

ПАРАМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ НА ПРАВА И РАВНИНА В
ПРОСТРАНСТВОТО. ОБЩО И НОРМАЛНО УРАВНЕНИЕ НА
РАВНИНА.

1. Параметрично уравнение на права в пространството.

Една права g в пространството е определена от точка M_0 и вектор p , колинеарен с тази права. Нека спрямо афинна координатна система $Oe_1e_2e_3$ са дадени :

$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x, y, z), p(a, b, c)$. Вектора M_0M има координати $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

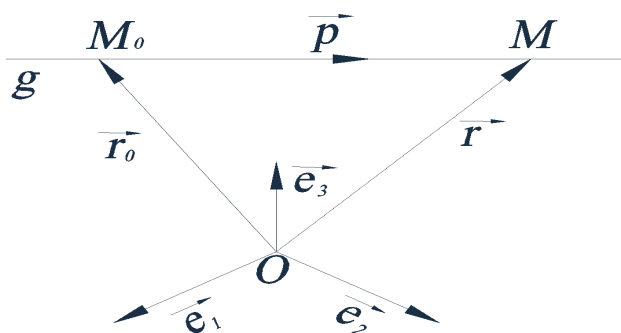
Като имаме предвид, че за да лежи на правата точка M трябва да е в сила равенството :

$$x = x_0 + \lambda a$$

$M_0M = \lambda p$, получаваме следните равенства: $y = y_0 + \lambda b$ (3) – **скалярни**

$$z = z_0 + \lambda c$$

параметрични уравнения на права g в пространството.



Чрез радиус-векторите $r = OM, r_0 = OM_0, M_0M = OM - OM_0$ за **векторното**

параметрично уравнение на правата получаваме: $r = r_0 + \lambda p$. Ако изключим

параметъра λ имаме: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} (= \lambda)$. Ако правата е определена с две точки

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, като сведем този случай до предния за уравнението на правата

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

получаваме: $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$, като изключим параметъра получаваме :

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} (= \lambda), \text{ това е параметрично уравнение на права в}$$

пространството, определена с две точки.

2.Параметрични уравнения на равнина в пространството.

Една равнина ξ в пространството може да се определи с точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $p_1(a_1, b_1, c_1), p_2(a_2, b_2, c_2)$ пренесени в точката M_0 , зададени спрямо афинна координатна система. Точката M лежи в равнината точно, когато векторите M_0M, p_1, p_2 са компланарни, условието, за което е да съществуват λ, μ , такива, че:

$M_0M = \lambda p_1 + \mu p_2$. Вектора M_0M има координати: $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и от горното равенство получаваме :

$$x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2$$

$$(6.1) \quad y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \text{ - скалярни параметрични уравнения на равнината.}$$

$$z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2$$

Чрез радиус-векторите : $r = OM, r_0 = OM_0$ и като вземем предвид, че :

$M_0M = OM - OM_0$, то уравнението на правата получава вида : (6.2) $r = r_0 + \lambda p_1 + \mu p_2$, това се нарича **векторно параметрично уравнение**.

Една равнина може да се определи и с три точки:

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$. Този случай можем да го сведем до предния като положим : $p_1 = M_1M_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), p_2 = M_1M_3(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Сега формулите (6.1) придобиват вида:

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1)$$

3.Общо уравнение на равнина.

Теорема 1: Координатите x, y, z на произволна точка от една равнина удовлетворяват уравнение от вида: (7.1) $Ax + By + Cz + D = 0$, като е изпълнено : (7.2) $|A| + |B| + |C| \neq 0$. Обратно, уравнение от вида (7.1) при условие (7.2) е **уравнение на точно една равнина в пространството**.

Д-во: За да докажем първата част, трябва да покажем, че поне едно от числата A, B, C е различно от нула. Ако допуснем противното следва, че координатите на векторите p_1, p_2 са пропорционални, което означава, че векторите са колинеарни, противно на допуснатото.

За да докажем обратното твърдение, да приемем, че тройката x_0, y_0, z_0 е решение уравнение (7.1), т.е. (7.3) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Приемайки, че $A \neq 0$, да разгледаме равнината ξ_0 , минаваща през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и компланарна на два неколинеарни вектора $p_1^0(-B, A, 0), p_2^0(-\frac{C}{A}, 0, 1)$. Тази равнина сега има уравнение :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -B & A & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ което като се използва (7.3), това уравнение може да се превърне}$$

в (7.1), което е уравнение на поне една равнина. Лесно се съобразява, че тя е единствена. (преписано, не ме питайте).

Теорема: Вектора $p(\lambda, \mu, \nu)$ е компланарен на равнината: $\xi: Ax + By + Cz + D = 0$, точно когато е изпълнено равенството: (7.4) $A\lambda + B\mu + C\nu = 0$.

Д-во: Нека точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи в равнината, т.е. (7.5) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Пренасяме вектора p в точка M_0 и нека означим втория му край с $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектора M_0M_1 има координати $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, което води до:
 $x_1 - x_0 = \lambda$, $y_1 - y_0 = \mu$, $z_1 - z_0 = \nu$. Вектора p е компланарен на равнината, точно когато е изпълнено: $A(x_0 + \lambda) + B(y_0 + \mu) + C(z_0 + \nu) + D = 0$, но като вземем предвид (7.5) се вижда, че последното уравнение е точно (7.4).

Теорема: Равнина $\xi: Ax + By + Cz + D = 0$:

- а) *е успоредна на оста Ох*, точно когато $A=0$, т.е. в уравнението на ξ липсва x .
- б) *е успоредна на оста Оу*, точно когато $B=0$, т.е. в уравнението на ξ липсва y .
- в) *е успоредна на оста Оz*, точно когато $C=0$, т.е. в уравнението на ξ липсва z .
- г) *минава през началото на координатната система т.О*, когато $D=0$, т.е. в уравнението на ξ липсва свободния член.
- д) *е успоредна на координатната равнина Оху*, точно когато $A=B=0$, т.е. уравнението на ξ има вида: $z = \text{const.} \neq 0$.
- е) *е успоредна на координатната равнина Охz*, точно когато $A=C=0$, т.е. уравнението на ξ има вида: $y = \text{const.} \neq 0$.
- ж) *е успоредна на координатната равнина Оуz*, точно когато $B=C=0$, т.е. уравнението на ξ има вида: $x = \text{const.} \neq 0$.
- з) *съвпада с равнината Оху*, точно когато уравнението на ξ има вида: $z=0$.
- и) *съвпада с равнината Охz*, точно когато уравнението на ξ има вида: $y=0$.
- к) *съвпада с равнината Оуz*, точно когато уравнението на ξ има вида: $x=0$.

Д-во: а) Равнината ξ е успоредна на оста Ох точно когато тя е успоредна на вектора $e_1(1, 0, 0)$, като условието за това (от предходната теорема) е $A=0$. Аналогично за б) и в).

г) За да минава през началото на координатната система, трябва координатите му (на началото) да удовлетворяват уравнението на ξ , което на налице точно когато $D=0$.

д) Равнината ξ е успоредна на Оху, точно когато е успоредна на осите Ох и Оу, което е налице точно когато $A=0$, $B=0$ и $C \neq 0$. Сега уравнението на равнината има вида: $Cz + D = 0$ и като разделим на C , получаваме $z = -\frac{D}{C} = \text{const.} \neq 0$, тъй като равнината не минава през началото. Аналогично се доказва е) и ж). Останалите са очевидни.

4. Нормално уравнение на равнина.

Нека ξ е равнина, която не минава през началото на ортонормираната координатна система Охуz. Нека точка Р е петата на перпендикуляра, спуснат от О към равнината и нека α, β, γ са ъглите, които вектора OP сключва с координатните оси Ох, Оу, Оz.

Единичния вектор по направление на OP е $np = \frac{OP}{|OP|}$, където сме положили: $p = |OP| > 0$.

(9.1) $n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $P(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$
 Тогава: (9.2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Една точка лежи в равнината,

точно когато векторите n, PM са перпендикулярни, т.е. $n \cdot PM = 0$. Тъй като PM има координати: $(x - p \cos \alpha, y - p \cos \beta, z - p \cos \gamma)$, като вземем предвид (9.2) за последното равенство получаваме: (9.3) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$. Това уравнение се нарича

нормално уравнение на равнината ξ . Коефициентите x, y, z са координати на единичния нормален вектор на равнината (n), насочен от началото O към равнината.

Ако равнината е зададена с общото си уравнение спрямо ортонормирана координатна система : $\xi : Ax + By + Cz + D = 0$, то нормалното ѝ уравнение се дава с

формулата : (9.3) $\xi : \frac{Ax + By + Cz + D}{-\operatorname{sgn} D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка и

$H(x_1, y_1, z_1)$ е петата на перпендикуляра спуснат от M_0 към ξ . Векторите HM_0, n са колинеарни, следователно съществува число ∂ такова, че е в сила : (9.4) $HM_0 = \partial n$. ∂ се нарича ориентирано разстояние от точка M_0 до равнината и може да го означаваме :

$\partial(M_0, \xi)$. Вижда се, че $|\partial| = |HM_0|$ е разстоянието от точката до равнината. HM_0 има координати : $(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ и като използваме (9.4) имаме :

$x_0 - x_1 = \partial \cos_\alpha$, $y_0 - y_1 = \partial \cos_\beta$, $z_0 - z_1 = \partial \cos_\gamma$ и сега като имаме предвид, че точката H лежи в равнината и условие (9.2) получаваме : $\partial = x \cos_\alpha + y \cos_\beta + z \cos_\gamma - p$.