*ЗАДАЧИ, ДАВАНИ НА ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ*

**I част: Вектори.**

1 зад. Дадени са линейно независимите вектори  и , като и $∢\left(\vec{a} ,\vec{b}\right)=\frac{π}{3}$.

Нека .

1. Да се докаже, че векторите  са линейно независими;
2. Ако т.*H* е петата на височината от върха *О* към страната *BC* на триъгълник *BOC*, да се изрази вектора $\vec{OH}$ чрез  и ;
3. Нека т.*M* е медицентърът на триъгълник *ABC*. Да се намери дължината на

вектора $\vec{OM}$.

2 зад. Дадени са линейно независимите вектори  и , като, $∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)=\frac{π}{3}$.

Нека .

1. Ако точката *G* е медицентърът на триъгълник *OAB*, да се изрази вектора  като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на вектора $\vec{OG}$.

б) Да се намери лицето на триъгълник *OAB*.

3 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b} и \vec{OC}=\vec{c}$. Точките *А*1 и *C*1 са медицентровете съответно на триъгълниците *BOC* и *AOB*.

 Да се изразят чрез $\vec{a}$ , $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторите $\vec{OA\_{1}},\vec{OC\_{1}} и \vec{C\_{1}A\_{1}} $ и да се докаже, че $\vec{C\_{1}A\_{1}} $ и $\vec{CA}$ са колинеарни.

 Ако $ \left|\vec{a}\right|=1, \left|\vec{b}\right|=2, \left|\vec{c}\right|=\sqrt{2}$ и всеки два вектора сключват ъгъл, равен на $\frac{π}{4}$, да се намери обема на тетраедъра *ОАВС*.

4 зад. Дадени са линейно независимите вектори  и ..

1. Да се докаже, че векторите са линейно независими;

б) Нека т.*М* е медицентър на триъгълник *АВС*. Да се намери $∢(\vec{a}, \vec{b})$, ако ;

 в) При така намерения $∢(\vec{a}, \vec{b})$, да се пресметне обема на тетраедъра *ОАВС*.

5зад. Дадени са линейно независимите вектори  и . .

1. Да се докаже, че векторите са линейно независими;

б) Нека т.*Н* е пета на височината от върха *О* към стената *АВС* на тетраедъра *ОАВС*. Да се изрази вектора като линейна комбинация на ;

в) Ако $∢\left(\vec{a}, \vec{b}\right)=\frac{π}{4}$, да се пресметне обема на тетраедъра *ОАВС*.

6 зад. Дадени са линейно независимите вектори  и , като.

Нека . Да се определи елементарно геометричния ъгъл между векторите  и , ако обема на тетраедъра *ОАВС* е равен на .

**II част: Уравнения на права в равнината.**

1 зад. Спрямо ОКС *K=Oxy* в равнината са дадени т.*B*(-4, 3) и правите:

 $m\_{c}:4x-y+6=0 и h\_{c}:3x-y+4=0 $.

Да се намерят координатите на върховете *А* и *С* на триъгълник *ABC*, ако $m\_{c}$ е медианата, а $h\_{c}$ е височината при върха *С* на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник *АВС*.

2 зад. Спрямо ОКС *K=Oxy* в равнината са дадени т.*B*(3, 4) и правите:

 $b\_{c}:2x+y-5=0 и h\_{c}:x+y-5=0 $.

Да се намерят координатите на върховете *А* и *С* на триъгълник *ABC*, ако $b\_{c}$ е вътрешната ъглополовяща, а $h\_{c}$ е височината при върха *С* на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник *АВС*.

3 зад. Спрямо ОКС *K=Oxy* са дадени точкaтa *P*(-3, 3) и правите :

 $a:3x-4y+5=0 и g: 2x-y+4=0 $.

 Светлинен лъч, успореден на правата $a$ , се отразява от правата $ g$ и отразеният лъч минава през т.*P*. Намерете уравненията на правите *b* и *b*’, съдържащи падащия и отразения лъчи.

4 зад. Спрямо ОКС *K=Oxy* в равнината са дадени т.*B*(6, 1), т.*C*(4, 3) и т.M(4, 1), които са съответно два от върховете и медицентъра на $∆ ABC$. Да се намерят: координатите на третия връх на триъгълника, лицето на триъгълника и уравнение на правата, която е успоредна на страната *BC* и минава през точката *М*.

5 зад. Спрямо ОКС *K=Oxy* са дадени правите:

 $h\_{1}:2x-3y+7=0, h\_{2}:x+2y-7=0$ и точка *А*(1, 5).

а) Да се намерят уравненията на страните на триъгълник *АВС*, ако височините му през върховете *В* и *С* лежат съответно на правите $h\_{1} и h\_{2}$.

б) Да се намерят лицето на триъгълника, координатите на центъра и дължината на радиуса на **описаната** около него окръжност.

6 зад. Спрямо ОКС *K* = *Оxy* са дадени правите:

$h:x-7y-6=0, m:5x-13y-30=0$ и точката $B\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

а) Да се намерят координатите на върховете на триъгълник *АВС*, ако височината и медианата му през върха *С* лежат съответно на правите *h* и *m*;

б) Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на **вписаната** в триъгълника окръжност.

7 зад. Спрямо ОКС K = *Оxy* са дадени точките *P*(-5, 4) и *S*(-3, -1),

 и правата *m: x + y – 3 = 0*.

а) Светлинен лъч минава през точката *P* и след отразяването си от правата *m* става успореден на ординатната ос. Намерете уравненията на правите *g* и *g’*, съдържащи падащия и отразения лъчи;

б) Намерете координатите на върховете на триъгълник *ABC*, за който точката *S* е център на описаната окръжност, а падащият и отразения лъчи съдържат две от страните му.

**III част: Уравнения на права и равнина в пространството.**

1 зад. Дадени са точката $M\left(-1, 1, 2\right)$ и правата $a\left\{\begin{array}{c}x-y+1=0\\x-z-2=0\end{array}\right.$.

1. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $g$, която е успоредна на правата $a$ и минава през точката *М*;
2. Да се намери разстоянието от точката *М* до правата $a$ и координатите на точката *М‘*, ортогонално симетрична на точката *М* относно правата $a$;
3. Да се намери уравнение на равнината α, която минава през т.*М* и правата $a$.

2 зад. Дадени са точките $A\left(0, 0, -1\right) и B\left(-2, -8, -3\right)$, равнината $β:3x+4y-z+1=0$ и правата $b\left\{\begin{array}{c}x=3+3s\\y=-8+1s\\z=1-1s\end{array}\right., s\in R$. Да се намерят:

1. Уравнение на равнината $γ$, която минава през точките $A$ и $B$, и е перпендикулярна на равнината $β$;
2. Разстоянието от точката $B$ до правата $b$ и координатите на точката *B‘*, ортогонално симетрична на точката *B* относно правата $b$.

3 зад. Спрямо ОКС *K=Oxyz* са дадени точкaтa *C*(0, 0, -3), равнината *α*: $2x+2y-z+1=0$ и правите :

 $a\left\{\begin{array}{c}x= p\\y=-2+ p\\z=-1+2p\end{array}\right.$ ,*p* $\in R$*,*  $b\left\{\begin{array}{c}x+z=0\\y+z-2=0\end{array}\right.$ , $c\left\{\begin{array}{c}x= 1+2q\\y=-1+6q\\z= 2- q\end{array}\right.$, $q\in R$

1. Да се намерят уравнения на трансверзалата *t* на кръстосаните прави $a$ и *b*, която е успоредна на правата *c*;
2. Ако $т.А=a∩α и т.В=b∩α$, намерете уравнения на височината $h\_{c}$ от върха *С* към страната *AB* на триъгълник *АВС*. Намерете лицето на *АВС*.

4 зад. Спрямо ОКС *K=Oxyz* в пространството са дадени точка *P*(1, 5, 0), правите

$a:\left\{\begin{array}{c}x=1-2q\\y=2 + q\\z=0+ 2q\end{array}\right.$, $q\in R$ и $b:\left\{\begin{array}{c}x + y- 5 =0\\3x-2z-9=0\end{array}\right.$, и равнина .

1. Светлинен лъч минава през точка *P*, отразява се от равнината α и пресича правите  *a* и *b*. Да се намерят уравнения на правите съдържащи съответно падащия и отразения лъч.
2. Нека правата *a* пресича равнината α в точка *A*, а правата *b* пресича равнината α в точка *B*. Да се намери лицето на триъгълник *ABP*.

5 зад. Спрямо ОКС *K=Oxyz* в пространството са дадени точките *M*(1, 5, 0), *B*( 5, 0, 3), *A*(3, 1, 3), правите $a:\left\{\begin{array}{c}x + z- 1 =0\\2y-z-4=0\end{array}\right.$ и $b:\left\{\begin{array}{c}x= 1+2s\\y= 4 -2s\\z=-3+3s\end{array}\right.$, $q\in R$, и равнината.

1. Да се намери трансверзала на правите *a* и *b*, минаваща през точка *А*.
2. Светлинен лъч *l* минава през точката *М*, отразява се от равнината *α* и отразения лъч *l*’ минава през точката *В*. Да се намерят уравненията на *l*  и *l*’.

6 зад. Спрямо ОКС *K*=*Оxyz* в пространството са дадени: точки *Р*(3, 1, 5) и *Q*(–2, 12, 1),

 равнина *α*: *x* + 2*y* + 2*z* – 6 = 0 и правите: , .

1. Да се намерят координатите на точки *А* и *В* – краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави

*а* и *b*;

1. Светлинен лъч *l* минава през т.*Р*, отразява се от равнината *α* и отразения лъч *l’* минава през точката *Q*. Да се намерят кординатите на точката *С*, в която правите *l* и *l’* пробождат равнината *α*.
2. Да се намери лицето на триъгълник *АВС*.