

Тема 6

Нека $K = O x^1 x^2 x^3$ с фиксирана дясна ортонормирана координатна система в E_3 , а D е област в $\mathbb{R}^2$. Освен това нека в $\mathbb{R}^2$ е фиксирана една дясна ортонормирана координатна система $K' = O' u^1 u^2$.

Определение 1: Всяко непрекъснато изображение

$$x: D \rightarrow E_3$$

се нарича *непрекъсната повърхнина* в E_3 .

Относно K изображението в (1) се определя със задаването на три скалярни функции

$$x^i: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i=1,2,3,$$

където $(x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$ са координатите на вектора $x(u,v)$ относно K .

Подчертаваме, че съгласно Определение 1, една повърхнина S в E_3 е изображение, а не множество от точки.

Определение 2: Точковото множество

$$(1) x(D) = \{B \in E_3 \mid B = x(u,v), (u,v) \in D\}$$

се нарича *носител на повърхнината* S , а S – *параметризирана повърхнина*. Векторното уравнение

$$(2) x = x(u,v), \quad (u,v) \in D$$

се нарича *векторно параметрично уравнение на повърхнината* S , а съответните му относно K три скалярни уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} x^1 &= x^1(u,v), & x^2 &= x^2(u,v), \\ x^3 &= x^3(u,v), & (u,v) &\in D \end{aligned}$$

– *скалярни (координатни)*

параметрични уравнения на S .

Аргументите u, v се наичат параметри на повърхнината.

Определение 3: Ако изображението (1) е инективно, повърхнината се нарича *еднолистна*.

ПРИМЕР: Равнината S с векторно параметрично уравнение:

$$(4) x = x_0 + u.a + v.b,$$

$$a, b \neq 0, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

е еднолистна повърхнина.

Определение 4: Непрекъснатата повърхнина S , дефинирана с (2) (или с (3)) се нарича *n-кратно гладка* ($n \geq 1$), ако:

$$C^n;$$

$$(5) x_u \wedge x_v \neq 0$$

за всяка $(u,v) \in D$, като тук и навсякъде по-нататък използваме съкратените означения

$$x_u = \frac{dx(u,v)}{du}, \quad x_v = \frac{dx(u,v)}{dv}.$$

Нормална околност на точка върху повърхнината

Нека D_0 е подобласт на D , т.е. $D_0 \subset D$, където съдържа точката (u_0, v_0) .

Разглеждаме рестрикцията

$$(8) \quad x|_{D_0}: D_0 \rightarrow E_3.$$

Дефинираме: **Определение 5:** Множеството от точки $S_0 = x(D_0)$ се нарича *околност на точката* $P_0 = x(u_0, v_0)$ върху повърхнината S .

Очевидно точката P_0 има безбройно много околности върху S . За някои от тях изображението (8) е от по-специален вид. Ще докажем следната Теорема:

Теорема 1: Ако S е гладка повърхнина, дефинирана с (1), то за всяка точка $(u_0, v_0) \in D$ съществува

подобласт $D_0 \subset D$, съдържаща (u_0, v_0) и такава, че изображението (9) $x|_{D_0}: D_0 \rightarrow S = x(D_0)$ е биективно.

Доказателство. Нека (u_0, v_0) е произволна точка от D , а $P = x(u_0, v_0)$ – съответната ѝ точка от повърхнината S . От гладкостта на S следва, че $(x_u \wedge x_v)(u_0, v_0) \neq 0$ и да предположим за конкретност, че $(10) (x^1_u x^2_v - x^2_u x^1_v)|_{(u,v)=(u_0,v_0)} = D(x^1, x^2)|_{(u,v)=(u_0,v_0)} \neq 0$.

$$v=v_0 \quad D(u,v) \big|_{v=v_0}$$

Но тогава системата уравнения

$$(11) x^1 = x^1(u,v), \quad x^2 = x^2(u,v)$$

могат да бъдат решени относно u, v .

По-точно, съществува достатъчно малка област U_0 в координатната равнина $O x^1 x^2$, съдържаща точката (x^1_0, x^2_0) и достатъчно малка област $D_0 \subset D$, съдържаща точката (u_0, v_0) и такава, че за всяка двойка $(x^1, x^2) \in U_0$ съществува точно една двойка $(u,v) \in D_0$, която е решение на (11), т.е.

$$(12) u = f_1(x^1, x^2), \quad v = f_2(x^1, x^2)$$

и освен това $(x^1(u,v), x^2(u,v)) \in U_0$ за всяка $(u,v) \in D_0$. Оттук следва, че изображението

$$(13) \varphi: D_0 \rightarrow U_0,$$

определено с (11) е биективно.

Когато (u,v) се мени в D_0 , съвкупността $S_0 = x(D_0)$ S е околност на точката $P_0 = x(u_0, v_0)$ върху S . Ако (u', v') и (u'', v'') са две различни двойки на D_0 , то поради биективността на изображението (13) имаме

$$(x^1(u', v'), x^2(u', v')) \neq (x^1(u'', v''), x^2(u'', v''))$$

$$(x^1(u', v'), x^2(u', v')) \neq (x^1(u'', v''), x^2(u'', v'')) \neq (x^1(u', v''), x^2(u', v'')) \neq (x^1(u'', v'), x^2(u'', v'))$$

т.е. изображението (9) е инективно. Тъй като по дефиниция е и сюрективно, то следва, че е биективно.

Определение 6: Околността S_0 , която е образ на D_0 при биективното изображение (8), се нарича *нормална околност на точката* $P_0 = x(u_0, v_0)$ върху S .

От **Теорема 1** и **Определение 6** следва, че всяка точка на гладката повърхнина S притежава нормална околност. Очевидно всяка нормална околност е еднолистна.

Теорема 1 ни дава основание да наречем параметрите u, v на гладката повърхнина S криволинейни координати на точката $P = x(u,v)$ в параметризацията (1). Ето защо понякога ще използваме и по-краткото означение $P(u,v)$ вместо $P = x(u,v)$.

Смяна на параметрите върху повърхнината

Нека S е непрекъснатата повърхнина, зададена с векторното параметрично уравнение (2) и да разглеждаме биективното изображение

$$(14) \wedge: D \rightarrow D,$$

където $\wedge$ е област в $\mathbb{R}^2$, определено с уравненията

$$(15) \quad u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}.$$

Тогава определено е изображението

$$(16) \quad \bar{\wedge} = x \wedge \quad : \quad \wedge \rightarrow E_3,$$

което на всяка точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}$

съпоставя точката $\wedge \in E_3$ с радиус-вектор.

Очевидно, ако изображението (14) е непрекъснато, то непрекъснато е и изображението (16), тъй като е произведение на непрекъснати изображения. Но тогава съгласно

Определение 1 изображението (16) определя непрекъснатата повърхнина $\wedge$ с векторно параметрично уравнение

$$(17) \quad \wedge = \wedge(\bar{u}, \bar{v}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{D}.$$

Тема 7

Нека (1) $S: x = x(u,v), (u,v) \in D$ е гладка повърхнина, а

$$(2) \quad c^*: u = u(q), \quad v = v(q), \quad q \in J$$

е гладка линия в

D . Тогава, като заместим уравненията

(2) в уравнението (1), получаваме

векторното параметрично уравнение

$$(3) x = x(u(q), v(q)), \quad q \in J$$

на линията $c = x(c^*)$ върху

S .

Определение 1: Уравненията (2) се наричат *вътрешни уравнения на линията* c върху повърхнината S . Тъй като c^* е гладка линия, то

$$(4) |\dot{u}(q)| + |\dot{v}(q)| \neq 0 \quad \text{за всяко } q \in J.$$

Определение 2: а) Линия c върху S , във всички точки на която криволинейната координата v е константа, се нарича *параметрична u-линия*.

б) Линия c върху S , във всички точки на която криволинейната координата u е константа, се нарича *параметрична v-линия*.

Следователно линията c с вътрешни уравнения (2) е точно тогава параметрична u -линия на повърхнината S , когато

$$5) u = u(q), \quad v = \beta, \quad \beta = \text{const}, \quad q \in J.$$

Сега условието (4) приема вида

$$6) \dot{u}(q) \neq 0 \quad \text{за всяко } q \in J.$$

Аналогично, линията c с вътрешни

уравнения (2) е точно тогава

параметрична v -линия на S , когато

$$7) u = \alpha, \quad v = v(q), \quad \alpha = \text{const}, \quad q \in J.$$

В този случай имаме

$$8) \dot{v}(q) \neq 0 \quad \text{за всяко } q \in J.$$

Ако c_1 е гладка u -линия с вътрешни уравнения (5), то от (6) следва, че функцията $u(q)$ е монотонна и следователно има еднозначно определена обратна функция $\lambda(u)$, която също е гладка. Тогава можем да направим в (5) гладката смяна

$$q = \lambda(u), \quad \wedge \in J_u,$$

където $J_u = \{u(q) \in \mathbb{R} \mid q \in J\}$ и за

параметричната u -линия c_1 намираме представянето

$$(9) c_1: u = \wedge, \quad v = \beta, \quad \wedge \in J_u.$$

Неравенството (8) ни позволява да проведем аналогични разсъждения и за гладката v -линия c_2 с вътрешни уравнения (7).

За нея получаваме представянето

$$(10) c_2: u = \alpha, \quad v = \wedge, \quad \wedge \in J_v,$$

където $J_v = \{v(q) \in \mathbb{R} \mid q \in J\}$.

Ще отбележим, че ако $S_0 \subset S$ е нормална околност на точката P_0 върху S , то през P_0 при дадена параметризация минава точно една параметрична u -линия и точно една параметрична v -линия.

Придружаващ триедър на повърхнината

Нека $P_0(u_0, v_0)$ е фиксирана точка от гладката повърхнина S и c е гладка линия върху S през P_0 . Векторът $\square_0 = x_u(u_0, v_0) \cdot \dot{u}(q_0) + x_v(u_0, v_0) \cdot \dot{v}(q_0)$ върху тангентата m_0 на c в P_0 е линейна комбинация на постоянните вектори $x_u(u_0, v_0)$ и $x_v(u_0, v_0)$, които поради гладкостта на S са линейно независими. Следователно тангентата m_0 лежи в равнината S_{P_0} , определена от точката $P_0(u_0, v_0)$ и векторите $x_u(u_0, v_0)$ и $x_v(u_0, v_0)$.

С това доказваме:

а) Тангентата m_0 в точката P_0 на произволна линия c през P_0 върху S лежи винаги в равнината S_{P_0} .

Определение 3: Тангентата m_0 в точката P_0 на линията c през P_0 върху S се нарича тангента на повърхнината в P_0 .

Сега ще докажем и обратното на а) твърдение:

б) Ако m_0 е произволна права през точката P_0 в равнината S_{P_0} , то тя е тангента в P_0 към някаква линия върху S през P_0 .

Доказателство. Нека p_0 е произволен ненулев вектор, колинеарен с правата m_0 . Тогава той е компланарен с равнината S_{P_0} и следователно съществува ненулева двойка числа (λ, μ) такава, че $p_0 = \lambda \cdot x_u(u_0, v_0) + \mu \cdot x_v(u_0, v_0)$.

Разглеждаме линията c_0 върху S с параметрични уравнения

$$(1) c_0: u = u_0 + \lambda q, v = v_0 + \mu q, q \in J_0,$$

където J_0 е достатъчно малък интервал, съдържащ нулата такъв, че $(u, v) \in D$. От (1) при $q = 0$

получаваме $u = u_0, v = v_0$ и следователно линията c_0 минава през точката P_0 . Като заместим (1) в (1), получаваме векторното параметрично уравнение

$$x = x(u_0 + \lambda q, v_0 + \mu q)$$

на линията c_0 . Оттук следва, че тангентата на c_0 в P_0 е определена с точката P_0 и вектора

$$\square = x_u(u_0, v_0) \cdot \dot{u}(q_0) + x_v(u_0, v_0) \cdot \dot{v}(q_0) = \lambda \cdot x_u(u_0, v_0) + \mu \cdot x_v(u_0, v_0) = p_0$$

и следователно съпада с правата m_0 .

От а) и б) следва:

Теорема 1. Тангентите на повърхнината S в произволна точка $P = x(u, v)$ лежат в равнината S_P , определена от точката P и двата неколинеарни вектора x_u и x_v в P . Обратном всяка права през P в равнината S_P е тангента на S в P .

Определение 4. Равнината S_P се нарича тангенциална (допирателна) равнина на повърхнината S в точката P .

От всичко казано дотук следва, че тангенциалната равнина S_P в точката P на S има векторно параметрично уравнение

$$(12) y = x + \rho \cdot x_u + \sigma \cdot x_v, \quad \rho, \sigma \in \square$$

и общо уравнение

$$(13) (y - x) \cdot x_u \times x_v = 0,$$

където y е радиус-векторът относно O

на произволна точка в S_P .

Определение: Полупространството относно допирателната равнина S_P на S в P , в което сочи векторът l се нарича положително, а другото – отрицателно полупространство.

Сега вече можем да ориентиране и допирателната равнина S_P с избор на положителна посока в нея.

Определение: Положителна посока на въртене в S_P наричаме посоката, обратна на посоката, обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка, наблюдавана от произволна точка на положителното полупространство относно S_P .

Теорема 2: Придружаващият триедър $T = Px, x_u, x_v$ на повърхнината S не зависи от избора на координатната система K и е инвариантно свързан с S с точност до преориентиране на нормалата при произволна еднаквост.

ТЕМА 8

Нека S е гладка повърхнина с векторно параметрично уравнение

$$1) x = x(u, v), (u, v) \in D$$

и $P(u, v)$ е произволна точка върху нея.

Определение 1: Допирателен вектор на повърхнината S в точката $P(u, v)$ (накр. вектор върху повърхнината S в точката $P(u, v)$) се нарича всеки свързан вектор с начало P , който лежи в допирателната равнина S_P на S в P .

Ако c е гладка линия върху S с вътрешни уравнения

$$2) u = u(q), v = v(q), q \in J,$$

която минава през точката P , т.е. $P = x(u(q), v(q))$, то допирателният вектор

$$\square \text{ на } c \text{ в } P \text{ има представянето}$$

$$3) \square = x_u \cdot \dot{u} + x_v \cdot \dot{v}$$

и следователно е вектор върху S в P .

С това се установява следната теорема:

Теорема 1: Допирателният вектор $\square$ на гладката линия $c: x = x(u(q), v(q)), q \in J$, върху S в P е вектор върху S през P .

Вярно е и обратното твърдение:

Теорема 2: Всеки вектор върху S през P е допирателен вектор към някаква линия върху S през P .

Доказателството следва непосредствено от разсъжденията, с които установихме верността на

Теорема 1. За параметричната u -линия $c_1: u = q, v = \text{const}$ през $P \square S$ имаме $\dot{u} = 1, \dot{v} = 0$ и от (3) намираме $\square = x_u$. Следователно векторът x_u е допирателен вектор в P към u -линията в тази точка. По аналогичен начин се установява, че векторът x_v е допирателен вектор към параметричната v -линия $c_2: u = \text{const}, v = q$ през точката P .

Ако p е произволен вектор върху S , то векторите p, x_u и x_v са компланарни. Тъй като векторите x_u и x_v са линейно независими, то съществува λ и μ така, че $p = \lambda \cdot x_u + \mu \cdot x_v$.

Очевидно (λ, μ) са координатите на вектора p относно афинната координатна система Px, x_u, x_v в тангенциалната равнина S_P на S в P .

Определение 2: Числата λ и μ , определени с (4), се наричат контравариантни координати (или параметри) на вектора p върху S при параметричното представяне (1) на повърхнината.

От (3) следва, че контравариантните координати на допирателния вектор $\square$ към c в P са $\lambda = \dot{u}, \mu = \dot{v}$. Тогава

очевидно векторът x_u има контравариантни координати $\lambda = 1, \mu = 0$, а векторът x_v – $\lambda = 0, \mu = 1$.

Първа основна форма на повърхнината

Като използваме (4), за скаларния квадрат p^2 на вектора p върху S , намираме

$$p^2 = (\lambda \cdot x_u + \mu \cdot x_v)^2 = x_u^2 \cdot \lambda^2 + 2x_u x_v \cdot \lambda \mu + x_v^2 \cdot \mu^2$$

Определение 3: Квадратичната форма $I(\lambda, \mu) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$ която е дефинирана във всяка точка на повърхнината S , се нарича първа основна форма на повърхнината. От (5) следва

$$I(\lambda, \mu) \geq 0,$$

като равенство имаме точно тогава, когато $\lambda = 0, \mu = 0$. Следователно имаме:

Теорема 3: Първата основна форма на повърхнината е положително определена (дефинитна).

Впрочем горното твърдение следва и от неравенствата

$$E > 0, EG - F^2 > 0.$$

Теорема 4: Първата основна форма е инвариантна при произволна еднаквост, допустима смяна на параметрите върху повърхнината и не зависи от координатната система.

Доказателство: От равенството (5) и от инвариантността на дължината на вектор при еднаквост и при допустима смяна на параметрите върху повърхнината следва инвариантността и на първата основна форма, а независимостта ѝ от координатната система се проверява непосредствено.

Теорема 5: Коефициентите E, F и G на първата основна форма на повърхнината са инвариантни при произволна еднаквост и не зависят от координатната система.

Теорема 6: Коефициентите E, F и G на първата основна форма на повърхнината не са инвариантни при допустима смяна на параметрите върху повърхнината.

Доказателство: Да направим уравнението (1) на S гладката смяна $u = \tilde{u}(\tilde{u}), v = \tilde{v}(\tilde{u}, \tilde{v}) \square \square$.

Тогава (1) приема вида

$$\square = \tilde{u}(\tilde{u}, \tilde{v}), (\tilde{u}, \tilde{v}) \square \square,$$

където $\square(\tilde{u}, \tilde{v}) = x(\tilde{u}(\tilde{u}), \tilde{v}(\tilde{u}, \tilde{v}))$. Имаме

$$\square_u = x_u \cdot u_u + x_v \cdot v_u, \square_v = x_u \cdot u_v + x_v \cdot v_v$$

и от тук намираме

$$\square = \square_u^2 = (x_u \cdot u_u + x_v \cdot v_u)^2 = x_u^2 \cdot u_u^2 + 2x_u x_v \cdot u_u v_u + x_v^2 \cdot v_u^2 = Eu_u^2 + 2Fu_u v_u + Gv_u^2,$$

$$\square = Eu_v^2 + 2Fu_v v_v + Gv_v^2.$$

От тези формули ясно се вижда, че в общия случай коефициентите E, F и G не са инвариантни при допустима смяна на параметрите върху повърхнината.

9. Ъгли върху повърхнината. Лице на област върху повърхнината

Нека S е гладка повърхнина и $p_1(\lambda_1, \mu_1)$ и $p_2(\lambda_2, \mu_2)$ са допирателни вектори на S в т. $P = x(u, v)$. Мяската $\square = (p_1, p_2)$ на ориентирания ъгъл $p_1 p_2$

има безбройно мн. стойности
 $\square = (p_1, p_2) = \delta(p_1, p_2) + 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, където $\delta = +1$ или $\delta = -1$ в зависимост от това дали двойката вектори (p_1, p_2) е пол. или отр.
 Относно установената пол. посока в допирателната равнина S_p на S в P , а $(p_1, p_2)_e$ е мярката на е-ъгъла $p_1 p_2$. От равенството за $\square \Rightarrow$
 $\cos \square = \cos(p_1, p_2)_e$, $\sin \square = \delta \sin(p_1, p_2)_e$ и
 тогава $p_1 p_2 = |p_1| |p_2| \cos \square$, $p_1 \times p_2 = |p_1| |p_2| \sin \square \cdot l$. Също имаме, че
 $p_1 p_2 = E \lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G \mu_1 \mu_2$,
 $p_1 \times p_2 = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) W \cdot l$, $|p_1| =$

$$\sqrt{I(\lambda_1, \mu_1)}, |p_2| = \sqrt{I(\lambda_2, \mu_2)}$$

$$\text{и от тук намираме } \cos \Theta = \frac{E \lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G \mu_1 \mu_2}{\sqrt{I(\lambda_1, \mu_1)} \cdot \sqrt{I(\lambda_2, \mu_2)}},$$

$$\cos \Theta = \frac{(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) W}{\sqrt{I(\lambda_1, \mu_1)} \cdot \sqrt{I(\lambda_2, \mu_2)}}.$$

Получените формули определят Θ с точност до събираемо, което е целочислено кратно на 2π .

Т: Допирателните вектори $p_1(\lambda_1, \mu_1)$ и $p_2(\lambda_2, \mu_2)$ към S в P са перпендикулярно точно тогава, когато
 $E \lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G \mu_1 \mu_2 = 0$.

Нека g_1 и g_2 са две тангенти S в P , ориентирани съответно в ненулеви вектори p_1 и p_2 . Тогава ориентиран ъгъл от g_1 до g_2 наричаме ъгъла $p_1 p_2$.

Ако предположим, че $c_1:u_1 = u(q_1)$, $v_1 = v(q_1)$, $q_1 \square J_1$ и $c_2:u_2 = u(q_2)$, $v_2 = v(q_2)$, $q_2 \square J_2$ са две гладки линии върху S , които минават през точка $P = x(u, v)$, то върху техните тангенти g_1 и g_2 в P лжат съответно ненулеви вектори $p_1(\lambda_1 = u_1, \mu_1 = v_1)$ и $p_2(\lambda_2 = u_2, \mu_2 = v_2)$.

Ориентиран ъгъл от c_1 до линията c_2 наричаме ориентирания ъгъл от тангентата g_1 до тангентата g_2 , ориентирани съответно с векторите p_1 и p_2 .

$$\text{Като заместим се получава: } \cos \Theta = \frac{E \dot{u}_1 \dot{u}_2 + F(\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{u}_2 \dot{v}_1) + G \dot{v}_1 \dot{v}_2}{\sqrt{I(\dot{u}_1, \dot{v}_1)} \cdot \sqrt{I(\dot{u}_2, \dot{v}_2)}},$$

$$\sin \Theta = \frac{(\dot{u}_1 \dot{v}_2 - \dot{u}_2 \dot{v}_1) W}{\sqrt{I(\dot{u}_1, \dot{v}_1)} \cdot \sqrt{I(\dot{u}_2, \dot{v}_2)}}.$$

За мярката ω на ориентирания ъгъл от параметричната u -линия до параметричната v -линия в точка

$$P = x(u, v) \text{ на } S, \text{ намираме } \cos \omega = \frac{F}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}},$$

$$\sin \omega = \frac{W}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}}.$$

Т: Параметричната мрежа върху S е ортогонална тогава и само тогава, когато $F=0$ за всяко $(u, v) \square D$.

Лице на област върху повърхнината
 Нека изображението x , с което е дефинирана гладка повърхнина S , е биективно. Ако M е затворена подобласт на D , то определената точкова съвкупност $N = x(M)$ S $x(D)$ ще наричаме затворена област върху S .

$$\text{О: Числото } \sigma = \iint_M W du dv =$$

$$\iint_M \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

където E, F и G са коефициентите на първата основна форма на S в точката

$y = x(u, v)$, $(u, v) \square M$, се нарича лице на областта N върху S .

Т: Лицето σ е инвариантно при произволна еднаквост в E^3 , при допустима смяна на параметрите върху повърхнината и не зависи от избора на координатната система.

10. Три инварианти на линия върху повърхнината

Нека $S: x = x(u, v)$, (u, v) е 3-кратно гладка повърхнина и $s: u = u(s)$, $v = v(s)$, $s \square J_s$ е 3-кратно гладка права линия върху S , като s е дължината на дъгата на s , мерена от фиксирана точка P_0 на s до произволна точка $P = x(u(s), v(s))$. В точката P от s е определен десният ортонормиран придружаващ триедър на Френе $T = P_{tnb}$ на кривата. Със същата точка P свързваме и втори десен ортонормиран триедър $T' = P_{tp'l}$, първият координатен вектор на който е единичният вектор t на тангентата на s в P , а третият – единичният координатен вектор p е едноозначно определен с равенството $p = l \times t$.

Така определеният триедър $T' = P_{tp'l}$ освен от кривата s зависи и от повърхнината S . Понеже $p \perp l \Rightarrow$ че p лежи и в нормалната равнина s в P .

О: Правата в S_p , определена с точката P и вектора p се нарича мангенциална норма на кривата s в точката P върху оивърхнината S .

За десния ортонормиран триедър $T' = P_{tp'l}$ са в сила формулите $t^2 = p^2 = l^2 = 1$, $p l = t \times p = 0$, $p \times l = t$, $l \times t = p$, $t \times p = l$, $tp = l$.

Предполагаме, че нормалната равнина P_{nb} на кривата s в точката P е ориентирана с дясната ортонормирана координатна система $K' = P_{bn}$, т.е. положителната посока в нея е онази, която е обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка, наблюдавана от полупространството, в което стои векторът t . Очевидно е, че $p = \cos(n, p) \cdot n + \sin(n, p) \cdot b$, $l = \cos(n, l) \cdot n + \sin(n, l) \cdot b$, но $(n, p) = (n, l) + (l, p) + k \cdot 2\pi$, $k = \pm 1, \dots$ и ако означим $(n, l) = \Theta$, то $(n, p) = \Theta - \pi/2 + k \cdot 2\pi$, $k' = 0, \pm 1, \dots$ и можем да запишем следното $p = \sin \Theta \cdot n - \cos \Theta \cdot b$, $l = \cos \Theta \cdot n + \sin \Theta \cdot b$. От тези 2 формули следват и обратните формули $n = \sin \Theta \cdot p + \cos \Theta \cdot l$, $b = -\cos \Theta \cdot p + \sin \Theta \cdot l$.

Понеже n и l са гладки функции на s , то ограничавайки се в достатъчно малка околност на точката P_0 върху s имаме, че Θ е еднозначна и при това гладка функция на s . За новия триедър $T' = x_{tp'l}$ получаваме формули от вида $t' = \gamma \cdot p + v \cdot l$, $p' = -\gamma \cdot t + \alpha \cdot l$, $l' = -v \cdot t - \alpha \cdot p$ с някакви коефициенти γ, v и α , които очевидно са функции на s . От формулите на Френе имаме, че $t' = \square \cdot n$, намираме $t' = \square \cdot n = \square \sin \Theta \cdot p + \square \cos \Theta \cdot l$. Като сравним получаваме $\gamma = \square \sin \Theta$, $v = \square \cos \Theta$. След диференциране на второто равенство получаваме: $b' = \Theta' \sin \Theta \cdot p + \Theta' \cos \Theta \cdot l - \cos \Theta (-\gamma \cdot t + \alpha \cdot l) + \sin \Theta (-v \cdot t - \alpha \cdot p) = (\gamma \cos \Theta - v \sin \Theta) \cdot t + (\Theta' - \alpha)(\sin \Theta \cdot p + \cos \Theta \cdot l) = (\Theta' - \alpha) \cdot n$, т.е., $b' = (\Theta' - \alpha) \cdot n$. От формулите на Френе $b' = -\square \cdot n \Rightarrow \alpha = \Theta' + \square$. Като заключение може да се каже, че γ и v са поне 1-кратно гладки функции на s , а α – поне непрекъсната.

Освен това понеже $\square, T, \Theta$ и Θ' са инварианти при движение в E^3 и при смяна на параметрите върху S и s , а също така не зависят и от координатната система K , то същите свойства притежават и величините γ, v и α .

О: Функциите γ, v и α се наричат съответно геодезична кривина, нормална кривина и геодезична торзия на кривата s върху системата K , то същите свойства притежават и величините γ, v и α .

11. Нормална кривина на линия върху повърхнината

Ако умножим скалярно с l $t' = \gamma \cdot p + v \cdot l$ и с t скалярно $l' = -v \cdot t - \alpha \cdot p$ за нормална кривина v на линията s върху повърхнината S в точката $P = x(u(s), v(s))$ получаваме $v = t' \cdot l = -tl'$, но $t \cdot x' = x_{uu} \cdot u'^2 + x_{uv} \cdot u'v' + x_{vv} \cdot v'^2 + x_{vu} \cdot v'u' + x_{vv} \cdot v'^2$. Заместваме и получаваме $v = l \cdot x_{uu} \cdot u'^2 + 2 l \cdot x_{uv} \cdot u'v' + l \cdot x_{vv} \cdot v'^2$, като сме отчели, че $l \cdot x_{uv} = 0$, $l \cdot x_{vu} = 0$. Означаваме $L = l \cdot x_{uu}$, $M = l \cdot x_{uv}$, $N = l \cdot x_{vv}$ и заместваме. Получава се $v = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$.

Да предположим, че 3-кратно гладка крива s върху S е зададена с вътрешни уравнения $u = u(q)$, $v = v(q)$, $q \square J$, където q е общ параметър на кривата. Тогава от $u' = \dot{u}/\dot{q}$, $v' = \dot{v}/\dot{q}$, $\square =$

$$\sqrt{I(\dot{u}, \dot{v})} \text{ получаваме представяне за нормална кривина } v \text{ спрямо общ параметър върху кривата: } v =$$

$$\frac{L\dot{u}^2(2ra) + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2(2ra)}{E\dot{u}^2(2ra) + F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2(2ra)},$$

Нормалната кривина v е определена само за 2-кратно гладки правилни криви върху 2-кратно гладка повърхнина S . Тази формула ни позволява да дефинираме v за произволна гладка линия върху 2-кратно гладка повърхнина S .

О: Ако S е 2-кратно гладка повърхнина и s е гладка линия върху S се нарича нормална кривина на s в точката $P = x(u(q), v(q))$.

Т: Всички гладки линии S , които минават през точка $P = x(u, v)$ и се допират в нея до една и съща тангентата g имат в P една и съща нормална кривина v , определена с формулата $v =$

$$\frac{L\lambda(2ra) + 2M\lambda\mu + N\mu(2ra)}{E\lambda(2ra) + F\lambda\mu + G\mu(2ra)},$$

където (λ, μ) е произволен ненулев вектор върху тангентата g на S в P и s е гладка линия върху S , която минава през P и се допира там до g . Тогава векторите $\square(\dot{u}, \dot{v})$ и $p(\lambda, \mu)$ са колинеарни и следователно съществува число $k \neq 0$ такова, че $\dot{u} = k\lambda$, $\dot{v} = k\mu$.

О: Нормална кривина на тангентата g в точка P на S наричаме нормална кривина v на P на коя да е гладка линия върху S , която минава през P и се допира там до g .

Т: Ако g е права върху S , то тя е във всяка своя точка P тангентата на S с нормална кривина $v=0$.

Д-во: Нека g , определена с $u=u(q)$, $v=v(q)$, $q \square J$, е права върху S и $P = x(u(q), v(q))$ е произволна нейна

точка. Понеже тангентата на g в P е самата права g , то тя лежи в тангенционалната равнина S_P на S в P . Оттук следва, че g е тангентата на S в P .

Тъй като g е права, то $\square \square = 0$, за всяко $q \square J$ и следователно $(\square, \square)x/ = 0$ за всяко $q \square J$. Но $\square = x_{uv}$. $\hat{u}^2 + 2x_{uv}$. $\hat{u}\hat{v} + x_{vv}\hat{v}^2 + x_{uu}\hat{u}\hat{v}$. $\square$ и като заместим и отчетем получаваме: $l\square = l x_{uv}$. $\hat{u}^2 + 2 l x_{uv}$. $\hat{u}\hat{v} + l x_{vv}\hat{v}^2 = L \hat{u}^2 + M \hat{u}\hat{v} + N \hat{v}^2 = 0$ и следователно $v=0$ за всяко $q \square J$, т.е. нормалната крива на g е 0 във всяка нейна точка P .

12. Втора основна форма на повърхнината

О: Квадратната форма $\Pi(\lambda, \mu) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2$ се нарича втора основна форма на повърхнината S . За по-кратко може да се запише във вида

$$v = \frac{\Pi(\lambda, \mu)}{I(\lambda, \mu)}$$

Като заместим

$$L = \frac{1}{w} x_{uu} x_v x_{uv}, M = \frac{1}{w} x_{uv} x_v x_{uv},$$

$$N = \frac{1}{w} x_{vv} x_v x_{vv}.$$

Дефинираме частното спрямо u и v и получаваме $l_{x_u} + l_{x_{uv}} = 0$, $l_{x_u} + l_{x_{uv}} = 0$, $l_{x_v} + l_{x_{uv}} = 0$, $l_{x_v} + l_{x_{vv}} = 0 \Rightarrow$

$$L = -l_{x_u}, M = -l_{x_v}, N = -l_{x_v}.$$

Т: Втора основна форма на S и нейните коефициенти са инварианти при движение и не зависят от координатната система.

Д-во: Инвариантността на втората основна форма на повърхнината S при произволно движение следва от равенството $\Pi(\hat{u}, \hat{v}) = l\square$.

Координатната им система е независима.

Т: Втората основна форма на повърхнината S е инвариантна до знак при 2-кратно гладка смяна на параметрите върху повърхнината.

Д-во: Като направим 2-кратно гладка смяна $u = u(u^-, v^-)$, $v = v(u^-, v^-)$, $(u^-, v^-) \square D^-$, уравнението ще приеме вида $x = x(u^-, v^-)$, $(u^-, v^-) \square D^-$, където $x^-(u^-, v^-) = x(u(u^-, v^-), v(u^-, v^-))$, $(u^-, v^-) \square D^-$. Също имаме $x^-_{u^-} = x_{u^-} u_{u^-} + x_{v^-} v_{u^-}$, $x^-_{v^-} = x_{u^-} u_{v^-} + x_{v^-} v_{v^-}$ и $l^- = \eta \cdot l$,

$$D(u^-, v^-) \Rightarrow l^-_{u^-} = \eta(l_{u^-} u_{u^-} + l_{v^-} v_{u^-}), l^-_{v^-} = \eta(l_{u^-} u_{v^-} + l_{v^-} v_{v^-}).$$

$$L^- = -l^-_{x_u} = -\eta(l_{x_u} u_{u^-} + l_{x_v} v_{u^-}) = \eta[(-l_{x_u} u_{u^-} + (-l_{x_u} - l_{x_v}) u_{u^-} v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{u^-} + l_{x_u} u_{v^-}) v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{v^-} + l_{x_u} u_{v^-} + l_{x_v} v_{v^-}) v_{u^-}] = \eta[L u_{u^-} + 2M u_{u^-} v_{u^-} + N v_{u^-} + (-l_{x_u} - l_{x_v}) u_{u^-} v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{u^-} + l_{x_u} u_{v^-}) v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{v^-} + l_{x_u} u_{v^-} + l_{x_v} v_{v^-}) v_{u^-}] = \eta[L u_{u^-} + 2M u_{u^-} v_{u^-} + N v_{u^-} + (-l_{x_u} - l_{x_v}) u_{u^-} v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{u^-} + l_{x_u} u_{v^-}) v_{u^-} + (-l_{x_v} v_{v^-} + l_{x_u} u_{v^-} + l_{x_v} v_{v^-}) v_{u^-}].$$

Тъй като λ и μ са контравариантните координати на произволен допирателен вектор r към S в P , то вместо тях можем да вземем контравариантните координати $\hat{u}$ и $\hat{v}$ на допирателния вектор $\square$ на произволна линия $s: u = u(q)$, $v = v(q)$, $q \square J$, върху S през P . Тогава: $\Pi(\hat{u}, \hat{v}) = L \hat{u}^2 + 2M \hat{u}\hat{v} + N \hat{v}^2$, но $\hat{u} = u_{u^-}$, $\hat{u}^- + u_{v^-}$, $\hat{v}^- = v_{u^-}$, $\hat{v}^- + v_{v^-}$. $\hat{u}^-$ и $\hat{v}^-$ в крайна сметка получаваме, че $\Pi(\hat{u}, \hat{v}) = \eta \Pi(\hat{u}^-, \hat{v}^-)$, $\square$ което твърдението е доказано.

Т: Коефициентите на втората основна форма на S не са инварианти при допустима смяна на параметрите върху повърхнината.

13. Асимптотични тангенти на повърхнината

Нека $S: x = x(u, v)$, $(u, v) \square D$ (1) е 2-кратно гладка повърхнина и $P = x(u, v)$ е произволна нейна точка.

Опр4.5.1. Една тангентата g на S в P се нарича асимптотична тангентата на S в P , ако нормалната и кривина в P е равна на 0 .

Теорема 4.5.1. Една тангентата g на S в P се нарича асимптотична тогава и само тогава, когато $L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = 0$ (2), където (λ, μ) са контравариантните координати на произволен ненулев вектор r върху g .

Теорема 4.5.2. Ако g е права върху S , то тя е асимптотична тангентата на S във всяка своя точка.

Сега ще установим броя на асимптотичните тангенти в произволна точка $P = x(u, v)$ на S . От теорема 4.5.1 следва, че всяко реално ненулево решение на квадратното уравнение (2) определя асимптотична тангентата на повърхнината. Имаме следните възможности:

1) $M^2 - LN > 0$

Квадратното уравнение (2) има две различни реални решения и следователно S има в P две различни реални асимптотични тангенти.

Опр4.5.2. Точка от S , в която съществуват две различни реални асимптотични тангенти на S , се нарича хиперболична точка на повърхнината. Повърхнина, всичките точки на която са хиперболични, се нарича хиперболична повърхнина.

2) $M^2 - LN < 0$

Сега квадратното уравнение (2) няма реални решения и следователно S няма реални асимптотични тангенти в P .

Опр4.5.3. Точка от S , в която не съществуват реални асимптотични тангенти на S , се нарича елиптична точка на повърхнината. Повърхнина, всичките точки на която са елиптични, се нарича елиптична повърхнина.

3) $M^2 - LN = 0$ Имаме два подслучая:

3.1) $L = N = M = 0$ В този случай квадратното уравнение (2) се удовлетворява от всяка двойка (λ, μ) и следователно всяка тангентата на S през P е асимптотична.

Опр4.5.4. Точката от S , в която $L = N = M = 0$ се нарича равнинна точка на повърхнината.

3.2) $|L| + |N| + |M| \neq 0$ Квадратното уравнение (2) има точно едно реално решение, което определя една реална асимптотична тангентата на S в P .

Опр4.5.5. Точка от S , която съществува една реална асимптотична тангентата на S , се нарича параболична точка на повърхнината. Повърхнина, всичките точки на която са параболични, се нарича параболична повърхнина.

Асимптотични линии на повърхнината. Дефиниране:

Опр4.5.6. Една гладка линия s върху S се нарича асимптотична линия на S , ако във всяка точка на s , тангентата и е асимптотична тангентата на повърхнината в тази точка.

Ако предположим, че гладката линия s върху S има вътрешни уравнение

$u = u(q)$, $v = v(q)$, $q \square J$ (3), то в произволна точка $P = (u(q), v(q))$ на s допирателният и вектор $\square$ има контравариантни координати $(\hat{u}, \hat{v})$. Тогава от Опр 4.5.6 и Теорема 4.5.1 следва:

Теорема 4.5.3. Линията s , определена с (3), е асимптотична линия на повърхнината S тогава, когато е интегрална линия на диференциалното уравнение $L\hat{u}^2 + 2M\hat{u}\hat{v} + N\hat{v}^2 = 0$ (4)

Нека S е хиперболична равнина. Тогава от Теорема 4.5.3 следва, че през всяка нейна точка минават точно две реални асимптотични линии. Очевидно параметричните линии на S са асимптотични линии тогава и само тогава, когато $L = 0$, $N = 0$.

Ако S е елиптична повърхнина, то тя няма реални асимптотични линии. През всяка точка на една параболична повърхнина минава точно една асимптотична линия.

Една геометрична характеристика на асимптотичните линии се дава със следната

Теорема 4.5.4. Една 2-кратно гладка линия s върху 2-кратно гладката повърхнина S е тогава и само тогава асимптотична, когато или е права, или е правилна крива, във всяка точка на която оскулачната и равнина съвпада с допирателната равнина на повърхнината в тази точка.

Доказателство.

а) Необходимост. Нека s е 2-кратно гладка асимптотична линия с вътрешни уравнения (3) и пространствено уравнение $x = x(u(q), v(q))$, $q \square J$. Тогава от $(xx\hat{x}) \times l = l \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} - l \cdot \hat{x} \cdot \hat{x} = -\Pi(\hat{u}, \hat{v}) \cdot \hat{x}$ (5) Предвид (4), следва $(xx\hat{x}) \times l = 0$ за всяко $q \in J$ (6)

Имаме следните две възможности:

1. $\hat{x} \cdot \hat{x} = 0$ за всяко $q \square J$. Тогава съгласно Теорема 3.4.1 линията s е права (или част от права).

2. $\hat{x} \cdot \hat{x} \neq 0$ за някакво $q_0 \square J$. Съществува околност $J_0 \subset J$ на q_0 такова, че $\hat{x} \cdot \hat{x} \neq 0$ за всяко $q \square J_0$, т.е. частта $C_0 = x(J_0) \subset s$ е носител на правилна крива, във всяка точка на която е в сила равенството (6). Но от него следва, че оскулачната равнина на C_0 в произволна нейна точка и тангенциалната равнина на S в същата точка съпадат, тъй като минават през една и съща точка и имат колинеарни нормални вектори.

б) Достатъчност. Ако s е права върху S , то съгласно Теорема 4.5., тя е асимптотична тангентата на S във всяка своя точка и следователно е асимптотична линия на S . Нека s е правилна крива върху S , във всяка точка на която оскулачната и равнина съвпада с допирателната равнина на S в същата точка. Тогава съответните им нормални вектори $(xx\hat{x})$ и l са колинеарни и следователно е удовлетворена равенството (6). От (5) и (6) получаваме $\Pi(\hat{u}, \hat{v}) = 0$ и съгласно Теорема 4.5.3 кривата s е асимптотична линия на S .

14.Геодезична торзия на линия върху повърхнината.

Нека $S: x=x(u,v)$, $(u,v) \in D$ (1) е 3-кратно гладка повърхнината и $c: u=u(s)$, $v=v(s)$, $s \in J$ е 3-кратно гладка правилна крива върху S . Ако $P=x(u(s),v(s))$ е произволна точка на S , в нея е дефинирана взаимната инвариантна на c и S геодезична торзия, за която от 4.(8)намираме $\alpha = p'l = -p'l^*$ (3)

Но $p=l \times t$ и от (3) следва $\alpha = tll^*$ Имаме

$$t \times l = x' \times l = (x_u' \cdot u' + x_v' \cdot v') \times l = x_u' \times l \cdot u' + x_v' \times l \cdot v' = \frac{1}{W} [x_u' \times (x_u' \times x_v') \cdot u' + x_v' \times (x_u' \times x_v') \cdot v'] = \frac{1}{W} [(x_u' x_v' x_u' - x_u'^2 x_v') \cdot u' + (x_v'^2 x_u' - x_u' x_v' x_v') \cdot v'] = \frac{1}{W} [(F \cdot x_u' - E \cdot x_v') \cdot u' + (G \cdot x_u' - F \cdot x_v') \cdot v'] = \frac{F \cdot u' + G \cdot v'}{W} \cdot x_u' - \frac{E \cdot u' + F \cdot v'}{W} \cdot x_v'$$

И понеже $l^* = l_u' \cdot u' + l_v' \cdot v'$, от (4) намираме

$$\alpha = \left(\frac{F \cdot u' + G \cdot v'}{W} \cdot x_u' - \frac{E \cdot u' + F \cdot v'}{W} \cdot x_v' \right) \cdot (l_u' \cdot u' + l_v' \cdot v') = l_u' x_u' \frac{F \cdot u' + G \cdot v'}{W} \cdot u' - l_u' x_v' \frac{E \cdot u' + F \cdot v'}{W} \cdot u' + l_v' x_u' \frac{F \cdot u' + G \cdot v'}{W} \cdot v' - l_v' x_v' \frac{E \cdot u' + F \cdot v'}{W} \cdot v' = \frac{1}{W} [(Eu' + Fv')(Mu' + Nv') - (Fu' + Gv')(Lu' + Mv')]$$

Окончателно получаваме $\alpha = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & Fu' + Gv' \\ Lu' + Mv' & Mu' + Nv' \end{vmatrix}$ (5)

Ако отнесем кривата спрямо произволен параметър q , то имаме $u' = \frac{u}{s}$, $v' = \frac{v}{s}$, $s = \sqrt{I(u,v)}$

и (5) приема вида

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} Eu + Fv & Fu + Gv \\ Lu + Mv & Mu + Nv \end{vmatrix}}{W(Eu^2 + 2Fuv + Gv^2)} \quad (6)$$

Формула (6) ни позволява да дефинираме геодезична торзия за произволна гладка линия върху 2-кратно гладка повърхнината. По точно: Опр4.6.1. Ако S е 2-кратно гладка повърхнината с векторно параметрично уравнение (1) и $c: u=u(q)$, $v=v(q)$, $q \in J$ е гладка линия върху S , числото (6) наричаме геодезична торзия на c в точката $P=x(u(q),v(q))$ По-нататък имаме: Теорема4.6.1. Всички гладки линии върху S , които минават през точка $P=x(u,v)$ и се допират там до една и съща тангентата g , имат в P една и съща геодезична торзия α , определена с формулата

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} E\lambda + F\lambda & F\lambda + G\mu \\ L\lambda + M\mu & M\lambda + N\mu \end{vmatrix}}{W(E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2)} \quad (7),$$

Където (λ, μ) са контравариантните координати на произволен ненулев вектор върху g .

Доказателството на теоремата не се отличава принципно от това на Теорема 4.4.1 и ние няма да го излагаме. Сега можем да разширим дефиницията на α . Имаме:

Опр.4.6.2. Геодезична торзия на тангентата g в точка $P=x(u,v)$ на S наричаме геодезична торзия α в P на коя да е гладка линия c върху S , която минава през P и се допира там до g . Геодезична торзия α на g тангентата се определя с формулата (7)

15. Главни тангенти на повърхнината

Дефинираме:

Опр4.6.3. Една тангентата g на повърхнината S в точката P се нарича главна тангентата на S в P , ако е геодезичната и торзия в P е равна на 0. От Определение 4.6.3 и (7) следва: Теорема4.6.2. Една тангентата g на S в P е главна точка тогава, когато е изпълнено равенството $\begin{vmatrix} E\lambda + F\lambda & F\lambda + G\mu \\ L\lambda + M\mu & M\lambda + N\mu \end{vmatrix} = 0$ (8),

Където (λ, μ) са контравариантните координати на произволен ненулев вектор върху g .

Записваме (8) във вида

$$(EM+FL)\lambda^2 + (EN+GL)\lambda\mu + (FN+GM)\mu^2 = 0 \quad (9)$$

Уравнението (9) е хомогенно квадратно относно λ и μ и на всяко негово решение съответства главна тангентата на повърхнината S през P . Да Разгледаме най-напред специалния случай, когато

$$EM-FL=0, EN+GL=0, FN+GM=0 \quad (10)$$

Тъй като $|E| + |F| + |G| \neq 0$, то следва, че съществува число k такова, че $L=k \cdot E$, $M=k \cdot F$, $N=k \cdot G$ (11)

Ако $k=0$, от (11) следва

$$L=0, M=0, N=0 \text{ и съгласно Опр4.5.4}$$

P е равнинна точка на повърхнината. Опр4.6.4. Точка P от повърхнината S , в която са в сила равенствата (11) при $k \neq 0$, се нарича омбилична точка на S . Получихме:

Теорема4.6.3. Ако точката P от повърхнината S е равнинна или омбилична, то всяка тангентата на S през P е главна.

Да разгледаме сега общия случай, когато

$$\begin{vmatrix} EM - FL & EN - GL \\ FN - GM & EN - GL \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

Ще покажем, че

$$(EN - GL)^2 - 4(EM-FL)(FN-GM) > 0 \quad (13)$$

С непосредствена проверка установяваме, че

$$FN-GM = \frac{1}{E} [F(EN-GL) - G(EM-FL)] \quad (14)$$

Като използваме (14), пресмятаме

$$(EN - GL)^2 - 4(EM-FL)(FN-GM) = (EN - GL)^2 - 4 \frac{E}{F} (EN-GL)(EM-FL) + 4$$

$$\frac{G}{E} (EM - FL)^2 = [EN - GL - 2 \frac{F}{E} (EM - FL)]^2$$

-4

$$\frac{F^2}{E^2} (EM - FL)^2 + 4 \frac{G}{E} (EM - FL)^2 = [EN - GL - 2 \frac{F}{E} (EM - FL)]^2 + [2 \frac{W}{E} (EM - FL)]^2$$

И следователно

$$(EN - GL)^2 - 4(EM - FL)(FN - GM) \geq 0$$

(15)

Ще покажем, че равенството в (15) е невъзможно. Ако допуснем, че в (15) се достига равенство, то би следвало, че

$$EM-FL=0, EN-GL=0$$

а от (14) следва и равенството $FN-GM=0$ (17)

Но (16) и (17) противоречат на (12) и следователно в сила е равенството (13). От него следва, че квадратното уравнение (9) има две реални решения, на които съответстват две главни тангенти на S в P .

Ще покажем, че главните тангенти на S в P са перпендикулярни помежду си.

Наистина, нека g_1 и g_2 са главни тангенти на S в P и $p_1(\lambda_1, \mu_1)$ и $p_2(\lambda_2, \mu_2)$ са ненулеви вектори,

колинеарни съответно с g_1 и g_2 . Тъй като (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) са решения на (9), то от познатите ни връзки между корените и коефициентите на едно квадратно уравнение имаме $\lambda_1 \lambda_2 = k(FN-GM)$, $\mu_1 \mu_2 = k(EM-FL)$, $\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = -k(EN-GL)$

С някакво число $k \neq 0$. С помощта на (18) пресмятаме

$$\lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G \mu_1 \mu_2 = k[E(FN - GM) - F(EN - GL) + G(EM - FL)] = 0$$

И съгласно Теорема 4.3.7

допирателните вектори p_1 и p_2 са перпендикулярни.

С това установихме следната Теорема4.6.4. Ако точката P от повърхнината S е неравнинна и неомбилична, то съществуват точно две главни тангенти на S през P и те са перпендикулярни помежду си. От инвариантността на геодезичната торзия α и Опр.4.6.3 следва:

Теорема4.6.5. Главните тангенти са инвариантно свързани с повърхнината при движение при 2-кратногладка смяна на параметрите на повърхнината и не зависят от координатната система K .

16. Главни кривини, Гаусова и средна кривина на повърхнината

Ако точката $P=x(u,v)$ е равнинна или омбилична точката повърхнината S , то за коефициентите на първата и втората основни форми са в сила равенствата (11), в които имаме $k=0$, ако P е равнинна и $k \neq 0$ - ако P е омбилична. Като заместим (11) във формула 4.(25), за нормална кривина ν на произволна тангентата g на S през P , получаваме

$$v = \frac{II(\lambda, \mu)}{I(\lambda, \mu)} = \frac{kI(\lambda, \mu)}{I(\lambda, \mu)} = k$$

Докажем:

Теорема 4.6.6. В равнинна или омбилична точка P на 2-кратно гладка повърхнината S нормалните кривини на всички тангенти са равни, като общата нормална кривина е 0 в равнинна точка и различна от 0 в омбилична точка.

Нека сега P е произволна неравнинна и неомбилична точка на S и $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ са двете главни тангенти на S в P. Ако $\mathbf{p}_1(\lambda_1, \mu_1)$ и $\mathbf{p}_2(\lambda_2, \mu_2)$ са ненулеви вектори съответно върху $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, то съгласно (8) имаме

$$\begin{bmatrix} E\lambda_i + F\mu_i & F\lambda_i + G\mu_i \\ L\lambda_i + M\mu_i & M\lambda_i + N\mu_i \end{bmatrix} = 0, \quad i=1,2 \quad (23)$$

$$\text{Очевидно} \quad |E\lambda_i + F\mu_i| + |F\lambda_i + G\mu_i| \neq 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава от (23) и (24) намираме} \\ L\lambda_i + M\mu_i = k_i(E\lambda_i + F\mu_i), \\ M\lambda_i + N\mu_i = k_i(F\lambda_i + G\mu_i), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{И за нормалната кривина } v_i \text{ на тангентата } \mathcal{G}_i \text{ в P получаваме} \\ v_i = \frac{II(\lambda_i, \mu_i)}{I(\lambda_i, \mu_i)} = \frac{L(\lambda_i + M\mu_i)\lambda_i + (M\lambda_i + N\mu_i)\mu_i}{(E\lambda_i + F\mu_i)\lambda_i + (F\lambda_i + G\mu_i)\mu_i}$$

k_i

Заместваме $k_i = v_i$ в (25) и подреждаме по λ_i и μ_i . Имаме $(L - v_i E)\lambda_i + (M - v_i F)\mu_i = 0$ $(M - v_i F)\lambda_i + (N - v_i G)\mu_i = 0$ От (26) елиминираме λ_i, μ_i и получаваме, че нормалните кривини v_1 и v_2 на двете главни тангенти $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ на S в P са корените на квадратното уравнение

$$\begin{bmatrix} L - vE & M - vF \\ M - vF & N - vG \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

$$\text{Което записано в развит вид е} \\ (EG - F^2)v^2 - (EN + GL - 2FM)v + LN - M^2 = 0 \quad (28)$$

Теорема 4.6.7. В неравнинна и неомбилична точка P на 2-кратно гладка повърхнината S нормалните кривини v_1 и v_2 на двойката главни тангенти на S в P са корени на квадратното уравнение (28).

Опр. 4.6.5. Нормалните кривини v_1 и v_2 на двете главни тангенти на S в P се наричат главни кривини на повърхнината в точката P.

Опр. 4.6.6. Двете симетрични функции $K = v_1 v_2$ и $H = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ (29)

На главните кривини v_1 и v_2 се наричат съответно Гаусова кривина и средна кривина на повърхнината S в точката P. Като използваме зависимостите между корените и коефициентите на квадратно уравнение, от (27) и (29) намираме

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN + GL + 2FM}{2(EG - F^2)}, \quad (30)$$

$$\text{а самото квадратно уравнение (27) можем да запишем във вида} \\ v^2 - 2Hv + K = 0$$

От Опр. 4.5.2, Опр. 4.5.3, Опр. 4.5.5 и (30) непосредствено следва: Теорема 4.6.8. Една неравнинна точка $P_0(u_0, v_0)$ на S е точно тогава а) хиперболична, когато $K(u_0, v_0) < 0$; б) елиптична, когато $K(u_0, v_0) > 0$;

в) параболична, когато $K(u_0, v_0) = 0$.

По-нататък имаме:

Теорема 4.6.9. а) Главните кривини, Гаусовата кривина и средната кривина в точка от повърхнината са инварианти при движение и не зависят от координатната система.

б) Главните кривини и средната кривина са инварианти до знак, а Гаусовата кривина е инвариантна, при допустима смяна на параметрите върху повърхнината.

Тема 18

Опр.: Две прави се наричат успоредни, ако са различни, лежат в една равнина и нямат пресечна точка. Ако правите а и b са успоредни, това се означава с $a \parallel b$ или $b \parallel a$, а ако стъпадат – $a = b$.

Нека а е произволна права в Е3. През всяка точка на Е3 съществува точно една права, която или е успоредна на а, или съпада с а. По този начин всяка права а в Е3 поражда една съвкупност U_a от прави, които или са успоредни, или съпадат с а. Очевидно всеки две прави от U_a или са успоредни, или съпадат, тъй като по отделно са успоредни или съпадат с а.

Нека имаме две прави а и b и породените от тях съвкупности U_a и U_b . Ако $a \parallel b$ или $a = b$, то всяка права от U_a ще принадлежи и на U_b и обратно, всяка права на U_b ще принадлежи и на U_a , т.е. двете съвкупности U_a и U_b са идентични и това се означава с $U_a = U_b$ или $U_b = U_a$.

Ако а не е успоредна на b и а не съпада с b, то не съществува никаква права, която да принадлежи едновременно и на U_a и на U_b , т.е. двете съвкупности нямат никаква обща права.

Опр.: Съвкупността U_a , породена от една права а, се нарича безкрайно отдалечена рочка или само безкрайна точка. Всяка права от U_a се нарича представител на безкрайна точка U_a . Очевидно всяка безкрайна точка се поражда от коя да е своя права и само от такава права. Нека а е произволна крайна равнина. През всяка точка Е3 съществува точно една равнина, която или е успоредна на а, или съпада с а. По този начин всяка равнина а в Е3 поражда съвкупност u_a от равнини, които или са успоредни или съпадат с а.

Опр.: Съвкупността u_a , породена от а, се нарича безкрайна права, породена от а. Всяка равнина от u_a се нарича представител на безкрайна права u_a .

Опр.: Съвкупността Ω от всички безкрайни точки и всички безкрайни прави се нарича безкрайна равнина.

Опр.: Съвкупността от всички крайни и безкрайни точки, прави и равнини се нарича разширено евклидово пространство.

Разширеното евклидово пространство се бележи с E^3^* .

Инцидентност в разширеното евклидово пространство

Опр.: Точката А и правата b наричаме инцидентни точно тогава, когато:

- 1) при безкрайна А и крайна b, b е представител на А.
- 2) при безкрайна А и безкрайна b всеки представител на А е успореден или инцидентен с всеки представител на b.

Опр.: Точката А и равнината β наричаме инцидентни точно тогава, когато:

- 1) при безкрайни А и крайни β , всеки представител на А е успореден или инцидентен с β
- 2) А е безкрайна и β е безкрайна

Опр.: Правата α и равнината β наричаме инцидентни точно тогава, когато:

- 1) при безкрайна α и крайна β , β е представител на α
 - 2) α е безкрайна и β е безкрайна
- Сл.: 1) Някоя крайна точка не е инцидентна с безкрайна права или безкрайна равнина
- 2) Някоя крайна права не е инцидентна с безкрайна равнина
- Т.: Върху всяка крайна права лежи точно една безкрайна точка.

Д-во: Ако α е крайна права, то тя поражда безкрайна точка U_α и тъй като α е представител на $U_\alpha \Rightarrow U_\alpha$ лежи върху α . Ще докажем, че върху α няма втора безкрайна точка. Да допуснем обратното и безкрайната точка $U_{\alpha'}$ лежи върху $\alpha \Rightarrow$ правата α е представител на $U_{\alpha'}$. Получихме, че крайната права α е представител и на U_α , и на $U_{\alpha'} \Rightarrow U_\alpha = U_{\alpha'}$.

Т.: Върху всяка крайна равнина лежи точно една безкрайна права.

Д-во: Нека α е крайна равнина. Тогава тя поражда безкрайна равнина u_α и понеже α е представител на $u_\alpha \Rightarrow u_\alpha$ лежи в α . Ако допуснем, че има и друга безкрайна права $u_{\alpha'}$ в $\alpha \Rightarrow \alpha$ е представител и на $u_{\alpha'}$. Тъй като безкрайните прави u_α и $u_{\alpha'}$ имат един и същ представител $\alpha \Rightarrow$ те съпадат. Т.: Две успоредни безкрайни прави имат една и съща безкрайна точка. Обратно, ако две крайни прави имат една и съща безкрайна точка, то те са успоредни или съпадат.

Д-во: Нека крайните прави а и b са успоредни и U_a и U_b са породените от тях безкрайни точки $\Rightarrow$ са единствените такива съответно върху а и b. Но $a \parallel b$ и следователно $U_a = U_b$, т.е. а и b са представители на $U \Rightarrow a \parallel b$ или $a = b$.

Т.: Две успоредни крайни равнини имат една и съща безкрайна права. Обратно, ако две крайни равнини имат една и съща безкрайна права, то те са успоредни или съпадат.

Т.: Ако крайната права а и крайната равнина α са успоредни или инцидентни, то безкрайната точка U_a на а лежи върху безкрайната права u_α на α . Обратно, ако U_a лежи върху u_α , то а и α са успоредни или инцидентни.

Тема 20

Нека $K = Oxyz$ е афинна координатна система в разширеното евклидово пространство E^3^* и α е произволна равнина.

Т.: За равнината α съществува относно K поне едно уравнение от вида

$Ax+By+Cz+Dt=0$ (5), в което $|A|+|B|+|C|+|D|\neq 0$ (6) и притяжава свойствата:
1) всяка четворка хомогенни афинни координати на всяка точка от α удовлетворява (5)

2) ако някоя четворка хомогенни афинни координати на точка от $E3^*$ удовлетворява (5), то точката лежи в α .

Д-во: Нека α е крайна равнина, която има отношение K уравнението в нехомогенни координати $AX+BY+CZ+D=0$ (7), в което $|A|+|B|+|C|\neq 0$. Ако заместим в (7) равенствата $X=\frac{x}{t}, Y=\frac{y}{t}, Z=\frac{z}{t}, t\neq 0$, получаваме точно

(5), а неравенството (6) е удовлетворено поради (8). Нека сега M е крайна точка с нехомогенни координати (X,Y,Z) и хомогенни координати (x,y,z,t) , които са свързани с (9). Точката M лежи в равнината α точно тогава, когато е удовлетворено (7) и понеже $AX+BY+CZ+D=\frac{1}{t}(Ax+By+Cz+Dt)$, то

очевидно M ще лежи в α тогава и само тогава, когато е в сила (5). С което теоремата е доказана. Ако $M(x,y,z,0)$ е безкрайна точка в α , то векторът $r(x,y,z)$ е колинеарен с директрисите на представителите си през M и понеже $M\in\alpha$, то следва, че $r\parallel\alpha$. Необходимо и достатъчно условие за последното е $Ax+By+Cz=0$ (10) и тъй като $t=0$, то от $10\Rightarrow 5$, т.е. теоремата е в сила и за безкрайните точки в α . В безкрайната равнина Ω лежат само безкрайни точки, за които имаме $t=0$, защото $0.x+0.y+0.z+1.t=0$.

Уравнение на права в хомогенни координати в разширената евклидова равнина

Нека $K=Oxy$ е афинна координатна система в разширената евклидова равнина $E2^*$ и g е произволна права в нея.

Т.: За правата g съществува относно K поне едно уравнение от вида $Ax+By+Ct=0$ (11), в което $|A|+|B|+|C|\neq 0$ (12) и притежава свойствата:

1) всяка тройка хомогенни афинни координати на всяка точка g удовлетворяват 11

2) ако някаква тройка хомогенни афинни координати на точка от $E2^*$ удовлетворява 11, то точката лежи върху g . Доказателството е аналогично като това на последната теорема.

Уравнението 11, при условие 12, се нарича уравнение на правата g относно K в хомогенни координати. То е по-общо от съответното уравнение $g: AX+BY+C=0$ в нехомогенни координати, тъй като се удовлетворява и от хомогенните координати $(x,y,0)$ на безкрайни точки Ug на правата g .

Ако g е безкрайна права на $E2^*$, то тя има отношение K уравнението в хомогенни координати $t=0$.

27. Подобност и еднаквост в равнината

Афинитетът φ е подобност, когато

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2,$$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0. \quad (1)$$

От равенство (1) следва че съществува положително число:

$$r = \sqrt{c_{11}^2 + c_{21}^2} = \sqrt{c_{12}^2 + c_{22}^2}$$

(2)

Определение 1: Числото r определено с (2) се нарича коефициент на подобността φ .

Определение 2: Подобност с коефициент единица се нарича еднаквост.

Теорема 1: Ако $\varphi \in$ подобност с коефициент r , а M_1 и M_2 са точки в α и

$$\varphi(M_1) = M_1', \quad \varphi(M_2) = M_2', \text{ то } \overrightarrow{M_1'M_2'} = r \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \quad (3) \quad \text{Д-во:}$$

$K=Oxy$ и $K'=O'x'y'$ са ОКС в α

спрямо които $\overrightarrow{M_1M_2}(\lambda, \mu)$ и

$$\overrightarrow{M_1'M_2'}(\lambda', \mu'). \text{ Намираме:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1'M_2'} &= \overrightarrow{M_1'M_2} = \lambda^2 + \mu^2 = \\ &= (c_{11}\lambda + c_{12}\mu)^2 + (c_{21}\lambda + c_{22}\mu)^2 \\ &= (c_{11}^2 + c_{21}^2)\lambda^2 + 2(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22})\lambda\mu + \\ &+ (c_{12}^2 + c_{22}^2)\mu^2 \end{aligned}$$

от (1) и (2) получаваме-

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = r^2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2},$$

от което следва (3).

Следствие 1: При подобност съответните ъгли са равни.

Д-во: Предполагаме, че φ е подобност

и $\varphi(\angle M_1OM_2) = \angle M_1'O'M_2'$. Тогава

съгласно предишната теорема имаме

$$\overrightarrow{M_1'O'} \perp \overrightarrow{M_2'O'} \text{ и } \overrightarrow{M_1'O'} \perp \overrightarrow{M_2'O'},$$

$$\overrightarrow{M_2'O'} \perp \overrightarrow{M_1'O'} \text{ и } \overrightarrow{M_2'O'} \perp \overrightarrow{M_1'O'},$$

$$\overrightarrow{M_1'O'} \perp \overrightarrow{M_2'O'} \text{ и } \overrightarrow{M_2'O'} \perp \overrightarrow{M_1'O'},$$

и следователно

$$\angle M_1'O'M_2' \sim \angle M_1OM_2, \text{ откъдето}$$

$$\angle M_1'O'M_2' = \angle M_1OM_2.$$

$$\angle M_1'O'M_2' = \angle M_1OM_2.$$

Теорема 2: Всяка подобност в равнината може да се представи с уравнения:

$$X' = r(\cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y) + a,$$

$$Y' = r(\sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y) + b, \quad (4)$$

където a и b са реални параметри, θ е ъгъл в интервала $[0, 2\pi)$ и $\varepsilon = \pm 1$.

Д-во: Нека φ е подобност в α с коефициент r , която относно K има представянето:

$$X' = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}, \quad (*)$$

$$Y' = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}$$

От първото равенство на (2)

намираме:

$$\left(\frac{c_{11}}{r}\right)^2 + \left(\frac{c_{21}}{r}\right)^2 = 1$$

и следователно съществува ъгъл θ с радианна мярка в интервала $[0, 2\pi)$, за който

$$c_{11} = r \cos\theta, \quad c_{21} = r \sin\theta. \quad (5)$$

От (5) и второто равенство на (1) получаваме:

$$r \cos\theta \cdot c_{12} + r \sin\theta \cdot c_{22} = 0$$

сега определяме

$$c_{12} = -\varepsilon r \cos\theta, \quad c_{22} = \varepsilon r \sin\theta, \quad (6)$$

където $\varepsilon \neq 0$ е реален множител, който ще намерим от второто равенство на (2):

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = r^2$$

и предвид (6), получаваме $\varepsilon^2 = 1$ и

следователно $\varepsilon = \pm 1$.

Като заместим (5) и (6) в (*) и означим $c_{13} = a$, $c_{23} = b$, получаваме (4).

Следствие 2: Всяка еднаквост в равнината има аналитично представяне:

$$X' = \cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y + a,$$

$$Y' = \sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y + b, \quad (7)$$

където a и b са реални параметри, θ е ъгъл в интервала $[0, 2\pi)$ и $\varepsilon = \pm 1$.

Теорема 3: Всяка подобност в равнината, различна от еднаквост може да се представи като произведение от хомотетия и еднаквост.

Д-во: Да предположим, че координатните системи K и K' съвпадат и $\square$ е подобност, различна от еднаквост, която определена с (4). Ако запишем (4) във вида:

$$X' = r(\cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y + \frac{a}{r}) \quad (8)$$

$$Y' = r(\sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y + \frac{b}{r})$$

И означим с $\square_1$ еднаквостта

$$X' = \cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y + \frac{a}{r} \quad (9)$$

$$Y' = \sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y + \frac{b}{r}$$

а с ψ – хомотетията

$$X'' = r \cdot X_1$$

$$Y'' = r \cdot Y_1, \quad (10)$$

то от (8), (9) и (10) следва, че

$$\varphi = \psi \circ \varphi_1, \text{ с която теоремата е}$$

доказана.

Теорема 4: Всяка подобност в равнината, различна от еднаквост, има точно една двойна точка.

Д-во: Нека K и K' съвпадат и φ е подобност, различна от еднаквост, определена с (4).

Координатите (X,Y) на двойните точки на φ удовлетворяват системата

$$X = r(\cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y) + a,$$

$$Y = r(\sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y) + b,$$

Която може да се запише и във вида

$$(1 - r \cos\theta) \cdot X + \varepsilon r \sin\theta \cdot Y = a,$$

$$-r \sin\theta \cdot X + (1 - \varepsilon r \cos\theta) \cdot Y = b. \quad (11)$$

Детерминантата от коефициентите пред неизвестните X и Y е

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - r \cos\theta & \varepsilon r \sin\theta \\ -r \sin\theta & 1 - \varepsilon r \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 1 - (\varepsilon + 1)r \cos\theta + \varepsilon r^2$$

и в зависимост от стойностите на ε , имаме следните две възможности

а) $\varepsilon = -1$.

$$\Delta = 1 - r^2 = (1+r)(1-r)$$

и понеже $r > 0, r \neq 1$, то $\Delta \neq 0$.

б) $\varepsilon = 1$.

$$\Delta = 1 - 2r \cos\theta + r^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2r \cos\theta + r^2 = \sin^2\theta + (\cos\theta - r)^2$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0. \text{ Допускаме, че } \Delta = 0, \text{ то}$$

системата $\sin\theta = 0, \cos\theta = r$ трябва да притежава решение за $\theta \in$

$[0, 2\pi)$, което предвид $r > 0, r \neq 1$ е невъзможно. следователно $\Delta > 0$.

Системата (11) има различно от нула

решение $\Rightarrow$ има и единствено

решение за X и $Y \Rightarrow \varphi$ има точно

една двойна точка $M(X,Y)$.

28.

Осева симетрия:

Определение 1: Две различни точки A и A' в равнината се наричат ортогонално симетрични относно

дадена права g , ако правата AA^1 е перпендикулярна на g и средата M на AA^1 лежи на g .

Определение 2: Симетрия относно правата g се нарича еднаквостта, при която точките на g са двойни, а всяка точка A , която не лежи на g , се изобразява в ортогонално-симетричната си точка A^1 спрямо g .

Ротация:

Определение 3: Ротация около точката O на ориентиран ъгъл се нарича еднаквостта в равнината, при която т. O е двойна, а всяка др. точка A има за образ т. A^1 , за която $\angle OAA^1 = \angle OAA^1$, ъгълът $\angle OAA^1 = \alpha$. Точката O се нарича център на ротацията, а ъгълът α ъгъл на ротацията.

Транслация:

Определение 4: Транслация се нарича еднаквост в равнината, при която произволна т. A се изобразява в т. A^1 , за която векторът $\vec{AA^1}$ е равен на постоянен вектор $\vec{a}$ - вектор на транслация.

Транслационна симетрия:

Определение 5: Нека g е права и $\vec{a}$ е ненулев вектор колинеарен с g .

Еднаквостта $\varphi_1 = \sigma_g \circ \tau_a$, която е произведение от симетрията σ_g относно g след транслацията τ_a на $\vec{a}$. Ако A е произволна точка в равнината и $A_1 = \tau_a(A)$, $A^1 = \sigma_g(A_1) \Rightarrow$

$$\varphi_1(A) = (\sigma_g \circ \tau_a)(A) = \sigma_g(\tau_a(A)) = \sigma_g(A_1) = A^1.$$

$$\text{Ако } \varphi_2 = \tau_a \circ \sigma_g \text{ то } \varphi_1(A) = (\sigma_g \circ \tau_a)(A) = \sigma_g(\tau_a(A)) = \sigma_g(A_1) = A^1.$$

$$\varphi_2 = \tau_a \circ \sigma_g \Rightarrow$$

$$\varphi_2(A) = (\sigma_g \circ \tau_a)(A) = \sigma_g(\tau_a(A)) = \sigma_g(A_2) = A^1.$$

$$\Rightarrow \sigma_g \circ \tau_a = \tau_a \circ \sigma_g$$

Определение 6: Произведението от симетрия относно права g и транслация на вектор $\vec{a}$, колинеарен с g , се нарича транслационна симетрия с ос g и вектор $\vec{a}$.

Еднаквостта φ в равнината има относно ОКС $K = Oxy$ аналитично представяне от вида:

$$\begin{aligned} X^1 &= \cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y + a, \\ Y^1 &= \sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y + b, \end{aligned} \quad (1)$$

Където $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\theta \in$

$[0, 2\pi)$. Матрицата

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$$

е ортогонална и

$$\det A = \varepsilon = \pm 1. \quad (2)$$

Теорема 1: Всяка еднаквост в равнината принадлежи към точно един от следните типове:

- идентитет
- транслация
- ротация
- симетрия относно права
- транслационна симетрия.

Д-во: От (2) $\Rightarrow$

1. $\varepsilon = 1$. Еднаквостта φ се нарича

движение в равнината. Относно K φ

се представя с уравненията:

$$\begin{aligned} X^1 &= \cos\theta \cdot X - \sin\theta \cdot Y + a, \\ Y^1 &= \sin\theta \cdot X + \cos\theta \cdot Y + b, \end{aligned} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ двойните точки се определят от системата:

$$\begin{aligned} (1 - \cos\theta) \cdot X + \sin\theta \cdot Y &= a, \\ -\sin\theta \cdot X + (1 - \cos\theta) \cdot Y &= b. \end{aligned} \quad (4)$$

За детерминантата от коефициентите пред X и Y на (4) имаме:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{vmatrix} = (1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq 0. \quad (5)$$

$$1.1. \Delta_1 = 0. \Rightarrow \cos\theta = 1, \sin\theta = 0$$

съгласно еднаквостта φ има

представянето:

$$\begin{aligned} X^1 &= X + a, \\ Y^1 &= Y + b. \end{aligned} \quad (6)$$

$$1.1.1. a=0, b=0.$$

$$X^1 = X, Y^1 = Y$$

и φ е идентитетът на равнината.

1.1.2. $|a| + |b| \neq 0$. Можем да запишем

(6) във вида

$$X^1 - X = a, Y^1 - Y = b \quad (7)$$

и (7) показва, че векторът $\vec{MM^1}(X^1 -$

$X, Y^1 - Y)$, където $\varphi(M(X, Y)) = M^1$

(X^1, Y^1) е равен на вектора $p(a, b)$. $\Rightarrow \varphi$ е транслация, определена от вектора $p(a, b)$.

1.2. $\Delta \neq 0$. Сега (4) за двойните точки има едно решение X_0, Y_0 и $\Rightarrow \varphi$ има

единствена двойна точка

$M_0(X_0, Y_0)$. Имаме:

$$(1 - \cos\theta) \cdot X_0 + \sin\theta \cdot Y_0 = a,$$

$$-\sin\theta \cdot X_0 + (1 - \cos\theta) \cdot Y_0 = b$$

откъдето

$$a - X_0 = -\cos\theta \cdot X_0 + \sin\theta \cdot Y_0,$$

$$b - Y_0 = -\sin\theta \cdot X_0 - \cos\theta \cdot Y_0. \quad (8)$$

За да покажем, че φ е ротация околко

т. M_0 трябва

$$IM_0M^1 = IM_0M^1 \text{ и } \angle MM_0M^1 = \text{const.} \quad (9)$$

Първото равенство на (9) е изпълнено

за всяка еднаквост в равнината и

следователно и за φ . За другото

равенство на (9) имаме:

$$\begin{aligned} \cos(\angle MM_0M^1) &= \frac{\vec{M_0M} \cdot \vec{M_0M^1}}{|\vec{M_0M}| |\vec{M_0M^1}|} = \\ \frac{\vec{M_0M} \cdot \vec{M_0M^1}}{|\vec{M_0M}|^2} &= \text{и} \\ \frac{(X - X_0)(X^1 - X_0) + (Y - Y_0)(Y^1 - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (10)$$

От

$$X^1 - X_0 = \cos\theta \cdot X - \sin\theta \cdot Y + a - X_0,$$

$$Y^1 - Y_0 = \sin\theta \cdot X + \cos\theta \cdot Y + b - Y_0$$

и (8) намираме

$$X^1 - X_0 = (X - X_0) \cos\theta - (Y - Y_0) \sin\theta$$

$$Y^1 - Y_0 = (X - X_0) \sin\theta + (Y - Y_0) \cos\theta$$

и следователно

$$(X - X_0)(X^1 - X_0) + (Y - Y_0)(Y^1 - Y_0) = [(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2] \cos\theta. \quad (11)$$

Заместваме (11) в (10):

$$\cos(\angle MM_0M^1) = \cos\theta = \text{const,}$$

откъдето следва, че и второто

равенство на (9) е в сила.

Показахме че всяко движение в равнината е или идентитетът, или

транслация или ротация.

2. $\varepsilon = -1$. В този случай еднаквостта $\square$

се нарича отражение в равнината. Сега

$\square$ има относно K аналитично

представяне

$$X^1 = \cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Y + a,$$

$$Y^1 = \sin\theta \cdot X - \cos\theta \cdot Y + b, \quad (12)$$

и двойните точки се определят от системата

$$(1 - \cos\theta) \cdot X - \sin\theta \cdot Y = a,$$

$$-\sin\theta \cdot X + (1 - \cos\theta) \cdot Y = b \quad (13)$$

с детерминанта

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0.$$

Тъй като

$$|1 - \cos\theta| + |1 + \sin\theta| \neq 0,$$

то поне един елемент на Δ_1 не е нула и следователно поне едно от

уравненията на (13) е общо уравнение на права в равнината. Нека това е правата

$$l_1: (1 - \cos\theta) \cdot X - \sin\theta \cdot Y - a = 0$$

и да означим с l правата, която минава

през точката с координати $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и е

успоредна на правата l_1 . Очевидно тя е определена с уравнението

$$l: (1 - \cos\theta) \left(X - \frac{a}{2}\right) - \sin\theta \left(Y - \frac{b}{2}\right) = 0.$$

Определяме аналитично симетрията

$\square$ относно правата l . Нека $M(X, Y)$ е произволна точка в равнината и

$$\square(M(X, Y)) = \vec{M}(\vec{X}, \vec{Y}). \text{ Векторът } \vec{MM^1}$$

е колинеарен с нормалния

вектор $\vec{N}(1 - \cos\theta, -\sin\theta)$ на правата l и

следователно

$$\vec{X} - X = (1 - \cos\theta) \cdot p,$$

$$\vec{Y} - Y = -\sin\theta \cdot p, \quad p \neq 0,$$

откъдето

$$\vec{X} = X + (1 - \cos\theta) \cdot p,$$

$$\vec{Y} = Y + \sin\theta \cdot p \quad (14)$$

$$\text{Средата } M^1 \left(\frac{X - X^1}{2}, \frac{Y - Y^1}{2} \right)$$

На отсечката $\vec{MM^1}$ лежи върху

правата l и следва че

$$(1 - \cos\theta) \left(\frac{X - X^1}{2} - \frac{a}{2} \right) - \sin\theta \left(\frac{Y - Y^1}{2} - \frac{b}{2} \right) = 0 \quad (15)$$

Като заместим (14) в (15) и направим необходимите пресмятания, намираме

$$\begin{aligned} p &= -X + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \cdot Y \\ &+ \frac{a}{2} - \frac{\sin\theta}{2(1 - \cos\theta)} \cdot b \end{aligned} \quad (16)$$

Заместването на (16) в (14) дава аналитично представяне относно K на

симетрията $\square$. Получаваме

$$X^1 = \cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Y + a^1,$$

$$Y^1 = \sin\theta \cdot X - \cos\theta \cdot Y + b^1, \quad (17)$$

където сме положили

$$a^1 = \frac{1}{2} [(1 - \cos\theta) \cdot a - \sin\theta \cdot b]$$

$$b^1 = \frac{1}{2} [-\sin\theta \cdot a + (1 + \cos\theta) \cdot b] \quad (18)$$

От (12) и (17) като използваме (17), намираме

$$X^1 - \vec{X} = a - a^1 = \frac{1}{2} [(1 - \cos\theta) \cdot a - \sin\theta \cdot b]$$

$$Y^1 - \vec{Y} = b - b^1 = \frac{1}{2} [-\sin\theta \cdot a + (1 + \cos\theta) \cdot b] \quad (19)$$

2.1 Нека $\square$ има двойни точки. Тогава системата (13) има решение относно

X, Y и оттук следва че матриците

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta & a \\ -\sin\theta & 1 + \cos\theta & b \end{pmatrix}$$

имат равни рангове, но $\Delta_1 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\theta & a \\ -\sin\theta & b \end{vmatrix} = (1 - \cos\theta)b + \sin\theta a = 0 \quad (20)$$

$$\begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & 1 + \cos\theta \end{vmatrix} = (1 + \cos\theta)b + \sin\theta a = 0 \quad (21)$$

Заместваме (20) и (21) в (19) и получаваме:
 $a - a' = b - b' = 0$.

От (19) заключаваме, че $X' = \bar{X}$,

$Y' = \bar{Y}$ и еднаквостта $\square$ съвпада със симетрията $\square$ относно правата l тоест $\square$ е симетрия от правата l .

2.2 нека $\square$ няма двойни точки сега векторът $p(a - a', b - b')$ е ненулев и от уравненията (19) записани във вида $X' = \bar{X} + (a - a')$

$$Y' = \bar{Y} + (b - b')$$

Следва че $\square$ е произведение от симетрията $\square$ и трансляцията на вектора p .

29

Определение 1: Произведение от хомотетия и осева симетрия, когато центърът на хомотетията лежи на оста на симетрията, се нарича хомотетична симетрия.

Определение 2: Произведение от хомотетия и ротация, която не е централна симетрия, чиито центрове съвпадат, се нарича хомотетична ротация.

Теорема 1: Всяка подобност в равнината, различна от еднаквост, принадлежи към точно един от следните типове:

1) хомотетия

2) хомотетична симетрия

3) хомотетична ротация

Д-во: $K = Oxy$ – ортонормирана

координатна система и φ е

подобност, различна от еднаквост, чиято двойна точка е

О. Аналитичното представяне на φ

спрямо K е:

$$X' = r(\cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y),$$

φ :

$$Y' = r(\sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y).$$

Дефинираме две изображения

$$X1 = r \cdot X1,$$

h:

$$Y1 = r \cdot Y1$$

$$X_1 = \cos\theta \cdot X - \varepsilon \sin\theta \cdot Y,$$

g:

$$Y_1 = \sin\theta \cdot X + \varepsilon \cos\theta \cdot Y$$

-еднаквост.

$$\varphi = h \circ g$$

$$1. \varepsilon = +1$$

$$X_1 = \cos\theta \cdot X - \sin\theta \cdot Y$$

$$Y_1 = \sin\theta \cdot X + \cos\theta \cdot Y$$

За двойни точки на g имаме:

$$X_1 = X, Y_1 = Y \Rightarrow$$

$$(1 - \cos\theta)X + \sin\theta \cdot Y = 0$$

$$-\sin\theta \cdot X + (1 - \cos\theta)Y = 0 \quad (1)$$

Тогава за детерминантите пред X и Y имаме:

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} (1 - \cos\theta)X & \sin\theta \\ -\sin\theta \cdot X & (1 - \cos\theta)Y \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq 0$$

$$1.1 \Delta_1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0, 1 - \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0$$

и еднаквостта g има представянето:

$$X_1 = X$$

$$Y_1 = Y$$

И следователно g е идентитет в равнината.

$\Delta_1 > 0$. В този случай системата (1) за двойните точки има решението $X = 0$, $Y = 0 \Rightarrow$ еднаквостта g има единствена двойна точка $O(0,0)$, т.е. g е ротация около $t.O$.

Ако $g = id$, то за подобността $\varphi = h$ о g имаме:

$$\varphi = h \circ g = h \circ id = h$$

т.е. подобността φ е хомотетия.

Ако g е ротация с център O , която не е централна симетрия, то φ е хомотетична ротация.

$$2. \varepsilon = -1$$

$$X_1 = \cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Y$$

$$Y_1 = \sin\theta \cdot X - \cos\theta \cdot Y$$

Тук еднаквостта и двойните точки се определят от системата:

$$(1 - \cos\theta)X - \sin\theta \cdot Y = 0$$

$$-\sin\theta \cdot X + \cos\theta \cdot Y = 0 \quad (2)$$

с детерминанта

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0.$$

Следователно g има двойни точки

различни от $O(0,0)$. Тъй като

$$11 - \cos\theta + 11 + \cos\theta \neq 0,$$

поне един елемент на Δ_1 не е нула $\Rightarrow$

поне едно от уравненията на (2) е

общо уравнение на права в равнината.

Например правата:

$$l: (1 - \cos\theta)X - \sin\theta \cdot Y = 0$$

Определяме симетрията ψ относно

правата l . Нека $M(X,Y)$ е произволна

точка в равнината и $\psi(M(X,Y)) = \bar{M}(\bar{X}, \bar{Y})$. Тогава векторът $\overrightarrow{M\bar{M}}$ (

$$\bar{X} - X, \bar{Y} - Y)$$

е колинеарен с

$$\vec{N}(1 - \cos\theta, -\sin\theta)$$

на нормалния вектор $\vec{N}(1 - \cos\theta, -\sin\theta)$ на

правата l и следователно:

$$\bar{X} - X = (1 - \cos\theta) \cdot p,$$

$$\bar{Y} - Y = -\sin\theta \cdot p.$$

$$p \neq 0$$

Оттук намираме

$$\bar{X} = X + (1 - \cos\theta) \cdot p,$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p. \quad (3)$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \cdot p.$$

$$(1 - \cos\theta)p =$$

$$= -(1 - \cos\theta)X + \sin\theta \cdot Y$$

Оттук намираме:

$$p = -X + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \cdot Y$$

и като заместим в (3) получаваме

аналитично представяне на

симетрията ψ

относно K . Имаме:

$$\bar{X} = X + (1 - \cos\theta) \left[-X + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} Y \right] + Y$$

$$\bar{Y} = Y - \sin\theta \left[-X + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} Y \right]$$

или

$$\bar{X} = \cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Y,$$

$$\bar{Y} = \sin\theta \cdot X - \cos\theta \cdot Y,$$

и следователно $\psi = g$, т.е. ψ е симетрия относно l .

Получихме че подобността

$$\varphi = h \circ g$$

е хомотетична симетрия.

Ако g е централна симетрия, то φ е

хомотетия с коефициент r .

30

$K = Oxyz$ и $K' = O'x'y'z'$ – афинни

координатни системи в E_3^* . K и K'

могат и да съвпадат.

Дадена е матрицата, предполагаме че

ранга и $r \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Определение 1: Трансформацията

φ , която съпоставя на точката

$M(x, y, z, t)$ точката $M'(x', y', z', t')$ така, че:

$$px' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,$$

$$py' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,$$

$$pz' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,$$

$$pt' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t,$$

където $r \neq 0$ е реално число, се нароча

линейна трансформация (колинеация)

в пространството.

Ако запишем M и M' като матрици-

стълбове, т.е.

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

То можем да запишем (1) в матричния

вид:

$$pM' = AM.$$

Линейната трансформация

трансформира колинеарни точки в

колинеарни, следователно и

компланарни точки в компланарни.

1. $r = 4$, $\det A \neq 0$ линейните

трансформации са биективни

изображения.

2. $r = 3$, $\det A = 0$, но поне едно $A_{ij}, i, j =$

$1, 2, 3, 4$ на $\det A$ е различно от 0, то

само една точка от E_3^* няма образ,

образите на останалите точки лежат в

една равнина.

3. $r = 2$ точките на една права нямат

образи, а образите на останалите

лежат върху една права.

4. $r = 4$, точките на една равнина нямат

образи, а образите на останалите

съвпадат.

Теорема 1: Колинеациите запазват

двойното отношение на четири точки.

Д-во: $M_1 \neq M_2, M_3$ и M_4 – колинеарни точки. При колинеарния ϕ се изобразяват в $M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^*$. Предполагаме, че:
 $M_3 = \lambda_1 M_1 + \mu_1 M_2$,
 $M_4 = \mu_1 M_1 + \mu_2 M_2$ (2)
 То

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_1 \mu_1}$$

$\Rightarrow$

$$M_3^* = \lambda_1 M_1^* + \mu_1 M_2^*,$$

$$M_4^* = \mu_1 M_1^* + \mu_2 M_2^*$$

$\Rightarrow$

$$(M_1^* M_2^* M_3^* M_4^*) = \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_1 \mu_1} = (M_1 M_2 M_3 M_4)$$

Ако ϕ е линейна трансформация в E_3^* :
 Определение 2: Ако за т.М от E_3^* е изпълнено $\phi(M) = M$, тя се нарича двойна точка на ϕ .

Тема 30

Опр.: Трансформацията ϕ , която съпоставя на точката $M(x, y, z, t)$ точката $M'(x', y', z', t')$ така, че
 $px' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$
 $py' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$
 $pz' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$
 $pt' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$
 където $p \neq 0$ е подходящо реално число, се нарича линейна трансформация в пространството.
Т.: Колинеарните запазват двойното отношение на четири точки.

Опр.: Ако за всяка точка M от E_3^* е изпълнено $\phi(M) = M$, то тя се нарича двойна точка на ϕ .

Тема 31.

Афинитет в пространството.

Нека E_3^* и $E_3'^*$ са две разширени евклидови пространства, в които сме избрали съответно афинните координатни системи $K = Oxyz$ и $K' = O'x'y'z'$. В случай, че E_3^* и $E_3'^*$ съвпадат, то същото можем да предположим иза координатните системи.

Опр 1.2.3. Всяка неизродена линейна трансформация на пространството E_3^* върху пространството E_3^* , която изобразява безкрайна точка от E_3^* в безкрайна точка от E_3^* , се

нарича афинитет на E_3^* върху E_3^* .

Ако $E_3^* = E_3'^*$, то ще говорим за

афинитет в пространството E_3^* .

Понеже множеството от безкрайната равнина Ω , то Определение 1.2.3 може да се формулира и във вида: Опр 1.2.3'. Всяка неизродена линейна

трансформация на E_3^* върху E_3^* ,

която трансформира безкрайната равнина Ω на E_3^* в безкрайната равнина Ω' на E_3^* , се нарича

афинитет на пространството E_3^*

върху пространството E_3^* .

В случай, че $E_3^* = E_3'^*$, то афинитет в E_3^* е всяка неизродена линейна

трансформация в E_3^* , при която безкрайната равнина Ω е двойна. Произволна неизродена линейна трансформация $\square$ е афинитет, то съгласно Опр.1.2.3. произволна безкрайна точка $U(x, y, z, 0)$ от E_3^* ще се изобрази при $\square$ в безкрайна точка $U'(x', y', z', 0)$ от E_3^* и следователно имане

$$px' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$

$$py' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad (3)$$

$$pz' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

$$0 = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z.$$

Тъй като последното равенство на (3) трябва да се удовлетворява от произволни ненулеви тройки (x, y, z) , то можем да постигнем

$$a_{41} = 0, a_{42} = 0, a_{43} = 0. \quad (4)$$

Предвид (4), заключаваме, че матрицата A на афинитета $\square$ има вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

и понеже $\det A = a_{44}A_{44} \neq 0$, то

следва, че

$$a_{44} \neq 0, A_{44} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Получихме, че афинитетът $\square$ се представя аналогично в хомогенни координати на уравненията

$$px' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,$$

$$py' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,$$

$$p \neq 0 \quad (6)$$

$$pz' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,$$

$$pt' = a_{44}t.$$

при което са изпълнени неравенствата (5).

Тъй като афинитетът е биективно изображение, което изобразява Ω в Ω' , то оттук следва, че:

Теорема 1.2.2. При афинитет безкрайна точка се изобразява в безкрайна, а крайна точка – в крайна.

От Теорема 1.2.2 заключаваме, че ако точката $M(x, y, z, t) \in E_3^*$ е крайна, то

крайна ще бъде и точката

$M'(x', y', z', t') \in E_3^*$, която е образ на

M при афинитет $\square$. Тогава, ако (X, Y, Z) и (X', Y', Z') са нехомогенни афинни координати съответно на M и M' , то

$$X = \frac{x}{t}, Y = \frac{y}{t}, Z = \frac{z}{t}, t \neq 0$$

$$X' = \frac{x'}{t'}, Y' = \frac{y'}{t'}, Z' = \frac{z'}{t'}, t' \neq 0,$$

и като разделим първото, второто и третото равенство на (6) почленно с четвъртото, получаваме

$$X' = \frac{a_{11}}{a_{44}}X + \frac{a_{12}}{a_{44}}Y + \frac{a_{13}}{a_{44}}Z + \frac{a_{14}}{a_{44}},$$

$$Y' = \frac{a_{21}}{a_{44}}X + \frac{a_{22}}{a_{44}}Y + \frac{a_{23}}{a_{44}}Z + \frac{a_{24}}{a_{44}},$$

$$(7)$$

$$Z' = \frac{a_{31}}{a_{44}}X + \frac{a_{32}}{a_{44}}Y + \frac{a_{33}}{a_{44}}Z + \frac{a_{34}}{a_{44}}.$$

Полагаме $\frac{a_{ij}}{a_{44}} = c_{ij}$, $i=1,2,3$;

$$j=1,2,3,4 \quad (8)$$

И равенства (7) приемат вида

$$X' = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14},$$

$$Y' = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24},$$

$$(9)$$

$$Z' = c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + c_{34}.$$

Понеже от (8) следва, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{44}^3} A_{44}$$

$$, \quad (10)$$

То предвид (5) намираме

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравненията (9) са уравнения на афинитета $\square$ в нехомогенни координати и се отнасят само за двойки съответни крайни точки. Детерминантата Δ в (10) се нарича детерминанта на афинитета $\square$.

Теорема 1.2.3. Афинитетът изобразява права в права и равнина в равнина.

Доказателство: Афинитетът е линейна трансформация и преобразува линейно уравнение в линейно.

Теорема 1.2.4. Афинитетът запазва успоредността на правите, простото отношение на три

колинеарни точки и отношението на лицата на две компланарни фигури.

Ще поясним, че в Теорема 1.2.4 става дума за фигури, които лежат в една равнина α и съгласно

Теорема 1.2.3. Зобразите им ще лежат в съответната равнина $\alpha' = \square(\alpha)$.

Индукцираният от $\square$ афинитет на α върху α' притежава изброените по-горе свойства.

Теорема 1.2.5. Афинитетът запазва релацията "между".

Доказателството следва от твърдението в Теорема 1.2.4, че афинитетът запазва простото отношение на три колинеарни точки.

От Теорема 1.2.5 следва:

Следствие 1.2.1 Афинитетът

изобразява отсечка в отсечка.

Следствие 1.2.2 Афинитетът изобразява следата на една отсечка в средата на образа на отсечката.

Теорема 1.2.6 При афинитет на E_3^*

върху E_3^* ориентираните обемни на тетраедърите се изменят в постоянно отношение.

Следствие 1.2.3 Афинитетът запазва отношението на обемите на две тела. По нататък имаме:

Теорема 1.2.7 Афинитетът трансформира вектор във вектор. При това, ако векторът u има координати (λ, μ, ν) относно K , то съответният му вектор $u' = \square(u)$ има относно K' координати

$$\lambda' = c_{11}\lambda + c_{12}\mu + c_{13}\nu,$$

$$\mu' = c_{21}\lambda + c_{22}\mu + c_{23}\nu,$$

$$\nu' = c_{31}\lambda + c_{32}\mu + c_{33}\nu.$$

Тема 32

Нека $K=Oxyz$ и $K'=O'x'y'z'$ са ортонормирани координатни системи и φ е произволен афинитет в пространството.

Опр.: Една направление U се нарича главно направление за φ , ако равнините, перпендикулярни на U , се трансформират в равнини, перпендикулярни на $U'=\varphi(U)$.
Непосредствено от това определение следва и теоремата:

Т.: Направлението U е главно направление за афинитета φ точно тогава, когато съществува число $s \neq 0$ такова, че координатите (λ, μ, ν) удовлетворяват

$$a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = s\lambda$$

$$a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu = s\mu$$

$$a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu = s\nu$$

Лема: $k+r=3$

Т.: На всеки прост корен на $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$ съответства точно едно главно направление на φ .

Д-во: Нека s_0 е прост корен на $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$.

Тогава съгласно лемата в детерминантата

$$\Delta s_0 =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s_0 \end{vmatrix} =$$

има поне една детерминанта от втори ред, която не е равна на 0. Сега всички решение на системата $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$ са $\lambda = \rho[a_{12}a_{23} - a_{13}(a_{22}-s_0)]$
 $\mu = \rho[a_{13}a_{21} - a_{23}(a_{11}-s_0)]$
 $\nu = \rho[(a_{11}-s_0)(a_{22}-s_0) - a_{12}^2]$, където $\rho \neq 0$ е произволно число.

Т.: На всеки двоен корен на $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$ съответстват безкрайно много главни направления на афинитета φ , които са перпендикулярни на едни фиксирано направление.

Т.: При троен корен на $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$ всяко направление на E_3^* е главно направление на афинитета φ .

Т.: Ако s_1 и s_2 са два различни корена $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$, то съответните им главни направления са перпендикулярни.

Т.: Всички корени на $(a_{11}-s) + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0$
 $a_{21}\lambda + (a_{22}-s) + a_{23}\nu = 0$
 $a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33}-s) = 0$ са реални числа.

Следствие: Всеки афинитет φ в E_3^* има поне една тройка взаимно перпендикулярни главни направления.

Следствие: Всеки афинитет φ в E_3^* има поне една тройка взаимно перпендикулярни главни направления.

33. Подобност и еднаквост в пространството.

Нека $\square$ е произволен афинитет в E_3^* .

Определение-Афинитет в E_3^* на който всяко направление е главно, се нарича подобност

$$X' = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14}$$

$$Y' = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24}$$

$$Z' = c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + c_{34}$$

Е подобност точно тогава когато

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 + c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2$$

Определение числото

$$r = \sqrt{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2} =$$

$$\sqrt{c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2} =$$

$$\sqrt{c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2}$$

се нарича

коэффициент на подобността $\square$.

Определение-подобност $\square$ с коэффициент $r=1$ се нарича еднаквост в пространството.

Точно като подобност в равнината сега и в подобност в пространството имаме

ТЕОРЕМА-ако $\square$ е подобност в пространството и $\square(M_1) = M'_1$, $\square(M_2) = M'_2$

Доказателство-нека $K=Oxyz$ и $K'=O'x'y'z'$ са ортонормирани координатни системи в E_3^* относно които

$$\overrightarrow{M_1M_2}(\lambda, \mu, \nu) \text{ и } \overrightarrow{M'_1M'_2}(\lambda', \mu', \nu').$$

Имаме че $\overrightarrow{M_1M_2} = \square(\overrightarrow{M'_1M'_2})$ и са в сила равенствата

Оттук предвид $r > 0$ имаме

$$\square(M_1) = M'_1, \square(M_2) = M'_2$$

от горната теорема следва:

Следствие-Съответните ъгли между правите и равните при подобност са равни

Системата ни позволява да направим полаганията

$$C_{11} = r a_1, C_{21} = r a_2, C_{31} = r a_3$$

$$C_{12} = r a_1, C_{22} = r a_2, C_{32} = r a_3$$

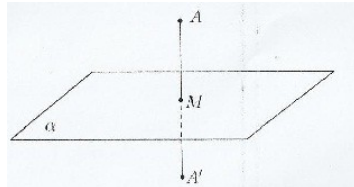
$$C_{13} = r a_1, C_{23} = r a_2, C_{33} = r a_3$$

Където

34. Някои специални видове

еднаквост в пространството

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-две различни точки A и A' в E_3 се наричат ортогонално симетрични относно дадена равнина α ако правата AA' е перпендикулярна на α и средата M на отсечката AA' лежи на α .

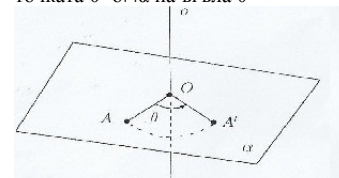


ОПРЕДЕЛЕНИЕ-симетрия относно равнината α се нарича еднаквостта при която точките на α са двойни а всяка точка A която не лежи в α се изобразява в ортогонално-симетричната си точка A' относно α . Обикновено симетрията относно равнината се обозначава с δ_α .

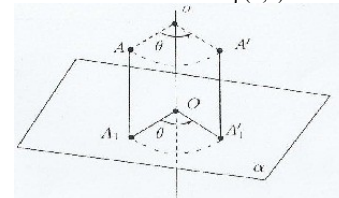
РОТАЦИЯ ОТНОСНО ПРАВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-ротация около правата o на ориентиран ъгъл θ се нарича еднаквостта в пространството, при която точките на o са двойни, а всяка точка A която не лежи на o се завърта в равнината α минаваща през

A и перпендикулярна на δ около точката $O=O \cap \alpha$ на ъгъл θ



Правата o се нарича ос на ротацията а ъгъл θ -ъгъл на ротацията. Обикновено ротацията с ос o и ъгъл θ се означава с $\rho(o, \theta)$

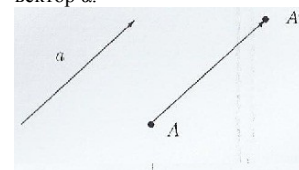


При поставяне на образите на точките при ротация около правата o на ъгъл θ можем да използваме само една равнина α

Перпендикулярна на o .

ТРАНСЛАЦИЯ

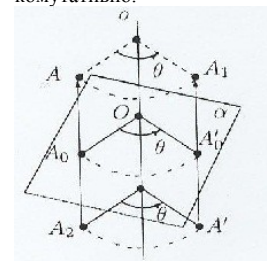
ОПРЕДЕЛЕНИЕ-транслация в пространството се нарича еднаквостта при която произволна точка A се изобразява в точката A' за която векторът $\overrightarrow{AA'}$ е равен на постоянен вектор a .



Векторът a се нарича вектор на транслацията. Обикновено транслацията на вектора a се означава с τ_a .

РОТАЦИОННА СИМЕТРИЯ

Нека o е права перпендикулярна на равнината α и A е произволна точка. Да разгледаме произведението $\delta_\alpha \circ \rho(o, \theta)$. Ако означим $\rho(A) = A_1$, $\delta_\alpha(A_1) = A'$ и $\delta_\alpha(A) = A_2$ то лесно се убеждаваме че $\rho(A_2) = A'$. Следователно ако оста на ротацията е перпендикулярна на равнината на симетрията то произведението от ротацията около права и симетрия относно равнината е комутативно.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ-произведение от ротацията около права и симетрия относно равнина когато оста на ротацията е перпендикулярна на равнината на симетрия се нарича ротационна симетрия.

Построяването на образа A' на произволна точка A при ротационна

симетрия може да се извърши и по следния начин:

1.построяваме ортогонална проекция

A_0 на A в равнината α .

2.намираме образа A'_0 на A_0 при

ротация в α около точката $O=O \cap \alpha$ на ъгъла θ

3.върху правата през A'_0

перпендикулярна на α намираме

точката A' за която $|A'_0 A'| = |AA_0|$

И която лежи в полупространството с контур α в което не лежи A .

ТРАНСЛАЦИОННА СИМЕТРИЯ

Нека α е вектор компланиарен с

равнината α и A е произволна

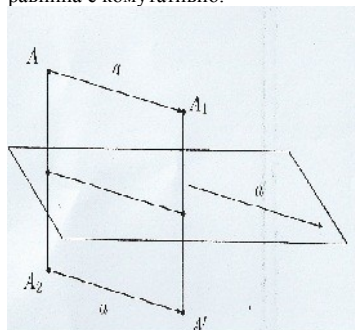
точка. Да разгледаме произведението

$\delta_\alpha \circ \tau_\alpha$. Ако означим $\tau_\alpha(A) = A_1$,

$\delta_\alpha(A_1) = A'$, и

$\delta_\alpha(A) = A_2$ то очевидно $\delta_\alpha(A_2) = A'$

т.е когато векторът на трансляцията е компланиарен с равнината на симетрията то произведението от трансляцията и симетрията относно равнина е комутативно.



Определение – произведение от трансляция и симетрия относно равнина когато векторът на трансляцията е компланиарен с равнината на симетрията се нарича транслационна симетрия.

ВИНТОВО ДВИЖЕНИЕ

Нека α е вектор колинеарен с правата

o и A е произволна точка. Да

разгледаме произведението

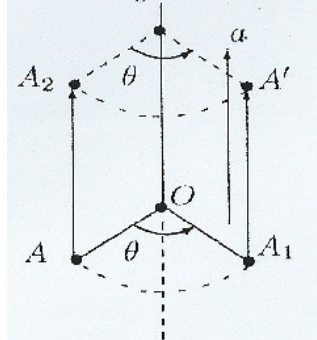
$\rho(o, \theta) \circ \tau_\alpha$. От това следва че когато

векторът на трансляцията е

колинеарен на оста на ротацията

произведението от ротация около

права и трансляция е комутативно.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ-произведение от трансляция и ротация около права когато векторът на трансляцията е колинеарен с оста на ротацията се нарича винтово движение.