нулевия вектор);

$|\lambda \vec{a} \times \mu \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| \cdot |\mu \vec{b}| \cdot |\sin \angle_{\vec{a}, \mu \vec{b}}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \angle_{\vec{a}, \vec{b}}|$, тъй като ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\mu \vec{b}$ е равен на $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ или на $180 - \angle(\vec{a}, \vec{b})$ в зависимост от знаците на λ и $\mu \Rightarrow$ синусът на $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ се запазва $\Rightarrow |\lambda \vec{a} \times \mu \vec{b}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$; тъй като $\vec{a}, \mu \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ са компланарни $\Rightarrow \lambda \vec{a} \times \mu \vec{b}$ е колинеарен с $\lambda \mu \vec{a} \times \vec{b}$, тъй като и двата са перпендикулярни на $(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \lambda \vec{a} \times \mu \vec{b} = \pm \lambda \mu (\vec{a} \times \vec{b})$; тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са колинеарни $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ образуват база;

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \rightarrow \{\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}, \lambda \mu (\vec{a} \times \vec{b})\}$; нека матрицата на прехода е C ;

$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \mu \end{pmatrix}$, $\det C = \lambda^2 \mu^2 > 0 \Rightarrow \{\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}, \lambda \mu (\vec{a} \times \vec{b})\} \in S^+$

, но $\{\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}, \lambda \vec{a} \times \mu \vec{b}\} \in S^+ \Rightarrow \lambda \vec{a} \times \mu \vec{b} = \lambda \mu (\vec{a} \times \vec{b})$

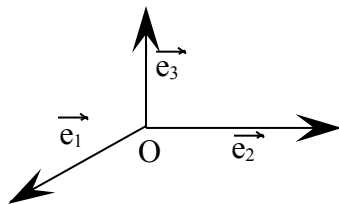
7. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ – доказателство: чрез свойствата на смесено произведение на вектори (умножаваме и двете страни скалярно по вектор $\vec{c}$);

8. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ (Формула на Лагранж); доказателство:

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle_{\vec{a}, \vec{b}}))^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\angle_{\vec{a}, \vec{b}})) = a^2 \cdot b^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle_{\vec{a}, \vec{b}}))^2 = a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$;

Координатно представяне на векторно и смесено произведение

Нека $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ е ортонормирана координатна система; чрез нея е зададена и положителна витлова посока;



Нека $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{p} \Rightarrow |\vec{p}| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
 $\vec{p} \perp (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_3 \perp (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Rightarrow \vec{p}$ и $\vec{e}_3$ са колинеарни, но $|\vec{p}| = |\vec{e}_3| \Rightarrow \vec{p} = \pm \vec{e}_3$; от друга страна $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \} \in \vec{S}^+$, тъй като те задават витловата посока, $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{p} \} \in \vec{S}^+$ по дефиниция $\Rightarrow \vec{p} = \vec{e}_3$;
 получаваме: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2$;

Нека са дадени два вектора $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$;
 Имаме: $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3$; $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3$;

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3) \times (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3)$; прилагаме свойствата на векторно произведение:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_3 \cdot b_3 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 + a_1 \cdot b_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \\ &+ a_1 \cdot b_3 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + a_2 \cdot b_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2 \cdot b_3 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + a_3 \cdot b_1 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3 \cdot b_2 \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \\ &= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \vec{e}_1 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \vec{e}_2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \vec{e}_3; \end{aligned}$$

т.е. $\vec{a} \times \vec{b}$ има координати $a_2 a_3 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, a_3 a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, a_1 a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

Нека е даден вектор $\vec{c} (c_1, c_2, c_3)$;

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = c_1 \cdot a_2 a_3 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \cdot a_3 a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \cdot a_1 a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ако K е произволна координатна система имаме:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)$$

Бивектори, тривектори, m-вектори

Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ са вектори, такива че:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = \vec{p} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \perp \vec{p}; \vec{c}, \vec{d} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \text{ са компланарни};$$

ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са колинеарни те образуват база $\{ \vec{a}, \vec{b} \}$;

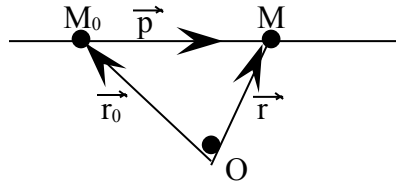
$$\text{Нека } \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}; \vec{d} = \chi \vec{a} + \delta \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{d} = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \times (\chi \vec{a} + \delta \vec{b}) = (\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \chi) \cdot \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \chi = 1;$$

Дефиниция за бивектор: Ако два вектора са колинеарни, техният бивектор е нулевият вектор; всеки две двойки линейно независими вектори, за които детерминантата на матрицата на прехода между базите, които образуват, е равна на 1 образуват **клас бивектор**; аналогично ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ образуват **клас тривектор**; дефиниция за **m-вектор**: всеки две m-торки линейно независими вектори, за които детерминантата на матрицата на прехода между базите, които образуват, е равна на 1 образуват **клас m-вектор**;

6 ноември

Параметрични уравнения на права и равнина

Една права g може да се определи от фиксирана точка M_0 върху нея и ненулев вектор $\vec{p}$, колинеарен с правата.



Произволна точка M лежи върху правата тогава и само тогава, когато вектор $\vec{M_0M}$ е колинеарен с $\vec{p}$;

$$\vec{M_0M} \parallel \vec{p} \Leftrightarrow \vec{M_0M} = \lambda \cdot \vec{p} \Rightarrow \vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0} = \lambda \vec{p} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM_0} + \lambda \vec{p}$$

получаваме: $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{p}$ – **векторно параметрично уравнение на права**;

Нека фиксираме $K \{ O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \}$;

Спрямо K : $M(x, y, z)$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\vec{p}(a, b, c)$; тогава уравнението на правата приема следния вид:

$$g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot a \\ y = y_0 + \lambda \cdot b \\ z = z_0 + \lambda \cdot c \end{cases}$$

λ се мени в $(-\infty, +\infty)$; това уравнение се нарича **координатно (скалярно) параметрично уравнение на права**;

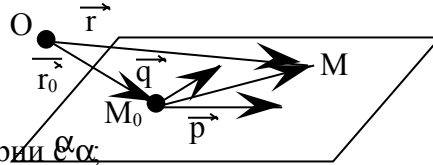
Ако g е ос, $\lambda = \overline{M_0M} / p$;

Нека имаме три точки A, B, M, които лежат на една права; числото $\lambda = MA / MB$ се нарича **просто отношение** на трите точки и се бележи $\lambda = (ABM)$; λ е дефинирано, когато M не съвпада с B; $\lambda < 0$, когато точката M е между A и B и $\lambda > 0$, когато точката M е външна за отсечката AB. Ако имаме въведена афинна координатна система и M (x_m, y_m, z_m), A (x_a, y_a, z_a), B (x_b, y_b, z_b), тогава:

$$\lambda = (ABM) = (x_m - x_a) / (x_m - x_b) = (y_m - y_a) / (y_m - y_b) = (z_m - z_a) / (z_m - z_b);$$

Нека α е равнина; $M_0 \in \alpha$

$\vec{p}$ и $\vec{q}$ – ненулеви, неколинеарни, компланарни $\in \alpha$



Произволна точка M лежи в равнината тогава и само тогава, когато вектор $\vec{M_0M}$ може да се представи като $\lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q}$;

$$\vec{M} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M} = \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q} \Rightarrow \vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0} = \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM_0} + \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q}$$

получаваме: $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{q}$ – **векторно параметрично уравнение на равнина**;

Нека фиксираме K { O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ };

Спрямо K: M (x, y, z), $M_0 (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{p} (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q} (q_1, q_2, q_3)$; тогава уравнението на равнината приема следния вид:

$$\alpha \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot q_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot p_2 + \mu \cdot q_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot p_3 + \mu \cdot q_3 \end{cases}$$

λ, μ се менят в $(-\infty, +\infty)$; това уравнение се нарича **координатно (скалярно) параметрично уравнение на равнина**;

Общо уравнение на права в равнината

Нека е фиксирана K { O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ };



Спрямо K: $M_0 (x_0, y_0)$, M (x, y), $\vec{p} (p_1, p_2)$; тогава: $\vec{M_0M} (x - x_0, y - y_0)$;

$$M \in g \Leftrightarrow \vec{MM_0} \text{ колинеарен с } \vec{p} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_2 \cdot (x - x_0) - p_1 \cdot (y - y_0) = 0 \Leftrightarrow p_2 \cdot x - p_1 \cdot y - p_2 \cdot x_0 + p_1 \cdot y_0 = 0$$

Означаваме $A = p_2$, $B = -p_1$, $C = p_1 \cdot y_0 - p_2 \cdot x_0$; тогава
 $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$;

$M(x, y) \in g \Leftrightarrow A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ (при въведените означения);

$A, B \neq (0, 0)$, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$;

Правата g се определя с уравнението:

$g: A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ – **общо уравнение на права в равнината**;

Твърдение: Всяко уравнение от вида $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, където

$A^2 + B^2 \neq 0$ е уравнение на някаква права в равнината;

Доказателство: Нека за определеност $B \neq 0$; тогава $y = -A/B \cdot x - C/B$;

Фиксираме точка $M_0(x_0, y_0)$, такава, че $y_0 = -A/B \cdot x_0 - C/B$;

Фиксираме вектор $p(-B, A)$;

Тогава $\{M_0, \vec{p}\}$ определят някаква права g ;

Нека $M(x, y)$ е произволна точка, тя лежи върху правата g точно тогава, когато векторите $\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ и $p(-B, A)$ са колинеарни, т.е. $(x - x_0) \cdot A - (y - y_0) \cdot (-B) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \downarrow -B \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow A \end{array} \\ A \cdot x + B \cdot y - A \cdot x_0 - B \cdot y_0 = A \cdot x + B \cdot y - B(y_0 + A/B \cdot x_0) = \\ A \cdot x + B \cdot y - B(-A/B \cdot x_0 - C/B + A/B \cdot x_0) = A \cdot x + B \cdot y + C = 0; \text{ т.е.} \end{array} \end{array}$$

правата $\{M_0, \vec{p}\}$ има уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C$;

Всяка права има безброй много уравнения;



Например правата g може да бъде определена от $\{M_0, \vec{p}\}$ или от $\{M_1, \vec{q}\}$ или от безброй много други двойки $\{ \text{точка от правата; вектор, колинеарен с правата} \}$;

Векторите $p(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ и $q(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ са колинеарни $\Rightarrow$ съществува $\lambda \neq 0$, такава че $q_1 = \lambda \cdot p_1$, $q_2 = \lambda \cdot p_2$;

Нека уравнението на правата $g \{M_0, p\}$ е: $\vec{p}$
 $A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \Rightarrow p_2 = A, p_1 = -B$;

Нека уравнението на правата $g \{M_1, q\}$ е: $\vec{q}$
 $A' \cdot x + B' \cdot y + C' = 0 \Rightarrow q_2 = A', q_1 = -B'$;

$$A' = q_2 = \lambda \cdot p_2 = \lambda \cdot A; B' = -q_1 = -\lambda \cdot p_1 = \lambda \cdot B;$$

$$M_0 \in g \Rightarrow \lambda \cdot A \cdot x_0 + \lambda \cdot B \cdot y_0 + C' = 0 \Rightarrow C' = -\lambda \cdot (A \cdot x_0 + B \cdot y_0) = -\lambda \cdot (-C) = \lambda \cdot C;$$

$$\{M_1, \vec{q}\} : \lambda \cdot A \cdot x + \lambda \cdot B \cdot y + \lambda \cdot C = 0;$$

Ако имаме една права g с уравнение $A.x + B.y + C = 0 \rightarrow$ уравнението $\lambda A.x + \lambda B.y + \lambda C = 0$ е уравнение на същата права ($\lambda \neq 0$);

Теорема: Спрямо произволна координатна система в равнината $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ всяка права има уравнение $A.x + B.y + C = 0$, където $(A, B) \neq (0, 0)$; векторът $p(-B, A)$ е колинеарен с правата; уравненията $A.x + B.y + C = 0$ и $A_1.x + B_1.y + C_1 = 0$ са уравнения на една и съща права тогава и само тогава, когато $A_1 = \lambda A, B_1 = \lambda B, C_1 = \lambda C$, където $\lambda \neq 0$;

Уравнение на права през две точки

Нека са дадени $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$; търсим уравнението на единствената права g през точките M_1 и M_2 ;

$M_1, M_2 \in g \rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}$ е колинеарен с $g \rightarrow g$ е определена от: $\{ M_1, \overrightarrow{M_1M_2} \}$;
тогава уравнението на g е:

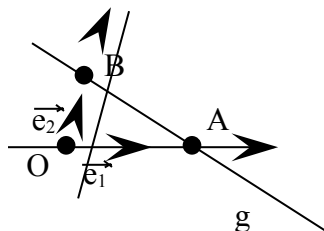
$$g: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$g: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Отрезково уравнение на права

Нека е дадена правата g , която не минава през началото O на координатната система; тогава g пресича координатните оси в точките $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ ($a, b \neq 0$); a, b се наричат отрезки;



$$g: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x/a + y/b = 1$$

Декартово уравнение на права

Нека g не е колинеарна с e_2 (не $\vec{e}$ успоредна на Oy);
 $g: A.x + B.y + C = 0$;

$\vec{p}(-B, A)$ е колинеарен с $\vec{g} \Rightarrow \vec{p}(-B, A)$ и $\vec{e}_2(0, 1)$ не са колинеарни
 $\Rightarrow \begin{vmatrix} -B & A \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. $B \neq 0$;

g не е успоредна на $Oy \Leftrightarrow B \neq 0$;

Нека координатната система K е ортонормирана.

$y = -A/B \cdot x - C/B$ ($B \neq 0$); означаваме $k = -A/B$, $m = -C/B$;

$y = k \cdot x + m$ – **декартово уравнение на права**

Векторът $\vec{p}(\vec{1}, k)$ е колинеарен на $\vec{g} \Rightarrow \vec{p}_0(1/\sqrt{1+k^2}, k/\sqrt{1+k^2})$ е колинеарен с $\vec{g}$;
освен това $|\vec{p}_0| = 1 \Rightarrow$ съществува ъгъл φ , такъв че:
 $\vec{p}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$, където φ е ъгълът между векторите $\vec{p}$ и $\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{k} = \vec{tg}\varphi$;
 k се нарича **ъглов коефициент** на правата;

Нормално уравнение на права

Нека $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е ортонормирана координатна система;
нека g е произволна права; $g: A \cdot x + B \cdot y + C = 0$;

Известно е, че векторът $\vec{p}(-B, A)$ е колинеарен с $\vec{g}$;

Да разгледаме векторът $\vec{n}(A, B)$; $\vec{p} \cdot \vec{n} = -A \cdot B + A \cdot B = 0$; $\vec{p}, \vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{g} \Rightarrow \vec{n}_0(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}) \perp \vec{g}$; освен това $|\vec{n}_0| = 1 \Rightarrow$
съществува ъгъл φ_0 , такъв че: $\vec{n}_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$;

Умножаваме уравнението на g по $\lambda = 1/\sqrt{A^2+B^2} \neq 0$, получаваме:

$$g: \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow$

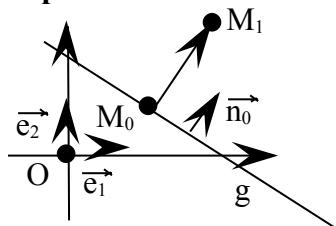
$$g: \cos\varphi_0 \cdot x + \sin\varphi_0 \cdot y + C' = 0 \text{ – нормално уравнение на права;}$$

всяка права има две нормални уравнения:

$$g: \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$$g: -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y - \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Разстояние от точка до права



K – ортонормирана;

Нека е дадена права g с нормално уравнение:

$g: \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y + c = 0$; фиксирана е точка $M_1 (x_1, y_1) \notin g$;

търсим колко е разстоянието от точка M_1 до правата g ;

Нека $M_0 (x_0, y_0)$ е петата на перпендикуляра спуснат от M_1 към g ;

$\overrightarrow{M_0M_1} \perp g, n_0 \perp g \Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1}$ и n_0 са колинеарни $\Rightarrow$ съществува δ :

$\overrightarrow{M_0M_1} = \delta \cdot n_0 \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta| \cdot |n_0| \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta|$, т.е. търсеното разстояние е равно на $|\delta|$;

$\overrightarrow{M_0M_1} (x_1 - x_0, y_1 - y_0), n_0 (\cos\varphi, \sin\varphi) \Rightarrow x_1 - x_0 = \delta \cdot \cos\varphi, y_1 - y_0 = \delta \cdot \sin\varphi$;

$\Rightarrow x_0 = x_1 - \delta \cdot \cos\varphi, y_0 = y_1 - \delta \cdot \sin\varphi$;

$M_0 \in g \Rightarrow \cos\varphi \cdot x_0 + \sin\varphi \cdot y_0 + c = 0 \Rightarrow$

$\cos\varphi \cdot (x_1 - \delta \cdot \cos\varphi) + \sin\varphi \cdot (y_1 - \delta \cdot \sin\varphi) + c = 0 \Rightarrow$

$\cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1 + c = \delta$, т.е. разстоянието между M_1 и g е

$|\delta| = |\cos\varphi \cdot x_1 + \sin\varphi \cdot y_1 + c|$;

Ако g е зададена с уравнение: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$

$\Rightarrow |\delta| = |A/\sqrt{A^2 + B^2} \cdot x + B/\sqrt{A^2 + B^2} \cdot y + C/\sqrt{A^2 + B^2}|$

δ се нарича **ориентирано разстояние** между M_1 и g ;

$\delta \geq 0$, когато $\overrightarrow{M_0M_1}$ е еднопосочен с n_0 и $\delta < 0$, когато

$\overrightarrow{M_0M_1}$ е разнопосочен с n_0 ; в зависимост от знака на δ , можем да определяме в коя от двете полуравнини, определени от правата лежи дадена точка;

8 ноември – семинарни занятия

Нека $ABCD$ е произволен тетраедър; тогава $V_{ABCD} = 1/6 |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|$;

Двойно векторно произведение

$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$; получаваме вектор, който е линейна комбинация на векторите в скобите;

Твърдение: $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \begin{vmatrix} \overrightarrow{d} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} & \overrightarrow{d} \end{vmatrix}$

Доказателство: чрез използване на горната формула;

Следствие:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \begin{vmatrix} \overrightarrow{b} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \end{vmatrix}$$

Детерминантата, която стои отдясно в равенството се нарича **детерминанта на Грам** за векторите $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$; детерминанта на Грам от ред n се дефинира върху n

вектора; първият ред е скалярните произведения на първия вектор с всичките n , вторият е ред е скалярните произведения на втория вектор с всичките n и т.н.;

Твърдение: $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \cdot \vec{d} = (\vec{b} \vec{c} \vec{d}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \vec{a} \vec{d}) \cdot \vec{b} + (\vec{a} \vec{b} \vec{d}) \cdot \vec{c}$;

Доказателство: Разглеждаме $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ и прилагаме формулата за двойно векторно произведение;

Твърдение: $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \cdot (\vec{a}_1 \vec{b}_1 \vec{c}_1) = \vec{b} \cdot \vec{a}_1 \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a}_1 & \vec{a} \cdot \vec{b}_1 & \vec{a} \cdot \vec{c}_1 \\ \vec{b} \cdot \vec{a}_1 & \vec{b} \cdot \vec{b}_1 & \vec{b} \cdot \vec{c}_1 \\ \vec{c} \cdot \vec{a}_1 & \vec{c} \cdot \vec{b}_1 & \vec{c} \cdot \vec{c}_1 \end{vmatrix}$

Доказателство: Развиваме второто смесено произведение; използваме и двете твърдения по-горе:

Следствие: $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \cdot (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$

Квадратът на смесеното произведение на три вектора е равно на стойността на детерминантата на Грам за трите вектора (взети в същия ред);

13 ноември

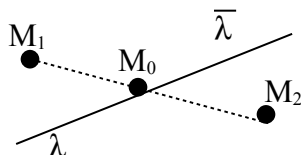
Полуравнини

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\vec{x} \rightarrow$

Означение: ще означаваме $l(x, y) = A.x + B.y + C$;
ако имаме точка $M_0(x_0, y_0)$, $l(M_0) = A.x_0 + B.y_0 + C$;

Теорема: Нека са дадени права $g: l(x, y) = A.x + B.y + C = 0$ и две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, които не лежат на правата; тогава M_1 и M_2 лежат в различни полуравнини относно правата g , тогава и само тогава, когато: $l(M_1) \cdot l(M_2) < 0$;

Доказателство:



M_1 и M_2 лежат в различни полуравнини тогава и само тогава, когато отсечката M_1M_2 пресича правата g ;

Нека $M_1M_2 \cap g = T$. $M_0 \rightarrow M_0M_1$ е колинеарен с $M_0M_2 \rightarrow M_0M_2 = \mu \cdot M_0M_1$,
но M_0 е между M_1 и $M_2 \rightarrow \mu < 0$;

$M_0(x_0, y_0) \rightarrow M_0M_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, $M_0M_2(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$

$\rightarrow x_2 - x_0 = \mu \cdot (x_1 - x_0)$; $y_2 - y_0 = \mu \cdot (y_1 - y_0) \rightarrow$

$x_0 = (x_2 - \mu \cdot x_1) / (1 - \mu)$; $y_0 = (y_2 - \mu \cdot y_1) / (1 - \mu)$;

$$\begin{aligned}
 M_0 \in g &\rightarrow A.x_0 + B.y_0 + C = 0 \rightarrow \\
 A.(x_2 - \mu.x_1)/(1 - \mu) + B.(y_2 - \mu.y_1)/(1 - \mu) &= 0 \rightarrow \\
 (A.x_2 + B.y_2 + C) - \mu.(A.x_1 + B.y_1 + C) &= 0 \rightarrow l(M_2) = \mu.l(M_1) \\
 \rightarrow \mu < 0 &\Leftrightarrow l(M_1).l(M_2) < 0 \text{ и теоремата е доказана;}
 \end{aligned}$$

Следствие:

$$g : l(x, y) = A.x + B.y + C = 0;$$

g разделя равнината на две полуравнини λ и $\bar{\lambda}$:

$$\lambda : A.x + B.y + C > 0$$

$$\bar{\lambda} : A.x + B.y + C < 0$$

Взаимно положение на две прави

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\overrightarrow{x} \rightarrow$

Дадени са две прави

$$g_1 : l_1(x, y) = A_1.x + B_1.y + C_1 = 0$$

$$g_2 : l_2(x, y) = A_2.x + B_2.y + C_2 = 0$$

Известно е, че $p_1(\overrightarrow{-B_1}, A_1)$ е колинеарен с g_1 ,
вектор $p_2(\overrightarrow{-B_2}, A_2)$ е колинеарен с g_2 ;

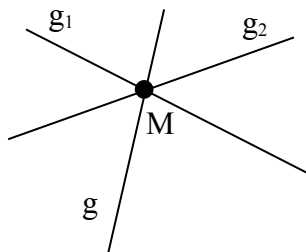
$\rightarrow g_1$ е успоредна на g_2 , тогава и само тогава, когато векторите p_1 и p_2 са колинеарни, т.е. $p_1 = \lambda.p_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{-B_1} = \lambda.\overrightarrow{-B_2}, A_1 = \lambda.A_2$;

ако правите не съвпадат необходимо е $C_1 \neq \lambda.C_2$;

$\rightarrow g_1$ е успоредна на $g_2 \Leftrightarrow A_1 = \lambda.A_2, B_1 = \lambda.B_2, C_1 \neq \lambda.C_2$;

g_1 пресича $g_2 \Leftrightarrow A_1 = \lambda.A_2, B_1 \neq \lambda.B_2$;

Нека g_1 пресича g_2 в точка M ;



Множеството от правите, които минават през точка M се нарича **сноп прави**; точка M се нарича **център** на снопа;

Теорема: Всяка права g от снопа, определен от пресекателните прави g_1 и g_2 има уравнение: $l(x, y) = \alpha.l_1(x, y) + \beta.l_2(x, y) = 0$, където α и β са реални параметри, менят се в $(-\infty, +\infty)$, не са едновременно нули и описват всички прави, които принадлежат на този сноп;

Означение: ще бележим сноп прави с $S_{\alpha\beta} : \alpha.l_1(x, y) + \beta.l_2(x, y) = 0$;

Доказателство:

$$\begin{aligned}
 l(x, y) &= \alpha.(A_1.x + B_1.y + C_1) + \beta.(A_2.x + B_2.y + C_2) = \\
 &(\alpha.A_1 + \beta.A_2).x + (\alpha.B_1 + \beta.B_2).y + \alpha.C_1 + \beta.C_2 = 0
 \end{aligned}$$

това е уравнение на права, точно тогава, когато коефициентите пред x и y не са едновременно нули;

нека допуснем, че това е така, т.е.:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$$

$$\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$$

Тази система е хомогенна, но $(\alpha, \beta) \neq (0, 0) \rightarrow$ тя трябва да има ненулево решение

$\rightarrow A_1 A_2 = 0 \rightarrow g_1$ е успоредна на g_2 - противоречие
 $B_1 B_2$

$\rightarrow$ уравнението е зададено коректно, освен това:

$$l(M) = \alpha l_1(M) + \beta l_2(M) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \quad (\text{т. } M \in g_1, g_2)$$

$\rightarrow l(x, y) = \alpha l_1(x, y) + \beta l_2(x, y) = 0$ е уравнение на права от снопа с център т. M ;

При $\alpha = 0$ правата $g \equiv g_2$, ако $\alpha \neq 0$ можем да разделим на α и да остане само един параметър $\lambda = \beta/\alpha$:

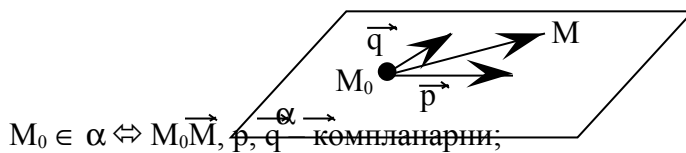
$$g \neq g_2 : l(x, y) = l_1(x, y) + \lambda l_2(x, y);$$

ако g_1 е успоредна на $g_2 \rightarrow$ уравнението $l(x, y) = \alpha l_1(x, y) + \beta l_2(x, y) = 0$ задава уравненията на всички прави, които са успоредни на дадените, когато α и β се менят в $(-\infty, +\infty)$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$;

Общо уравнение на равнина

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$;

α - равнина; точка $M_0 \in \alpha$, $\vec{p}, \vec{q}$ - два неколинеарни вектора, компланарни с α ;



$M_0 \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}$ компланарни;

Нека:

$$\vec{M_0}(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z) \rightarrow \vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0);$$

$$\vec{p}(p_1, p_2, p_3);$$

$$\vec{q}(q_1, q_2, q_3);$$

$$\vec{M_0M}, \vec{p}, \vec{q} \in \alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2) \cdot x + (p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3) \cdot y + (p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1) \cdot z + (- (p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2) \cdot x_0 - (p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3) \cdot y_0 - (p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1) \cdot z_0) = 0;$$

Нека $A = p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2$; $B = p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3$; $C = p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$;

$$D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0;$$

$\rightarrow M \in \alpha \Leftrightarrow A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ - **общо уравнение на равнина**;

необходимо условие е $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$;

нека допуснем, че $A = B = C = 0 \rightarrow$

$$p_2 \cdot q_3 = p_3 \cdot q_2 \rightarrow p_3 = k_1 \cdot q_3, p_2 = k_1 \cdot q_2;$$

$p_1 \cdot q_3 = p_3 \cdot q_1 \Rightarrow p_3 = k_2 \cdot q_3, p_1 = k_2 \cdot q_1;$
 $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1 \Rightarrow p_1 = k_3 \cdot q_1, p_2 = k_3 \cdot q_2;$
 $\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = k \Rightarrow p = k \cdot \vec{q}$ – противоречие ($\vec{p}, \vec{q}$ не са колинеарни)
 $\Rightarrow (A, B, C) \neq (0, 0, 0);$
 $\rho \cdot A \cdot x + \rho \cdot B \cdot y + \rho \cdot C \cdot z + \rho \cdot D = 0$ е уравнение на същата равнина α
 при $\rho \neq 0;$

Нека $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0);$ ще докажем, че съществува равнина α , която има това общо уравнение;

нека за определеност $C \neq 0 \Rightarrow z = -A/C \cdot x - B/C \cdot y - D/C;$

Фиксираме точките:

$M_0 (0, 0, -D/C);$

$M_1 (1, 0, -(A+D)/C) \Rightarrow M_0 \vec{M_1} (1, 0, -A/C);$

$M_2 (0, 1, -(B+D)/C) \Rightarrow M_0 \vec{M_2} (0, 1, -B/C);$

Нека $\alpha \{ M_0, M_0 \vec{M_1}, M_0 \vec{M_2} \}; M_0, M_1, M_2 \in \alpha, M_0 \vec{M_1}$ не е колинеарен с $M_0 \vec{M_2} \Rightarrow \alpha$ е определена;

Нека $M(x, y)$ е произволна точка $\Rightarrow M_0 \vec{M} (x, y, z + D/C);$

$M \in \alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z + D/C \\ 1 & 0 & -A/C \\ 0 & 1 & -B/C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0;$

Теорема: Спрямо фиксирана координатна система в пространството всяка равнина има общо уравнение от вида:

$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, (A, B, C) \neq (0, 0, 0);$

две уравнения от този вид задават една и съща равнина, когато коефициентите им са пропорционални:

$\alpha: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$

$\alpha: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$

$\Leftrightarrow A_1 = \lambda \cdot A_2, B_1 = \lambda \cdot B_2, C_1 = \lambda \cdot C_2, D_1 = \lambda \cdot D_2, \lambda \neq 0;$

Условие за компланарност на вектор и равнина

Нека е даден вектор $p (\lambda, \mu, \nu)$ и равнина $\alpha: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0;$

Фиксираме точка $\underline{M_0}$ върху α , тогава вектор p има единствен представител $M_0 \vec{M_1};$

Нека $M_0 (x_0, y_0, z_0), M_1 (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow M_0 \vec{M_1} (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$ но

$M_0 \vec{M_1} = p \Rightarrow x_1 - x_0 = \lambda, y_1 - y_0 = \mu, z_1 - z_0 = \nu$

$\Rightarrow x_0 = x_1 - \lambda, y_0 = y_1 - \mu, z_0 = z_1 - \nu;$

$M_0 \in \alpha \Rightarrow A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0 \Rightarrow$

$A \cdot x_1 - A \cdot \lambda + B \cdot y_1 - B \cdot \mu + C \cdot z_1 - C \cdot \nu + D = 0 \Rightarrow$

$\underline{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D - (A \cdot \lambda + B \cdot \mu + C \cdot \nu) = 0}$

$\vec{p}$ е компланарен с $\alpha \Leftrightarrow M_1 \in \alpha \Leftrightarrow A \cdot \lambda + B \cdot \mu + C \cdot \nu = 0;$

20 ноември**Взаимно положение на две равнини**

Нека са дадени:

$$\alpha_1 : A_1.x + B_1.y + C_1.z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2.x + B_2.y + C_2.z + D_2 = 0$$

α_1 е успоредна на α_2 , ако за всеки вектор $p(\lambda, \mu, \nu) \rightarrow$

от p е колинеарен с $\alpha_1 \rightarrow p$ е колинеарен с α_2 ;

освен това, ако съществува точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, която принадлежи и на двете равнини $\rightarrow$ те съвпадат, в противен случай те са успоредни;

по-точно системата

$$A_1.\lambda + B_1.\mu + C_1.\nu = 0$$

$$A_2.\lambda + B_2.\mu + C_2.\nu = 0$$

се удовлетворява за всички $\lambda, \mu, \nu \rightarrow A_1 = k.A_2; B_1 = k.B_2; C_1 = k.C_2$;

$$M_0 \in \alpha_1 \rightarrow D_1 = -A_1.x_0 - B_1.y_0 - C_1.z_0;$$

$$M_0 \in \alpha_2 \rightarrow D_2 = -A_2.x_0 - B_2.y_0 - C_2.z_0;$$

$$\rightarrow D_1 = -k.(A_2.x_0 + B_2.y_0 + C_2.z_0) = -k.(-D_2) = k.D_2;$$

α_1 е успоредна на α_2 тогава и само тогава, когато:

$$A_1 = k.A_2; B_1 = k.B_2; C_1 = k.C_2; D_1 \neq k.D_2;$$

α_1 съвпада с α_2 тогава и само тогава, когато:

$$A_1 = k.A_2; B_1 = k.B_2; C_1 = k.C_2; D_1 = k.D_2;$$

Уравнение на равнина през три точки

За да е определена равнината, трите точки трябва да не лежат на една права.

Нека са дадени $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$;

$M_1, M_2, M_3 \notin 1$ права;

тогава $\alpha = \{ M_1, M_1M_2, M_1M_3 \}$ е определена, защото векторите M_1M_2 и

M_1M_3 не са колинеарни; тогава по горната схема получаваме:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

Нормално уравнение на равнина

Фиксирана е ортонормирана координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$

Нека α е равнина;

$\alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0$; $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$;

Нека $\vec{p}(\lambda, \mu, \nu)$ е ненулев вектор, колинеарен с α

$\Rightarrow A.\lambda + B.\mu + C.\nu = 0$;

ако фиксираме векторът $\vec{N}(A, B, C)$, $\vec{N} \neq \vec{0}$;

$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{N} \perp \alpha$, тъй като $\vec{p}$ е ненулев вектор и е колинеарен с α ;

Ако координатната система е ортонормирана, коефициентите

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ са координати на вектор, който е перпендикулярен на

равнината; той се нарича **нормален вектор** на α ;

Нека $\vec{N}_0 = \vec{N} / |\vec{N}|$, т.е.

$\vec{N}_0 (A / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, B / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, C / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2})$, $|\vec{N}_0| = 1$;

Разглеждаме $\alpha: (A.x + B.y + C.z + D) / \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$; това е уравнение на същата равнина, тъй като сме умножили началното уравнение с ненулево число; то се нарича **нормално уравнение** на равнината α , всяка права има две нормални уравнения;

Разстояние от точка до равнина

Нека равнината α има нормално уравнение:

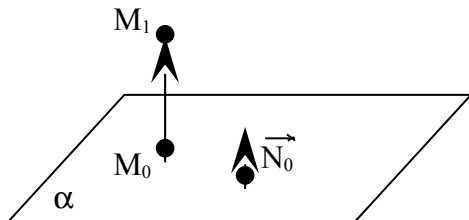
$\alpha: A^*.x + B^*.y + C^*.z + D^* = 0$;

Векторът $\vec{N}_0(A^*, B^*, C^*)$ е единичен;

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е точка $\notin \alpha$;

ако M_0 е петата на перпендикуляра, спуснат от M_1 към α , тогава:

$|M_1, \alpha| = |M_0M_1|$;



$\vec{M_0M_1} \perp \alpha$, $\vec{N_0} \perp \alpha \Rightarrow \vec{M_0M_1}$ е колинеарен с $\vec{N_0} \Rightarrow \vec{M_0M_1} = \delta \cdot \vec{N_0}$

$\Rightarrow |M_0M_1| = |\delta| \cdot |\vec{N_0}| \Rightarrow |M_0M_1| = |\delta|$, т.е. $|M_1, \alpha| = |\delta|$;

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

$\vec{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, $\vec{M_0M_1}$ е колинеарен с $\vec{N_0} \Rightarrow$

$x_1 - x_0 = \delta \cdot A^*$; $y_1 - y_0 = \delta \cdot B^*$; $z_1 - z_0 = \delta \cdot C^*$; $\Rightarrow$

$x_0 = x_1 - \delta \cdot A^*$; $y_0 = y_1 - \delta \cdot B^*$; $z_0 = z_1 - \delta \cdot C^*$; $\Rightarrow$

$M_0 \in \alpha \Rightarrow A^*.x_0 + B^*.y_0 + C^*.z_0 + D^* = 0 \Rightarrow$

$A^*.(x_1 - \delta \cdot A^*) + B^*.(y_1 - \delta \cdot B^*) + C^*.(z_1 - \delta \cdot C^*) + D^* = 0 \Rightarrow$

$$A^* \cdot x_1 + B^* \cdot y_1 + C^* \cdot z_1 + D^* - \delta \cdot (A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}) = 0 \rightarrow$$

$A^* \cdot x_1 + B^* \cdot y_1 + C^* \cdot z_1 = \delta$, тъй като $N_0(A^*, B^*, C^*)$ е единичен;

$$|\delta| = |A^* \cdot x_1 + B^* \cdot y_1 + C^* \cdot z_1|;$$

ако α е зададена с произволно уравнение: _____

$$|M_1, \alpha| = |(A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D) / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}|;$$

δ се нарича **ориентирано разстояние** от точката M_1 до равнината α ;

$\delta > 0 \Leftrightarrow M_1$ и вектор N_0 са в едно полупространство спрямо α ;

$\delta < 0 \Leftrightarrow M_1$ и вектор N_0 са в различни полупространства спрямо α ;

Полупространства

Нека $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ е произволна афинна координатна система;

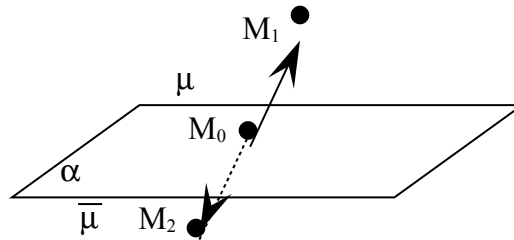
$$\alpha: l(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0;$$

точките $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \notin \alpha$;

Твърдение: Точките M_1 и M_2 са в различни полуравнини

относно $\alpha \Leftrightarrow l(M_1) \cdot l(M_2) < 0$;

Доказателство:



Нека M_0 е пресечната точка на правата M_1M_2 с α

$\rightarrow M_0M_2 = \lambda \cdot M_0M_1$; освен това $\lambda < 0$, тъй като M_0 е между M_1 и M_2 ;

както при прави получаваме: $\lambda < 0 \Leftrightarrow l(M_1) \cdot l(M_2) < 0$;

α задава две полупространства:

$$\mu: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D > 0;$$

$$\bar{\mu}: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D < 0;$$

Представяне на права чрез две равнини

Нека $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ е произволна афинна координатна система;

g е права, $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$;

$$\alpha_1: l_1(x, y, z) = A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2: l_2(x, y, z) = A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0;$$

$$\rightarrow g: l_1(x, y, z) = l_2(x, y, z) = 0;$$

g е зададена коректно, ако α_1 не е успоредна на α_2 , т.е. когато

$$(A_1, B_1, C_1) \neq \lambda \cdot (A_2, B_2, C_2);$$

Твърдение: Всяка равнина с уравнение $\lambda \cdot l_1(x, y, z) + \mu \cdot l_2(x, y, z) = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

минава през правата g ;

Доказателство:

$$\lambda.l_1(x, y, z) + \mu.l_2(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda.A_1 + \mu.A_2).x + (\lambda.B_1 + \mu.B_2).y + (\lambda.C_1 + \mu.C_2).z + \lambda.D_1 + \mu.D_2 = 0;$$

това е уравнение на равнина, ако коефициентите пред x , y и z не са едновременно нули;

да допуснем, че това е така, т.е.:

$$\lambda.A_1 + \mu.A_2 = 0$$

$$\lambda.B_1 + \mu.B_2 = 0$$

$$\lambda.C_1 + \mu.C_2 = 0$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0, 0) \Rightarrow A_1 = k.A_2; B_1 = k.B_2; C_1 = k.C_2$$

$\Rightarrow \alpha_1$ е успоредна на α_2 – противоречие $\Rightarrow$ допускането не е вярно

$\Rightarrow \lambda.l_1(x, y, z) + \mu.l_2(x, y, z) = 0$ наистина е уравнение на равнина;

очевидно за всяка точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in g \Rightarrow l_1(M_0) = 0; l_2(M_0) = 0$

$\Rightarrow \lambda.l_1(M_0) + \mu.l_2(M_0) = 0 \Rightarrow g \subset \alpha: \lambda.l_1(x, y, z) + \mu.l_2(x, y, z) = 0;$

Канонично представяне на права чрез двойка равнини

Нека за определеност $B_1.C_2 - B_2.C_1 \neq 0$ (равнините α_1 и α_2 не са успоредни); $\Rightarrow \Delta =$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (C_1, C_2) \neq (0, 0); (B_1, B_2) \neq (0, 0);$$

Нека $(\lambda, \mu) = (C_2, -C_1);$

$$\alpha': A'.x + \Delta.y + D' = 0;$$

Нека $(\lambda, \mu) = (B_2, -B_1);$

$$\alpha'': A''.x + \Delta.z + D'' = 0;$$

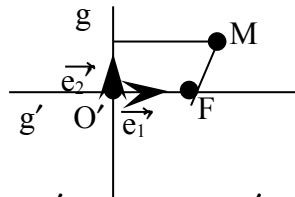
като разделим уравненията на α_1 и α_2 на $\Delta \neq 0$ получаваме:

$g: \{y = a.x + b; z = c.x + d\}$ – канонично представяне на правата g чрез две равнини;

Конични сечения

В равнината имаме фиксирана права g и точка $F \notin g$. Да се намери геометричното място от точките M за които $|MF| / |M, g| = e = \text{const}$;

Това геометрично място се нарича **конично сечение**.



Нека правата g' е такава, че g' минава през F и $g' \perp g$;

Фиксираме ортонормирана координатна система $K' = \{O', e_1', e_2'\}$, $\rightarrow \rightarrow$

където $O' = g \cap g'$, e_1' е колинеарен с $\overrightarrow{g'}$, e_2' е колинеарен с g ;

освен това $O'F$ е едноразмерен с e_1' ;

Спрямо K' :

$F(p, 0) (p > 0), g: x = 0, M(x', y')$;

$$\rightarrow |MF| = \sqrt{(x' - p)^2 + y'^2}; |M, g| = |x'|;$$

$$\rightarrow \sqrt{(x' - p)^2 + y'^2} / |x'| = e \rightarrow (x' - p)^2 + y'^2 = e^2 \cdot x'^2$$

$$\rightarrow x'^2 - 2.p.x' + p^2 + y'^2 = e^2 \cdot x'^2 \rightarrow (1 - e^2).x'^2 - 2.p.x' + y'^2 = 0$$

Нека K – ортонормирана, $K = \{ O, e_1, e_2 \}$;

$$K' \rightarrow K : \{ x = x' + \alpha, y = y' \} \rightarrow e_1 = \vec{e}_1', e_2 = \vec{e}_2', O \rightarrow O';$$

Спрямо K :

$$(1 - e^2).(x + \alpha)^2 - 2.p.(x + \alpha) + y^2 + p^2 = 0 \rightarrow$$

$$(1 - e^2).x^2 + (2.\alpha(1 - e^2) - 2.p).x + y^2 + (1 - e^2).\alpha^2 - 2.p.\alpha + p^2 = 0;$$

$$1. \quad 1 - e^2 = 0 \Leftrightarrow e = 1 (e > 0);$$

$$y^2 - 2.p.x - 2.p.\alpha + p^2 = 0; \text{ ако вземем } \alpha = p/2 \text{ получаваме:}$$

$$y^2 = 2.p.x - \text{уравнение на парабола};$$

$$2. \quad 1 - e^2 \neq 0, e \neq 1; \text{ нека вземем } \alpha = p / (1 - e^2); \text{ получаваме:}$$

$$(1 - e^2).x^2 + y^2 - p^2.e^2/(1 - e^2) = 0 \rightarrow$$

$$x^2 / (p^2.e^2 / (1 - e^2)^2) + y^2 / (p^2.e^2 / (1 - e^2)) = 1;$$

$$2.1. \quad 1 - e^2 < 0 \Leftrightarrow e < 1; \text{ полагаме } a = p.e / (1 - e^2), b = p.e / \sqrt{1 - e^2};$$

$$\text{получаваме: } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - \text{уравнение на елипса};$$

$$2.2. \quad 1 - e^2 > 0 \Leftrightarrow e > 1; \text{ полагаме } a = p.e / (e^2 - 1), b = p.e / \sqrt{e^2 - 1};$$

$$\text{получаваме: } x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 - \text{уравнение на хипербола};$$

22 ноември – семинарни занятия

В задачи с ъглополовящи се използва, че симетричните точки на върховете на триъгълника относно ъглополовящата лежат на правата определена от срещуположната страна;

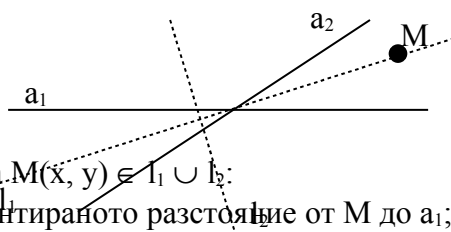
Ъглополовящи на ъгли, определени от пресичащи се прави

Фиксирана е ортонормирана координатна система в равнината;

Дадени са две прави:

$$a_1 : A_1.x + B_1.y + C_1 = 0;$$

$$a_2 : A_2.x + B_2.y + C_2 = 0;$$



за всяка точка $M(x, y) \in I_1 \cup I_2$:

нека δ_1 е ориентираното разстояние от M до a_1 ;

нека δ_2 е ориентираното разстояние от M до a_2 ;

$$\rightarrow |\delta_1| = |\delta_2| \Leftrightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0 \cup \delta_1 - \delta_2 = 0;$$

$$\delta_1 = A_1.x + B_1.y + C_1 / \sqrt{A_1^2 + B_1^2};$$

$$\delta_2 = A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 / \sqrt{A_2^2 + B_2^2};$$

$$\rightarrow l_{1,2} : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 / \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \pm A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 / \sqrt{A_2^2 + B_2^2} = 0;$$

Ъглополовяща на тъп и остър ъгъл

Векторът $\vec{p}(\vec{r} - B_1, A_1)$ е колинеарен с a_1 ;

Векторът $\vec{q}(\vec{r} - B_2, A_2)$ е колинеарен с a_2 ;

1. $\vec{p} \cdot \vec{q} > 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{p}, \vec{q})_e \rightarrow$ остър $\rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0$ е ъглополовяща на острия ъгъл, $\delta_1 - \delta_2 = 0$ е ъглополовяща на тъпия ъгъл;
2. $\vec{p} \cdot \vec{q} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{p}, \vec{q})_e \rightarrow$ тъп $\rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0$ е ъглополовяща на тъпия ъгъл, $\delta_1 - \delta_2 = 0$ е ъглополовяща на острия ъгъл;

Ъглополовяща на ъгъл, съдържащ дадена точка

Нека е дадена точка P ;

ако $\delta(P, a_1)$ и $\delta(P, a_2)$ са с еднакви знаци, тогава ъглополовящата на ъгъла, който съдържа точка P е $\delta_1 - \delta_2 = 0$;

ако $\delta(P, a_1)$ и $\delta(P, a_2)$ са с различни знаци, тогава ъглополовящата на ъгъла, който съдържа точка P е $\delta_1 + \delta_2 = 0$;

Представяне на права, която е зададена чрез две равнини, със скалярно параметрично уравнение

Нека $g = \alpha \cap \beta$;

$$\alpha : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0;$$

$$\beta : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0;$$

нека $\vec{n}_\alpha(A_1, B_1, C_1)$ е нормалният вектор на α ;

нека $\vec{n}_\beta(A_2, B_2, C_2)$ е нормалният вектор на β ;

тогава $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ е колинеарен с g ;

$M(0, m_2, m_3) \in g$, където m_2 и m_3 са определени от системата:

$$B_1 \cdot m_2 + C_1 \cdot m_3 = -D_1$$

$$B_2 \cdot m_2 + C_2 \cdot m_3 = -D_2$$

в такъв случай $g = \{ M, \vec{p} \}$ има скалярно параметрично уравнение:

$$x = 0 + \lambda \cdot p_1;$$

$$y = m_2 + \lambda \cdot p_2;$$

$$z = m_3 + \lambda \cdot p_3; \lambda \text{ се мени в } (-\infty, +\infty);$$

27 ноември

т. F се нарича **фокус**,

правата g – **директриса**,

константата е – **ексцентрицитет**;

Парабола

Избрали сме $K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2' \}$ – ортонормирана;

Спрямо K' :

т. $F(p, 0)$, $p > 0$;

пр. $g: x = 0$;

ексцентрицитетът $e = 1$;

След това сме фиксирали $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ – ортонормирана;

преходът се осъществява по следния начин:

$K' \rightarrow K: x' = x + \alpha, y' = y$;

$\alpha = p/2$, $\alpha > 0$;

Спрямо K :

т. $F(p/2, 0)$;

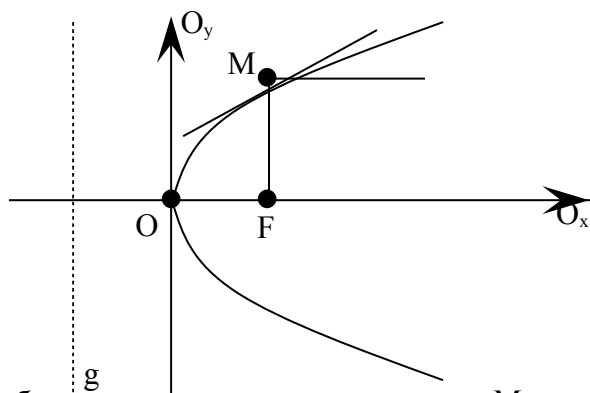
пр. $g: x = -p/2$;

коничното сечение в този случай е **парабола**;

нека параболата означим с π ;

$\pi: y^2 = 2 \cdot p \cdot x$;

1. очевидно т. $O \in \pi$;
2. графиката на параболата е изцяло в първи и четвърти квадрант, тъй като $x > 0$;
3. графиката на параболата е симетрична относно O_x ;
4. параболата пресича правата $x = 0$ единствено в т. O ;
5. нека разгледаме правите $y = k \cdot x$, където k се мени в $(-\infty, +\infty)$; ако пресечем тези прави с π , получаваме:
 $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, $y = k \cdot x \rightarrow k^2 \cdot x^2 = 2 \cdot p \cdot x \rightarrow x \cdot (k^2 \cdot x - 2 \cdot p) = 0$;
оттук всяка права с уравнение $y = k \cdot x$, $k \neq 0$ има две пресечни точки с π : т. O и $(2 \cdot p/k^2, 2 \cdot p/k)$; правата $y = 0$ пресича π единствено в т. O ;



Свойство на параболата: ако през произволна точка M от параболата прекараме допирателна, тогава лъч, който минава през фокуса F след отражение от допирателната в т. M се ориентира успоредно на O_x ;

Елипса

Избрали сме $K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2' \}$ – ортонормирана;

Спрямо K' :

т. $F(p, 0)$, $p > 0$;

пр. $g: x = 0$;

ексцентрицитетът $e < 1$;

След това сме фиксирали $K = \{O, e_1, e_2\} \xrightarrow{\vec{Oe_1}} \xrightarrow{\vec{Oe_2}}$ ортонормирана;

преходът се осъществява по следния начин:

$K' \rightarrow K: x' = x + \alpha, y' = y$;

$\alpha = p/(1 - e^2)$, $\alpha > 0$;

Спрямо K' :

т. $F(-p \cdot e^2/(1 - e^2), 0)$;

пр. $g: x = -p/(1 - e^2)$;

нека означим: $c = p \cdot e^2/(1 - e^2)$; $a = p \cdot e/(1 - e^2)$, $b = p \cdot e/\sqrt{1 - e^2}$;

$\Rightarrow a, b, c > 0$;

тогава $c^2 = a^2 - b^2$;

т. $F(-c, 0)$;

пр. $g: x = -a^2/c$;

коничното сечение в този случай е **елипса**;

$-p \cdot e^2/(1 - e^2) > -p \cdot e/(1 - e^2) > -p/(1 - e^2)$, тъй като $e < 1 \Rightarrow$

точките $g \cap O_x$, $(-a, 0)$, F , O лежат в този ред върху O_x ;

нека означим елипсата с ε ;

тогава $\varepsilon: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

1. Ако т. $M_0 \in \varepsilon$, тогава $x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow$ т. $M_1(-x_0, y_0) \in \varepsilon$,

т. $M_2(x_0, -y_0) \in \varepsilon$, т. $M_3(-x_0, -y_0) \in \varepsilon$; $\Rightarrow$ графиката на елипсата е симетрична
относно O_x и O_y ;

2. Нека разгледаме $F'(c, 0)$ и $g': x = a^2/c$; поради симетрията относно $O_y \Rightarrow$
 $MF'/|M, g'| = e$, за всяка точка $M \in \varepsilon \Rightarrow$ елипсата има два фокуса и две
директриси, които са симетрични относно O_y ;

3. Нека разгледаме правите $y = k \cdot x$, където k се мени в $(-\infty, +\infty)$; ако пресечем
тези прави с ε , получаваме:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, y = k \cdot x \Rightarrow x^2/a^2 + k^2 \cdot x^2/b^2 = 1$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot k^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot b^2 \Rightarrow x = \pm a \cdot b / \sqrt{b^2 + a^2 \cdot k^2};$$

оттук всяка права с уравнение $y = k \cdot x$ пресича ε в две точки, които са
симетрични спрямо т. O ;

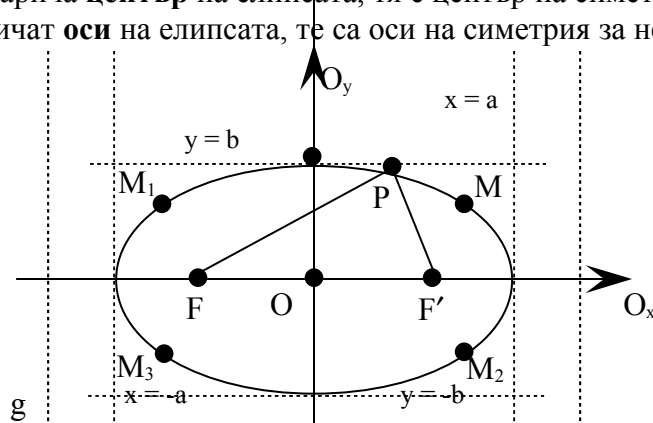
4. Нека запишем уравнението на ε в следния вид:

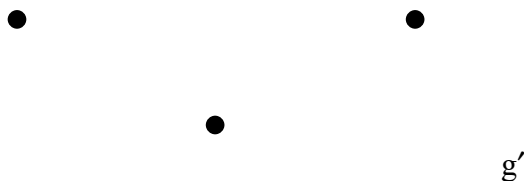
$$y^2 = b^2 \cdot (1 - x^2/a^2) \Rightarrow 1 - x^2/a^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow x \in [-a; a];$$

$$\text{аналог. } x^2 = a^2 \cdot (1 - y^2/b^2) \Rightarrow 1 - y^2/b^2 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq b \Rightarrow y \in [-b; b];$$

оттук графиката на ε е заключена в правоъгълник със страни $2 \cdot a$ и $2 \cdot b$ с
център т. O ;

5. точките $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b) \in \varepsilon$ и се наричат **върхове** на елипсата; т. O
се нарича **център** на елипсата, тя е център на симетрия за нея; O_x и O_y се
наричат **оси** на елипсата, те са оси на симетрия за нея;





Свойство на елипсата: за произволна точка $P \in \varepsilon$,

$$|FP| + |F'P| = \text{const} = 2.a;$$

Доказателство: нека $P(x, y)$; $P \in \varepsilon \Rightarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

$$|PF| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; |PF'| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$|PF| = \sqrt{x^2 + 2.c.x + c^2 - b^2.x^2/a^2 + b^2} =$$

$$\sqrt{a^2.x^2 - b^2.x^2 + 2.c.a^2.x + a^2.(c^2 + b^2)}/a =$$

$$\sqrt{c^2.x^2 + 2.c.a^2.x + a^4}/a = |c.x + a^2|/a = |x.c/a + a|;$$

тъй като $c/a = e < 1$, $|x| \leq a \Rightarrow |x|.c/a < a.e < a \Rightarrow$

$$x.c/a \in (-a, a) \Rightarrow |PF| = a + x.c/a;$$

аналог. $|PF'| = |x.c/a - a|$; тъй като $x.c/a < a \Rightarrow$

$$|PF'| = a - x.c/a;$$

$$\Rightarrow |PF| + |PF'| = \text{const} = 2.a;$$

Хипербола

Избрали сме $K' = \{ O', \vec{e}_1', \vec{e}_2' \}$ – ортонормирана;

Спрямо K' :

т. $F(p, 0)$, $p > 0$;

пр. $g : x = 0$;

ексцентрицитетът $e > 1$;

След това сме фиксирали $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ – ортонормирана;

преходът се осъществява по следния начин:

$$K' \rightarrow K : x' = x + \alpha; y' = y;$$

$$\alpha = p/(1 - e^2), \alpha < 0;$$

Спрямо K' :

т. $F(-p.e^2/(1 - e^2), 0)$;

пр. $g : x = -p/(1 - e^2)$;

нека означим: $c = p.e^2/(e^2 - 1)$; $a = p.e/(e^2 - 1)$, $b = p.e/\sqrt{e^2 - 1}$;

$$\Rightarrow a, b, c > 0;$$

$$\text{тогава } c^2 = a^2 + b^2;$$

т. $F(c, 0)$;

пр. $g : x = a^2/c$;

коничното сечение в този случай е **хипербола**;

$$p/(e^2 - 1) < p.e/(e^2 - 1) < p.e^2/(e^2 - 1), \text{ тъй като } e > 1 \Rightarrow$$

точките $O, g \cap O_x, (a, 0), F$ лежат в този ред върху O_x ;

нека означим хиперболата с χ ;

$$\text{тогава } \chi : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1;$$

1. Ако т. $M_0(x_0, y_0) \in \chi$, тогава $x_0^2 - y_0^2 = 1 \Rightarrow$ т. $M_1(-x_0, y_0) \in \chi$
т. $M_2(x_0, -y_0) \in \chi$, т. $M_3(-x_0, -y_0) \in \chi \Rightarrow$ графиката на хиперболата е симетрична относно O_x и O_y ;
2. Нека разгледаме $F'(-c, 0)$ и $g' : x = -a^2/c$; поради симетрията относно $O_y \Rightarrow MF'/|M, g'| = e$, за всяка точка $M \in \chi \Rightarrow$ хиперболата има два фокуса и две директриси, които са симетрични относно O_y ;
3. Нека разгледаме правите $y = k.x$, където k се мени в $(-\infty, +\infty)$; ако пресечем тези прави с χ , получаваме:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, y = k.x \Rightarrow x^2/a^2 - k^2.x^2/b^2 = 1$$

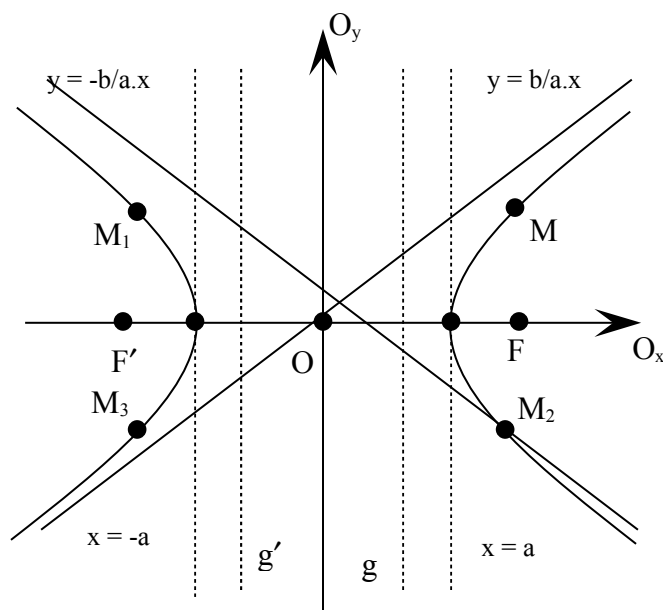
$$\Rightarrow b^2.x^2 - a^2.k^2.x^2 = a^2.b^2 \Rightarrow (b^2 - a^2.k^2).x^2 = a^2.b^2;$$

$$b^2 - a^2.k^2 > 0 \Leftrightarrow |k| < b/a;$$

$$\Rightarrow x = \pm a.b/\sqrt{b^2 - a^2.k^2};$$
оттук всяка права с уравнение $y = k.x, |k| < b/a$ пресича χ в две точки, които са симетрични спрямо т. O ;
- $b^2 - a^2.k^2 \leq 0 \Leftrightarrow |k| \geq b/a \Rightarrow$ лявата страна на равенството е неотрицателна, а дясната страна – строго положителна, т.е. $x \in \emptyset$; оттук всяка права с уравнение $y = k.x, |k| \geq b/a$ няма общи точки с χ ; правите $y = \pm b/a . x$ се наричат **асимптоти** на хиперболата χ ;
4. Нека запишем уравнението на χ в следния вид:

$$y^2 = b^2.(x^2/a^2 - 1) \Rightarrow x^2/a^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty);$$
аналог. $x^2 = a^2.(1 + y^2/b^2)$, но оттук не получаваме ограничение за $y \Rightarrow y \in (-\infty, +\infty)$;
5. Пресечните точки на χ с O_x са $(-a, 0)$, $(a, 0)$ и те се наричат **върхове** на хиперболата; т. O се нарича **център** на хиперболата, тя е център на симетрия за нея;



Свойство на хиперболата: за произволна т. $P \in \chi$

$$||PF| - |PF'|| = \text{const} = 2.a;$$

Доказателство: аналогично на това за елипсата;

Полярни координати в равнината

В равнината са фиксирани:

произволна т. О;

ос l , която минава през т. О;

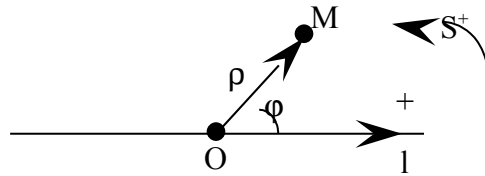
положителна посока на въртене (S^+);

освен това се предполага, че сме фиксирали измерими единици за разстояние и големина на ъгъл;

по този начин на всяка точка M в равнината можем да съпоставим

$\rho = |OM|$; $\varphi = \angle(l^+, OM)$;

ако ъгъл $\varphi \in (-\pi, +\pi]$, тогава съответствието е взаимноеднозначно;



по този начин сме фиксирали **полярна координатна система**:

$P = \{ O, l^+, S^+ \}$; т. О се нарича **полюс**, l^+ се нарича **ос** на координатната система;

нека $K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$, $\vec{e}_1 \uparrow \uparrow l^+$, $\vec{e}_2 \perp \vec{l}^+$;

нека спрямо K : $M(x, y) \rightarrow OM(x, y) \rightarrow OM/\rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\rightarrow OM(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$;

$\rightarrow P \rightarrow K : \{ x = \rho \cos\varphi; y = \rho \sin\varphi \}$;

$K \rightarrow P : \{ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(y/x) \}$;

Полярно уравнение на конично сечение

$|MF| / |M, g| = e = \text{const}$;

въвеждаме полярна координатна система $P = \{ F, l^+, S^+ \}$, където

l^+ : $l^+ \perp g$, $F \in l^+$;

нека $M(\rho, \varphi)$, $|F, g| = p \rightarrow |MF| = \rho$, $|M, g| = p + \rho \cos\varphi$;

$\rightarrow \rho / (p + \rho \cos\varphi) = e \rightarrow \rho = p \cdot e / (1 - e \cos\varphi)$ – **полярно уравнение на конично сечение**;

т. $M(p \cdot e / (1 - e \cos\varphi), \varphi) \in$ коничното сечение;

трябва да се има предвид, че при хипербола се получава само клонът, който има връх $(a, 0)$ (чертежът по-горе);

другият клон има уравнение $\rho = p \cdot e / (e \cos\varphi - 1)$;

Полярно уравнение на окръжност

Дадена е окръжност с център т. О и радиус r ;

Въвеждаме полярна координатна система $P = \{ O, l^+, S^+ \}$;

тогава окръжността има полярно уравнение $\rho = r$;
 това означава, че всяка точка с координати (r, φ) , където φ се мени
 в $(-\pi, +\pi]$ $\in$ окръжността;

4 декември

Аналитично задаване на криви в равнината

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\overrightarrow{x} \rightarrow$

Нека е дадена елипса $\varepsilon : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = f(x, y) = 0;$$

Известно е, че множеството от точките $M(x, y)$ за които $f(x, y) = 0$ образуват елипсата ε ;

По-общо:

Нека е дадена функцията $f(x, y)$;

казваме, че е зададена **равнинна крива линия** $K: f(x, y) = 0$,

ако K е множеството от всички точки $M(x, y)$, такива че $f(x, y) = 0$;

Пример:

$f(x, y) = A \cdot x + B \cdot y + C$; тогава $l: f(x, y) = 0$ задава права;

известно е, че всяка права освен общо има и скалярно параметрично уравнение в равнината (за определеност $B \neq 0$);

$$l: x = -B \cdot s, y = -C/B + A \cdot s, \text{ където } s \in (-\infty, +\infty);$$

По-общо:

една равнинна крива може да бъде зададена и чрез скалярно параметрично уравнение:

$$K: x = \varphi(t), y = \psi(t);$$

Важно: Двата вида уравнения не са еквивалентни, т.е. съществуват криви, които имат общо уравнение, но нямат скалярно параметрично уравнение;

Не всички функции задават криви;

например:

$$\text{не съществува реална крива с уравнение } f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0;$$

уравнението $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ задава крива, която се състои точно от една точка – началото на координатната система;

Алгебрични криви

Едночлен на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ се нарича израз от вида

$$A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, \text{ където } A \in \mathbf{R}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{N}_0; \text{ степен на едночлен е сумата } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

Полином е сбор от краен брой едночлени на едни и същи променливи; степен на полинома е максималната степен на едночлените, които го образуват;

Пример: $5 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot t + 4 \cdot x \cdot t^6$ е полином от степен 7;

Алгебрична крива от степен n ($n \in \mathbf{N}$) е крива K , зададена с полином f на променливите x и y от степен n : $f(x, y) = 0$;

Аналитично задаване на криви и повърхнини в пространството

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_3$

Дадена е функция $\Phi(x, y, z)$;

Казваме, че е зададена **повърхнина** S : $\Phi(x, y, z) = 0$, ако

S е множеството от всички точки $M(x, y, z)$, такива че $\Phi(x, y, z) = 0$;

Една повърхнина може да бъде зададена и чрез скалярно параметрично уравнение:

$S: x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v), z = \varphi_3(u, v)$;

Двата вида уравнения не са еквивалентни;

Алгебрична повърхнина от степен n ($n \in \mathbf{N}$) е повърхнина S , зададена с полином Φ на променливите x, y и z от степен n :

$\Phi(x, y, z) = 0$;

Пример:

Алгебричните повърхнини от първа степен

($\Phi(x, y, z) = A.x + B.y + C.z + D$) са равнини;

Крива C може да се зададе по два начина:

като пресечница на две повърхнини:

$C: \Phi_1(x, y, z) = 0, \Phi_2(x, y, z) = 0$;

със скалярно параметрично уравнение:

$C: x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t), z = \varphi_3(t)$;

Цилиндрични повърхнини

Дефиниция: В пространството е дадена произволна крива C и права l_0 ;

цилиндрична повърхнина се нарича множеството от точки

$\pi: \{ M \in l: l \parallel l_0, l \cap C \neq \emptyset \}$; всяка такава права l се нарича **образуваща** на цилиндричната повърхнина, C се нарича **управителна крива** на цилиндричната повърхнина;

Фиксираме афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_3$

Кривата $C: \Phi(x, y, z) = 0, \Psi(x, y, z) = 0$;

Нека $l_0 \parallel p_0(\vec{a}, b, 1)$; a, b – фиксирани $\rightarrow l_0$ не е успоредна на Oe_1e_2 ;

всяка образувателна l има уравнение:

$l: x = x_0 + a.\lambda, y = y_0 + b.\lambda, z = z_0 + \lambda \rightarrow \lambda = z - z_0$

$\rightarrow l: x = x_0 + a.(z - z_0), y = y_0 + b.(z - z_0) \rightarrow l: x = p + a.z, y = q + b.z$;

a, b са фиксирани; p, q се менят; търсим p и q такива, че $l \cap C \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\Phi(p - a.z, q - b.z, z) = 0$

$$\Psi(p - a.z, q - b.z, z) = 0$$

елиминираме z , като го изразим от първото уравнение и го заместим във второто (или обратното);

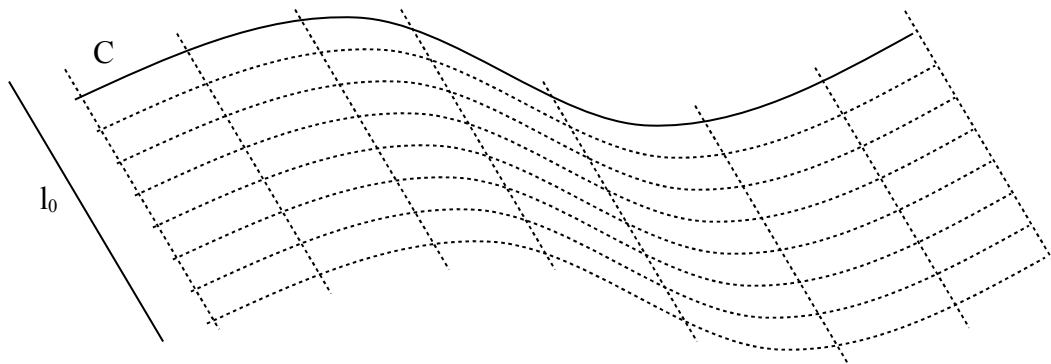
Важно: тази елиминация не винаги може да се реализира по прост начин (това зависи от функциите Φ и Ψ);

получаваме връзка между p и q :

$$\Phi(p, q) = 0 - \text{това е необходимо и достатъчно условие } l \cap C \neq \emptyset;$$

$$p = x - a.z, q = y - b.z \rightarrow \pi : \Phi(x - a.z, y - b.z) = 0 - \text{уравнение на цилиндрична повърхнина};$$

$$\text{ако } \pi: l \parallel e_3 (\vec{0}, 0, 1) \rightarrow \text{уравнението придобива вида } \Phi(x, y) = 0;$$



Пример: уравнение на цилиндрична повърхнина; управителната крива е окръжност с радиус R и център върху Oe_3 , успоредна на Oe_1e_2 ; образувателната е успоредна на Oe_3 : $\vec{x}^2 + \vec{y}^2 = R^2$;

Конични повърхнини

Дефиниция: В пространството е дадена произволна крива C и точка Q ; **конична повърхнина** се нарича множеството от точки

$\tau : \{ M \in l : l \cap C \neq \emptyset \}$; всяка такава права l се нарича **образуваща** на коничната повърхнина, C се нарича **управителна крива** на коничната повърхнина; т. Q се нарича **върх** на коничната повърхнина;

Фиксираме афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{} \rightarrow \vec{} \rightarrow \vec{}$

Кривата $C : \Phi(x, y, z) = 0, \Psi(x, y, z) = 0$; т. $Q(x_0, y_0, z_0)$;

Нека l не е успоредна на $Oe_1e_2 \rightarrow l \parallel p(a, b, 1) \rightarrow$

$$l : x = x_0 + a.(z - z_0), y = y_0 + b.(z - z_0);$$

x_0, y_0, z_0 са фиксирани; a, b се менят;

търсим a и b такива, че $l \cap C \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\Phi(x_0 + a.(z - z_0), y_0 + b.(z - z_0), z) = 0$$

$$\Psi(x_0 + a.(z - z_0), y_0 + b.(z - z_0), z) = 0$$

елиминираме z , като го изразим от първото уравнение и го заместим във второто (или обратното);

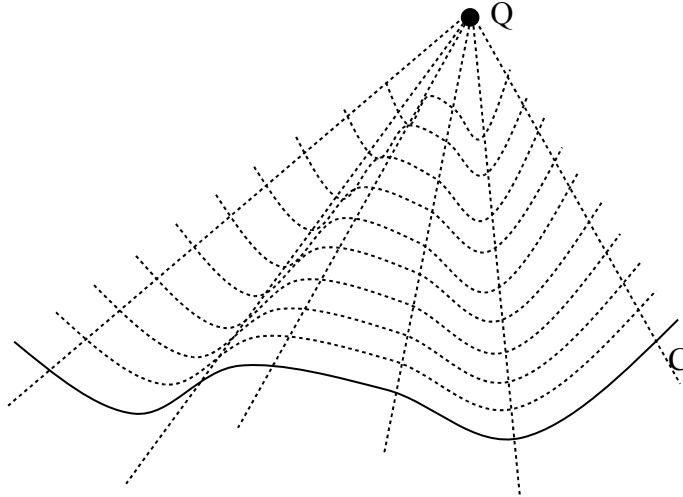
получаваме връзка между a и b :

$\psi(a, b) = 0$ – това е необходимо и достатъчно условие $l \cap C \neq \emptyset$;

$a = (x - x_0)/(z - z_0)$, $b = (y - y_0)/(z - z_0) \rightarrow$

$\tau : \psi((x - x_0)/(z - z_0), (y - y_0)/(z - z_0)) = 0$ – **уравнение на конична повърхнина**;

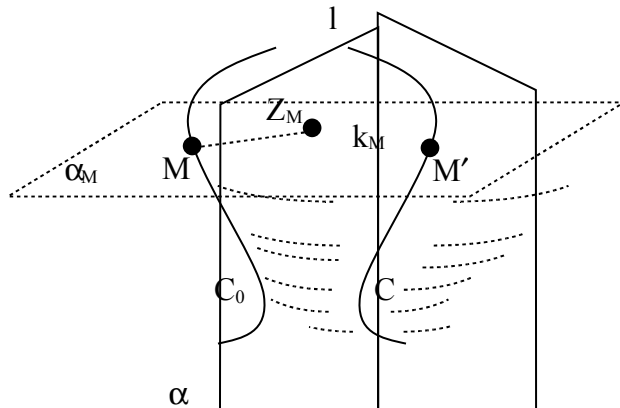
ако $Q(0, 0, 0) \rightarrow$ уравнението придобива вида $\psi(x/z, y/z) = 0$;



Ротационни повърхнини

Дефиниция: В пространството е дадена произволна крива C_0 , която лежи в равнина α и права l , която лежи в същата равнина; **ротационна повърхнина** е множеството от точки

$\rho : \{ M \in C, \text{ където } C \text{ са образите на } C_0, \text{ получени при въртенето на } \alpha \text{ около правата } l \}$;



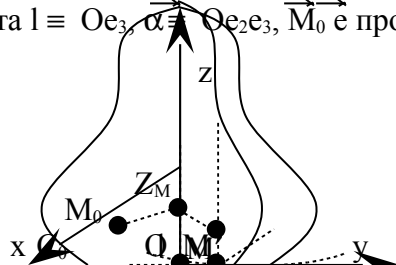
α_M минава през т. M и $\alpha_M \perp l$, $\alpha_M \cap l = Z_M \rightarrow \rho \cap \alpha_M =$ окръжност k_M с център Z_M ;

всяка такава окръжност се нарича **паралел** на ротационната повърхнина;

$\rho \cap \alpha' = C$ - всеки образ C на кривата C_0 , получен при въртенето на α се нарича **меридиан** на ротационната повърхнина; правата l се нарича **ос** на ротационната повърхнина;

Фиксираме ортонормирана координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$;

Нека правата $l \equiv Oe_3$, $\alpha \equiv Oe_2e_3$, M_0 е произволна точка от C_0 ;





Нека $C_0: \Phi(x, y, z) = 0, y = 0$; т.е. $C_0: \Phi(x, z) = 0, y = 0$;

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0), M_0 \in C_0 \Rightarrow y_0 = 0, \Phi(x_0, z_0) = 0$;

$|Z_M M_0| = |Z_M M| = |x_0|$, тъй като Z_M е център на паралела през т. M_0 , освен това $M_0 Z_M \perp Oe_3 \Rightarrow |M_0 Z_M| = x_0$;

Нека $M(x, y, z) \Rightarrow z = z_0$, тъй като равнината на паралела през т. M_0 е успоредна на $Oe_1 e_2$; освен това, ако $M'(x', y', z')$ е проекцията на т. M върху $Oe_1 e_2$, тогава $|OM'| = |Z_M M| = |x_0|$, $x' = x, y' = y, z' = 0$; по питагорова теорема получаваме, че $x_0^2 = x^2 + y^2$;

Окончателно получаваме, че $M \in \rho \Leftrightarrow \Phi(x_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Phi(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ – уравнение на ротационна повърхнина;

Примери:

Дадена е следната крива:

$\epsilon: \{x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1, y = 0\}$; правата $l \equiv Oe_3$; $\rightarrow$

получаваме ротационна повърхнина

$\rho: x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$;

при $a > b$ получаваме сплеснат ротационен елипсоид;

при $a < b$ получаваме продълговат ротационен елипсоид;

при $a = b$ получаваме сфера;

Дадена е следната крива:

$l_0: \{a \cdot x + b \cdot z = 0, y = 0\}$; правата $l \equiv Oe_3$; $\rightarrow$

$\Phi(x, z) = a \cdot x + b \cdot z$;

$\rho: \Phi(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \Leftrightarrow \pm a \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + b \cdot z = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot (x^2 + y^2) = b^2 \cdot z^2$

$\Leftrightarrow a^2/b^2 \cdot (x^2/z^2 + y^2/z^2) - 1 = 0$ – ротационната повърхнина в този случай е конична с връх т. $O(0, 0, 0)$ - $\psi(x/z, y/z) = 0$;

6 декември – семинарни занятия

Трансверзала наричаме права, която пресича две кръстосани прави; ако една трансверзала е перпендикулярна и на двете прави, тогава тя се нарича **ос** на кръстосаните прави;

11 декември

Хомогенни координати. Безкрайни елементи в равнината.

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\rightarrow \rightarrow$

Нека е дадена т. $M(X, Y)$ и права $g: A.x + B.y + C = 0$;

Известно е, че $M \in g \Leftrightarrow A.X + B.Y + C = 0$;

Казваме, че $[A, B, C]$ са **хомогенни координати на правата** g спрямо K ;

Ясно е, че една права g има безбройно много координати, но всичките тройки координати са пропорционални помежду си, т.е.

$g \leftrightarrow [\lambda.A, \lambda.B, \lambda.C]$, където $\lambda \neq 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$;

Записваме условието за колинеарност на точката M с правата g по следния начин:

$$A.X + B.Y + C.1 = 0;$$

разглеждаме тройката числа $(X, Y, 1)$ – те са съпоставени на M и координатите на M са $(X/1, Y/1)$;

Очевидно е, че $\lambda.A.X + \lambda.B.Y + \lambda.C.1 = 0$, $(\lambda \neq 0)$, т.е. на M можем да съпоставим и числата $(\lambda.X, \lambda.Y, \lambda)$ по същия начин;

на всяка точка M сме съпоставили числата (x, y, t) – **хомогенни координати** на точката M ; при $t \neq 0$ казваме, че точката M е **крайна**;

нехомогенните координати на крайна точка се получават по следния начин: $M(x, y, t) \leftrightarrow M(X, Y)$, където $X = x/t$, $Y = y/t$;

В хомогенни координати правата g има уравнение:

$$g: A.x + B.y + C.t = 0;$$

Нека g_1 е успоредна на g_2 ;

$$g_1: A.x + B.y + C_1.t = 0$$

$$g_2: A.x + B.y + C_2.t = 0, \text{ където } A = \mu, B = -\lambda; (\lambda, \mu) \neq (0, 0);$$

векторът $p(\lambda, \mu)$, е колинеарен и с двете прави;

$$g_1 \cap g_2:$$

$$A.x + B.y + C_1.t = A.x + B.y + C_2.t;$$

тъй като правите не съвпадат $\rightarrow t = 0$;

т. U с хомогенни координати $(\lambda, \mu, 0)$ очевидно принадлежи и на двете прави, т.е. $g_1 \cap g_2 = t. U$;

точката U се нарича **безкрайна точка**, определена от направлението (λ, μ) ; очевидно за безкрайните точки съществуват единствено хомогенни координати;

Дефинираме **безкрайна права** ω , която е съвкупността от всички безкрайни точки в равнината; безкрайната права има координати

$$[0, 0, p]; \text{ очевидно за всяка безкрайна точка } (\lambda, \mu, 0) \text{ имаме}$$

$$0.\lambda + 0.\mu + p.0 = 0, \text{ т.е. това наистина са координатите на безкрайната права};$$

Обобщение:

В равнината:

$M(x, y, t)$ – хомогенни координати на точката M ;

$$M_1(x_1, y_1, t_1) \equiv M_2(x_2, y_2, t_2) \Leftrightarrow x_1 = \lambda.x_2, y_1 = \lambda.y_2, t_1 = \lambda.t_2 (\lambda \neq 0);$$

Ако $t \neq 0$, точката M е крайна и има нехомогенни координати $(x/t, y/t)$;

Ако $t = 0$, точката M е безкрайна и е определена от вектора (x, y) ; тройката $(0, 0, 0)$ не отговаря на нито една точка;

Всяка права g има хомогенни координати $[a, b, c]$;

$g_1 [a_1, b_1, c_1] \equiv g_2 [a_2, b_2, c_2] \Leftrightarrow a_1 = \lambda \cdot a_2, b_1 = \lambda \cdot b_2, c_1 = \lambda \cdot c_2, \lambda \neq 0$;

Ако $(a, b) \neq (0, 0)$, тогава правата g е крайна;

Ако $(a, b) = (0, 0)$, тогава правата g е безкрайната права;

тройката $[0, 0, 0]$ не отговаря на никоя права;

$M(x, y, t) \in g[a, b, c] \Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c \cdot t = 0$;

Уравнение на права през две точки в хомогенни координати

Ако $M_1(x_1, y_1, t_1) \neq M_2(x_2, y_2, t_2)$, тогава $g = M_1 M_2$ е единствена;

$g: x = \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2, y = \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2, t = \lambda \cdot t_1 + \mu \cdot t_2, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$;

$g: M = \lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2$;

Хомогенни координати и безкрайни елементи в пространството

Фиксираме афинна координатна система $K = \{O, e_1, e_2, e_3\}$; $\vec{O} \rightarrow \vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_3$

Всяка точка M има координати X, Y, Z спрямо нея;

всяка наредена четворка реални числа (x, y, z, t) , за която $t \neq 0$ и

$X = x/t, Y = y/t, Z = z/t$ наричаме **хомогенни координати** на точката M ; ясно е, че една точка има безброй много хомогенни координати, които се различават по ненулев множител;

Както в равнината, всяко направление в пространството дефинира точно една безкрайна точка; всяка безкрайна точка зададена от направлението (λ, μ, ν) има хомогенни координати $(\lambda, \mu, \nu, 0)$ и очевидно няма нехомогенни координати; множеството от всички безкрайни точки наричаме **безкрайна равнина**; означаваме я с ω ;

Разглеждаме една равнина

$\alpha: A \cdot X + B \cdot Y + C \cdot Z + D = 0$;

в хомогенни координати това уравнение придобива вида:

$\alpha: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D \cdot t = 0$;

наредената четворка $[A, B, C, D]$ наричаме **хомогенни координати** на равнината α , ако $(A, B, C, D) \neq (0, 0, 0, 0)$;

ако $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ получаваме крайна равнина; безкрайната равнина ω има хомогенни координати $(0, 0, 0, \rho)$ и уравнение $t = 0$;

ако е дадена една равнина, множеството от всички равнини, които са обобщено успоредни на нея задават едно двумерно направление в пространството, което определя една безкрайна права, която лежи в безкрайната равнина ω ;

Уравнение на права през две точки:

ако $g = M_1 M_2, M \in g \Leftrightarrow M = \lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$;

Уравнение на равнина през три неколинеарни точки;

ако $\alpha = M_1 M_2 M_3, M \in \alpha \Leftrightarrow M = \lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2 + \nu \cdot M_3$;

Алгебрични криви от втора степен

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\overleftarrow{} \rightarrow$

Нека $f(X, Y) = a_{11}.X^2 + 2.a_{12}.X.Y + a_{22}.Y^2 + 2.a_{13}.X + 2.a_{23}.Y + a_{33}$, където $a_{ij} \in \mathbf{R}$, не всичките са нули;

Множеството с от всички точки $M(X, Y)$, за които $f(X, Y) = 0$, наричаме **алгебрична крива от втора степен** с уравнение -

$$C : f(X, Y) = 0;$$

Нека да преминем към хомогенни координати:

$$X = x/t, Y = y/t;$$

получаваме:

$$C: f(x, y, t) = a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2.a_{13}.x.t + 2.a_{23}.y.t + a_{33}.t^2;$$

това уравнение задава същото множество C от крайни точки, но то може да съдържа и безкрайни точки;

нека $M_0(x_0, y_0, t_0)$

за краткост означаваме: $f(M_0) = f(x_0, y_0, t_0)$;

нека $A = (a_{ij})$ е матрицата от коефициентите, така че $a_{ij} = a_{ji}$;

Дефинираме:

$$f_1(x, y, t) = a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.t;$$

$$f_2(x, y, t) = a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.t;$$

$$f_3(x, y, t) = a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.t;$$

лесно се проверява, че

$$f(x, y, t) = f_1(x, y, t).x + f_2(x, y, t).y + f_3(x, y, t).t;$$

нека $M_1(x_1, y_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, t_2)$

$$f(M_1, M_2) = f_1(M_1).x_2 + f_2(M_1).y_2 + f_3(M_1).t_2 =$$

$$f_1(M_2).x_1 + f_2(M_2).y_1 + f_3(M_2).t_1 = a_{11}.x_1.x_2 + a_{12}.(x_1.y_2 + x_2.y_1) + a_{22}.y_1.y_2 + a_{13}.(x_1.t_2 + x_2.t_1) + a_{23}.(y_1.t_2 + y_2.t_1) + a_{33}.t_1.t_2;$$

$f(M_1, M_2)$ се нарича **билинейна форма** на квадратната форма $f(M)$;

очевидно $f(M_1, M_2) = f(M_2, M_1)$; $f(M, M) = f(M)$;

зададена е крива $C: f(x, y, t) = 0$ и права $g: M = \lambda.M_1 + \mu.M_2$,

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ чрез точките $M_1(x_1, y_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, t_2)$; за правата g –

т. M_1 се получава при $\mu = 0$, точка M_2 се получава при $\lambda = 0$;

питаме се $C \cap g = ?$

$$C \cap g = \text{т. } M \Leftrightarrow f(\lambda.M_1 + \mu.M_2) = 0 \Leftrightarrow a_{11}.(\lambda.x_1 + \mu.x_2)^2 + 2.a_{12}.(\lambda.x_1 + \mu.x_2).(\lambda.y_1 + \mu.y_2) + a_{22}.(\lambda.y_1 + \mu.y_2)^2 + 2.a_{13}.(\lambda.x_1 + \mu.x_2).(\lambda.t_1 + \mu.t_2) + 2.a_{23}.(\lambda.y_1 + \mu.y_2).(\lambda.t_1 + \mu.t_2) + a_{33}.(\lambda.t_1 + \mu.t_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2.(a_{11}.x_1^2 + 2.a_{12}.x_1.y_1 + a_{22}.y_1^2 + 2.a_{13}.x_1.t_1 + 2.a_{23}.y_1.t_1 + a_{33}.t_1^2) + 2.\lambda.\mu.(a_{11}.x_1.x_2 + a_{12}.(x_1.y_2 + x_2.y_1) + a_{22}.y_1.y_2 + a_{13}.(x_1.t_2 + x_2.t_1) + a_{23}.(y_1.t_2 + y_2.t_1) + a_{33}.t_1.t_2) + \mu^2.(a_{11}.x_2^2 + 2.a_{12}.x_2.y_2 + a_{22}.y_2^2 + 2.a_{13}.x_2.t_2 + 2.a_{23}.y_2.t_2 + a_{33}.t_2^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2.f(M_1) + 2.\lambda.\mu.f(M_1, M_2) + \mu^2.f(M_2) = 0;$$

нека за определеност $\mu \neq 0$; полагаме $s = \lambda/\mu$ и получаваме:

$$f(M_1).s^2 + 2.s.f(M_1, M_2) + \mu^2.f(M_2) = 0;$$

$$1. M_1 \notin C \Leftrightarrow f(M_1) \neq 0;$$

$$D = f(M_1, M_2) - f(M_1).f(M_2);$$

$D > 0 \Rightarrow s_1 \neq s_2$ са корени на уравнението $\Rightarrow |g \cap C| = 2$ точки; в този случай g се нарича **секуща**;

$D = 0 \Rightarrow s_1 = s_2$ - уравнението има единствено решение $\Rightarrow$

$|g \cap C| = 1$ точка; в този случай g е **допирателна (тангента)**;

$D < 0 \Rightarrow$ уравнението няма решения $\Rightarrow g \cap C = \emptyset$; в този случай g се нарича **външна права**;

$$2. M_1 \in C \Leftrightarrow f(M_1) = 0; \text{ получаваме:}$$

$$2.s.f(M_1, M_2) + f(M_2) = 0;$$

Ако $f(M_1, M_2) \neq 0 \Rightarrow s = -f(M_2)/(2.f(M_1, M_2)) \Rightarrow g$ е секуща;

Ако $f(M_1, M_2) = 0$ и $f(M_2) \neq 0 \Rightarrow$ няма решение $\Rightarrow g$ е допирателна;

Ако $f(M_1, M_2) = 0$ и $f(M_2) = 0 \Rightarrow$ кривата C съдържа правата g ; в този случай правата g се нарича **образуваща**;

Ако е дадена точка $M_0(x_0, y_0, t_0) \in C$, $M(x, y, t) \notin C$ и $l = MM_0$ е допирателна за кривата $C \Rightarrow f(M, M_0) = 0$;

$$l: f_1(M_0).x + f_2(M_0).y + f_3(M_0).t = 0;$$

$$l - \text{допирателна} \Leftrightarrow (f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0)) \neq (0, 0, 0);$$

нека

$$f_1(M_0) = a_{11}.x_0 + a_{12}.y_0 + a_{13}.t_0 = 0;$$

$$f_2(M_0) = a_{21}.x_0 + a_{22}.y_0 + a_{23}.t_0 = 0;$$

$$f_3(M_0) = a_{31}.x_0 + a_{32}.y_0 + a_{33}.t_0 = 0;$$

тъй като (x_0, y_0, t_0) са хомогенни координати на точката M_0 , системата трябва да има ненулево решение $\Rightarrow \Delta = |a_{ij}| = 0$;

точката M_0 за която $f_1(M_0) = 0$, $f_2(M_0) = 0$, $f_3(M_0) = 0$ се нарича **особена точка** на кривата C ;

една крива притежава особени точки $\Leftrightarrow \det A = 0$, в този случай кривата се нарича **изродена** или **разпадаща се крива**;

Ако $\det A \neq 0$, тогава кривата C няма особени точки и се нарича **неизродена**;

Твърдение: Във всяка точка на една неизродена крива от втора степен има единствена допирателна с уравнение

$$l: f_1(M).x + f_2(M_0).y + f_3(M_0).t = 0;$$

Всяка крива от втора степен еднозначно се определя от **пет точки**, никои четири от които не лежат на една права;

Сноп криви от втора степен

Нека

$$C_1: g(x, y, t) = 0, A_1 = (a_{ij}');$$

$$C_2: h(x, y, t) = 0; A_2 = (a_{ij}''); C_1 \neq C_2;$$

Тогава $S : f(x, y, t) = \lambda \cdot g(x, y, t) + \mu \cdot h(x, y, t) = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ е уравнение на **сноп криви от втора степен**, определен от кривите C_1, C_2 ;

$$S: f(x, y, t) = (\lambda \cdot a_{11}' + \mu \cdot a_{11}'') \cdot x^2 + \dots + (\lambda \cdot a_{33}' + \mu \cdot a_{33}'') \cdot t^2;$$

ако съществуват λ, μ , такива че всички коефициенти да се нулират, тогава a_{ij}' и a_{ij}'' са пропорционални – противоречие с факта, че $C_1 \neq C_2$;

Ако една точка $P(x_0, y_0, t_0)$ лежи на две криви от снопа, тя лежи на всички криви от снопа:

$$C' : \lambda_1 \cdot g(x_0, y_0, t_0) + \mu_1 \cdot h(x_0, y_0, t_0) = 0;$$

$$C'' : \lambda_2 \cdot g(x_0, y_0, t_0) + \mu_2 \cdot h(x_0, y_0, t_0) = 0;$$

$$\lambda_1 \cdot \mu_2 - \lambda_2 \cdot \mu_1 \neq 0 (C' \neq C'') \Rightarrow g(x_0, y_0, t_0) = h(x_0, y_0, t_0) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda \cdot g(x_0, y_0, t_0) + \mu \cdot h(x_0, y_0, t_0) = 0$ за всички $\lambda, \mu \Rightarrow P \in$ всички криви от снопа; точка P се нарича **основна точка** на снопа;

Нека $S : f = \lambda \cdot g + \mu \cdot h$;

$$1. \quad k_1 : f_1 = \lambda_1 \cdot g + \mu_1 \cdot h;$$

$$k_2 : f_2 = \lambda_2 \cdot g + \mu_2 \cdot h;$$

$$k_1 \equiv k_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \mu_2 - \lambda_2 \cdot \mu_1 = 0;$$

2. Ако точка M не е основна през нея минава точно една крива от снопа;

3. Ако точка P е основна и правата $l \perp ZP$ е допирателна към две криви от снопа, то тя е допирателна към всички криви от снопа;

13 декември – семинарни занятия

Окръжност

Спрямо ОКС Oe_1e_2 в равнината окръжност k с център $C(a, b)$ и радиус R има уравнение –

$$k: (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \text{ това уравнение се нарича } \textbf{нормално};$$

Ако $C \equiv O(0, 0, 0)$, тогава имаме **централно** уравнение на окръжност:

$$k: x^2 + y^2 = R^2;$$

Ако φ е ъгълът, който сключват векторите e_1 и $\overrightarrow{CM}$, където M е произволна точка от окръжността, тогава получаваме **параметрично** уравнение на окръжност:

$$k: x = a + R \cdot \cos \varphi, y = b + R \cdot \sin \varphi;$$

Нека $C : a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0$ е произволна крива от втора степен;

тогава C е окръжност, ако:

$$1. \quad a_{12} = 0;$$

$$2. \quad a_{11} = a_{22} \neq 0;$$

$$3. \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 > 0;$$

и тя има център $C(-a_{13}, -a_{23})$ и радиус $R = \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2}$;

Взаимни положения на точка и окръжност;

нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка и $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + d = 0$ е уравнение на окръжност; $f(x_0, y_0)$ наричаме степен на т. M_0 относно окръжността; ако $f(x_0, y_0) > 0$, точката е външна, ако $f(x_0, y_0) < 0$, точката е вътрешна, ако $f(x_0, y_0) = 0$, точката лежи на окръжността;

Взаимни положения на окръжност и права;

$K: f(x, y) = 0$ – окръжност с център C и радиус R ;

$g: A.x + B.y + C = 0$ – права;

1. $g \cap k = \emptyset \Leftrightarrow |\delta(C, g)| > R$; g – външна права;

2. $g \cap k = \{T\} \Leftrightarrow |\delta(C, g)| = R$; g – допирателна;

3. $g \cap k = \{T_1, T_2\} \Leftrightarrow |\delta(C, g)| < R$; g – секуща;

$$|\delta(C, g)| = (A.a + B.b + C) / \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - d};$$

Условие за допиране на две окръжности;

$k_1(C_1, R_1), k_2(C_2, R_2)$

1. k_1, k_2 – външно допиране $\Leftrightarrow |C_1C_2| = R_1 + R_2$;

2. k_1, k_2 – вътрешно допиране $\Leftrightarrow |C_1C_2| = |R_1 - R_2|$;

Ъгъл между две окръжности

$k_1(C_1, R_1), k_2(C_2, R_2)$; ако $k_1 \cap k_2 = \{P, Q\}$, тогава $\angle(k_1, k_2) = \varphi$, където φ е ъгълът между общите допирателни в точка P (точка Q);

$$\cos(\varphi) = \pm (|C_1C_2|^2 - R_1^2 - R_2^2) / (2.R_1.R_2);$$

18 декември

Твърдение: Дадени са четири точки P_1, P_2, P_3, P_4 никои три от които не лежат на една права; нека $l_{ij} = 0$ е уравнение на правата P_iP_j ,

$i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$; тогава снопът криви от втора степен, които минават през четирите точки има уравнение:

$$S: \lambda.l_{12}.l_{34} + \mu.l_{13}.l_{24} = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0);$$

Доказателство: Кривите $k_1: l_{12}.l_{34} = 0$ и $k_2: l_{13}.l_{24} = 0$ са две разпадащи се криви от втора степен и всяка от тях минава през четирите точки $\rightarrow P_1, P_2, P_3, P_4 \in$ всички криви от снопа и са негови основни точки;

Твърдение: Дадени са три точки P_1, P_2, P_3 , които не лежат на една права и права g , която минава през P_1 и не минава през P_2, P_3 ; нека

$l_{ij} = 0$ е уравнение на правата P_iP_j , $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ и $l = 0$ е уравнение на правата g ; тогава снопът криви от втора степен, които минават през P_1, P_2, P_3 и се допират до правата g има уравнение:

$$S: \lambda.l_{12}.l_{13} + \mu.l.l_{23} = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0);$$

Доказателство: Кривите $k_1: l_{12}.l_{13} = 0$ и $k_2: l.l_{23} = 0$ са две разпадащи се криви от втора степен и всяка от тях минава през точките $P_1, P_2, P_3 \rightarrow P_1, P_2, P_3 \in$ всички криви от снопа и са негови основни точки; освен това l е допирателна за k_1 и образуваща за $k_2 \rightarrow l$ е допирателна към всички криви от снопа;

Твърдение: Дадени са точките P_1 и P_2 и правите g_1 и g_2 , които минават съответно през P_1 и P_2 ; нека $l_{12} = 0$ е уравнение на правата P_1P_2 , $l_1 = 0$ е уравнение на правата g_1 , $l_2 = 0$ е уравнение на правата g_2 ; тогава снопът криви от втора степен, които минават през точките M_1 и M_2 и се допират до правите g_1 и g_2 има уравнение:

$$S : \lambda \cdot l_1 \cdot l_2 + \mu \cdot l_{12}^2 = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0);$$

Доказателство: Кривите $k_1 : l_1 \cdot l_2 = 0$ и $k_2 : l_{12}^2 = 0$ са две разпадащи се криви от втора степен и всяка от тях минава през точките $P_1, P_2 \Rightarrow P_1, P_2 \in$ всички криви от снопа и са негови основни точки; освен това правите l_1, l_2 са образуващи за k_1 и допирателни за $k_2 \Rightarrow l_1, l_2$ са допирателни към всички криви от снопа;

Безкрайни точки на крива от втора степен

Дадена е крива $C : f(x, y, t) = a_{11} \cdot x^2 + \dots + a_{33} \cdot t^2 = 0$;

Търсим общите точки на C с безкрайната права $\omega : t = 0$;

техните координати удовлетворяват системата

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 = 0;$$

$$t = 0;$$

Ако $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0 \Rightarrow$ всяка безкрайна точка $\in$ кривата C

$\Rightarrow$ безкрайната права е образуваща за кривата C ;

Нека $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$;

Нека $(a_{11}, a_{22}) \neq (0, 0)$

тъй като $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow$ уравнението е квадратно;

$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -A_{33}$, където A_{33} е адюнгираното количество на елемента a_{33} в матрицата на кривата C ;

Ако $D > 0 \Leftrightarrow A_{33} < 0 \Rightarrow$ уравнението има два реални корена и следователно притежава две безкрайни реални точки; тогава кривата се нарича крива от **хиперболичен тип**;

Ако $D = 0 \Leftrightarrow A_{33} = 0 \Rightarrow$ уравнението има един реален корен, т.е. кривата притежава една безкрайна реална точка; тогава кривата се нарича крива от **параболичен тип**;

Ако $D < 0 \Leftrightarrow A_{33} > 0 \Rightarrow$ уравнението няма реални корени и кривата не притежава реални безкрайни точки; тогава тя се нарича крива от **елиптичен тип**;

Ако $a_{11} = a_{22} = 0 \neq a_{12} \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow$ кривата C има две безкрайни точки, т.е. кривата е от хиперболичен тип;

Полярност

Дадена е крива $C : f(x, y, t) = a_{11} \cdot x^2 + \dots + a_{33} \cdot t^2 = 0$;

Матрицата на C е $A = (a_{ij})$, $a_{ji} = a_{ij}$;

Нека кривата C е неизродена, т.е. $\det A \neq 0$;

Нека т. $P(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка в равнината;

Правата $p : f_1(P) \cdot x + f_2(P) \cdot y + f_3(P) \cdot t = 0$ се нарича **поляра** на точката P спрямо кривата C ; тъй като кривата C няма особени точки, полярата е добре дефинирана за всяка точка P ;

нейните хомогенни координати са:

$$p_1 = f_1(P) = a_{11}.x_0 + a_{12}.y_0 + a_{13}.z_0;$$

$$p_2 = f_2(P) = a_{21}.x_0 + a_{22}.y_0 + a_{23}.z_0;$$

$$p_3 = f_3(P) = a_{31}.x_0 + a_{32}.y_0 + a_{33}.z_0;$$

тъй като детерминантата на тази система е различна от 0, ако са дадени координатите на правата p , еднозначно могат да се определят координатите на точката P ; точката P се нарича **полюс** на правата p спрямо кривата C ;

Всяка неразпадаща се крива от втора степен поражда взаимноеднозначно съответствие

$$\psi: P(x_0, y_0, z_0) \leftrightarrow p[f_1(P), f_2(P), f_3(P)]$$

между точките и правите в равнината; това съответствие се нарича **поляриност** относно кривата C ;

Полярата на т. $P \in C$ съвпада с допирателната към кривата през тази точка;

$$\text{Нека } \psi(M_0) = g_0, \psi(M_1) = g_1; \text{ в такъв случай } M_0 \in g_1 \Leftrightarrow M_1 \in g_0;$$

Доказателство:

$$\text{Нека } M_0(x_0, y_0, t_0), M_1(x_1, y_1, t_1);$$

$$M_0 \in g_1 \Rightarrow f_1(M_1).x_0 + f_2(M_1).y_0 + f_3(M_1).t_0 = 0, \text{ т.е. } f(M_1, M_0) = 0;$$

$$\text{но } 0 = f(M_1, M_0) = f(M_0, M_1) = f_1(M_0).x_1 + f_2(M_0).y_1 + f_3(M_0).t_1 \Rightarrow M_1 \in g_0;$$

$$\text{Нека е дадена точка } M(x_0, y_0, t_0) \notin C;$$

$$\text{Нека } \psi(M) = g;$$

Ако $g \cap C = \{M_1, M_2\}$, тогава $\psi(M_1) = g_1$ и $\psi(M_2) = g_2$ са допирателни към кривата C през точката M ; това е така, тъй като $M_1 \in g \Rightarrow M \in g_1$ и $M_2 \in g \Rightarrow M \in g_2$;

Център на крива от втора степен

$$\text{Дадена е крива } C: f(x, y, t) = a_{11}.x^2 + \dots + a_{33}.t^2 = 0;$$

Нека $\det A \neq 0$, т.е. кривата C е неизродена;

Полюсът M_0 на безкрайната права $\omega [0, 0, \rho]$ се нарича **център на кривата C** , т.е.

$$M_0 = \psi(\omega);$$

$$\text{Нека } M_0(x_0, y_0, t_0);$$

Имаме:

$$f_1(M_0) = a_{11}.x_0 + a_{12}.y_0 + a_{13}.t_0 = 0;$$

$$f_2(M_0) = a_{21}.x_0 + a_{22}.y_0 + a_{23}.t_0 = 0;$$

$$f_3(M_0) = a_{31}.x_0 + a_{32}.y_0 + a_{33}.t_0 = \rho \neq 0;$$

тъй като детерминантата на системата е различна от 0

$\Rightarrow$ с точност до ненулев множител системата единствено решение, т.е. всяка неизродена крива от втора степен има точно един център;

Да предположим, че центърът е безкрайна точка, т.е.

$$M_0(x_0, y_0, 0) \Rightarrow$$

$$f_1(M_0) = a_{11}.x_0 + a_{12}.y_0 = 0;$$

$$f_2(M_0) = a_{21} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0 = 0;$$

тук $(x_0, y_0) \neq (0, 0) \rightarrow$ системата има ненулево решение $\rightarrow$ детерминантата на системата е равна на 0, т.е. $A_{33} = 0 \rightarrow$ кривата е от параболичен тип $\rightarrow$ кривите от параболичен тип имат безкраен център; ако $A_{33} \neq 0$, кривата има краен център M , който удовлетворява системата:

$$f_1(M) = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot t = 0;$$

$$f_2(M) = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot t = 0;$$

Централно уравнение на крива от втора степен

Фиксирана е афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\rightarrow \rightarrow$

Спрямо K е дадена крива от втора степен

$$C: f(x, y, 1) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0;$$

Нека кривата C има краен център $M(x_0, y_0, 1)$ спрямо K ;

Фиксираме е афинна координатна система $K' = \{ M_0, e_1, e_2 \}$; $\rightarrow \rightarrow$

Тогава формулите за смяна са:

$$x = x' + x_0;$$

$$y = y' + y_0;$$

Спрямо K' кривата C има уравнение

$$C: f'(x', y', 1) = a_{11} \cdot (x' + x_0)^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot (x' + x_0) \cdot (y' + y_0) + a_{22} \cdot (y' + y_0)^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot (x' + x_0) + 2 \cdot a_{23} \cdot (y' + y_0) + a_{33} = 0, \text{ т.е.}$$

$$C: f'(x', y', 1) = a_{11} \cdot x'^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x' \cdot y' + a_{22} \cdot y'^2 + 2 \cdot f_1(M_0) \cdot x' + 2 \cdot f_2(M_0) \cdot y' + f(M_0) = 0;$$

тъй като M_0 е център $\rightarrow f_1(M_0) = f_2(M_0) = 0$; нека $f(M_0) = a_{33}' \rightarrow$

$C: f'(x', y', 1) = a_{11} \cdot x'^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x' \cdot y' + a_{22} \cdot y'^2 + a_{33}' = 0$ – **централно уравнение** на кривата C ;

Ако $M(x', y') \in C \rightarrow M(-x', -y') \in C \rightarrow$ кривата C е централно симетрична относно точка M_0 ;

Всяка права през центъра на крива от втора степен се нарича **диаметър** на кривата; диаметърът е поляра на някоя безкрайна точка в равнината на кривата; Всяка допирателна в безкрайна точка към крива от втора степен се нарича **асимптота** на кривата;

Главни направления на крива от втора степен

Фиксирана е ортонормирана координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; $\rightarrow \rightarrow$

Спрямо K е дадена крива от втора степен

$$C: f(x, y, 1) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x + 2 \cdot a_{23} \cdot y + a_{33} = 0;$$

Фиксирана е ортонормирана координатна система $K' = \{ O, e_1', e_2' \}$; $\rightarrow \rightarrow$

Спрямо K : $e_1(\vec{\alpha}_1, \beta_1), e_2(\vec{\alpha}_2, \beta_2), \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 = 0, (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$,

$$(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0);$$

Формулите за смяна са:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y';$$

Спрямо K' кривата C има уравнение:

$$C: f(x', y', 1) = a_{11}(\alpha_1 x' + \alpha_2 y')^2 + 2a_{12}(\alpha_1 x' + \alpha_2 y')(\beta_1 x' + \beta_2 y') + a_{22}(\beta_1 x' + \beta_2 y')^2 + 2a_{13}(\alpha_1 x' + \alpha_2 y') + 2a_{23}(\beta_1 x' + \beta_2 y') + a_{33} = 0 \Leftrightarrow$$

$$C: f(x', y', 1) = a_{11}' x'^2 + 2a_{12}' x y + a_{22}' y^2 + 2a_{13}' x + 2a_{23}' y + a_{33} = 0, \text{ където}$$

$$a_{11}' = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\beta_1^2;$$

$$a_{22}' = a_{11}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 + a_{22}\beta_2^2;$$

$$a_{12}' = \alpha_1(a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2) + \beta_1(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_2);$$

$$a_{13}' = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1;$$

$$a_{23}' = a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2;$$

$$K' = ?, \text{ така че } a_{12}' = 0;$$

Разглеждаме следната система:

$$\alpha_2(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1) + \beta_2(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1) = 0;$$

$$\alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 = 0;$$

Решаваме тази система относно α_2 и β_2 ; тъй като тя е хомогенна, търсим ненулево решение $\rightarrow$ детерминантата на системата е равна на нула $\rightarrow$

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = s\alpha_1$$

$$a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = s\beta_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a_{11} - s)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0$$

$$a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - s)\beta_1 = 0$$

Аналогично за α_2, β_2 получаваме:

$$(a_{11} - r)\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = 0$$

$$a_{12}\alpha_2 + (a_{22} - r)\beta_2 = 0$$

търсим ненулево решение за $\alpha_1, \beta_1 \rightarrow$ детерминантата на системата е равна на нула, т.е.

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + A_{33} = 0;$$

това е **характеристично уравнение** на кривата C ;

неговата дискриминантата е:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4A_{33} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0;$$

Ако $D = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0, s_1 = s_2 = (a_{11} + a_{22})/2 = a_{11} = a_{22}$; тогава кривата е окръжност;

Ако $D > 0 \Leftrightarrow s_1 \neq s_2$; за $s = s_1$ получаваме (α_1, β_1) и за $r = s_2$ получаваме

(α_2, β_2) , тъй като r също е корен на характеристичното уравнение;

получените по този начин e_1' и e_2' задават **главните направления** на кривата C ; за окръжността всеки две перпендикулярни направления са главни, а за всяка друга крива от втора степен има точно две главни направления;

спрямо координатната система K' , която има координатни оси по главните направления имаме:

$$a_{11}' = a_{11}.\alpha_1^2 + 2.a_{12}.\alpha_1.\beta_1 + a_{22}.\beta_1^2 = \alpha_1.(a_{11}.\alpha_1 + a_{12}.\beta_1) + \beta_1.(a_{12}.\alpha_1 + a_{22}.\beta_1) = \alpha_1.s_1.\alpha_1 + \beta_1.s_1.\beta_1 = s_1;$$

$$a_{22}' = a_{11}.\alpha_2^2 + 2.a_{12}.\alpha_2.\beta_2 + a_{22}.\beta_2^2 = \alpha_2.(a_{11}.\alpha_2 + a_{12}.\beta_2) + \beta_2.(a_{12}.\alpha_2 + a_{22}.\beta_2) = \alpha_2.s_2.\alpha_2 + \beta_2.s_2.\beta_2 = s_2;$$

$$a_{12}' = 0;$$

→ уравнението на кривата C придобива вида:

$$C : s_1.x'^2 + s_2.y'^2 + 2.a_{13}.x' + 2.a_{23}.y' + a_{33} = 0;$$

20 декември – семинарни занятия

Спрямо ОКС сфера S с център C (a, b, c) и радиус R има уравнение:

$$S: (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2;$$

Ако $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2.a.x - 2.b.y - 2.c.z + d = 0$ е уравнение на сфера, тогава тя има център C (a, b, c) и радиус $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$;

8 януари

Метрични канонични уравнения на криви от втора степен

Фиксирана е ортонормирана координатна система $K = \{ O, e_1, e_2 \}$; → →

спрямо нея текущите координати означаваме с (x, y) ;

Спрямо K е дадена крива от втора степен

$$C: f(x, y) = a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2.a_{13}.x + 2.a_{23}.y + a_{33} = 0;$$

Ако $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, тогава кривата се изразжда в двойка пресичащи се прави, едната от които е безкрайната права;

Нека $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$;

Извършваме смяна на координатната система;

$K \rightarrow K' \{ O, \vec{e}_1', \vec{e}_2' \}$, където векторите $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ са по главните направления на кривата C ;

спрямо K' означаваме текущите координати с (ξ, η) ;

ако s_1 и s_2 са корените на характеристичното уравнение на кривата, тогава в K' тя има следното уравнение:

$$C: f(\xi, \eta) = s_1.\xi^2 + s_2.\eta^2 + 2.a_{13}'.\xi + 2.a_{23}'.\eta + a_{33};$$

1. $A_{33} \neq 0$, т.е. кривата е от хиперболичен или параболичен тип и има краен център $M_0(X_0, Y_0)$ спрямо K' ; $A_{33} \neq 0 \rightarrow s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$ (от характеристичното уравнение);

Извършваме втора смяна на координатната система:

$K' \rightarrow K'' \{M_0, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$; текущите координати спрямо K'' са (X, Y) ;

формулите за смяна са:

$$\xi = X + X_0; \eta = Y + Y_0;$$

в такъв случай кривата C има уравнение:

$C: s_1.X^2 + s_2.Y^2 + a_{33}' = 0$; - **канонично уравнение на крива от втора степен с краен център**;

2. $A_{33} = 0$, т.е кривата е от параболичен тип и няма краен център;

от $A_{33} \rightarrow s_1.s_2 = 0$; нека за определеност $s_1 = 0, s_2 \neq 0$;

Извършваме втора смяна на координатната система:

$K' \rightarrow K'' \{N_0, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$; спрямо K'' означаваме текущите координати с (X, Y) , където $N_0(\lambda, \mu)$ спрямо K'' ;

формулите за смяна са:

$$\xi = X + \lambda; \eta = Y + \mu;$$

в такъв случай кривата C има уравнение:

$$C: s_2.(Y + \mu)^2 + 2.a_{13}'.(X + \lambda) + 2.a_{23}'.(Y + \mu) + a_{33} = 0, \text{ т.е.}$$

$$C: s_2.Y^2 + 2.a_{13}'X + 2.(s_2.\mu + a_{23}').Y + (s_2.\mu^2 + 2.a_{13}'\lambda + 2.a_{23}'\mu + a_{33}) = 0;$$

тук $s_2 \neq 0$, избираме $\mu = (-a_{23}'/s_2)$;

2.1. Нека $a_{13}' \neq 0$; тогава избираме $\lambda = -(s_2.\mu^2 + 2.a_{23}'\mu + a_{33})/2.a_{13}'$ и получаваме следното уравнение:

$$s_2.Y^2 + 2.a_{13}'X = 0;$$

Нека $a_{13}' = 0$, тогава избираме произволно λ ; получаваме следното уравнение:

$$s_2.Y^2 + a_{33}' = 0;$$

Теорема: Спрямо подходяща ортонормирана координатна система (K''), всяка крива от втора степен, която не съдържа безкрайната права има едно от следните три уравнения:

1. $s_1.X^2 + s_2.Y^2 + a_{33}' = 0$ ($s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$);

2. $s_2.Y^2 + 2.a_{13}'X = 0$ ($s_1 = 0, s_2 \neq 0$);

3. $s_2.Y^2 + a_{33}' = 0$ ($s_1 = 0, s_2 \neq 0$);

1.1. Нека $a_{33}' \neq 0$; получаваме:

$$X^2/(-a_{33}'/s_1) + Y^2/(-a_{33}'/s_2) = 1;$$

1.1.1. $(-a_{33}'/s_1) > 0, (-a_{33}'/s_2) > 0$; ако $(-a_{33}'/s_1) = a^2, (-a_{33}'/s_2) = b^2$ уравнението придобива вида:

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1 - \text{получаваме елипса};$$

1.1.2. $(-a_{33}'/s_1).(-a_{33}'/s_2) < 0$; нека например $(-a_{33}'/s_1) > 0$,

$(-a_{33}'/s_2) < 0$; ако $(-a_{33}'/s_1) = a^2, (-a_{33}'/s_2) = -b^2$ уравнението придобива вида:

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1 - \text{получаваме хипербола};$$

1.1.3. $(-a_{33}'/s_1) < 0, (-a_{33}'/s_2) < 0$; ако $(-a_{33}'/s_1) = -a^2$,

$(-a_{33}'/s_2) = -b^2$ уравнението придобива вида:

$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = -1$ - получаваме **имагинерна елипса**;

1.2. Нека $a_{33}' = 0$; получаваме:

$s_2.Y^2 = -s_1.X^2$, т.е. $Y^2 = (-s_1/s_2).X^2$;

1.2.1. $(-s_1/s_2) > 0$; ако $(-s_1/s_2) = k^2$, уравнението придобива

вида: $(Y - k.X).(Y + k.X) = 0$ – получаваме **двойка пресичащи се прави**;

1.2.2. $(-s_1/s_2) < 0$; ако $(-s_1/s_2) = -k^2$, уравнението придобива

вида: $(Y - i.k.X).(Y + i.k.X) = 0$ – получаваме **двойка пресичащи се имагинерни прави**;

2. Записваме уравнението във вида: $Y^2 = (-2.a_{13}'/s_2).X$; ако $p = -a_{13}'/s_2$, тогава уравнението придобива вида:

$Y^2 = 2.p.X$ – получаваме **парабола**;

3.1. Нека $a_{33}' \neq 0$; уравнението придобива вида: $Y^2 = -a_{33}'/s_2$;

3.1.1. $(-a_{33}'/s_2) > 0$; ако $(-a_{33}'/s_2) = k^2$,

уравнението придобива вида:

$(Y - k).(Y + k) = 0$ – получаваме **двойка успоредни прави**;

3.1.2. $(-a_{33}'/s_2) < 0$; ако $(-a_{33}'/s_2) = -k^2$,

уравнението придобива вида:

$(Y - i.k).(Y + i.k) = 0$ – получаваме **двойка успоредни имагинерни прави**;

3.2. Нека $a_{33}' = 0$; уравнението придобива вида: $Y^2 = 0$ – получаваме **двойка сливащи се прави**;

Повърхнини от втора степен

Фиксираме афинна координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{} \rightarrow \vec{}$

Нека $F(x, y, z, t) = a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2.a_{13}.x.z + 2.a_{23}.y.z + a_{33}.z^2 + 2.a_{14}.x.t + 2.a_{24}.y.t + 2.a_{34}.z.t + a_{44}.t^2$;

Множеството S от всички точки M , за които $F(M) = 0$ се нарича **алгебрична повърхнина от втора степен** с уравнение:

$S : F(x, y, z, t) = 0$;

Определена е симетричната матрица $A = (a_{ij})$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ от коефициентите на кривата;

Дефинираме:

$f_1(x, y, z) = a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z + a_{14}.t$

$f_2(x, y, z) = a_{12}.x + a_{22}.y + a_{23}.z + a_{24}.t$

$f_3(x, y, z) = a_{13}.x + a_{23}.y + a_{33}.z + a_{34}.t$

$f_4(x, y, z) = a_{14}.x + a_{24}.y + a_{34}.z + a_{44}.t$;

ако $M_1(x_1, y_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, t_2)$,

$f(M_1, M_2) = f_1(M_1).x_2 + f_2(M_1).y_2 + f_3(M_1).z_2 + f_4(M_1).t_2$;

очевидно са изпълнени:

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) \cdot x + f_2(x, y, z) \cdot y + f_3(x, y, z) \cdot z + f_4(x, y, z) \cdot t;$$

$$f(M, M) = f(M);$$

$$f(M_1, M_2) = f(M_2, M_1);$$

Общи точки на повърхнината от втора степен с права

Дадени са:

повърхнината от степен $S : F(x, y, z) = 0$;

права $g : \lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2 = 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$;

търсим решение на системата

$$F(M) = 0;$$

$$M = \lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2$$

$$\text{т.е. } F(\lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2) = 0;$$

$$F(\lambda \cdot M_1 + \mu \cdot M_2) = \lambda^2 \cdot F(M_1) + 2 \cdot \lambda \cdot \mu \cdot F(M_1, M_2) + \mu^2 \cdot F(M_2);$$

нека за определеност $\mu \neq 0$; полагаме $s = \lambda/\mu$ и получаваме:

$$F(M_1) \cdot s^2 + 2 \cdot s \cdot F(M_1, M_2) + F(M_2) = 0;$$

1. $M_1 \notin S \Leftrightarrow F(M_1) \neq 0$; уравнението е квадратно;

$$D = F(M_1, M_2) - F(M_1) \cdot F(M_2);$$

1.1. $D > 0 \Rightarrow s_1 \neq s_2$ са корени на уравнението $\Rightarrow |g \cap S| = 2$ точки;

в този случай g се нарича **секуща**;

1.2. $D = 0 \Rightarrow s_1 = s_2$ - уравнението има единствено решение $\Rightarrow$

$|g \cap S| = 1$ точка; в този случай g е **допирателна (тангента)**;

1.3. $D < 0 \Rightarrow$ уравнението няма решения $\Rightarrow g \cap S = \emptyset$; в този

случай g се нарича **външна права**;

2. $M_1 \in S \Leftrightarrow F(M_1) = 0$; получаваме:

$$2 \cdot s \cdot F(M_1, M_2) + F(M_2) = 0;$$

Ако $F(M_1, M_2) \neq 0 \Rightarrow s = -F(M_2)/(2 \cdot F(M_1, M_2)) \Rightarrow g$ е секуща;

Ако $F(M_1, M_2) = 0$ и $F(M_2) \neq 0 \Rightarrow$ няма решение $\Rightarrow g$ е допирателна;

Ако $F(M_1, M_2) = 0$ и $F(M_2) = 0 \Rightarrow$ повърхнината S съдържа правата g ; в този случай правата g се нарича **образуваща**;

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$; ако $M(x, y, z)$ е произволна точка $\neq M_0$ от по-горе и $f(M_0,$

$M) = 0 \Rightarrow MM_0$ е допирателна или образуваща;

$$f(M_0, M) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(*) f_1(M_0) \cdot x + f_2(M_0) \cdot y + f_3(M_0) \cdot z + f_4(M_0) \cdot t = 0;$$

това е уравнение на равнина $\Leftrightarrow (f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0), f_4(M_0)) \neq$

$(0, 0, 0, 0)$;

нека $(f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0), f_4(M_0)) = (0, 0, 0, 0)$;

следната хомогенна система трябва да има ненулево решение:

$$a_{11} \cdot x_0 + a_{12} \cdot y_0 + a_{13} \cdot z_0 + a_{14} \cdot t_0 = 0$$

$$a_{12} \cdot x_0 + a_{22} \cdot y_0 + a_{23} \cdot z_0 + a_{24} \cdot t_0 = 0$$

$$a_{13} \cdot x_0 + a_{23} \cdot y_0 + a_{33} \cdot z_0 + a_{34} \cdot t_0 = 0$$

$$a_{14} \cdot x_0 + a_{24} \cdot y_0 + a_{34} \cdot z_0 + a_{44} \cdot t_0 = 0$$

но това е изпълнено точно тогава, когато $\det A = 0$; в такъв случай $(*)$ не е

уравнение на равнина; такава точка M_0 , която анулира f_1, f_2, f_3, f_4 се нарича **особена**

точка на повърхнината S ; повърхнина, която съдържа особена точка се нарича **особена повърхнина**, в противен случай тя се нарича **неособена повърхнина**; Ако повърхнината S е неособена, тогава (*) е винаги уравнение на равнина, която съдържа в себе си всички допирателни прави, които минават през M_0 ; тази равнина се нарича **допирателна равнина** към повърхнината S в точката M_0 ;

Особени повърхнини от втора степен

Нека е дадена една особена повърхнина S ;
това означава, че $\det A = 0$, т.е. $r(A) < 4$;

1. $r(A) = 3 \Rightarrow$ системата по-горе има точно едно решение (с точност до ненулев множител) $\Rightarrow$ повърхнината има точно една особена точка $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$;

Да предположим, че точката M_0 е безкрайна, т.е. $t_0 = 0$; системата трябва да има ненулево решение $(x_0, y_0, z_0, 0) \Rightarrow A_{44} = 0$; нека $z_0 \neq 0$; чрез подходяща смяна на координатната система (транслация) можем да получим координати

$(0, 0, z_0, 0)$ за точка M_0 ; при това коефициентите пред z в уравнението на кривата не се променят $\Rightarrow$ от системата

$a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{34} = 0$, т.е. $F(x, y, z, t) = F(x, y, t)$;

в нехомогенни координати получаваме:

$S: \varphi(X, Y) = 0 \Rightarrow S$ е цилиндрична повърхнина с образувателна Oz ;

особената точка задава направлението на образуващата на

цилиндричната повърхнина;

Нека точката M_0 е крайна, т.е. $t_0 \neq 0$; тогава чрез подходяща смяна на координатната система (транслация) можем да получим координати $(0, 0, 0, t_0)$ за точка M_0 ; при това коефициентите пред t в уравнението на повърхнината не се променят $\Rightarrow$ от системата получаваме $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0 \Rightarrow F(x, y, z, t) = F(x, y, z)$, т.е.

$S: \psi(x/z, y/z) = 0 \Rightarrow S$ е конична повърхнина с връх началото на координатната система, който съвпада с особената точка;

2. $r(A) = 2 \Rightarrow$ системата по-горе има две линейно независими решения и всички други са тяхна линейна комбинация $\Rightarrow$ решението е единствена права от особени точки $\Rightarrow$ повърхнината се изражда в двойка равнини, които се пресичат в тази права;

10 януари – семинарни занятия

Една изродена крива от елиптичен тип представлява двойка пресичащи се имагинерни прави;

Геометрична интерпретация на полярността

Дадена е неизродена крива C от втора степен и точка P , която не лежи на кривата; точка Q е **спрегната** на точка P относно кривата C , ако двойното отношение

$(PQAB) = (PAB)/(QAB) = -1$, където точките А и В са пресечните точки на правата PQ с кривата С, т.е. точките Р, Q, А, В образуват хармонична група;
 геометричното място от точки Q, които са спрегнати на Р относно кривата С е права g, която се нарича поляра на точката Р; точката Р се нарича полюс на правата g;
 казваме, че две прави са **спрегнати** относно кривата С, ако всяка една от правите минава през полюса на другата;

15 януари – семинарни занятия

Конгруенция криви от втора степен е множеството от кривите от втора степен, които минават през три неколинеарни точки А, В, С;
 уравнение на конгруенция:

$$\sigma: \lambda \cdot l_{AB} \cdot l_{BC} + \mu \cdot l_{BC} \cdot l_{CA} + \nu \cdot l_{CA} \cdot l_{AB} = 0, (\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0);$$

15 януари

Метрични канонични уравнения на повърхнини от втора степен

Фиксираме ортонормирана координатна система $K = \{ O, e_1, e_2, e_3 \}$; $\vec{r} \rightarrow \vec{r}$

Нека спрямо нея е дадена повърхнина S –

$$S: F(x, y, z) = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{13} \cdot x \cdot z + \dots + a_{44} = 0;$$

Означаваме с $A = (a_{ij})$ матрицата от коефициентите ($a_{ij} = a_{ji}$);

Както при криви:

характеристичният полином на матрицата A се нарича **характеристично**

уравнение на повърхнината:

$$S^3 + A \cdot S^2 + B \cdot S + A_{44} = 0;$$

тъй като матрицата е симетрична, това уравнение има три реални корена; всеки от тези три корена определя едно главно направление на повърхнината;

ако въведем нова ортонормирана координатна система, така че координатните оси да са по главните направления, коефициентите пред $x \cdot y$, $x \cdot z$, $y \cdot z$ ще станат 0; след това чрез подходяща трансляция получаваме метрично канонично уравнение на повърхнината;

Елипсоид

Една повърхнина от втора степен е елипсоид, ако тя е неособена ($\det A \neq 0$), $A_{44} \neq 0$ и всичките характеристични корени s_1, s_2, s_3 са с еднакви знаци; уравнението му е:

$$\varepsilon: x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1;$$

записваме уравнението по следния начин:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - z^2/c^2 \Rightarrow 1 - z^2/c^2 \geq 0 \Rightarrow |z| \leq c;$$

аналогично получаваме: $|x| \leq a, |y| \leq b$;

покажем, че елипсоидът е **ограничена повърхнина**, той изцяло се намира между равнините $z = -c, z = c; x = -a, x = a; y = -b, y = b$;

Нека пресечем елипсоида ϵ с равнина $z = h$, където $|h| < c$;
получаваме:

$$z = h;$$

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - h^2/c^2 = \text{const}; \text{ - това е елипса};$$

аналогично всички успоредни равнини на координатните равнини, които имат повече от една пресечна точка с елипсоида, го пресичат в елипса;

Нека пресечем елипсоида ϵ с координатните оси;

$$(O_x : y = 0, z = 0) \cap \epsilon;$$

получаваме

$$x = \pm a, y = 0, z = 0 - O_x \text{ пресича } \epsilon \text{ в точките } A_1 (-a, 0, 0), A_2 (a, 0, 0);$$

$$O_y \text{ пресича } \epsilon \text{ в точките } B_1 (0, -b, 0), B_2 (0, b, 0);$$

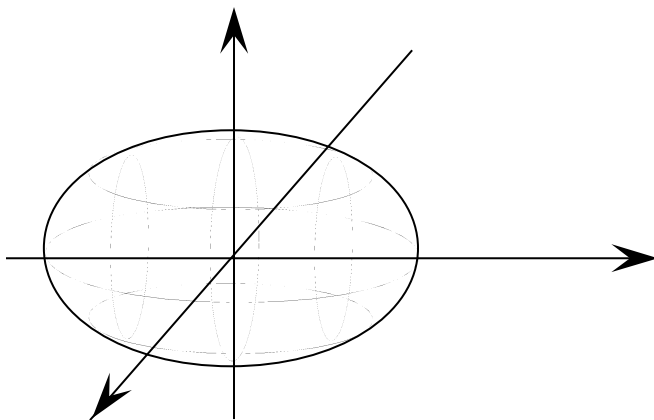
$$O_z \text{ пресича } \epsilon \text{ в точките } C_1 (0, 0, -c), C_2 (0, 0, c);$$

точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ наричаме **върхове** на елипсоида;

елипсоидът не съдържа реални прави, тъй като е ограничена повърхнина;

ако $a = b$ или $b = c$ получаваме **ротационен елипсоид**;

ако $a = b = c$ получаваме **сфера**;



Двоен хиперболоид

Една повърхнина от втора степен е двоен хиперболоид, ако тя е неособена ($\det A \neq 0$), $A_{44} \neq 0$ и $s_1 < 0, s_2 < 0, s_3 > 0$; уравнението му е:

$$\chi: x^2/a^2 + y^2/b^2 = z^2/c^2 - 1;$$

от уравнението получаваме, че $z^2/c^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |z| \geq c \Rightarrow$ двойният хиперболоид е разположен изцяло над равнината $z = |c|$ и под равнината $z = -|c|$;

Нека пресечем хиперболоида χ с равнина $z = h$, където $|h| > c$;

получаваме:

$$z = h;$$

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = h^2/c^2 - 1 = \text{const}; \text{ - това е елипса};$$

Нека пресечем хиперболоида χ с равнина $x = m$;

получаваме:

$$x = m;$$

$$z^2/c^2 - y^2/b^2 = m^2/a^2 + 1 = \text{const}; \text{ - това е хипербола};$$

Нека пресечем хиперболоида χ с равнина $y = n$;
получаваме:

$$y = n;$$

$$z^2/c^2 - x^2/a^2 = n^2/b^2 + 1 = \text{const}; - \text{това е хипербола};$$

пресечните точки на χ с $O_z : x = 0, y = 0$ са: $A_1(0, 0, c)$ и $A_2(0, 0, -c)$ – те се наричат **върхове** на хиперболоида;

този хиперболоид няма реална образуваща; ако има права, която принадлежи на χ , то тя е успоредна на O_{xy} , тъй като няма точки от хиперболоида за $z \in (-|c|, |c|)$;

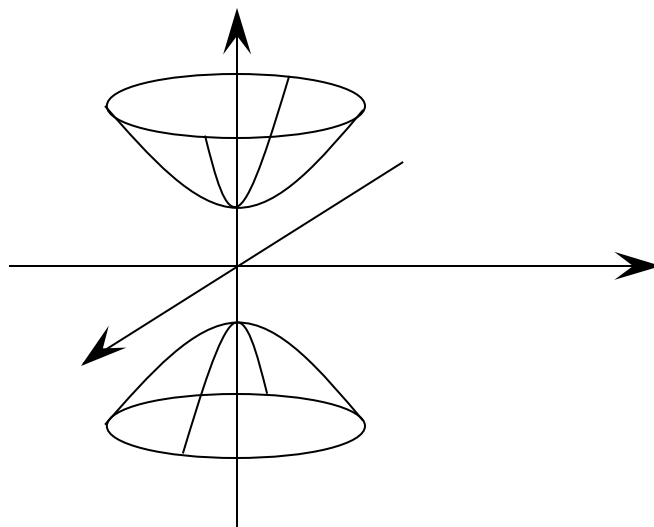
права l , която е успоредна на O_{xy} има параметрично уравнение:

$$x = x_0 + \lambda.n;$$

$$y = y_0 + \lambda.m;$$

$$z = z_0;$$

като заместим в уравнението на хиперболоида получаваме, че имаме 0, 1 или 2 общи точки, т.е. правата l не може да е образуваща;



Елиптичен параболоид

Една повърхнина от втора степен е елиптичен параболоид, ако тя е неособена ($\det A \neq 0$), $A_{44} = 0$, $s_3 = 0$ и $s_1 > 0$, $s_2 > 0$; той има следното уравнение:

$$\pi : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2.z;$$

веднага се вижда, че параболоидът е изцяло разположен в полупространството $z \geq 0$; с координатните оси има точно една пресечна точка и тя е началото на координатната система – нарича се **върх** на параболоида;

Нека пресечем параболоида π с равнина $z = h$, където $h > 0$;

получаваме:

$$z = h;$$

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2.h = \text{const}; - \text{това е елипса};$$

Нека пресечем параболоида π с равнина $x = m$;

получаваме:

$$x = m;$$

$$y^2/b^2 = 2.z - m^2/a^2; - \text{това е парабола};$$

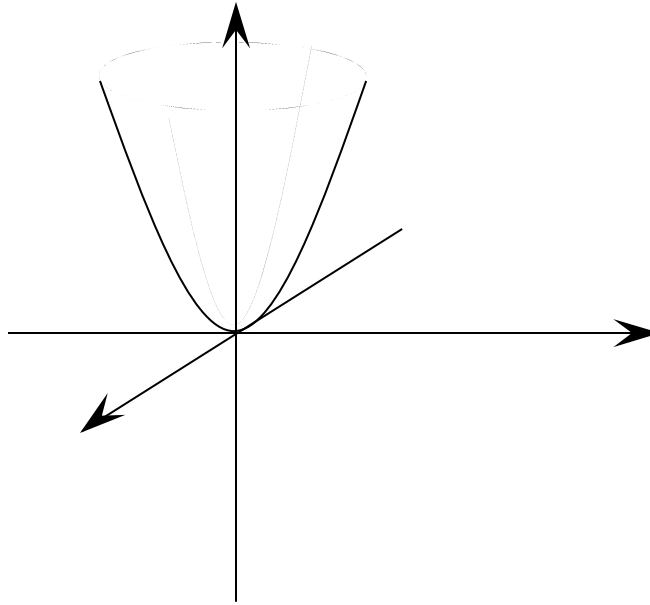
Нека пресечем параболоида π с равнина $y = n$;
получаваме:

$$y = n;$$

$$x^2/a^2 = 2z - n^2/b^2; \text{ - това е парабола};$$

ако $a = b$, параболоидът е **ротационен**;

Свойство: Ако светлинен лъч минава през фокуса на параболоида, след отражение от повърхността му ще стане успореден на O_z ; ако светлинен лъч “влиза” в параболоида по направление успоредно на O_z , тогава след отражение от повърхността му ще мине през фокуса;



Повърхнини съдържащи реални прави

Прост хиперболоид

Една повърхнина от втора степен е прост хиперболоид, ако тя е неособена ($\det A \neq 0$), $A_{44} \neq 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ и $s_3 < 0$; той има следното уравнение:

$$H: x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1;$$

от уравнението не следват пряки ограничения за хиперболоида;

Нека пресечем хиперболоида H с равнина $z = h$;

получаваме:

$$z = h;$$

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 + h^2/c^2 = \text{const}; \text{ - това е елипса};$$

Нека пресечем хиперболоида H с равнина $x = m$;

получаваме:

$$x = m;$$

$$z^2/c^2 - y^2/b^2 = m^2/a^2 - 1; \text{ - това е хипербола};$$

Нека пресечем хиперболоида H с равнина $y = n$;

получаваме:

$$y = n;$$

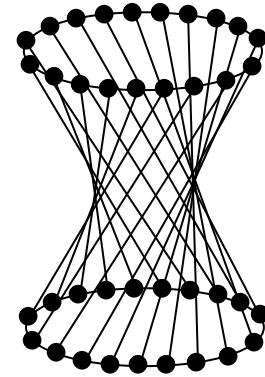
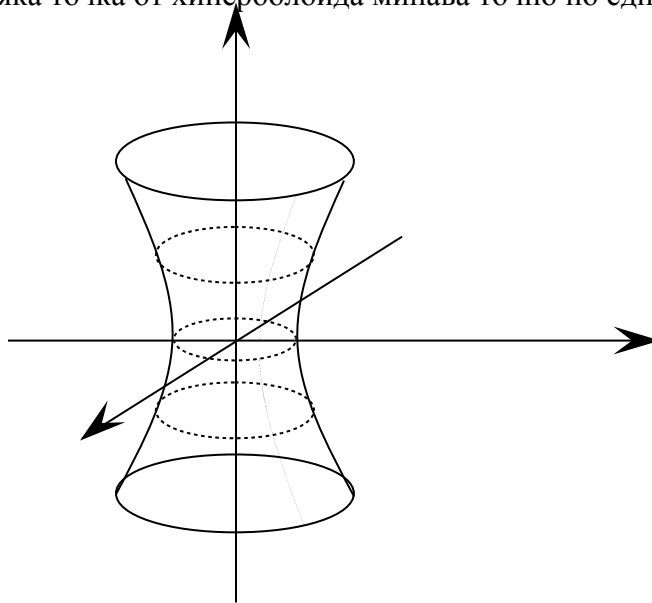
$z^2/c^2 - x^2/a^2 = n^2/b^2 - 1$; - това е хипербола;
 пресечните точки на Н с O_x : $y = 0, z = 0$ са: $A_1(-a, 0, 0)$ и $A_2(a, 0, 0)$;
 пресечните точки на Н с O_y : $x = 0, z = 0$ са: $A_1(0, -b, 0)$ и $A_2(0, b, 0)$;
 хиперболоида Н няма пресечни точки с O_z ;
 Нека запишем уравнението на Н по следния начин:

$$x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1 - y^2/b^2 \Leftrightarrow (x/a - z/c) \cdot (x/a + z/c) = (1 - y/b) \cdot (1 + y/b)$$

Да разгледаме следните семейства прави $l_{\lambda, \mu}$

$$\begin{aligned} \alpha &: \lambda \cdot (x/a + z/c) = \mu \cdot (1 + y/b); \\ \beta &: \mu \cdot (x/a - z/c) = \lambda \cdot (1 - y/b), (\lambda, \mu) \neq (0, 0); \\ &\text{и } l_{\lambda_1, \mu_1}: \\ \alpha_1 &: \lambda_1 \cdot (x/a + z/c) = \mu_1 \cdot (1 - y/b); \\ \beta_1 &: \mu_1 \cdot (x/a - z/c) = \lambda_1 \cdot (1 + y/b), (\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0); \end{aligned}$$

лесно се показва, че правите в двете семейства са две по две кръстосани; освен това тези прави са образуващи за хиперболоида – това е така, тъй като всяка точка, която удовлетворява уравненията на α и β (α_i и β_i) удовлетворява и произведението от уравненията им, което е точно уравнението на Н; през всяка точка от хиперболоида минава точно по една права от двете семейства;



Едната система
образуващи

Хиперболичен параболоид

Една повърхнина от втора степен е хиперболичен параболоид, ако тя е неособена ($\det A \neq 0$), $A_{44} = 0$, $s_3 = 0$, $s_1 > 0$, $s_2 < 0$; той има уравнение:

$$\Pi: x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2 \cdot z;$$

ясно е, че с координатните оси параболоида има пресечна точка единствено началото на координатната система; тя се нарича **седловидна точка** на параболоида;

Нека пресечем параболоида Π с равнина $z = h$;
получаваме:

$$z = h;$$

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2.h = \text{const}; \text{ - това е хипербола};$$

Нека пресечем параболоида Π с равнина $x = m$;
получаваме:

$$x = m;$$

$$y^2/b^2 = -2.z + m^2/a^2; \text{ - това е парабола};$$

Нека пресечем параболоида Π с равнина $y = n$;
получаваме:

$$y = n;$$

$$x^2/a^2 = 2.z - n^2/b^2; \text{ - това е парабола};$$

както при простия хиперболоид, уравнението на хиперболичния параболоид можем да запишем по следния начин:

$$(x/a - y/b).(x/a + y/b) = 2.z;$$

Да разгледаме следните семейства прави $l_{\lambda, \mu}$

$$\alpha : \lambda.(x/a + y/b) = 2.\mu;$$

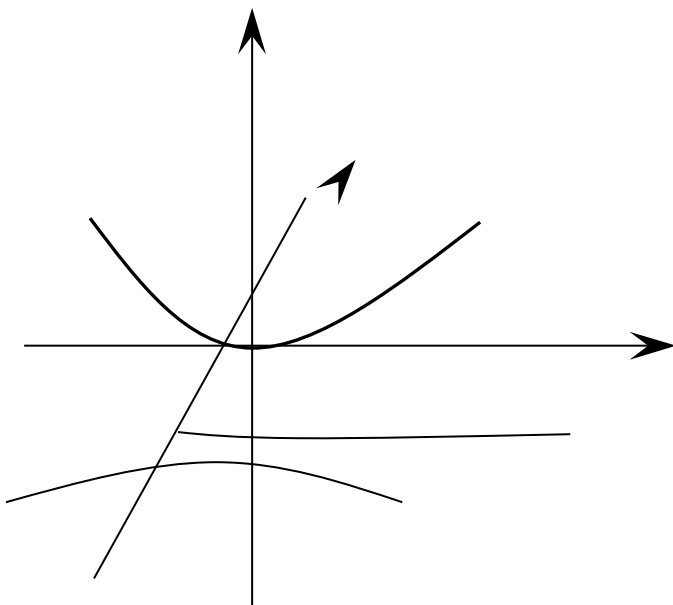
$$\beta : \mu.(x/a - y/b) = \lambda.z, (\lambda, \mu) \neq (0, 0);$$

и l_{λ_1, μ_1} :

$$\alpha_1 : \lambda_1.(x/a + y/b) = \mu_1.z;$$

$$\beta_1 : \mu_1.(x/a - y/b) = 2.\lambda_1, (\lambda_1, \mu_1) \neq (0, 0);$$

това са семейства от праволинейни образуващи на хиперболичния параболоид; те са две по две кръстосани и през всяка точка от параболоида минава точно по една права от двете семейства;



Има и особени повърхнини, които се състоят само от реални прави;

конусът се състои от реални прави, които минават през върха му, а цилиндърът от реални прави, които са успоредни на образуващата му;

например:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ е уравнение на конус;

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ е уравнение на елиптичен цилиндър;

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ е уравнение на хиперболически цилиндър;

$y^2 = 2.p.x$ е уравнение на параболически цилиндър;

Край

16 януари 2002 г.