Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика

Случайни процеси

Марусия Божкова

гр. София

28 юли 2012 г.

© 2001, 2010, 2012 Марусия Божкова, bojkova@fmi.uni-sofia.com

Предговор

Учебникът е разработен на основата на курса по "Случайни процеси", четен от 2001 г. първоначално за бакалаври от специалност "Приложна математика" и по-късно предназначен за студенти от бакалавърската степен на ФМИ (задължителна дисциплина за бакалаври специалност "Статистика" и избираема дисциплина за останалите специалности), както и за магистърските програми "Вероятности и статистика" на ФМИ. Този курс е четен за първи път през учебната 2000/2001 г. и съставените записки са нови. Те са периодично обновявани и публикувани на сайта на ФМИ, както и на специално разработен сайт на дисциплината през 2010 г. Този учебник съдържа теми по: Марковски вериги с дискретно и непрекъснато време, Поасонови процеси, Винерови процеси, стохастично диференциране и интегриране, общ модел на застрахователна компания, както и дифузия на Ито, формула на Файман-Кац. Той е разделен на две части – първата е предназначена за бакалаври, а втората за напреднали – студентите от магистърските програми "Вероятности и статистика" в двата им варианта за специалисти и неспециалисти и е препоръчително да следва след като студентите се запознаят с първата част. За разбирането на изложения материал се изискват обичайните курсове по математически анализ и теория на вероятностите. По-детайлно изложение на някои от темите може да се намери в цитираната литература.

С чувство на приятен дълг бих искала да изкажа своята благодарност на проф. Косто Митов за оказаната помощ при оформянето на първоначалния вариант, както и на Ангел Ангелов за постоянните грижи по техническото оформяне и обновяване на това пособие и подобряване на неговото изложение.

Юли, 2012 *Марусия Божкова*

Съдържание

Част I

Въведение в случайните процеси

Глава 1

Основни понятия и класове процеси

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дадем понятие за стохастичен процес;
- да формулираме теоремата на Колмогоров;
- да дадем понятие за стационарност в тесен и широк смисъл;
- да дефинираме Гаусов процес.

1 Предварителни сведения

Нека е зададено вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, където $\Omega \neq \emptyset$ е пространството от елементарни събития, $\mathcal{F}$ е $\sigma-$алгебрата на случайните събития и $\mathbf{P}$ е вероятностната мярка.

Нека $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ е такава, че за всяко x множеството $A_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ е елемент на $\sigma-$алгебрата $\mathcal{F}$, тогава ξ се нарича случайна величина (сл.в.).

Функцията $F_\xi(x) = \mathbf{P}(A_x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ се нарича функция на разпределение (ф.р.) на ξ, а ако съществува $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$, то тя се нарича плътност на разпределението на сл.в. ξ.

2 Основни понятия

По-нататък с T ще се означава някое от множествата $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^n$.

Определение 1.1 *Стохастичен процес (случаен процес)* $\{X_t,\ t \in T\}$ *ще наричаме съвкупност от случайни величини дефинирани в пространството* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

При фиксирано $\omega \in \Omega$, $\quad X_t(\omega) : T \to \mathbf{R}$ е реална функция дефинирана в T, която се нарича траектория на процеса.

При всяко фиксирано $t \in T$, X_t е сл. в. определена в пространството $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 1.2 *При произволно фиксирано* n, *и произволен набор* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, *съвместната функция на разпределение на сл.в.* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} < x_1, \ldots, X_{t_n} < x_n),$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ *се нарича крайномерно разпределение на случайния процес* X_t.

Когато $T = \mathbf{N}$ или $\mathbf{Z}$ процесът $\{X_t,\ t \in T\}$ се нарича времеви ред.

Определение 1.3 *Нека* $T = \mathbf{Z}$ *и* $X_i : \mathbf{E}X_i = 0, \mathbf{Var}X_i < \infty$ *и* X_i *са независими в съвкупност сл.в. Тогава семейството* $\{X_i,\ i \in T\}$ *образува случаен процес, който се нарича бял шум.*

Определение 1.4 *Нека* $T = \mathbf{N}$ *и* $\{X_i,\ i \in T\}$ *образуват бял шум. Тогава* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *образуват случаен процес, който се нарича случайно лутане (случайна разходка).*

Определение 1.5 *Казваме, че два процеса* $X_t, Y_t,\ t \in T$ *дефинирани на вероятностното пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *са стохастично еквивалентни, ако за всяко* $t \in T$

$$\mathbf{P}(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0.$$

Определение 1.6 *Ако* $m(t) = \mathbf{E}X_t < \infty,\ \forall t \in T$, *то ковариационна функция на процеса* X_t *наричаме функцията* $A(t,s) = Cov(X_t, X_s),\ t, s \in T$.

Да напомним, че $Cov(X_t, X_s) = \mathbf{E}[(X_t - \mathbf{E}X_t)(X_s - \mathbf{E}X_s)]$. В случая, когато $t = s$, то $A(t,t) = \mathbf{Var}(X_t)$.

Един стохастичен процес може да бъде зададен чрез крайномерните си разпределения или чрез ковариационната си функция.

Лема 1.1 *Ако* $\{X_t,\ t \in T\}$ *е стохастичен процес с ковариационна функция* $A(t,s)$, *то тя е неотрицателно определена, т.е. за всеки* $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ *и* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ *е изпълнено* $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

Определение 1.7 *Казваме, че процесът* $\{X_t,\ t \in T\}$ *е слабо стационарен, или стационарен в широк смисъл ако са изпълнени:*

1) $m(t) = const$;

2) *Ковариационната функция* $A(t,s) = R(|t-s|)$ *зависи само от разликата* $|t-s|$.

Определение 1.8 *Казваме, че процесът* $\{X_t,\ t \in T\}$ *е силно стационарен, или стационарен в тесен смисъл, ако за всяко* $h > 0$ *и произволни* $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ *и* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ *е изпълнено:*

$$\mathbf{P}(X_{t_1+h} < x_1, \dots, X_{t_n+h} < x_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n).$$

Определение 1.9 *Казваме, че* $\{X_t,\ t \in T\}$ *е Марковски процес, ако за произволни* $s_1 < \ldots < s_m < s < t$ *е изпълнено*

$$\mathbf{P}\{X_t \leq a \mid X_{s_1} = x_1, \dots, X_{s_m} = x_m, X_s = x\} = \mathbf{P}\{X_t \leq a \mid X_s = x\}.$$

3 Теорема на Колмогоров

За целите на този курс включваме без доказателство следната фундаментална теорема.

Теорема 1.1 *Нека* $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n),\ n \geq 1,\ t_k \in T\}$ *е семейство от функции на разпределение, които удовлетворяват условията за съгласуваност:*

1) $F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1},\ldots,t_{n+m}}(x_1,\ldots,x_n,\infty,\ldots,\infty) = F_{t_1,\ldots,t_n,}(x_1,\ldots,x_n)$,

2) $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_n}}(x_{k_1},\ldots,x_{k_n})$,

където $(k_1,\ldots,k_n)$ *е произволна пермутация на* $(1,\ldots,n)$.

Тогава съществува вероятностно пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *и дефиниран на него стохастичен процес, който има за крайномерни разпределения функциите* $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n),\ n \geq 1$.

4 Гаусов процес

Определение 1.10 *Нека* $T = \mathbf{R}$ *и крайномерните разпределения са многомерни нормални разпределения. Тогава сл. процес се нарича Гаусов.*

Този клас процеси се определят напълно чрез математическото очакване и ковариационната матрица.

Теорема 1.2 *За всяка функция* $m(t)$ *и неотрицателно определена функция* $A(t,s),\ t,s \in \mathbf{R}$*, съществува единствен (по отношение на крайномерните разпределения) Гаусов процес* $\{X_t,\ t \in \mathbf{R}\}$ *с математическо очакване* $m(t) = \mathbf{E}X_t$ *и ковариация* $Cov(X_s,X_t) = A(s,t)$.

5 Винеров процес

Определение 1.11 *Стохастичен процес* $\{W_t,\ t \in \mathbf{R}^+\}$*, за който:*

1) $W_0 = 0$;

2) $W_t - W_s \in N(0,|t-s|\sigma^2)$;

3) W_t *е процес с независими нараствания, т.е. за произволни* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *сл. величини*

$$W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \ldots, W_{t_2} - W_{t_1}$$

са независими в съвкупност;

4) *Траекториите на процеса са непрекъснати по* t *за всяко* ω.

Ако $\sigma = 1$ процесът се нарича стандартен Винеров процес.

Теорема 1.3 *Нека* $\{W_t,\ t \in \mathbf{R}^+\}$ *е винеров процес. Тогава съвместната му плътност има вида:*

$$f_{W_1,\ldots,W_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{t_1}\sqrt{t_2-t_1}\ldots\sqrt{t_n-t_{n-1}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right)$$

за всеки $t_1,t_2,\ldots,t_n \in \mathbf{R}^+$ *и* $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbf{R}$

Тук за удобство е означено $W_i = W_{t_i}$.

Следователно Винеровия процес е Гаусов.

Доказателство: Да разгледаме $\eta_k = W_k - W_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n$. Нека $\sigma = 1 \Rightarrow \eta_k \in N(0, |t_k - t_{k-1}|)$. Освен това η_k са независими сл.в. и накрая $W_{t_k} = \eta_1 + \ldots + \eta_k$. Тогава $f_{W_1,\dots,W_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\eta_1,\dots,\eta_n}(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ като Якобианът на смяната е единица. Следователно

$$f_{\eta_1,\dots,\eta_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\eta_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})^2}} e^{-\frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}}.$$

Полагаме $y_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n$ и получаваме

$$f_{W_1,\dots,W_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{t_1}\sqrt{t_2 - t_1} \ldots \sqrt{t_n - t_{n-1}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

□

6 Брауново движение

Наименованието си Брауновото движение дължи на чисто физическия смисъл, който има, а именно описва движението на частици в течност (или газ). Това движение се дължи на непрекъснатите удари на молекулите на течността (газа).

Определение 1.12 *Нека с X_t означим x координатата на браунова частица в момента t и нека $X_0 = 0$. $\{X_t,\ t \geq 0\}$ е стохастичен процес, като:*

1) Траекториите му са непрекъснати;

2) Процесът е еднороден, т.е. разпределението на $X_{t+h} - X_t$ е еднакво с това на X_h.

(Това означава, че разпределението на нарастването (на отместването) на частицата за време h не зависи от момента t и може да се приеме, че средата е хомогенна и законите за движение не се менят с времето.)

3) X_t е с независими нараствания, т.е. ударите на частиците с молекулите на средата за различни интервали от време са независими.

Ще покажем, че процесът X_t е Винеров процес.

Теорема 1.4 *Нека $\{X_t,\ t \in \mathbf{R}^+\}$ удовлетворява следните условия:*

1) $X_0 = 0,\ \mathbf{E}X_t = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}^+$;

2) X_t е с независими нараствания;

3) $X_{t+h} - X_t$ е еднакво разпределена с X_h за всяко $h > 0,\ t \in \mathbf{R}^+$ (пишем $X_{t+h} - X_t \stackrel{d}{=} X_h$);

4) X_t има непрекъснати траектории;

Тогава $\{X_t,\ t \geq 0\}$ е Винеров процес.

Доказателство: Нека с $f(x,t)$ да означим плътността на X_t и с $\Phi_h(x)$ - плътността на нарастването $X_{t+h} - X_t$. По формулата за пълната вероятност е налице следното съотношение:

$$f(x,t+h) = \int_{\mathbf{R}} f(x-\Delta,t)\Phi_h(\Delta)d\Delta,$$

което отразява факта, че за да има частицата абциса x в момента $t+h$ тя трябва да е била в точка с абциса $x-\Delta$ в момента t и за време h да е изменила абцисата си с Δ, където $\Delta \in \mathbf{R}$.

По формулата на Тейлор имаме:

$$f(x,t+h) \approx f(x,t) + h\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + o(h), \tag{1.1}$$

$$f(x-\Delta,t) \approx f(x,t) - \Delta\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + o(\Delta^2),$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(x,t+h) &= \int_{\mathbf{R}} \left(f(x,t) - \Delta\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + o(\Delta^2)\right)\Phi_h(\Delta)d\Delta) \\ &\approx f(x,t)\int_{\mathbf{R}}\Phi_h(\Delta)d\Delta - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\Delta\Phi_h(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta. \end{aligned}$$

Като знаем, че $\int_{\mathbf{R}}\Phi_h(\Delta)d\Delta = 1$, защото $\Phi_h(\Delta)$ е плътност и $\int_{\mathbf{R}}\Delta\Phi_h(\Delta)d\Delta = \mathbf{E}(X_{t+h} - X_t) = \mathbf{E}X_{t+h} - \mathbf{E}X_t = 0 - 0 = 0$, получаваме:

$$f(x,t+h) \approx f(x,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta. \tag{1.2}$$

Като приравним десните страни на (1.1) и (1.2), разделим на h и оставим $h \to 0$ получаваме т. нар. уравнение на дифузия):

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t),$$

където

$$D = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta,$$

и се нарича коефициент на дифузия.

От друга страна, задачата на Коши за уравнението на дифузията е:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t), \\ f(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

Тук функцията $\delta(x)$ се определя чрез

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Решението се дава с формулата на Поасон:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{\mathbf{R}} f(x-y,0)e^{-\frac{y^2}{4Dt}}dy$$

или

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

□

Глава 2

Вериги на Марков - основни понятия

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дадем дефиниция на Марковска верига;
- да изведем уравненията на Чепмен-Колмогоров;
- да дадем класификация на състоянията на Марковска верига;
- да разгледаме примери на Марковски вериги.

1 Дефиниция

Нека стохастичният процес $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ взема стойности в крайно или изброимо множество, които ще предполагаме, че са неотрицателни цели числа $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (ако изрично не е казано нещо друго). Ако $X_n = i$ ще казваме, че процесът е в състояние i в момента n. Предполагаме още, че ако процесът е в състояние i съществува фиксирана вероятност p_{ij}, че в следващият момент той ще бъде в състояние j и тези вероятности удовлетворяват равенствата:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{ij}, \tag{2.1}$$

за всеки набор $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ и всяко $n \geq 0$. Тогава процесът $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ се нарича Марковска верига.

За вероятностите p_{ij} за преход от състояние i в състояние j е в сила:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1,$$

тъй като процесът в момента $n + 1$ ще бъде в едно от възможните си състояния.

Матрицата

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

наричаме матрица от преходните вероятности p_{ij} за една стъпка.

Пример 2.1 *Прогноза за времето. Да допуснем, че шансът утре да вали зависи от това какво е било времето днес, но не зависи от това какво е било времето през предните дни. Нека вероятността утре да вали, ако е валяло днес е* α, *а вероятността утре да вали, ако не е валяло днес е* β. *Да дефинираме случаен процес, който е в състояние* 0, *ако вали и в състояние* 1 *ако не вали. При направените предположения този процес е Марковска верига с две състояния* $\{0,1\}$ *и матрицата от преходните вероятности за една стъпка е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

Пример 2.2 ***(Случайно лутане)*** *Една Марковска верига с множество от състоянията* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ *се нарича случайно лутане, ако за фиксирано* $p \in (0,1)$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ *за* $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Такава Марковска верига се нарича случайно лутане, тъй като тя може да служи за модел на разходка на човек по права линия, който във всеки момент от време прави стъпка надясно с вероятност p *или стъпка наляво с вероятност* $1 - p$.

Пример 2.3 ***(Хазартен модел)*** *Един комарджия на всеки тур от играта или печели* \$1 *с вероятност* p *или губи* \$1 *с вероятност* $1 - p$. *Ако допуснем, че играчът приключва играта или, когато се разори, или когато спечели* $\$N$, *тогава неговата съдба (състояние) е Марковска верига с преходни вероятности*

$$p_{i,i+1} = p, \;\; p_{i,i-1} = 1 - p, \;\; p_{00} = 1, \;\; p_{NN} = 1.$$

В такъв случай състоянията 0 *и* N *се наричат поглъщащи, защото попадайки в тях процесът остава в тези състояния завинаги.*

Този модел се нарича, крайно случайно лутане с поглъщащи бариери (състоянията 0 *и* N*).*

2 Уравнения на Чепмен-Колмогоров

Ще дефинираме преходни вероятности $p_{ij}^{(n)}$ за преминаване от състояние i в състояние j за n стъпки по следния начин:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_m = i), \;\; n \geq 0, \; m \geq 0,$$

като

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

Уравненията на Чепмен-Колмогоров ни дават метод за пресмятане на преходните вероятности за n стъпки. Те са:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \;\; \forall n, m \geq 0, \; \forall i, j. \tag{2.2}$$

Интуитивно е ясно, че процесът за $n+m$ стъпки ще премине от състояние i в състояние j, като следва траекториите, които за n стъпки ще го доведат в някое състояние k, а след това от състояние k за m стъпки процесът ще попадне в състояние j. Сумирайки по всички възможни междинни състояния k получаваме вероятността за преход от i в j за $n+m$ стъпки.

Строгото доказателство е следното:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) =$$

по формулата за пълната вероятност

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbf{P}(X_n = k | X_0 = i) =$$

поради Марковското свойство

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_n = k) \mathbf{P}(X_n = k | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}.$$

Ако означим с $\mathbb{P}^{(n)}$ матрицата с елементи $p_{ij}^{(n)}$ преходните вероятности за n стъпки, то уравненията (2.2) означават, че

$$\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{(n)} \mathbb{P}^{(m)},$$

като матриците са умножени по правилото ”ред по стълб”. Тогава като използваме, че $\mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}$, получаваме последователно:

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(1)} \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{P}^2, \ \mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^{(2)} \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}^2 \mathbb{P} = \mathbb{P}^3,$$

и по индукция

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

Пример 2.4 *Нека в Пример 2.1,* $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$. *Каква е вероятността ако днес вали, след 4 дни пак да вали? Нека* $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$. *Пресмятаме последователно*

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}, \ \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^2 \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}.$$

Следователно $p_{00}^{(4)} = 0.5749$.

До тук всички разглеждани вероятности бяха условни. Така $p_{ij}^{(n)}$ е вероятността процесът да е в състояние j на $n-$та стъпка (или в момента от време n) при условие, че е бил в състояние i в момента 0. Ако са ни необходими безусловните вероятности за това процесът да е в състояние j в момента n, трябва да знаем разпределението на началното състояние на процеса. Нека считаме, че е зададено разпределението:

$$\alpha_i = \mathbf{P}(X_0 = i), \ \ i = 0, 1, 2, \dots, \ \ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1.$$

Тогава безусловните вероятности на състоянието на процеса в момент n се получават по формулата за пълната вероятност:

$$\mathbf{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = i | X_0 = k)\mathbf{P}(X_0 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ki}^{(n)} \alpha_k, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Нека $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ и $\boldsymbol{\beta}^{(n)} = (\beta_0^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \ldots)$, където $\beta_i^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогава горните уравнения могат се запишат в матричен вид:

$$\boldsymbol{\beta}^{(n)} = \boldsymbol{\alpha}\mathbb{P}^{(n)}.$$

Пример 2.5 *Ако $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.6$ (началното разпределение) в Пример 2.4, то тогава вероятността, че ще вали след 4 дни от момента, когато сме започнали да следим времето е*

$$\mathbf{P}(X_4 = 0) = 0.4p_{00}^{(4)} + 0.6p_{10}^{(4)}$$
$$= 0.4 \times 0.5749 + 0.6 \times 0.5668 = 0.57.$$

3 Класификация на състоянията

Определение 2.1 *Състоянието j се нарича достижимо от състоянието i, ако $p_{ij}^{(n)} > 0$ за някое $n \geq 0$.*

С други думи, състоянието j е достижимо отсъстоянието i тогава и само тогава, когато започвайки от състояние i е възможно процесът да попадне в състояние j, тъй като, ако j не е достижимо от i, то

$$\mathbf{P}(\text{да попадне в } j | \text{ започва от } i) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j | X_0 = i\}\right)$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

Определение 2.2 *Две състояния i и j се наричат съобщаващи се, ако са достижими едно от друго. (Пишем $i \leftrightarrow j$.)*

Забележка 2.1 *Всяко състояние е съобщаващо се със себе си, тъй като $\mathbf{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1$.*

Дефинираната релация има следните свойства:

(i) $i \leftrightarrow i, \ \forall i$;

(ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$;

(iii) $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k, \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

Свойствата (i)-(iii) следват от Определение 2. За да докажем напр. (iii), нека $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$. Тогава съществуват числа $m \geq 0$ и $n \geq 0$ така, че $p_{ij}^{(n)} > 0$ и $p_{jk}^{(m)} > 0$. Следователно, от уравненията на Чепмен-Колмогоров получаваме

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

т.е. k е достижимо от i. По аналогичен начин може да се докаже, че i е достижимо от k.

Релацията $\leftrightarrow$ е релация на еквивалентност и множеството от състоянията на процеса се разпада на непресичащи се класове на еквивалентност, като всеки две състояния от един и същи клас са съобщаващи се.

Определение 2.3 *Казваме, че една Марковска верига е неразложима, ако множеството от състоянията на веригата образува един клас съобщаващи се състояния, т.е. когато всеки две състояния са съобщаващи се.*

Пример 2.6 *Да разгледаме Марковска верига с три състояния* $0, 1, 2$ *и матрица на преходните вероятности*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Лесно се вижда, че тази Марковска верига е неразложима. Например от $0 \to 2$ е възможен преход за две стъпки $0 \to 1 \to 2$, а преходът $2 \to 0$ е възможен чрез $2 \to 1 \to 0$.

Пример 2.7 *Да разгледаме Марковска верига с* 4 *състояния* $0, 1, 2, 3$ *и матрица от преходните вероятности за една стъпка*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Множеството от състоянията се състои от следните класове $\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, като състоянието 3 е поглъщащо.

Определение 2.4 *Едно състояние на Марковска верига се нарича поглъщащо, ако никое друго състояние не може да бъде достигнато от него.*

За всяко състояние i означаваме с

$$f_i = \mathbf{P}(X_n = i, \text{ за някое } n \geq 1 | X_0 = i)$$

вероятността процесът, започвайки от състояние i някога да се върне отново в това състояние.

Определение 2.5 *Казваме, че състоянието* i *е възвратно, ако* $f_i = 1$ *или преходно, ако* $f_i < 1$.

Да допуснем, че процесът започва от състояние i и то е възвратно. Това означава, че с вероятност 1, процесът евентуално ще се върне в състояние i, но тогава от дефиницията на Марковска верига следва, че процесът започва отначало, всеки път когато се върне в състоянието i. Тогава процесът евентуално ще попадне за втори път в състоянието i и т.н. С други думи, стигаме до заключението, че ако състоянието i е възвратно, то процесът започвайки от състояние i ще се връща в него безброй много пъти.

От друга страна, нека i е преходно състояние. Тогава всеки път, когато процесът попадне в състояние i ще имаме положителна вероятност $1 - f_i > 0$, процесът изобщо да не се върне в същото състояние. Следователно, започвайки от преходно състояние i, процесът ще попадне в него точно n пъти с вероятност $f_i^{n-1}(1 - f_i),\ n \geq 1$. Така броят на връщанията в едно преходно състояние е сл.в. с геометрично разпределение и тя има крайно математическо очакване $= \dfrac{1}{1 - f_i}$.

Изводът от направените разсъждения е следният: Състоянието i е възвратно тогава и само тогава, когато започвайки от него, средният брой връщания в това състояние е безкраен.

Нека означим

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } X_n = i \\ 0, & \text{ако } X_n \neq i. \end{cases}$$

Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ ще представлява броя на връщанията на процеса (периодите от време) в състояние i.

Да разгледаме

$$\mathbf{E}[\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[I_n | X_0 = i] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Така стигаме до следното твърдение:

Предложение 2.1 *Състоянието i е възвратно, ако $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ и е преходно, ако $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.*

Това предложение е особено важно, защото то показва, че в преходно състояние може да се попада само краен брой пъти, което от своя страна води до заключението, че в крайна Марковска верига (с краен брой състояния) не всички състояния могат да бъдат преходни. За да го докажем нека да допуснем, че Марковска верига има краен брой състояния $0, 1, 2, \ldots, M$ и да допуснем, че всичките са преходни. Тогава след време $T_0 < \infty$ в състоянието 0 няма да се попада, след време T_1 няма да се попада в състояние T_1 и т.н. Тогава след време $T = \max\{T_0, T_1, \ldots, T_M\}$ няма да се попада в никое състояние. Но тъй като процесът все трябва да е в някое състояние, стигаме до противоречие, което показва, че не може всички състояния да са преходни, поне едно трябва да е възвратно.

Следствие 2.1 *Ако състоянието i е възвратно и $i \leftrightarrow j$, то и състоянието j също е възвратно.*

Доказателство: Тъй като $i \leftrightarrow j \Rightarrow$, че съществуват $m, k \geq 0$ цели такива, че $p_{ij}^{(k)} > 0$, $p_{ji}^{(m)} > 0$. Тогава за всяко цяло $n \geq 0$

$$p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}, \tag{2.3}$$

тъй като в лявата страна е вероятността за преход от j в j за $m+n+k$ стъпки, а отдясно е вероятността за преход от j в j по траектории, такива, че за m стъпки процесът попада от j в i след това за n стъпки от i отива пак в i и за последните k стъпки от i отива в j.

Сумирайки в (2.3) по n получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

тъй като $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, ($i$ е възвратно.) Сега от Предложение 2.1 следва, че j също е възвратно. □

Забележка 2.2

(i) *Преходността също е общо свойство на всички състояния от един клас, т.е. $i \leftrightarrow j$ и i е преходно, то и j е преходно.*

(ii) *Следствие 2.1 заедно с твърдението, че не всички състояния в крайна марковска верига са преходни ни дава, че ако една крайна Марковска верига е неразложима, то всичките и състояния са възвратни.*

Пример 2.8 *Нека марковската верига има 4 състояния* $0, 1, 2, 3$ *и матрицата от преходните вероятности е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.9 *Нека Марковска верига има 5 състояния* $0, 1, 2, 3, 4$ *и матрицата от преходните вероятности е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Да се намерят възвратните състояния.

Решение. Състоянията на Марковската верига се разделят на три класа $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4\}$. Състоянието 4 е преходно, тъй като веднъж излязъл от него процесът не се връща повече. Другите състояния са възвратни.

Пример 2.10 *Случайно лутане: Марковска верига със състояния:* $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *и преходни вероятности:*

$$p_{i,i+1} = p, \ \ p_{i,i-1} = 1 - p, \ \ 0 < p < 1, \ \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Ясно е, че всички състояния са съобщаващи се. Следователно те или всичките са възвратни или всички са преходни. Да разгледаме състоянието 0 *и да видим дали* $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ *е крайна или безкрайна. Тъй като не е възможно след нечетен брой стъпки, излизайки от* 0 *процесът отново да се върне в* 0, *то* $p_{00}^{(2n-1)} = 0, \ \forall n \geq 1$. *След четен брой* $2n$ *стъпки процесът ще е отново в състояние* 0, *ако са направени точно* n *стъпки в ляво и точно* n *стъпки в дясно. Но поради това, че всяка стъпка не зависи от предните, то броя на стъпките в дясно е биномно разпределена сл.в. с параметри* $p, 2n$. *Тогава вероятността за точно* n *от* $2n$ *стъпки да са в дясно е* $\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$, *което е и вероятността за връщане в състоянието* 0 *за* $2n$ *стъпки. Така*

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n!n!} [p(1-p)]^n, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Като използуваме формулата на Стирлинг $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$, *намираме*

$$p_{00}^{(2n)} \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ *ще е сходящ, тогава и само тогава, когато е сходящ реда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Поради това, че $4p(1-p) \leq 1, \ \forall p \in (0,1)$ *като равенство се достига само при* $p = 1/2$ *заключаваме, че* $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty \iff p = 1/2$.

Така състоянията са възвратни при $p = 1/2$ *и преходни при* $p \neq 1/2$.

При $p = 1/2$ случайното лутане се нарича симетрично.

Да разгледаме симетрично случайно лутане в равнината (двумерно сл. лутане). На всяка стъпка можем да преминем в едно от четирите възможни съседни сътояния(нагоре, надолу, наляво и надясно) с вероятности съответно по $1/4$, т.е.

$$p_{(ij)(i,j-1)} = p_{(ij)(i-1,j)} = p_{(ij)(i,j+1)} = p_{(ij)(i+1,j)} = 1/4.$$

Ще докажем, че това случайно лутане също е възвратно.

Тъй като веригата е неразложима (всички състояния са съобщаващи се), то достатъчно е отново да разгледаме състоянието (00). Вероятността за връщане в началото след нечетен брой стъпки отново е равна на 0. За да се върне процесът в състояние (00) след $2n$ стъпки трябва да са направени i прехода в ляво, i прехода в дясно $n-i$ прехода нагоре и $n-i$ прехода надолу, за някое $i, \ 0 \leq i \leq n$. Тогава за $p_{(00)(00)}^{(2n)}$ получаваме

$$p_{(00)(00)}^{(2n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{(2n)!}{n!n!}.
\end{aligned}
$$

Но

$$
\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.
$$

Следователно $p^{(2n)}_{(00)(00)} \sim \dfrac{1}{\pi n} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{(00)(00)} = \infty$. Следователно състоянието (00) възвратно, а от там и всички състояния са възвратни.

Интересно е да се отбележи, че случайно лутане в пространство с три и повече измерения не може да бъде възвратно.

Глава 3

Вериги на Марков - гранични вероятности, примери

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дефинираме гранични вероятности;
- да дефинираме обратими във времето Марковски вериги;
- да разгледаме като пример един клас разклоняващи се процеси.

1 Гранични вероятности

Да се върнем към Пример 2.4, използвайки, че $\mathbb{P}^{(8)} = \mathbb{P}^{(4)}\mathbb{P}^{(4)}$ получаваме

$$\mathbb{P}^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.572 & 0.428 \\ 0.570 & 0.430 \end{pmatrix}.$$

Трябва да отбележим, че:
1) Матрицата $\mathbb{P}^{(8)}$ е почти идентична с $\mathbb{P}^{(4)}$ и
2) По редове стойностите на $\mathbb{P}^{(8)}$ също почти съвпадат или $p_{ij}^{(n)}$ клони към някаква стойност при $n \to \infty$, която е една и съща за всички i при фиксирано j. С други думи изглежда, че съществува гранична вероятност, че процесът ще бъде в състояние j след голям брой преходи и тази вероятност не зависи от началното състояние. За да направим горните евристични разсъждения по-строги е необходимо да отбележим още две допълнителни свойства на Марковските вериги.

Определение 3.1 *Състоянието i се нарича периодично с период $d \geq 1$ тогава и само тогава, когато най-големият общ делител на числата n, за които $p_{ii}^{(n)} > 0$ е d.*

Например, ако започвайки от i е възможно процесът да се връща в i само в моментите $2, 4, 6, 8, \ldots$, то i има период $d = 2$.

Определение 3.2 *Състояние с период $d = 1$ се нарича апериодично.*

Периодичността е общо свойство, на състоянията от един и същи клас на еквивалентност, т.е. ако i е с период d и $i \leftrightarrow j$ следва, че j е с период d.

Определение 3.3 *Марковската верига е периодична, ако е неразложима и има периодично състояние с период d.*

Определение 3.4 *Състояние i се нарича положително възвратно, ако е възвратно и започвайки от i, очакваното време, за което процесът ще се върне в i е крайно.*

Последното свойство също е общо за състоянията от един клас на еквивалентност, т.е. ако i е положително възвратно и $i \leftrightarrow j$ следва, че j е положително възвратно.

Определение 3.5 *Състояние, което не е положително възвратно се нарича нулево възвратно.*

Определение 3.6 *Марковската верига е положително възвратна, ако е неразложима и има поне едно положително възвратно състояние.*

Може да се покаже, че в крайна Марковската верига всяко възвратно състояние е положително възвратно.

Определение 3.7 *Положително възвратно, апериодично състояние се нарича ергодично.*

Теорема 3.1 *(без доказателство) За неразложима ергодична Марковска верига съществува:*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)},$$

независеща от i. Ако означим

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j \geq 0,$$

то π_j е единственото неотрицателно решение на

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1, \quad j \geq 0. \tag{3.1}$$

Забележка 3.1

(i) *Ако $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ съществува и не зависи от i, не е трудно (евристично) да видим, че удовлетворява (3.1).*

Разглеждаме:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)\mathbf{P}(X_n = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\mathbf{P}(X_n = i). \tag{3.2}$$

При $n \to \infty$ в (3.2)

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}.$$

(ii) *Ако означим $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$, то (3.1) може да се запише във вида*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{P}, \quad \sum_j \pi_j = 1.$$

(iii) *Може да се покаже, че* π_j *е също равно на отношението на времето, когато процесът е бил в състояние* j *към* n*, за големи* n.

(iv) *В неразложимия, положително възвратен и периодичен случай, отново съществува единственото неотрицателно решение на (3.1), като* π_j *се интерпретира като в (iii).*

Пример 3.1 *Да разгледаме отново Пример 2.1. От уравнението (3.1) за граничните вероятности* π_0 *и* π_1 *имаме:*

$$\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_1$$

$$\pi_1 = (1-\alpha)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1,$$

Следователно $\pi_0 = \dfrac{\beta}{1+\beta-\alpha}$, $\pi_1 = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$. *При* $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4 \Rightarrow \pi_0 = 4/7 = 0.571$.

Пример 3.2 ***(Hardy–Weinberg Law. Марковска верига в генетиката)*** *Разглеждаме голяма популация от индивиди, всеки от които притежава двойка гени, които са класифицирани от тип* A *и* a*. Нека в популацията имаме* AA *и* aa *или* aA *индивиди съответно с вероятност* p_0, q_0, r_0 $(p_0+q_0+r_0=1)$*. Когато два индивида се кръстосат, всеки от тях дава случайно единия от гените си в новото поколение. Да допуснем, че кръстосването става случайно и всеки индивид равновероятно може да се кръстоса с всеки друг от популацията.*

Искаме да определим вероятностите p, q, r за разпространение на типовете AA, aa, Aa в следващото поколение.

Нека отбележим, че случайния избор на родител и след това случайния избор на неговите гени е еквивалентно на случаен избор на ген от цялата популация на гените. Като вземем условната вероятност при двойката гени на родителя виждаме, че случайно избран ген ще бъде тип A с вероятност

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|AA)p_0 + \mathbf{P}(A|aa)q_0 + \mathbf{P}(A|Aa)r_0 = p_0 + \frac{r_0}{2}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(a) = q_0 + \frac{r_0}{2}.$$

И така след случайно кръстосване, случайно избран индивид от следващото поколение ще бъде:

– от тип AA с вероятност $p = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(A) = \left(p_0 + \dfrac{r_0}{2}\right)^2$;

– от тип aa с вероятност $q = \mathbf{P}(a)\mathbf{P}(a) = \left(q_0 + \dfrac{r_0}{2}\right)^2$ и

– от тип Aa с вероятност $r = 2\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(a) = 2\left(p_0 + \dfrac{r_0}{2}\right)\left(q_0 + \dfrac{r_0}{2}\right)$.

Процентът на типовете AA, aa, Aa в следващото поколение е съответно p, q и r.

Нека сега разгледаме новото поколение. При него процентното съдържание на гените тип A ще бъде $p + \dfrac{r}{2}$ и това е частта от гените от тип A, които са останали непроменени от предишното поколение. Това следва или от аргумента, че (цялата) тоталната генна популация не се мени от поколение на поколение, или от следната проста сметка:

$$p+\frac{r}{2}=\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)^2+\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)\left(q_0+\frac{r_0}{2}\right)=\left(p_0+\frac{r_0}{2}\right)\left[p_0+2\frac{r_0}{2}+q_0\right]=p_0+\frac{r_0}{2}=\mathbf{P}(A) \tag{3.3}$$

Следователно, съотношението на A и a в генната популация е същото, както в началната популация. От това следва, че при случайно кръстосване във всички следващи поколения след началното, процентното съотношение на индивидите с гени AA, aa и Aa ще остане фиксирано със стойности: p, q и r. Това се нарича закон на Hardy-Weinberg.

Да допуснем, че генната популация на двойките гени AA, aa, Aa се е стабилизирала около % : $p,\ q,\ r$ и да проследим генетичната история на един единствен индивид и неговите наследници (за простота допускаме, че всеки индивид има точно един наследник). Нека за даден индивид, с X_n означим генетичното състояние на неговия $n-$ти наследник (или неговия наследник в $n-$тото поколение). Матрицата на преходните вероятности на тази Марковска верига е:

	AA	aa	Aa
AA	$p+\frac{r}{2}$	0	$q+\frac{r}{2}$
aa	0	$q+\frac{r}{2}$	$p+\frac{r}{2}$
Aa	$\frac{p}{2}+\frac{r}{4}$	$\frac{q}{2}+\frac{r}{4}$	$\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2}$

Интуитивно е ясно, че граничните вероятности на тази Марковска верига ще бъдат отново $p,\ q,\ r$ за наследниците на индивидите от трите типа AA, aa, Aa. За да покажем това е достатъчно да проверим, че те удовлетворяват уравнение (3.1), т.е.

$$p=p\left(p+\frac{r}{2}\right)+r\left(\frac{p}{2}+\frac{r}{4}\right)=\left(p+\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$q=q\left(q+\frac{r}{2}\right)+r\left(\frac{q}{2}+\frac{r}{4}\right)=\left(q+\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$p+q+r=1,$$

но това е изпълнено поради (3.3).

Забележка 3.2 $\pi_j,\ j\geq 0$ *се наричат още стационарни вероятности.*

Причината е, че ако допуснем, че началното състояние е избрано в съответствие с разпределение $\pi_j,\ j\geq 0$, то тогава вероятността да се намираме отново в това състояние за всяко n е π_j, т.е. ако $\mathbf{P}(X_0=j)=\pi_j,\ \ j\geq 0$, то $\mathbf{P}(X_n=j)=\pi_j,\ \ \forall n,j\geq 0$.

Лесно се вижда, че това е така чрез индукция по n. Нека е изпълнено за $n-1$ и да проверим за n. Имаме от (3.1):

$$\mathbf{P}(X_n=j)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{P}(X_n=j|X_{n-1}=i)\mathbf{P}(X_{n-1}=i)=\sum_{i=0}^{\infty}p_{ij}\pi_i=\pi_j.$$

2 Средно време в преходните състояния

Разглеждаме крайна Марковска верига и нека състоянията са номерирани, така че $T = \{1, 2, \dots, t\}$ е множеството от преходните състояния,

$$\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & p_{t2} & \dots & p_{tt} \end{pmatrix}$$

и да отбележим, че тъй като $\mathbb{P}_T$ се състои само от преходни вероятности за преминаване от преходно състояние в преходно състояние, то някои от сумите по редове са по-малки от 1.

Нека с s_{ij} означим очаквания брой периоди от време Марковската верига да бъде в преходно състояние j, при условие, че започва от преходно състояние i (или респективно брой връщания в j).

Нека $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

При условие началния преход получаваме

$$s_{ij} = \delta_{i,j} + \sum_k p_{ik} s_{kj} = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{t} p_{ik} s_{kj}, \tag{3.4}$$

където последното равенство следва от това, че не е възможен преход от възвратно в преходно състояние, откъдето $s_{kj} = 0$, когато k е възвратно състояние.

Нека $\mathbb{S}$ е матрицата от стойности s_{ij}, т.е.

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1t} \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{it} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{t1} & s_{t2} & \dots & s_{tt} \end{pmatrix}.$$

Тогава (3.4) може да се престави в следния матричен запис

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} + \mathbb{P}_T \mathbb{S}, \tag{3.5}$$

където $\mathbb{I}$ е единичната матрица с размерност t и тъй като (3.5) е еквивалентно на $(\mathbb{I} - \mathbb{P}_T)\mathbb{S} = \mathbb{I}$, получаваме $\mathbb{S} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}_T)^{-1}$, т.е. средните времена на престой в преходно състояние се получават лесно след обръщане на матрица $\mathbb{I} - \mathbb{P}_T$.

3 Разклоняващи се процеси

Разклоняващите се процеси са клас Марковски вериги с широко приложение в биологията, социологията, инженерните науки, медицината, физиката, химията, епидемиологията, финансите, информатиката и др.

Да разгледаме популация от индивиди, които "пораждат" индивиди от същия вид. Нека всеки индивид в края на своя живот породи j нови индивиди с вероятност p_j, $j \geq 0$, независимо от броя породени индивиди от останалите, съществуващи в популацията индивиди.

Началния брой означаваме с X_0 и наричаме размер на нулевото поколение. Цялото потомство на нулевото поколение образува първото поколение и броят на индивидите в него означаваме с X_1. Нека с X_n означим броя индивиди в $n-$то поколение $\Rightarrow \{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ е Марковска верига с множество на състоянията неотрицателни цели числа $(\mathbb{N} \cup \{0\})$. 0-та е възвратно състояние, тъй като $p_{00} = 1$. Ако $p_0 > 0$ всички състояния са преходни. Това следва от фактите, че $p_{i0} = p_0^i$, което показва, че започвайки с i индивида, съществува положителна вероятност $\geq p_0^i$, никое следващо поколение да не се състои от i индивида. Нещо повече, тъй като всяко крайно подмножество на преходните състояния $\{1, 2, \dots, n\}$ ще бъде посетено краен брой пъти, това води до важното заключение, че ако $p_0 > 0$, то популацията или ще се изроди (т.е. няма да има повече индивиди) или нейния размер клони към безкрайност.

Нека $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j$ е средният брой индивиди породени от един индивид и $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j-\mu)^2 p_j$, е дисперсията на броя на индивидите.

Нека $X_0 = 1$. Можем да запишем, че

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i,$$

Z_i е броя на наследниците на $i-$тия индивид в $(n-1)-$то поколение. С усредняване по X_{n-1} следва

$$\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n|X_{n-1})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i)|X_{n-1}) = \mathbf{E}(X_{n-1}\mu) = \mu \mathbf{E}X_{n-1} \tag{3.6}$$

От (3.6) следва $\mathbf{E}X_0 = 1$,
$\mathbf{E}X_1 = \mu$
$\mathbf{E}X_2 = \mu \mathbf{E}X_1 = \mu^2$
$\vdots$
$\mathbf{E}X_n = \mu \mathbf{E}X_{n-1} = \mu^n$

Аналогично за дисперсията като използуваме формулата за условна дисперсия, т.е.

$$\mathbf{Var}X_n = \mathbf{E}[\mathbf{Var}(X_n|X_{n-1})] + \mathbf{Var}[\mathbf{E}(X_n|X_{n-1})]$$

и факта, че при зададено X_{n-1}, X_n е сума от независими еднакво разпределени с $\{p_j, j \geq 0\}$ сл.в., то

$$\mathbf{Var}(X_n|X_{n-1}) = X_{n-1}\sigma^2$$

и от формулата за условната дисперсия и от (3.6) следва

$$\mathbf{Var}X_n = \mathbf{E}(X_{n-1}\sigma^2) + \mathbf{Var}(X_{n-1}\mu) = \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2 \mathbf{Var}X_{n-1},$$

и като вземем предвид, че $\mathbf{Var}X_0 = 0$ по индукция, получаваме:

$$\mathbf{Var}X_n = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\left(\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right), & \text{ако } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, \text{ ако } \mu = 1. \end{cases}$$

Нека означим с $\pi_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 0|X_0 = 1)$ вероятността процесът да се изроди (да попадне в поглъщащото състояние 0).

За първи път задачата за намиране на вероятността π_0 е възникнала и е формулирана от Галтон през 1889 г. във връзка с израждането на благородническите фамилии в Англия.

Да отбележим, че $\pi_0 = 1$, ако $\mu < 1$, защото

$$\mu^n = \mathbf{E}X_n = \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{P}(X_n = j)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X_n \geq 1),$$

и от $\mu^n \to 0,\ n \to \infty$ $(\mu < 1)$ следва веднага, че $\mathbf{P}(X_n \geq 1) \to 0$, или съответно $\mathbf{P}(X_n = 0) \to 1,\ n \to \infty$. Може да се докаже, че $\pi_0 = 1$ дори и при $\mu = 1$.

При $\mu > 1\ \Rightarrow \pi_0 < 1$ и уравнението, от което можем да пресметнем π_0 получаваме като усредним по потомството на началната частица:

$$\pi_0 = \mathbf{P}(\text{популацията се изражда})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\text{популацията се изражда}|X_1 = j)p_j.$$

При условие, че $X_1 = j$, популацията ще се изроди тогава и само тогава, когато всяка от $j-$те фамилии, започващи от всеки от индивидите на първото поколение, умира. Тъй като всяка фамилия еволюира независимо от останалите и вероятността за нейното израждане е също π_0, то

$$\mathbf{P}(\text{популацията се е изродила}|X_1 = j) = \pi_0^j$$

следователно π_0 удовлетворява уравнението

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j. \tag{3.7}$$

Когато $\mu > 1$ може да се покаже, че π_0 е най-малкото положително число, което е корен на уравнението (3.7).

Задача 3.1 *Ако $p_0 = 1/4,\ p_1 = 1/4,\ p_2 = 1/2$ да се определи π_0.*

Задача 3.2 *Ако в началният момент $X_0 = n$, и отново имаме същите стойности на вероятностите от Задача 3.1, на колко е равна вероятността за израждане на популацията?*

4 Обратими Марковски вериги (във времето)

Разглеждаме ергодична Марковска верига с преходни вероятности p_{ij} и стационарни вероятности π_j и да допуснем, че започвайки от даден момент проследяваме състоянията на тази Марковска верига обратно във времето, т.е. започвайки от n да разгледаме $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$. Оказва се, че тази редица е отново Марковска верига с преходни вероятности Q_{ij} дефинирани, чрез

$$Q_{ij} = \mathbf{P}(X_m = j|X_{m+1} = i) = \frac{\mathbf{P}(X_m = j, X_{m+1} = i)}{\mathbf{P}(X_{m+1} = i)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(X_m = j)\mathbf{P}(X_{m+1} = i | X_m = j)}{\mathbf{P}(X_{m+1} = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}.$$

За да покажем, че обратният процес е наистина Марковска верига, трябва да установим, че

$$\mathbf{P}(X_m = j | X_{m+1} = i, X_{m+2}, \ldots) = \mathbf{P}(X_m = j | X_{m+1} = i).$$

Нека настоящият момент е $m+1$. Тъй като $X_0, X_1, X_2, \ldots$ е Марковска верига, условното разпределение на бъдещето $X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots$ при зададено настояще X_{m+1} е независимо от миналото съответно от X_m. (Но независимостта е симетрична релация, т.е. ако A не зависи от B то и B не зависи от A). Това означава, че при зададено X_{m+1}, X_m не зависи от $X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots$. Точно това, което беше необходимо да проверим.

Ако $Q_{ij} = p_{ij}$ за всички i и j, казваме че Марковската верига е обратима във времето. Това условие също може да се изрази и така

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \ \forall i, j. \tag{3.8}$$

Ако съществуват числа $\{x_i\}$, удовлетворяващи (3.8) и $\sum_i x_i = 1$, то Марковската верига е обратима и тези числа представляват граничното разпределение на веригата. Това е така, тъй като $x_i p_{ij} = x_j p_{ji}$ и сумирайки по i получаваме:

$$\sum_i x_i p_{ij} = x_j \sum_i p_{ji}, \quad \sum_i x_i = 1, \tag{3.9}$$

но граничните вероятности π_i са единственото решение на (3.9). Следователно $x_i = \pi_i, \forall i$.

Теорема 3.2 *Една ергодична Марковска верига, за която $p_{ij} = 0$ винаги когато $Q_{ij} = 0$ е обратима във времето, тогава и само тогава, когато, започвайки от състояние i, всяка траектория, водеща обратно в i има същата вероятност, както обратната, т.е.*

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_k i} = p_{ii_k} p_{i_k i_{k-1}} \ldots p_{i_1 i}, \tag{3.10}$$

за всеки набор $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Доказателство: Необходимост: Вече е доказана.

Достатъчност: Фиксираме състоянията i и j и да запишем (3.10), така

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_k j} p_{ji} = p_{ij} p_{ji_k} p_{i_k i_{k-1}} \ldots p_{i_1 i},$$

сумирайки по всички състояния $i_1, i_2, \ldots, i_k$, следва:

$$p_{ij}^{k+1} p_{ji} = p_{ij} p_{ji}^{k+1}.$$

При $k \to \infty$ получаваме:

$$\pi_j p_{ji} = \pi_i p_{ij},$$

с което теоремата е доказана. $\square$

Глава 4

Поасонов процес

В тази глава си поставяме следните цели:

- да разгледаме свойствата на експоненциалното разпределение;
- да дефинираме Поасонов процес;
- да изучим някои свойства на Поасонов процес.

1 Допускания при стохастичното моделиране и ролята на експоненциалното разпределение

При стохастичното моделиране на реални явления винаги е необходимо да се правят определени опростяващи предположения, така че моделът да може да се изследва математически. От друга стана, тези опростявания не трябва да са прекалено много, тъй като моделът няма да бъде приложим за реални явления. Накратко, правим "достатъчно" такива допускания от математическа гледна точка, така че да не се отдалечаваме от реалния обект.

Едно такова опростяване е допускането, че някои сл.в. имат експоненциално разпределение (лесно се работи и често е добра апроксимация на истинското разпределение). Свойството, което го прави лесно за работа е, че то не се променя с времето. Чрез него често изразяваме закона на разпределение на времето, за което някакъв детайл е в изправност. Това означава, че ако "времето на живот" на този елемент е експоненциално разпределено, то този елемент, независимо колко продължително е работил, времето, което му остава да работи е отново експоненциално разпределено (както, ако току-що е започнал да работи като нов).

Ще формулираме строго това свойство и ще покажем, че експоненциалното разпределение е единственото непрекъснато разпределение с това свойство.

2 Експоненциално разпределение

2.1 Определение и характеристики

Непрекъснатата сл.в. X наричаме експоненциално разпределена с параметър λ, $X \in Exp(\lambda),\ \lambda > 0$, ако има плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

или ф.р.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математическото очакване е

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = 1/\lambda.$$

Пораждащата моментите функция е

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{tX} = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda$$

и

$$\mathbf{E}X^2 = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.2 Свойства на експоненциалното разпределение

Определение 4.1 *Казваме, че сл.в. X има разпределение без последействие (memoryless), ако*

$$\mathbf{P}(X > s + t|X > t) = \mathbf{P}(X > s), \quad \forall s, t \geq 0,$$

или еквивалентно

$$\frac{\mathbf{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \mathbf{P}(X > s).$$

Ако $X \in Exp(\lambda)$, то

$$\frac{\mathbf{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{\mathbf{P}(X > s + t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbf{P}(X > s).$$

Следователно експоненциалното разпределение е без последействие.

Пример 4.1 *Да допуснем, че времето, което клиент прекарва в банката е разпределено $Exp(1/10)$, т.е. средно 10 min.*

a) Колко е вероятността, даден клиент да прекара повече от 15 min?

b) Колко е вероятността, един клиент да прекара поне още 15 min, ако се знае, че вече е престоял в банката 10 min?

Решение. *Нека X е сл.в. равна на времето на престой на случайно избран клиент на банката. Тогава $X \in Exp(1/10)$.*

a) $\mathbf{P}(X > 15) = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} \approx 0.220.$

b) $\mathbf{P}(X > 25|X > 10) = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} \approx 0.220.$

Пример 4.2 *В пощенски офис има две гишета за обслужване на клиентите. Г-н Иванов, влизайки в пощата вижда, че г-н Петров е на едното гише, а г-н Димов на другото. Да допуснем, че г-н Иванов ще бъде обслужен веднага след като бъде обслужен Петров или Димов. Ако времето за обслужване на един клиент е Exp разпределена сл. в. с параметър λ, колко е вероятността за това Иванов да напусне пощата последен от тримата? (Отг. 1/2).*

Оказва се, че експоненциалното разпределение е единственото непрекъснато разпределение с това свойство. Накратко доказателството може да бъде извършено по следния начин: Нека $F(x)$ е ф.р. на сл.в. X без последействие и да означим $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbf{P}(X > x)$. Тогава $\overline{F}(s+t) = \overline{F}(s)\overline{F}(t)$ за всеки $s, t \geq 0$, т.е. $\overline{F}$ е решение на функционалното уравнение $g(s+t) = g(s)g(t)$, което има единствено непрекъснато решение $e^{-\lambda t}$ с $\lambda = -\log g(1)$.

Свойството без последействие се илюстрира по-често чрез т. нар. функция на загубите (failure rate function), $r(t)$, която се определя като $r(t) = \dfrac{f(t)}{\overline{F}(t)}$, където $f(t)$ е плътността на X.

Нека X е сл.в. равна на времето на работа на една система. Интересуваме се от вероятността системата да откаже в интервала $(t, t+dt)$, ако работи в момента t, т. е.

$$\mathbf{P}(X \in (t, t+dt) | X > t) = \frac{\mathbf{P}(X \in (t, t+dt), X > t)}{\mathbf{P}(X > t)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(t < X < t+dt)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{f(t)dt}{\overline{F}(t)} = r(t)dt,$$

т.е. $r(t)$ е условната вероятност за излизане от строя на системата, "преживяла" време t.

Ако допуснем, че времето на работа е експоненциално разпределено, т.е. $X \in Exp(\lambda)$, то оставащото време на работа на тази система е еднакво разпределено с времето за работа на нова система. Тогава степента на отказ трябва да е постоянна. Действително $r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$, т.е. функцията на загубите при експоненциалното разпределение е постоянна. По тази причина λ може да се интерпретира още като степен на разпределението (тя е обратно пропорционална на средното).

Функцията $r(t)$ определя по единствен начин ф.р. $F(t)$, защото

$$r(t)dt = \frac{f(t)dt}{\overline{F}(t)} \Rightarrow \log \overline{F}(t) = -\int_0^t r(x)dx + k_1$$

или

$$\overline{F}(t) = ke^{-\int_0^t r(x)dx}.$$

При $t = 0$ се определя, че $k = 1$ и окончателно $\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t r(x)dx}$.

Пример 4.3 *Хиперекспоненциално разпределени сл. в.: Нека* $X_i \in Exp(\lambda_i),\ i = 1, \dots, n$ *и* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *при* $i \neq j$ *и сл. в.* N *е независима от* $X_1, \dots, X_n$, $\mathbf{P}(N = j) = p_j,\ j = 1, \dots, n$ *и* $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Сл.в. X_N *се нарича хиперекспоненциална и за нейното разпределение, по формулата за пълната вероятност имаме:*

$$\overline{F}_{X_N}(t) = \mathbf{P}(X_N > t) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_N > t | N = j)\mathbf{P}(N = j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_j > t)p_j = \sum_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j t} p_j.$$

Къде възникват хиперекспоненциални сл.в.?

Да допуснем, че в една кутия има n типа батерии, където батериите от тип j имат време на живот $Exp(\lambda_j)$. Нека относителният дял на батериите от тип j в кутията е p_j. Ако изберем по случаен начин батерия от тази кутия, то нейното време на живот ще е хиперекспоненциално.

Като вземем предвид, че $f_{X_N}(t) = -\overline{F}X_N{}'(t)$ получаваме $f_{X_N}(t) = \sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}$. Нека $\lambda_i = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Определяме

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^n p_j e^{-\lambda_j t}}.\frac{e^{\lambda_i}}{e^{\lambda_i}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}}{\sum_{j=1}^n p_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}} = \frac{p_i\lambda_i + \sum_{j\neq i} p_j\lambda_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}}{p_i + \sum_{j\neq i} p_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}}.$$

Поради това, че $\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall j \neq i$ то $(\lambda_j - \lambda_i) > 0,\ \forall j \neq i$. Следователно $\lim_{t\to\infty} r(t) = \frac{p_i\lambda_i}{p_i} = \lambda_i$, т.е. времето на живот на случайно избрана батерия клони към степента на загуба на Exp разпределение с най-малка степен на загуба. Интуитивно наистина е така, колкото по-дълго е работила батерията, толкова сме по-склонни да смятаме, че нейната степен на загуба е най-малка.

2.3 Други свойства на експоненциалното разпределение

C1. Ако сл.в. $X_1, \dots, X_n \in Exp(\lambda)$ и са независими, то сл.в. $X = X_1 + \ldots + X_n \in \Gamma(n, \lambda)$, т.е. $f_X(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Ще го докажем по индукция относно n :

$$f_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \int_0^t f_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(u) f_{X_n}(t-u)du$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!}\lambda e^{-\lambda(t-u)}du$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!}d(\lambda u) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

C2. Ако $X_1 \in Exp(\lambda_1), X_2 \in Exp(\lambda_2)$ и са независими сл.в., каква е вероятността $\mathbf{P}(X_1 < X_2)$?

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_1 < X_2 | X_1 = x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(x < X_2)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}d(\lambda_1+\lambda_2)x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

C3. Ако $X_1, \dots, X_2$ са независими експоненциално разпределени сл.в., $X_i \in Exp(\mu_i),\ i = 1, \dots, n$, то $X = \min\{X_1, \dots, X_n\} \in Exp(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$.

$$\mathbf{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) = \mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 > x)\mathbf{P}(X_2 > x)\dots\mathbf{P}(X_n > x)$$
$$= e^{-\mu_1 x}\dots e^{-\mu_n x} = e^{-(\mu_1+\dots+\mu_n)x}.$$

С4. Сума на независими експоненциално разпределени сл.в.

Нека $X_i \in Exp(\lambda_i),\ i = 1,\dots,n$ са независими и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогава сл. в. $X = X_1 + \dots + X_n$ се нарича хипоекспоненциална. За нейното разпределение имаме:

а) При $n = 2$

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_0^t f_{X_1}(s)f_{X_2}(t-s)ds = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-s)}ds =$$
$$= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}ds$$
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

б) По аналогичен начин се получава

$$f_{X_1+\dots+X_n}(t) = \sum_{i=1}^n C_{i,n}\lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

където $C_{i,n} = \prod_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}$.

С5. Сума на случаен брой експоненциално разпределени сл.в.

Нека $X_i \in Exp(\lambda_i),\ i = 1,\dots,m$ са независими сл.в. и нека N е независима от тях сл.в. такава, че: $\mathbf{P}(N = n) = p_n,\ n = 1,2,\dots,m$ и $\sum_{n=1}^m p_n = 1$. Разглеждаме сл.в.

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i,$$

която се нарича сл.в. на Кокс (Cox). За плътността на Y имаме:

$$f_Y(x) = \sum_{n=1}^m f_Y(x|N=n)\mathbf{P}(N=n) = \sum_{n=1}^m p_n f_{X_1+\dots+X_n}(x)$$
$$= \sum_{n=1}^m p_n\sum_{i=1}^n C_{i,n}\lambda_i e^{-\lambda_i x}.$$

като е използвано и свойство С4.

3 Поасонов процес

3.1 Броящ процес

Определение 4.2 *Процесът* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *се нарича броящ процес, ако* $N(t)$ *е общият брой на сбъдванията (появяванията) на определено събитие в интервала* $[0, t]$.

Пример 4.4

а) $N(t)$ *= броя на купувачите влезли в един магазин от отварянето му до даден момент* t*. Събитието, което се сбъдва е влизането на купувач в магазина.*

$N(t)$ *= броя на купувачите, намиращи се в магазина в момента* t *не е броящ процес.*

б) Ако считаме, че събитието се сбъдва, когато се роди дете, то $N(t)$ *= общия брой родени до момента* t *е броящ процес.*

в) Броя на головете вкарани от един футболист от началото на кариерата му до даден момент t *също е броящ процес и т.н.*

От определението следва, че броящият процес удовлетворява следните условия:

(i) $N(t) \geq 0$;

(ii) $N(t)$ е целочислена величина за всяко t;

(iii) Ако $t > s \Rightarrow N(t) \geq N(s)$;

(iv) Ако $s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ е броят на сбъдванията на събитието в интервала $(s, t]$.

Определение 4.3 *Броящият процес е с независими нараствания, ако броя на събитията сбъднали се в непресичащи се интервали от време са независими сл.в.*

– В пример а) логично е да се допусне, че процеса е с независими нараствания.

– В пример б) не е логично тъй като, колкото е по-голямо $N(t)$ толкова е по-голям броя на хората в населеното място и следователно броят на ражданията ще е по-голям, т.е. има зависимост между нарастванията.

– В пример в) може да се предполага независимост на нарастванията.

Определение 4.4 *Броящият процес е със стационарни нараствания, ако ф.р. на* $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ *= броя на събитията сбъднали се в интервала* $(t_1 + s, t_2 + s]$ *не зависи от* s *(положението на интервала върху оста на времето) за всеки* $t_2 > t_1 \geq 0$ *и* $s \geq 0$.

– В пример а) логично е да се допусне, че процеса е със стационарни нараствания, ако предположим, че няма пиков час.

– В пример б) логично е, ако допуснем, че човешката популация е константа.

– В пример в) не е логично, тъй като е по-вероятно играчът да вкарва повече голове на възраст 25-30 г., отколкото на 35-40 г.

3.2 Дефиниция на Поасонов процес

Един от най-важните броящи процеси е Поасоновият процес. Той се дефинира по следния начин:

Определение 4.5 *Броящият процес* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *се нарича Поасонов със степен* $\lambda > 0$, *ако*

(i) $N(0) = 0$*;*

(ii) има независими нараствания;

(iii) Броя на събитията във всеки интервал с дължина t *е Поасоново разпределена сл.в.* $(Po(\lambda t))$ *със средно* λt, *т.е. за* $\forall s, t \geq 0$,

$$\mathbf{P}(N(s+t) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

От (iii) следва, че Поасоновият процес има стационарни нараствания и освен това $\mathbf{E}N(t) = \lambda t$ (което обяснява, защо λ се нарича степен на процеса.)

За да определим дали един броящ процес е Поасонов трябва да проверим условията (i)-(iii).

(i) се проверява лесно;

(ii) обикновено следва от нашето елементарно познание за процеса;

(iii) не е ясно как да се провери. Затова една друга дефиниция на Поасонов процес се оказва по-полезна:

Определение 4.6 *Броящият процес* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *се нарича Поасонов със степен* $\lambda > 0$, *ако*

(i) $N(0) = 0$*;*

(ii) има стационарни и независими нараствания;

(iii) $\mathbf{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \ \ h \to 0;$

(iv) $\mathbf{P}(N(h) \geq 2) = o(h), \ \ h \to 0.$

Теорема 4.1 *Определенията 4.5 и 4.6 са еквивалентни.*

Доказателство:

А. От Определение 4.6 $\Rightarrow$ Определение 4.5.

Нека $P_n(t) = \mathbf{P}(N(t) = n)$. Ще получим диференциално уравнение за $P_0(t)$ по следния начин:

$$P_0(t+h) = \mathbf{P}(N(t+h) = 0) = \mathbf{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) =$$

(поради независимостта на нарастванията $N(t) = N(t) - N(0)$ и $N(t+h) - N(t)$)

$$= \mathbf{P}(N(t) = 0)\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) = 0) = P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)),$$

(защото от (ii-iv) следва, че $\mathbf{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$.)

Следователно

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}, \ \ h \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

Като се реши това уравнение с начално условие $P_0(0) = \mathbf{P}(N(0) = 0) = 1$ се получава, че

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{4.1}$$

При $n > 0$ имаме

$$\begin{gathered}
P_n(t+h) = \mathbf{P}(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) + \\
\mathbf{P}(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) + \\
\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k) \\
= \mathbf{P}(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) + \\
\mathbf{P}(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) + o(h) = \\
P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) = \\
P_n(t)(1 - \lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h) \\
\Rightarrow \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h},\ h \to 0, \\
\Rightarrow P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).
\end{gathered}$$

Умножаваме последното уравнение с $e^{\lambda t}$ и получаваме

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = e^{\lambda t}\lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t),$$

за всяко $n > 0$. Сега от (4.1) намираме

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1(t)) = \lambda \Rightarrow P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

и тъй като $P_1(0) = 0$, то

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

По индукция относно n се намира, че $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$ за всяко $n \geq 2$.

Б. От Определение 4.5 $\Rightarrow$ 4.6. (Остава за упражнение). $\square$

3.3 Времена между появяване на събитията

Нека T_1 е момента на сбъдване на първото събитие и при $n > 1$, T_n е времето между $(n-1)-$то и $n-$то сбъдване на събитието. Редицата $\{T_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ се нарича редица на времената между сбъдванията на събитието.

Да намерим разпределенията на сл.в. T_n.

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(\text{събитието не се е сбъднало в интервала } [0, t]) \\
= \mathbf{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \quad \text{следователно } T_1 \in Exp(\lambda).
\end{gathered}$$

По-нататък

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(T_2 > t|T_1 = s)\\ &= \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала } (s, s+t]|T_1 = s)\\ &= \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала } (s, s+t]) = e^{-\lambda t}\\ &\Rightarrow T_2 \in Exp(\lambda).\end{aligned}$$

Получихме, че $T_1, T_2 \in Exp(\lambda)$ и са независими. Аналогично се показва за $T_3, T_4, \ldots$, т.е. вярно е следното

Предложение 4.1 *Сл.в. $T_n,\ n = 1, 2, \ldots$ са независими, еднакво разпределени с $Exp(\lambda)$ разпределение.*

Забележка 4.1 *Предположението за стационарност и независимост на нарастванията на Поасоновия процес е еквивалентно на твърдението, че във всеки момент от времето процесът започва отначало (стохастично еквивалентен).*

С други думи процесът, започвайки от произволен момент време е независим от това, което се е случило до този момент (поради независимите нараствания) и има същото разпределение, както започвайки от началото (поради стационарността на нарастванията), т.е. процесът няма "памет" и следователно трябва да очакваме експоненциално разпределение на времето между последователните появявания на събитието.

Нека S_n е моментът на настъпване на $n-$то събитие, наречено още време на чакане до $n-$то сбъдване. Ясно е, че $S_n = T_1 + \ldots + T_n \Rightarrow S_n \in \Gamma(n, \lambda)$, т.е. $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\ t \geq 0$. По друг начин $F_{S_n}(t) = \mathbf{P}(S_n \leq t) = \mathbf{P}(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$. От тук след диференциране по t се получава отново плътността на сл. в. S_n.

Предложение 4.1 ни дава друг начин за дефиниране на Поасонов процес. Нека $T_n,\ n = 1, 2, \ldots$ са независими и еднакво разпределени $Exp(\lambda)$ сл.в. Нека $S_0 = 0$ и $S_n = T_1 + \ldots + T_n,\ n = 1, 2, \ldots$ Интерпретираме S_n като последователни моменти на настъпване на някакво събитие. Тогава броящият процес $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ е Поасонов със степен λt.

3.4 Условни разпределения на времената за появяване

Да допуснем, че точно едно събитие се е сбъднало до момента t и искаме да намерим разпределението на времето на сбъдване на това събитие. От това, че Поасоновият процес има независими и стационарни нараствания е ясно, че във всеки подинтервал на $[0, t]$ с фиксирана дължина е равновероятно да се е сбъднало събитието. С други думи, моментът на появяване на събитието би трябвало да е равномерно разпределен в интервала $[0, t]$. Това лесно се проверява, т.е. за $s \leq t$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_1 < s|N(t) = 1) &= \frac{\mathbf{P}(T_1 < s, N(t) = 1)}{\mathbf{P}(N(t) = 1)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(1 \text{ събитие в } [0, s), 0 \text{ събития в } [s, t])}{\mathbf{P}(N(t) = 1)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(1 \text{ събитие в} [0, s))\mathbf{P}(0 \text{ събития в } [s, t])}{\mathbf{P}(N(t) = 1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s}.e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.$$

За да обобщим тази формула ще имаме нужда от понятието наредена (порядкова) статистика.

Определение 4.7 *Нека $Y_1, \ldots, Y_n$ са наблюдения на сл.в. Y. Казваме, че $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ са порядкови статистики, съответстващи на $Y_1, \ldots, Y_n$, ако $Y_{(k)}$ е $k-$та по големина стойност сред $Y_1, \ldots, Y_n$.*

Пример 4.5 *Нека $Y_1 = 4,\ Y_2 = 5,\ Y_3 = 1$. Тогава $Y_{(1)} = 1,\ Y_{(2)} = 4,\ Y_{(3)} = 5$.*

Ако $Y_i,\ i = 1, \ldots, n$ са независими и еднакво разпределени сл.в. с вероятностна плътност $f(y)$, то съвместната плътност на наредените статистики $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ е

$$n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i),\ y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

Това следва от:

(i) $(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)})$ ще е равно на $(y_1, \ldots, y_n)$, ако е една от $n!$ възможните пермутации на $(y_1, \ldots, y_n)$.

(ii) Вероятността за това, че $(Y_1, \ldots, Y_n) = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$ е

$$\prod_{j=1}^{n} f(y_{k_j}) = \prod_{j=1}^{n} f(y_j),$$

когато $k_1, \ldots, k_n$ е пермутация на $1, \ldots, n$.

Ако $Y_i,\ i = 1, \ldots, n$ са равномерно разпределени в интервала $(0, t)$ то съвместната плътност на порядковите статистики $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ е

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < \ldots < y_n < t.$$

Теорема 4.2 *Ако $N(t) = n$ то моментите на пристигане $S_1, S_2, \ldots, S_n$ имат същото разпределение, както наредените статистики съответни на n независими сл.в., равномерно разпределени в интервала $(0, t)$.*

Забележка 4.2 *Случайната величина ξ наричаме равномерно разпределена в интервала $(0, t)$, $\quad \xi \in U(0, t)$, ако*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & x \in (0, t), \\ 0, & x \notin (0, t), \end{cases} \quad \text{или} \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/t, & x \in (0, t), \\ 1, & x \ge t. \end{cases}$$

Доказателство: За да получим условната плътност на $S_1, S_2, \ldots, S_n$ при условие, че $N(t) = n$ да забележим, че за $0 < s_1 < \ldots < s_n < t$ събитието

$$\{S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n, N(t) = n\}$$

е еквивалентно на събитието

$$\{T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \ldots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n\}.$$

Като използуваме, че $T_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ са независими сл.в. и еднакво разпределени с $Exp(\lambda)$ получаваме

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n|n) = \frac{f(s_1, s_2, \ldots, s_n, n)}{\mathbf{P}(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \ldots e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!}$$

$$= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \ldots < s_n < t.$$

□

Забележка 4.3 *Полученият резултат може да се преформулира по следния начин: При условие, че n събития са се сбъднали в интервала $(0, t)$, моментите на сбъдване $S_1, S_2, \ldots S_n$ разгледани като ненаредени случайни величини са разпределени независимо и равномерно в интервала $(0, t)$.*

4 Обобщения на Поасоновия процес

4.1 Сложен Поасонов процес

Определение 4.8 *Процесът $\{X(t),\ t \geq 0\}$ се нарича сложен Поасонов процес, ако*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

където $\{N(t),\ t \geq 0\}$ е Поасонов процес и $\{Y_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ е редица от независими и еднакво разпределени сл.в., независими от процеса $N(t)$.

При фиксирано t сл.в. $X(t)$ се нарича сложна Поасонова сл.в.

Пример 4.6

(i) *Нека $Y_n \equiv 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ тогава $X(t) \equiv N(t)$.*

(ii) *Нека за някакво спортно събитие пристигат зрители с автобуси. Нека пристигането на автобус е събитието, чието появяване свързваме с един Поасонов процес $N(t)$, а Y_i броят на хората в $i-$тия автобуси, $Y_1, Y_2, \ldots$ са н.е.р. сл.в. Тогава броят на хората, пристигнали до даден момент е сложен Поасонов процес.*

(iii) *Нека купувачите напускат един супермаркет в съответствие с Поасонов процес $N(t)$. Ако Y_i са парите похарчени от $i-$тия купувач, то сумата, която се е натрупала в касите на супермаркета образува сложен Поасонов процес.*

Задача 4.1 *Да пресметнем $\mathbf{E}X(t)$ и $\mathbf{Var}X(t)$.*

Решение: За $\mathbf{E}X(t)$ имаме $\mathbf{E}X(t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t)|N(t))$, но

$$\mathbf{E}(X(t)|N(t) = n) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t) = n) =$$

$$\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = n\mathbf{E}Y_1.$$

Следователно $\mathbf{E}(X(t)|N(t)) = N(t)\mathbf{E}Y_1$, т.е.

$$\mathbf{E}X(t) = (\mathbf{E}N(t))(\mathbf{E}Y_1) = \lambda t\mathbf{E}Y_1.$$

За пресмятането на $\mathbf{Var}X(t)$ ще използваме следната формула за условна дисперсия

$$\mathbf{Var}X(t) = \mathbf{E}(\mathbf{Var}(X(t)|N(t))) + \mathbf{Var}(\mathbf{E}(X(t)|N(t))).$$

Имаме

$$\mathbf{Var}(X(t)|N(t) = n) = \mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t) = n) =$$

$$\mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = n\mathbf{Var}Y_1,$$

(последното равенство е изпълнено поради независимостта на Y_i).

Така $\mathbf{Var}(X(t)|N(t)) = N(t)\mathbf{Var}Y_1$. Следователно

$$\mathbf{Var}X(t) = \mathbf{E}(N(t)\mathbf{Var}Y_1) + \mathbf{Var}(N(t)\mathbf{E}Y_1) =$$

$$= \lambda t\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2\mathbf{Var}N(t) = \lambda t\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2\lambda t =$$

$$= \lambda t[\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2] = \lambda t\mathbf{E}(Y_1^2).$$

Използвано е, че $\mathbf{Var}N(t) = \lambda t$, тъй като $N(t) \in Po(\lambda t)$.

4.2 Нехомогенен Поасонов процес

Нехомогенен Поасонов процес е Поасонов процес, за който е нарушено условието за стационарност. Това се получава, ако допуснем, че степента на появяване на събитието в момент t е функция на времето.

Определение 4.9 *Поасоновият процес* $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *се нарича нехомогенен с функция на интензивност* $\lambda(t),\ t \geq 0$, *ако:*

(i) $N(0) = 0$;

(ii) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *е с независими нараствания;*

(iii) $\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h),\quad h \to 0$;

(iv) $\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h),\quad h \to 0.$

Ако положим $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$, то

$$\mathbf{P}(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-(m(t+s)-m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, \quad n \geq 0. \tag{4.2}$$

или с други думи, броят на събитията сбъднали се в интервала $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t) \in Po(m(t+s) - m(t))$ и освен това $N(t) \in Po(m(t))$.

Забележка 4.4 *Ако* $\lambda(t) = \lambda$, *то* $m(t) = \lambda t$ *и тогава* $N(t+s) - N(t) \in Po(\lambda s)$.

Доказателство: (На (4.2)). Ще го докажем само за $n = 0$. Нека t е фиксирано и нека $P_n(s) = \mathbf{P}(N(t+s) - N(t) = n)$. Тогава

$$P_0(s+h) = \mathbf{P}(N(t+s+h) - N(t) = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(0 \text{ събития в } (t, t+s), 0 \text{ събития в } [t+s, t+s+h]) =$$

$$= \mathbf{P}(0 \text{ събития в } (t, t+s))\mathbf{P}(0 \text{ събития в } [t+s, t+s+h]) =$$

$$= P_0(s)(1 - \lambda(t+s)h + o(h)), \quad h \to 0.$$

Следователно

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}, \quad h \to 0$$

откъдето получаваме

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s).$$

Като се реши последното диференциално уравнение се намира

$$P_0(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}.$$

□

Важността на нехомогенния Поасонов процес идва от това, че повече не искаме стационарност на нарастванията. По този начин допускаме възможността събитието да бъде по-вероятно в едни моменти от време, отколкото в други.

Нека S_n е момента на $n-$то появяване на събитието в нехомогенен Поасонов процес. Тогава за неговата плътност имаме:

$$\mathbf{P}(t < S_n < t+h)$$

$$= \mathbf{P}(N(t) = n-1, \ 1 \text{ събитие в } (t, t+h)) + o(h)$$

$$= \mathbf{P}(N(t) = n-1)\mathbf{P}(1 \text{ събитие в } (t, t+h)) + o(h)$$

$$= e^{-m(t)} \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}[\lambda(t)h + o(h)] + o(h)$$

$$= \lambda(t)e^{-m(t)} \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}h + o(h).$$

Следователно

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Задача 4.2 *Лицето А продава хот-дог на щанд, който отваря в* 8^{00}*ч. От* $8^{00} - 11^{00}$*ч. клиентите пристигат с постоянно нарастваща интензивност, като започва от* 8^{00}*ч. с 5 клиенти в час и достига в* 11^{00}*ч. до 20 клиенти в час. От* $11^{00} - 13^{00}$*ч. интензивността остава постоянна, а после намалява в интервала* $13^{00} - 17^{00}$*ч., като в* 17^{00}*ч. е 12 клиенти за час. Лицето А затваря в* 17^{00}*ч.*

а) Ако предположим, че броя на клиентите в непресичащи се интервали от време е независим и клиентите не идват едновременно (т.е. $\mathbf{P}($*да дойдат* $\geq 2) = o(h)$*, то какъв вероятностен модел да изберем за описания процес?*

б) Каква е вероятността да няма клиенти в интервала $8^{30} - 9^{30}$*ч., т.е.* $\mathbf{P}(\xi(3/2) - \xi(1/2) = 0) = ?$*, като с* $\xi(t)$ *е означен броя на пристигналите до момента* t *клиенти.*

в) Какъв е очаквания брой клиенти в този период, т.е. $\mathbf{E}(\xi(3/2) - \xi(1/2)) = ?$

Решение: а) $\xi(0) = 0$

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \leq t \leq 3, \\ 20, & 3 \leq t \leq 5, \\ 30 - 2t, & 5 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

Така процесът $\xi(t)$ е нестационарен Поасонов процес.

б) $\mathbf{P}(\xi(3/2) - \xi(1/2) = 0) = \exp(-\int_{1/2}^{3/2}(5 + 5t)dt) = e^{-10}$.

в) $\mathbf{E}(\xi(3/2) - \xi(1/2)) = 10$, защото нарастването е Поасоново разпределена сл.в. $Po(10)$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-10} \frac{10^n}{n!} = \ldots = 10.$$

4.3 Разпределение на функции от Поасонов процес

Често се налага да знаем разпределението на някаква функция $f(N(t))$, както при фиксирано t така и при $t \to \infty$.

Теорема 4.3 *Нека* $N(t),\ t \geq 0$ *е Поасонов процес с параметър* λ*. Тогава при* $t \to \infty$ *ф. р. на сл.в.* $\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ *клони към стандартно нормално разпределение, т.е.*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Доказателство: Поради това, че $N(t) \in Po(\lambda t)$ тя има характеристична функция $\varphi_{N(t)}(z) = \mathbf{E} e^{iN(t)z} = e^{\lambda t (e^{iz} - 1)}$. Следователно $\xi_t = \frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ ще има характеристична функция

$$\varphi_{\xi_t}(z) = e^{-iz\sqrt{\lambda t}} \varphi_{N(t)}(z/\sqrt{\lambda t})$$

или

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) = -iz\sqrt{\lambda t} + \lambda t (e^{iz/\sqrt{\lambda t}} - 1).$$

Като използваме развитието на $e^{iz/\sqrt{\lambda t}}$ в ред на Тейлор намираме:

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) = -iz\sqrt{\lambda t} + \lambda t \left(1 + \frac{iz}{\sqrt{\lambda t}} - \frac{z^2}{2\lambda t} + \ldots - 1\right)$$

или

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) \to -\frac{z^2}{2}, \ \ t \to \infty,$$

но тогава
$$\varphi_{\xi_t}(z) \to e^{-\frac{z^2}{2}}, \;\; t \to \infty,$$
а както е известно $e^{-z^2/2}$ е характеристичната функция на стандартното нормално разпределение. Тогава по теоремата за непрекъснатост при характеристичните функции следва твърдението на теоремата. $\square$

Забележка 4.5 *Интересно е, че при* $\lambda \to \infty$ *отново* $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \to N(0,1)$. *Доказателството оставяме на любознателния читател.*

Глава 5

Винеров процес

В тази глава си поставяме следните цели:

- да решим няколко задачи за Винеров процес;
- да дефинираме непрекъснатост и диференцируемост на сл. процес при различни видове сходимост;
- да дадем достатъчни условия за непрекъснатост и диференцируемост;
- да проверим тези условия за Винеров и Поасонов процес.

1 Няколко задачи

От първата глава знаем, че Винеров процес е случаен процес, който удовлетворява следните условия:

1) $W(0) = 0$;
2) Процесът има стационарни и независими нараствания;
3) $W(t) \in N(0, \sigma^2 t)$;
4) Траекториите са непрекъснати по t за всяко ω.

Доказахме, че плътността $f(t,x)$ на $W(t)$ удовлетворява уравнението на дифузията:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \\ \\ f(x,0) = \delta(x) = \mathbf{P}(W(0) = 0) = 1. \end{cases}$$

При $\sigma = 1$ се получава стандартен Винеров процес.

Задача 5.1 *Нека $\{W(t),\ t \geq 0\}$ е Винеров процес (съгласно горната дефиниция). Докажете, че при $s_1 < s_2 < \ldots < s_m < s < t$ нарастването $W(t) - W(s)$ не зависи от $W(s_1), \ldots, W(s_m)$ и $W(s)$, т.е. Винеровият процес е Марковски и*

$$\mathbf{E}(W(t) - W(s)) = 0,\ \mathbf{Var}(W(t) - W(s)) = \sigma^2(t - s).$$

Решение: Имаме следната последователност от равенства за събитието

$$\{W(s_1) = x_1, \ldots, W(s_m) = x_m, W(s) = x, W(t) = y\} =$$

$$\{W(s_1) = x_1, \ldots, W(t) - W(s) = y - x\} \overset{\text{стац.}}{=}$$

$$\{W(s_1) = x_1, W(s_2 - s_1) = x_2 - x_1, \ldots, W(t - s) = y - x\}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(W(t) < y | W(s_1) = x_1, \ldots, W(s) = x) \\
&= \mathbf{P}(W(t-s) < y - x | W(s_1) = x_1, \ldots, W(s) = x) \\
&= \mathbf{P}(W(t-s) < y - x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \int_{-\infty}^{y-x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(t-s)}} du.
\end{aligned}$$

Следователно Винеровият процес е Марковски, т.е. състоянията в предходните моменти $s_1, \ldots, s_m$ нямат значение.

Задача 5.2 *При $s < t$ намерете $\mathbf{P}(W(s) < x | W(t) = y) =?$*

Решение: Без ограничение на общността можем да предположим, че $\sigma = 1$. Тогава

$$f_{W(s)|W(t)}(x|y) = \frac{f_{W(s)}(x) f_{W(t)-W(s)}(y-x)}{f_{W(t)}(y)} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}[\frac{x^2}{s} + \frac{(y-x)^2}{t-s}]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t}}} = k e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} =$$

$$C e^{-x^2[\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(t-s)} + \frac{xy}{t-s}]} = C e^{-x^2[\frac{t+2sxy}{2s(t-s)} s]} =$$

$$d e^{-\frac{(x - y\frac{s}{t})^2}{2\frac{s}{t}(t-s)}}.$$

Така получихме нормално разпределение, следователно

$$\mathbf{E}(W(s)|W(t) = y) = \frac{s}{t} y, \quad \mathbf{Var}(W(s)|W(t) = y) = \frac{s}{t}(t - s).$$

Задача 5.3 *В състезание между двама велосипедисти нека $W(t)$ е времето в секунди, което състезателят A изпреварва състезателя B, когато е изминало време $t \in [0, 1]$. Нека $W(t),\ t \in [0, 1]$ е Винеров процес с дисперсия σ^2.*

а) Ако състезателят A води със σ секунди по средата на състезанието $t = 1/2$, то намерете вероятността, че той е победител в края на състезанието.

б) Ако A побеждава със σ секунди пред B, каква е вероятността, той да е по-напред и в средата на състезанието (т.е. при $t = 1/2$), или $\mathbf{P}(W(1/2) > 0 | W(1) = \sigma) =?$

Упътване: $\Phi(\sqrt{2}) = 0.92, \Phi(1) = 0.84.$

Решение: а)

$$\mathbf{P}(W(1) > 0 | W(1/2) = \sigma) =$$
$$\mathbf{P}(W(1) - W(1/2) > -\sigma | W(1/2) = \sigma) \overset{\text{незав.нар}}{=}$$
$$\mathbf{P}(W(1) - W(1/2) > -\sigma) \overset{\text{стац.}}{=} \mathbf{P}(W(1/2) > -\sigma) =$$

Но $W(1/2) \in N(0, \sigma^2/2) \Rightarrow \dfrac{W(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} \in N(0,1)$ и продължавайки веригата от равенства, намираме

$$= \mathbf{P}(\frac{W(1/2)}{\sigma\sqrt{2}} > -\sqrt{2}) = 1 - \mathbf{P}(\frac{W(1/2)}{\sigma\sqrt{2}} < -\sqrt{2}) =$$
$$1 - \Phi(-\sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) = 0.92.$$

б) За упражнение.

2 Момент на първо достигане на ниво

Нека τ_a е първият момент, в които Винеров процес W_t пресича нивото a, т.е.

$$\tau_a = \inf\{t : W_t \geq a\}.$$

Ще намерим разпределението на τ_a. Имаме, че

$$\{\tau_a < t\} = \{\max_{0 \leq s \leq t} W_s > a\}$$

и ще решаваме тази задача чрез използване на разпределението на W_t.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$\mathbf{P}(W_t \geq a) = \mathbf{P}(W_t \geq a | \tau_a \leq t)\mathbf{P}(\tau_a \leq t) + \mathbf{P}(W_t \geq a | \tau_a > t)\mathbf{P}(\tau_a > t).$$

Но

$$\mathbf{P}(W_t \geq a | \tau_a > t) = \frac{\mathbf{P}(W_t \geq a; \tau_a > t)}{\mathbf{P}(W_t \geq a)} = 0,$$

следователно

$$\mathbf{P}(W_t \geq a) = \mathbf{P}(W_t \geq a | \tau_a \leq t)\mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\tau_a \leq t),$$

като последното равенство следва от непрекъснатостта на траекториите на Винеровия процес. При условие, че $\tau_a \leq t$ и изходното състояние е $W_{\tau_a} = a$ в следващото си движение брауновата частица при $t \geq \tau_a$ равновероятно преминава наляво или надясно от изходната точка $W_{\tau_a} = a$. Следователно (поради това, че $W_t \in N(0, t\sigma^2)$),

$$\mathbf{P}(\tau_a \leq t) = 2\mathbf{P}(W_t \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx =$$

Като направим смяна на променливите в интеграла ($x = y\sqrt{y},\ dx = \sqrt{t}dy$), продължаваме веригата от равенства

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})].$$

Така

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} W_s \geq a) = \mathbf{P}(\tau_a < t) = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})].$$

Забележка 5.1 *Равенството* $\mathbf{P}(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq a) = 2\mathbf{P}(W_t \geq a)$ *се нарича принцип на отражението.*

Определение 5.1 *Винеров процес* $X(t)$ *с тренд* μ *наричаме процес за който:*

1) $X(0) = 0$, *п.с.;*

2) *има стационарни и независими нараствания;*

3) $X(t) \in N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Ако W_t е стандартен Винеров процес, то $X(t) = \mu t + \sigma W_t$.

3 Свойства на Винеровия процес

Лема 5.1 *Нека* W_t *е стандартен Винеров процес. Тогава*

$$\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s),\ \forall s, t.$$

Доказателство: $\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = \mathbf{E}[(W_t - \mathbf{E}W_t)(W_s - \mathbf{E}W_s)] = \mathbf{E}(W_s W_t)$.
а) Нека $t > s \Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = \mathbf{E}(W_t W_s) = \mathbf{E}[(W_t - W_s)(W_s - W_0) + W_s^2] = \mathbf{E}W_s^2 = s,$$

тъй като $\mathbf{Var}W_s = \mathbf{E}W_s^2 - (\mathbf{E}W_s)^2 = \mathbf{E}W_s^2$ и $\mathbf{Var}W_s = \sigma^2 s = 1s = s$.
б) При $s > t$ аналогично получаваме $\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = \mathbf{E}W_t = t, \Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s).$$

□

Лема 5.2 *Винеровият процес е квадратично интегруем процес, т.е.*

$$\mathbf{E}(W_t - W_s)^2 < \infty.$$

Доказателство:

$$\mathbf{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbf{E}(W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2) = t - 2\mathbf{E}(W_t W_s) + s = t + s - 2\min(t, s) < \infty.$$

□

Лема 5.3 *(Мартингално свойство на Винеров процес)*

$$\mathbf{E}(W_t | W_u, W_s,\ u < s < t) = W_s.$$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(W_t|W_u, W_s) &\overset{\text{Марков}}{=} \mathbf{E}(W_t|W_s) \\
&= \mathbf{E}(W_t - W_s + W_s|W_s) \\
&= \mathbf{E}(W_t - W_s|W_s) + \mathbf{E}(W_s|W_s) \\
&\overset{\text{нез.нар.}}{=} \mathbf{E}(W_t - W_s) + W_s = 0 + W_s = W_s,
\end{aligned}$$

което означава, че Винеровият процес е мартингал. □

Определение 5.2 *Казваме, че функцията F е с ограничена $p-$вариация в интервала $[0, T]$, ако за някое $p \geq 1$ е изпълнено:*

$$\sup_{\delta} \sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})|^p < \infty,$$

където супремума е взет по всички възможни разлагания $\delta : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

При $p = 1$ казваме, че F е с ограничена вариация. При $p = 2$ казваме, че F е с ограничена квадратична вариация.

Лема 5.4 *(Без доказателство) Траекториите на Винеровия процес са с неограничена вариация.*

Лема 5.5 *(Недиференцируемост) Нека $W_t, \ t \in \mathbf{R}^+$ е стандартен Винеров процес. Диференчното частно $\dfrac{W_{t+h} - W_t}{h}$ е разходящо при $h \to 0$ относно сходимост по разпределение.*

Доказателство: Очевидно $\dfrac{W_{t+h} - W_t}{h} \in N(0, \dfrac{1}{|h|})$. Тогава за произволно $k > 0$ е изпълнено:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{W_{t+h} - W_t}{h}\right| > k\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{k\sqrt{h}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \to 1, \quad h \to 0,$$

т.е. частното не е сходящо по разпределение. $\square$

4 Непрекъснатост - дефиниции

За да продължим по-нататък със свойствата на Винеровия процес ще дадем няколко общи дефиниции за непрекъснатост, диференцируемост и интегруемост на случайни процеси. Нека отново напомним понятието за непрекъснатост на случаен процес поради неговата изключителна важност.

4.1 Непрекъснатост п.с.

Определение 5.3 *Случайният процес $\{\xi(t), \ t \in [a, b]\}$ се нарича непрекъснат (непрекъснат с вероятност 1), ако почти всички негови траектории са непрекъснати функции в $[a, b]$. (Това означава, че за отделни елементарни събития ω траекторията може да се окаже прекъсната, но множеството A от тези ω е измеримо, т.е. A принадлежи на сигма-алгебрата на сл. събития и $\mathbf{P}(A) = 0$.)*

Има различни критерии за непрекъснатост, но ние ще дадем, без доказателство, един от първите в това направление, доказан от Колмогоров в началото на 30-те години на миналия век, а именно:

Теорема 5.1 *Ако съществуват положителни числа p, r и C, такива, че за произволни $t_1, t_2 \in [a, b]$ е изпълнено неравенството*

$$\mathbf{E}[|\xi(t_2) - \xi_(t_1)|^p] \leq C|t_2 - t_1|^{1+r},$$

то процесът $\xi(t), t \in [a, b]$ е непрекъснат.

Пример 5.1 *Винеровият процес $W_t, t \geq 0$ е непрекъснат. Действително $\mathbf{E}[|W_t - W_s|^4] = 3|t - s|^2$.*

Сега ще се спрем по-подробно на понятието непрекъснатост. Да запишем неравенството на Марков за Винеровия процес

$$\mathbf{P}(|W_t - W_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}[|W_t - W_s|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{|t-s|}{\varepsilon^2},$$

от което при s фиксирано и $t \to s$ следва, че $\mathbf{P}(|W_t - W_s| \geq \varepsilon) \to 0$ за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $s \geq 0$.

Тогава възниква такъв въпрос: Дали сл. процес $\xi(t),\ t \in [a, b]$ е непрекъснат, ако е известно, че при $\forall \varepsilon > 0$ и $s \in [a, b]$ имаме $\mathbf{P}(|\xi(t) - \xi(s)| \geq \varepsilon) \to 0$, при $t \to s$?

Отговорът е отрицателен, а такъв пример е Поасоновия процес $N_t, t \geq 0$ с параметър λ. Наистина $\mathbf{E}[|N_t - N_s|] = \lambda|t - s|$ и от неравенството на Чебишов следва, че

$$\mathbf{P}[|N_t - N_s| \geq \varepsilon] \leq \frac{\lambda|t-s|}{\varepsilon},$$

което при $t \to s$ клони към 0, а траекториите на Поасоновия процес са стъпаловидни функции с единични скокове (т.е. не са непрекъснати).

4.2 Стохастична непрекъснатост

Целта на направеното разсъждение беше да покажем, че може да се въведе по-слаба от дефинираната вече сходимост (непрекъснатост) с вероятност 1.

Определение 5.4 *Сл. процес $\xi(t),\ t \in T$ се нарича стохастично непрекъснат в т. $t_0 \in T$, ако за $\forall \varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(|\xi(t) - \xi(t_0)| \geq \varepsilon) \to 0, \text{ при } t \to t_0. \tag{5.1}$$

Ако (5.1) е изпълнено за всички $t \in T$, то казваме, че процесът е стохастично непрекъснат в T. Тъй като с (5.1) се дефинира сходимост по вероятност, то вместо стохастична непрекъснатост казваме по-кратко $\mathbf{P}-$непрекъснатост.

Пример 5.2 *Поасоновият процес $N_t, t \geq 0$ е $\mathbf{P}-$непрекъснат.*

От връзката между сходимост почти сигурно и сходимост по вероятност, следва, че ако един процес е непрекъснат п.с., то той е и $\mathbf{P}-$непрекъснат. Обратното не е вярно (Поасоновият процес!)

Ще отбележим специално, че $\mathbf{P}-$непрекъснатостта на процеса $\xi(t), t \in T$ е едно слабо изискване, но от друга страна тя е непосредствено свързана с такива важни негови свойства като *сепарабелност* и *измеримост*.

Ако сл. процес $\xi(t), t \in T$ е $\mathbf{P}-$непрекъснат, то при широки предположения съществува процес $\tilde{\xi}(t), t \in T$, който е сепарабелен, измерим и еквивалентен на дадения.

От дадените по-горе дефиниции е ясно, че $\mathbf{P}-$непрекъснатостта е свързана с локалното поведение на сл. процес в отделни моменти от времето, докато непрекъснатостта с вероятност 1 е една глобална характеристика.

4.3 Сепарабелност

Ще се спрем само накратко без доказателства, тъй като не се използува по-нататък.

Нека е даден един произволен процес $\xi(t),\ t \in T \subseteq \mathbf{R}$. Когато времето T е "непрекъснато", т.е. T е неизброимо, за редица интересни събития не може да се каже дали са измерими или не и съответно не може да се пресмята тяхната вероятност. Например $A = \{\omega : \sup_{t\in[a,b]} \xi_t(\omega) \leq C\}$ или $B_{t_0} = \{\omega : \xi_t(\omega)$ е непр. в $t_0\}$ и т.н.

Очевидно $A = \bigcap_{t\in[a,b]}\{\xi_t \leq C\}$, т.е. не е изброимо сечение на измерими множества $\{\xi_t \leq C\}$ и не може да се каже, че е измеримо в общия случай. Тези проблеми се решават с помощта на понятието сепарабелност и целта е като ограничим класа на разглежданите процеси до сепарабелните, посочените събития стават измерими.

Определение 5.5 *За процеса $\xi_t,\ t \in \mathbf{R}$ казваме, че е сепарабелен, ако съществува изброимо множество $S \subseteq \mathbf{R}$ и $\mathbf{P}-$нулево множество N, така, че за произволен отворен интервал $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ и произволно затворено множество $F \subseteq \mathbf{R}$*

$$\{\omega : \xi_t(\omega) \in F, t \in \Delta\}\Delta\{\omega : \xi_t(\omega) \in F, t \in \Delta \bigcap S\} \subseteq N,$$

където $A\Delta B = A \setminus B + B \setminus A$ означава симетричната разлика на множествата A и B.

Забележка 5.2 *Когато вероятностното пространство е пълно, то очевидно е, че от $A, N \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(N) = 0$ и $A\Delta B \subseteq N$ следва, че B също е измеримо.*

Определение 5.6 *Вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ се нарича пълно, ако от $B \subseteq A$ следва, че B е измеримо за произволно $\mathbf{P}-$нулево множество A. Казва се още, че сигма алгебрата $\mathcal{F}$ е пълна относно $\mathbf{P}$.*

4.4 Необходими и достатъчни условия за непрекъснатост

Нека сега отново да се върнем към непрекъснатостта на Гаусовите процеси. Нека $\xi(t),\ t \in [a, b]$ е Гаусов процес със средно $\mathbf{E}\xi(t) = a(t)$ и дисперсия $\mathbf{Var}\xi(t) = \sigma^2(t)$. За характеристичната функция $\phi_t(z)$ на $\xi(t)$ имаме

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}(e^{-iz\xi(t)}) = \exp(iza(t) - \frac{1}{2}z^2\sigma^2(t)).$$

Нека даденият процес е непрекъснат. Тогава не е трудно да се покаже, че $\phi_t(z)$ е непрекъсната функция на t за всяко z. Следователно $\ln \phi_t(z)$ е непрекъсната и също функциите

$$\sigma^2(t) = \frac{\ln \phi_t(z) + \ln \phi_t(-z)}{-z^2},\ a(t) = \frac{\ln \phi_t(z) + \frac{z^2}{2}\sigma^2(t)}{iz}.$$

Необходимо условие Гаусовият процес да е непрекъснат е функциите $a(t)$ и $\sigma^2(t)$ да са непрекъснати.

Достатъчни условия за непрекъснатост. Нека $a(t) = \mathbf{E}\xi(t) = 0$ (ако $\mathbf{E}\xi(t) \neq 0$, ще разгледаме $\xi(t) - a(t)$), а корелационната функция на процеса е $K(t, s)$. Тогава

$$\begin{cases} \mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(s))^2] = K(t, t) - 2K(t, s) + K(s, s) \equiv \Delta K, \\ \mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(s))^{2m}] = (2m - 1)!!|\Delta K|. \end{cases} \tag{5.2}$$

От (5.2) и (5.1) следва, че ако корелационната функция $K(t,s)$ удовлетворява условията

$$|\Delta K| = |K(t,t) - 2K(t,s) + K(s,s)| \leq C|t-s|^r,$$

при някакви положителни C и r, то процесът ще е непрекъснат.

4.5 L_2-непрекъснатост

Определение 5.7 *Процесът $\xi(t)$, $t \in [a,b]$ се нарича непрекъснат в L_2-смисъл (в средно-квадратичен смисъл) в т. $t_0 \in [a,b]$, ако*

$$\mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(t_0))^2] \to 0, \quad t \to t_0. \tag{5.3}$$

Ако (5.3) е в сила за всяко $t \in [a,b]$, казваме, че процесът е L_2-непрекъснат в $[a,b]$.

От неравенството на Чебишов следва, че ако един процес е L_2-непрекъснат, то той е и $\mathbf{P}-$непрекъснат, обратното не е вярно.

Пример 5.3 *Винеровият процес W_t, $t \geq 0$ и Поасоновият процес N_t, $t \geq 0$ са L_2-непрекъснати. Твърденията следват от равенствата:*

$$\mathbf{E}[(W_t - W_s)^2] = |t-s|,$$

$$\mathbf{E}[(N_t - N_s)^2] = \lambda|t-s| + \lambda^2|t-s|^2.$$

Аналогично може да се въведе L_p-непрекъснатост, за произволно положително p.

Налице са следните връзки:

L_p-непрекъснатост $\Rightarrow$ $\mathbf{P}-$непрекъснатост,

непрекъснатост с вер. 1 $\Rightarrow$ $\mathbf{P}-$непрекъснатост.

5 Диференциране

Нека е даден сл. процес $\xi(t)$, $t \in [a,b]$. Разглеждаме диференъчното частно

$$\Delta_h(t) = \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}, \quad t, t+h \in [a,b].$$

Фиксираме t и оставяме $h \to 0$. Интересуваме се дали $\Delta_h(t)$ има граница в някакъв смисъл. Ясно е, че на всеки от видовете сходимост може да се съпостави съответна производна. Диференцирането с вероятност 1, ще означава, че почти всички траектории на процеса са диференцируеми функции в т. t. При това за отделни елементарни събития ω може да се окаже, че $\xi(t,\omega)$ не е диференцируема в т. t, но множеството A от тези ω има $\mathbf{P}(A) = 0$. Тази дефиниция на диференцируемост не се отличава от дефиницията в класическия анализ за детерминирани функции.

В Теорията на вероятностите имаме възможност да дадем още две дефиниции на производна свързани с L_p- и $\mathbf{P}-$ сходимостите.

Определение 5.8 *Процесът $\xi(t)$, $t \in [a,b]$ се нарича L_2-диференцируем в т. $t \in [a,b]$, ако съществува $\lim_{h\to 0} \Delta_h(t)$ в L_2-смисъл, т.е. съществува сл.в. $\xi'(t)$ такава, че*

$$\mathbf{E}[|\Delta_h(t) - \xi'(t)|^2] \to 0, \quad h \to 0. \tag{5.4}$$

Ако (5.4) е изпълнено за всяко $t \in [a, b]$, казваме, че процесът е диференцируем в L_2-смисъл в $[a, b]$ и $\xi'(t)$ наричаме L_2-производна на $\xi(t)$.

Определение 5.9 *Ако съществува границата $\lim_{h\to 0} \Delta_h(t)$ по вероятност, т.е. съществува сл.в. $\xi'(t)$ такава, че за всяко $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}(|\Delta_h(t) - \xi'(t)| > \varepsilon) = 0,$$

то казваме, че $\xi(t)$ е $\mathbf{P}-$диференцируем в т. t и $\xi'(t)$ е неговата $\mathbf{P}-$производна.

Забележка 5.3

1. *От неравенството на Чебишов следва, че ако $\xi(t)$ е L_2-диференцируем, то той е и $\mathbf{P}-$диференцируем и двете производни съвпадат.*
2. *Съществуването на L_2- ($\mathbf{P}-$) производни влече и съответната непрекъснатост.*

Пример 5.4 *Нека W_t, $t \geq 0$ е Винеров процес. Тогава за всяко t*

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \in N(0, \frac{1}{|h|}),$$

т.е. дисперсията на това частно клони към безкрайност, при $h \to 0$ и от тук следва, че Винеровия процес не може да бъде диференцируем даже и по вероятност а от там и в L_2- смисъл.

Пример 5.5 *Нека N_t, $t \geq 0$ е Поасонов процес. Тогава с вероятност 1, $\dfrac{N_{t+h} - N_t}{h} = 0$ за всички достатъчно малки h.*

Следователно $\dfrac{N_{t+h} - N_t}{h} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, при $h \to 0$, което показва, че Поасоновия процес е $\mathbf{P}-$диференцируем с $\mathbf{P}-$производна равна на 0. Да допуснем, че той е и L_2-диференцируем. Тогава и L_2-производната трябва да е равна на 0, но

$$\mathbf{E}\left\{\left(\frac{N_{t+h} - N_t}{h} - 0\right)^2\right\} = \frac{\lambda}{|h|} + \lambda^2 \nrightarrow 0, \quad h \to 0.$$

Освен това, $\mathbf{E}(|N_{t+h} - N_t|^p) \approx \lambda |h|^{1-p}$ откъдето се вижда, че Поасоновият процес не е L_p- диференцируем за никое $p \geq 1$.

Разгледаните примери показват, че $\mathbf{P}-$производната не е достатъчно съдържателна и затова едва ли има смисъл да се разглежда. Нашата цел е да използуваме онова понятие за диференцируемост, което би осигурило съдържателност на развиваната теория. В частност, бихме искали сл. процес да се възстановява еднозначно (с точност до константа) по своята производна. Оказва се, че такава еднозначност имаме при L_2-сходимостта, съответно при L_2-диференцирането.

Критерии за съществуване на L_2-производна:

Нека $\xi(t)$, $t \geq 0$ е такъв, че $\mathbf{E}\xi(t) = 0, t \in [a, b]$. Тогава корелационната функцията $K(t, s)$ съвпада с ковариационната функция $C(t, s)$.

Определение 5.10 *Казваме, че $C(t,s), t,s \in [a,b]$ има обобщена втора смесена производна в т. (t_0,s_0) ако изразът*

$$\frac{1}{hh_1}\left(C(t_0+h,s_0+h_1)-C(t_0,s_0+h_1)-C(t_0+h,s_0)+C(t_0,s_0)\right)$$

има крайна граница при $h\to 0$ и $h_1\to 0$. Тази производна ще означаваме със символа

$$\left.\frac{\partial^2 C(t,s)}{\partial t\partial s}\right|_{t=t_0,s=s_0}.$$

Теорема 5.2 *Сл. процес $\xi(t),\ t\in[a,b]$ е L_2-диференцируем в т. $t_0\in[a,b]$ само тогава, когато ковариационната функция $C(t,s)$ има обобщена втора смесена производна в т. (t_0,t_0). (В точките (t,t) от диагонала на квадрата $[a,b]\times[a,b]$.)*

6 Браунов мост

Определение 5.11 *Нека $\{W_t,\ t\in[0,1]\}$ е стандартен Винеров процес. Тогава процесът $W_t^o := W_t - tW_1$, за $t\in[0,1]$ се нарича Браунов мост.*

Да намерим вероятностните характеристики на този процес.

1) $W_0^o = 0 = W_1^o$;

2) $\mathbf{E}W_t^o = \mathbf{E}(W_t - tW_1) = 0$;

3) $\mathbf{Cov}(W_t^o,W_s^o),\quad 0\le s<t\le 1,\Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(W_t^o,W_s^o) = \mathbf{E}(W_t^o.W_s^o) = \mathbf{E}[(W_t-tW_1)(W_s-sW_1)] =$$
$$\mathbf{E}[W_tW_s - tW_sW_1 - sW_tW_1 + stW_1^2] =$$

като използуваме, че за Винеровия процес $\mathbf{Cov}(W_t,W_s)=\min(t,s),\ \forall s,t\ge 0$ получаваме по-нататък)

$$=\min[s,t]-t\min[s,1]-s\min[t,1]+st=\min[s,t]-ts=$$
$$=s-ts=s(1-t).$$

4) $\mathbf{E}(W_t^o)^2=\mathbf{E}(W_t-tW_1)^2=\mathbf{E}(W_t^2-2tW_1W_t+t^2W_1^2)=$
(и понеже $t\le 1$)
$=t-2t^2+t^2=t-t^2=t(1-t)$.

5) $\mathbf{E}(W_t^o-W_s^o)^2=\mathbf{E}(W_t^o)^2-2\mathbf{E}W_t^oW_s^o+\mathbf{E}(W_s^o)^2=$
(при $s<t$)
$=t(1-t)-2s(1-t)+s(1-s)=(t-s)(1-t)-s(1-t-1+s)=(t-s)(1-t)+s(t-s)=$
$=(t-s)(1-(t-s))=\mathbf{E}(W_{t-s}^o)^2$.

Следователно Брауновият мост е с независими стационарни нараствания.

Определение 5.12 *Сл. процес $W_t^o := (W_t|W_1=0),\ t\in[0,1]$ където W_t е Винеров процес се нарича Браунов мост.*

Предложение 5.1 *Определенията 5.11 и 5.12 са еквивалентни.*

Доказателство: Проверява се, че вероятностните характеристики съвпадат. □

Част II

Случайни процеси за напреднали

Глава 6

Марковски вериги с непрекъснато време

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дадем дефиниция на Марковска верига с непрекъснато време;
- да изведем правите и обратни диференциални уравнения Колмогоров;
- да разгледаме като примери процесите на раждане и гибел;
- да решим някои задачи.

1 Дефиниция

С един пример на Марковска верига с непрекъснато време (МВНВ) вече се запознахме – това е Поасоновия процес. Нека състоянието на процеса в момент t да е общия брой на заявките (или появяванията на дадено събитие) до момента t, това е МВНВ със състояния $0, 1, 2, \dots$, която винаги преминава от състояние n в състояние $n+1$, $n \geq 0$. Такъв процес се нарича още процес на чисто раждане, поради това, че състоянието му винаги нараства с единица. По-общо, един експоненциален модел, който може да премине (за един преход) само от състояние n в състояние $n-1$ или в състояние $n+1$ се нарича процес на раждане и гибел. За такъв модел преходите от състояние n в състояние $n+1$ се наричат "раждане", а от n в $n-1$ "гибел". Тези модели намират широко приложение в биологията, а също и при изучаване на опашките (в теорията на масовото обслужване), при които състоянието представлява броя на клиентите в опашката на обслужващата система. Ще получим т. нар. прави и обратни диференциални уравнения на Колмогоров, които описват вероятностните закони на системата.

Определение 6.1 *Нека $\{X(t),\ t \geq 0\}$ е стохастичен процес с непрекъснато време и със стойности в множеството от целите неотрицателни числа ($\mathbb{Z}^+$). Казваме, че $X(t)$ е МВНВ, ако за всеки $s, t \geq 0$ и неотрицателни цели числа i, j и всяка целочислена функция $x(u) : [0, s) \to \mathbb{Z}^+$*

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s)$$

$$= \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i).$$

С други думи, една МВНВ е стохастичен процес, притежаващ Марковското свойство, че условното разпределение на бъдещето $X(t+s)$ при дадено настояще $X(s)$ и минало $X(u)$, $0 \leq u < s$, зависи само от настоящето и е независимо от миналото.

Ако допълнително вероятността $\mathbf{P}(X(t+s)=j|X(s)=i)$ не зависи от s, то МВНВ е с хомогенни по времето преходни вероятности и се нарича хомогенна МВНВ.

По-нататък разглеждаме само хомогенни МВНВ.

Да разгледаме МВНВ, която се намира в състояние i в момента 0 и да допуснем, че тя не напуска това състояние в следващите 10 мин. Каква е вероятността, че ще остане в същото състояние още 5 мин.? Тъй като процесът е в състояние i 10 мин., то от Марковското свойство следва, че вероятността да остане в това състояние в интервала $[10, 15]$ е точно безусловната вероятност, че процесът ще стои в състояние i поне още 5 мин. Това означава, че ако означим с T_i дължината на интервала от време, в който процесът се намира в състояние i преди да премине в друго състояние, удовлетворява

$$\mathbf{P}(T_i > 15|T_i > 10) = \mathbf{P}(T_i > 5)$$

или по-общо

$$\mathbf{P}(T_i > s+t|T_i > s) = \mathbf{P}(T_i > t), \;\; \forall s, t \geq 0.$$

Това означава, че T_i е сл.в., която е "без памет" (без последействие) и трябва да е експоненциално разпределена. Така естествено стигаме до следната еквивалентна дефиниция на МВНВ.

Определение 6.2 *Нека $\{X(t),\ t \geq 0\}$ е стохастичен процес с непрекъснато време и със стойности в множеството от целите неотрицателни числа ($\mathbb{Z}^+$). Казваме, че $X(t)$ е МВНВ, ако:*

(i) времето на престой T_i в състояние i, преди да попадне в друго състояние е експоненциално разпределена сл.в. със средно $1/\nu_i$;

(ii) когато процесът напуска i и попада в състояние j с вероятност p_{ij}, то p_{ij} трябва да удовлетворяват условията: $p_{ii} = 0,\ \forall i$ и $\sum_j p_{ij} = 1,\ \forall i$.

С други думи МВНВ е стохастичен процес, който преминава от едно състояние в друго в съответствие с преходните вероятности на една Марковска верига, но времето между преходите не е константа, а е експоненциално разпределена сл.в. ($Exp(1/\nu_i)$) с разпределение, зависещо от състоянието, което процесът ще напусне при прехода. Нещо повече, времената на престой в дадено състояние i и следващото състояние j са независими сл.в.

2 Процеси на раждане и гибел

Разглеждаме система, чието състояние във всеки момент е броя хора в системата в този момент. Да допуснем, че всеки път, когато има n човека, тогава:

(i) нови хора пристигат в съответствие с експоненциално разпределение с параметър $1/\lambda_n$;

(ii) някои от присъстващите напускат системата в съответствие с експоненциално разпределение с параметър $1/\mu_n$.

Това означава, че всеки път, когато в системата има n човека, времето до пристигане на нови хора е $Exp(1/\lambda_n)$ и е независимо от времето до следващото напускане на хора от системата, което пък е $Exp(1/\mu_n)$.

Такава система наричаме процес на раждане и гибел с параметри $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}-$ степени на раждане и $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}-$ степени на смъртност.

И така процесите на раждане и гибел (ПРГ) са МВНВ със състояния $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и преходи от n в $n-1$ или в $n+1$.

Връзките между степените на раждаемост и смъртност и преходните вероятности са следните:

$$\nu_0 = \lambda_0;$$

$$\nu_i = \lambda_i + \mu_i,\ i > 0;$$

$$p_{01} = 1;$$

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i},\ i > 0;$$

$$p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i},\ i > 0.$$

Пример 6.1 *(Процес на Поасон) Разглеждаме ПРГ, за който $\mu_n = 0,\ \forall n \geq 0$ и $\lambda_n = \lambda,\ \forall n \geq 0$. Това е процес, при който няма смърт и времето между последователните раждания е сл.в. с $Exp(1/\lambda)$ разпределение. Следователно, това е точно Поасонов процес.*

Процес на раждане и гибел, за който $\mu_n = 0,\ \forall n \geq 0$ се нарича процес на чисто раждане.

Пример 6.2 *(Процес на раждане с линейна степен (скорост) на раждаемост.) Разглеждаме популация, чиито членове могат да имат поколение, но никога не умират. Ако всеки индивид се развива независимо от останалите и има $Exp(1/\lambda)$ разпределено време докато даде потомство, то ако $X(t)$ е размерът на популацията в момент t, тогава $\{X(t),\ t \geq 0\}$ е чист процес на раждане с $\lambda_n = n\lambda,\ n \geq 0$. Този процес обикновено се нарича процес на Юл.*

Пример 6.3 *(Процес на раждане и гибел с линейна скорост и имиграция.) Процес, за който $\mu_n = n\mu,\ n \geq 1,\ \lambda_n = n\lambda + \theta,\ n \geq 0$ се нарича ПРГ с имиграция. Такъв процес естествено възниква при изучаване на биологичната репродуктивност и нарастването на популацията. Всеки индивид се предполага, че има поколение след време на живот с $Exp(1/\lambda)$ разпределение и има допълнителна експоненциална степен на нарастване θ на популацията, която се дължи на външен източник на имиграция. Така общата степен на раждаемост, когато имаме n индивида в системата е $n\lambda + \theta$. Смъртността се предполага, че е $Exp(1/\mu)$ за всеки индивид и следователно, $\mu_n = n\mu$.*

Нека $X(t)$ е размерът на популацията в момент t и $X(0) = i$ и да означим с $M(t) = \mathbf{E}X(t)$.

Ще получим диференциално уравнение за $M(t)$. Имаме

$$M(t+h) = \mathbf{E}X(t+h) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t+h)|X(t))).$$

Така при $X(t)$ дадено имаме:

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1, & \text{с вероятност} \quad [\theta + \lambda X(t)]h + o(h), \\ X(t)-1, & \text{с вероятност} \quad \mu X(t)h + o(h), \\ X(t), & \text{с вероятност} \quad 1 - [\theta + \lambda X(t) + \mu X(t)]h + o(h). \end{cases}$$

Тогава

$$\mathbf{E}(X(t+h)|X(t)) = X(t) + [\theta + X(t)\lambda - X(t)\mu]h + o(h).$$

Като вземем математическо очакване от двете страни на това равенство намираме:

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda - \mu)M(t)h + \theta h + o(h)$$

откъдето

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = (\lambda - \mu)M(t) + \theta + \frac{o(h)}{h},$$

което при $h \to 0$ дава (при $\lambda \neq \mu$)

$$M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta. \tag{6.1}$$

Това е линейно диференциално уравнение от 1 ред с постоянни коефициенти и следователно има общо решение на хомогенното уравнение $M(t) = Ce^{-(\lambda-\mu)t}$ и очевидно частно решение $M_0(t) = \frac{-\theta}{\lambda-\mu}$. Така общото решение на (6.1) е

$$M(t) = Ce^{-(\lambda-\mu)t} - \frac{\theta}{\lambda - \mu}.$$

Като вземем предвид и началното условие $M(0) = i$ намираме, че

$$M(t) = \frac{\theta}{\lambda - \mu}[e^{-(\lambda-\mu)t} - 1] + ie^{-(\lambda-\mu)t}.$$

Когато $\lambda = \mu$ уравнението (6.1) става $M'(t) = \theta$ и със същото начално условие $M(0) = i$ намираме:

$$M(t) = \theta t + i.$$

3 Вероятностна функция на преходите $P_{ij}(t)$

Нека $P_{ij}(t) = \mathbf{P}(X(t+s) = j|X(s) = i)$ е вероятността, че ако в момента s процесът е в състояние i, то след време t ще бъде в състояние j. Те се наричат се преходни вероятности на МВНВ.

Определение 6.3 *За всяка двойка състояния i, j нека да означим с*

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij}.$$

Тъй като ν_i е скоростта, с която процесът извършва преход от i и p_{ij} е вероятността за преход от i в j, то q_{ij} е скоростта, с която процесът от състояние i преминава в състояние j. Числата q_{ij} се наричат моментни преходни скорости (т.е. от i без да престоява преминава в j.)

От $\nu_i = \sum_j \nu_i p_{ij} = \sum_j q_{ij}$ и $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\nu_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$, следва, че q_{ij} задават еднозначно параметрите на МВНВ.

Лема 6.1 *В сила са:*

а) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \nu_i,$

б) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}, \quad i \neq j.$

Доказателство: а) Първо да отбележим, че тъй като времето докато се извърши преход е експоненциално разпределено, то вероятността за 2 и повече прехода за време h е $o(h)$. Следователно, $1 - P_{ii}(h)$ – вероятността, че ако процесът е бил в момента 0 в състояние i да не остане в i след време h, е равна на вероятността, че ще имаме един преход в интервала с дължина h, плюс $o(h)$. Следователно

$$1 - P_{ii}(h) = \nu_i h + o(h),$$

което доказва а).

б) Да забележим, че $P_{ij}(h)$ – вероятността, че процесът преминава от състояние i в състояние j за време h е равна на вероятността, че ще имаме един преход за това време умножена с вероятността за преход от i в j, плюс $o(h)$. Следователно

$$P_{ij}(h) = h\nu_i p_{ij} + o(h),$$

от където следва б). $\square$

Лема 6.2 *За всяко $s \geq 0$ и всяко $t \geq 0$*

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s). \tag{6.2}$$

(Уравнения на Чепмен-Колмогоров.)

Доказателство: Изразяваме $P_{ij}(t+s)$ като сумираме по всички междинни състояния k, в които попада процесът за време t, т.е.

$$P_{ij}(t+s) = \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(0) = i) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s) = j, X(t) = k | X(0) = i) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(t) = k, X(0) = i) \mathbf{P}(X(t) = k | X(0) = i) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(t) = k) \mathbf{P}(X(t) = k | X(0) = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

С това доказателството е завършено. □

От (6.2) следва, че

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t).$$

Следователно

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \frac{[1 - P_{ii}(h)]}{h} P_{ij}(t) \right\},$$

и ако предположим, че може да се смени реда на сумирането и граничния преход и използуваме Лема 6.1, ще получим, че

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

И така, без да доказваме строго законността на смяната на граничния преход със сумирането (което при верига с краен брой състояния е очевидно) стигаме до следната теорема.

Теорема 6.1 *(Обратни уравнения на Колмогоров.) За* $\forall i, j,$ *и* $t \geq 0$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

Пример 6.4 *Обратните уравнения на Колмогоров за процес на чисто раждане имат вида*

$$P'_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - \lambda_i P_{ij}(t). \tag{6.3}$$

Сега ще получим и т.нар. прави уравнения на Колмогоров. Отново от (6.2) имаме

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]P_{ij}(t).$$

Следователно

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \sum_{k\neq i} P_{ik}(t) \frac{P_{kj}(h)}{h} - \frac{[1 - P_{jj}(h)]}{h} P_{ij}(t) \right\},$$

и ако предположим, че може да се смени реда на сумирането и граничния преход и използуваме Лема 6.1, ще получим, че

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Така стигаме до следната теорема.

Теорема 6.2 *(Прави уравнения на Колмогоров.) При подходящи условия за регулярност*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Забележка 6.1 *Смяната на реда на сумиране и граничния преход не винаги е законна. Това е вярно за крайни суми и при известни условия за реда, ако той е безкраен. Тези условия са наречени по-горе условия за регулярност и предполагаме, че са изпълнени. Също така считаме, че те са налице и при теоремата за обратните уравнения на Колмогоров.*

Пример 6.5 *Да решим правите уравнения за чист процес на раждане. Имаме*

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Тъй като $P_{ij} = 0$ за $i > j$ (няма "гибел"), то

$$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t) \tag{6.4}$$

и

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t), \quad j \geq i+1. \tag{6.5}$$

Предложение 6.1 *За чист процес на раждане*

(i) $P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad i \geq 0,$

(ii) $P_{ij}(t) = \lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}P_{i,j-1}(s)ds, \quad j \geq i+1.$

Доказателство: Може да се направи чрез непосредствена проверка в (6.4) и (6.5). □

4 Гранични вероятности

По аналогия на дискретните Марковски вериги и при МВНВ вероятността процесът да попадне в състояние j в момента t клони към гранична стойност, която не зависи от началното състояние, т.е. ако тази стойност е P_j, то

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t).$$

Ще получим система алгебрични уравнения за P_j. Да разгледаме системата прави диференциални уравнения на Колмогоров:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Ако направим граничен преход по $t \to \infty$ в това уравнение ще получим

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t)\right] =$$

$$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - \nu_j P_j. \tag{6.6}$$

От това, че $0 \leq P_{ij}(t) \leq 1$ следва, че ако съществува границата $\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t)$ то тя непременно е равна на 0. Тогава от (6.6) следва

$$0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - \nu_j P_j$$

или

$$\nu_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k, \tag{6.7}$$

за всяко състояние j.

Тогава системата (6.7) и още уравнението

$$\sum_j P_j = 1, \tag{6.8}$$

може да се използува за намиране на граничните вероятности $\{P_j\}_{j \geq 0}$.

Забележка 6.2

1. *Предположихме, че граничните вероятности съществуват. Достатъчни условия за това са:*

   а) Всички състояния на Марковската верига са съобщаващи се, т.е. започвайки от i има положителна вероятност да се попадне в j за всеки две състояния i, j и

   б) Марковската верига е положително възвратна, т.е. започвайки от дадено състояние средното време за връщане в това състояние е крайно.

   Ако а) и б) са изпълнени, то съществуват граничните вероятности P_j и удовлетворяват уравненията (6.7) и (6.8). P_j се разглеждат също и като частта от времето, през което МВНВ е била в състоянието j при достатъчно дълъг период $(0, t)$.

2. *(6.7) и (6.8) имат следната интерпретация: Във всеки интервал $(0, t)$ броя на преходите в състояние j трябва да е равен на преходите от състояние j.*

   $$\nu_j P_j = \text{ скоростта, с която процесът напуска състоянието } j$$

   q_{kj} е скоростта, с която от k влиза в j, P_k е частта от времето, през което се намира в състоянието k. Следователно, скоростта, с която се извършва преходът от k в j е $q_{kj} P_k$. Тогава

   $$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k = \text{ скоростта, с която процесът влиза в състояние } j.$$

3. *Когато $\{P_j\}$ съществуват МВНВ се нарича ергодична и P_j се наричат стационарни вероятности.*

5 Пресмятане на преходните вероятности

Нека означим за $\forall i, j$

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \neq j, \\ -\nu_i, & i = j. \end{cases}$$

Тогава обратните

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t) \tag{6.9}$$

и правите

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t) \tag{6.10}$$

уравнения на Колмогоров имат съответно представянето:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k} r_{ik} P_{kj}(t) \tag{6.11}$$

и

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k} r_{kj} P_{ik}(t) \tag{6.12}$$

Означаваме матриците $\mathbb{R} = \{r_{ij}\}, \quad \mathbb{P}(t) = \{P_{ij}(t)\}$ и $\mathbb{P}'(t) = \{P'_{ij}(t)\}$. Следователно от (6.11) намираме

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{R}\mathbb{P}(t), \tag{6.13}$$

а от (6.12) следва

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{R}. \tag{6.14}$$

Тогава решението на (6.13) е $\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0)e^{\mathbb{R}t}$ и тъй като $\mathbb{P}(0) = \mathbb{I}$ то следва, че $\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{R}t}$, където матрицата $e^{\mathbb{R}t}$ се дефинира чрез:

$$e^{\mathbb{R}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n \frac{t^n}{n!}, \tag{6.15}$$

а с $\mathbb{R}^n$ е означена $n-$тата степен на матрицата $\mathbb{R}$.

От изчислителна гледна точка вместо да се използва (6.15) за пресмятане на $e^{\mathbb{R}t}$ е по-удачно да се използва матричния еквивалент на равенството

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e^{\mathbb{R}t} = \lim_{n \to \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{\mathbb{R}t}{n}\right)^n.$$

Следователно, ако $n = 2^k$, то можем да пресметнем $\mathbb{P}(t)$ чрез повдигане на матрицата $\mathbb{M} = \mathbb{I} + \mathbb{R}\frac{t}{n}$ на $n-$та степен, което може да се извърши чрез k умножения

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{M}\mathbb{M},\ \mathbb{M}^4 = \mathbb{M}^2\mathbb{M}^2,\ \ldots$$

6 Задачи

Задача 6.1 *Да се пресметнат граничните вероятности за процес на раждане и гибел.*

Решение: От уравнението на баланса следва

Състояние	скорост на напускане = скорост на пристигане
0	$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2) P_2 = \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$

Към всяко уравнение добавяме предходните и получаваме

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2$$

$$\lambda_2 P_2 = \mu_3 P_3$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1}$$

$$\vdots$$

Като решим системата чрез P_0 намираме

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} P_0$$

От $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow$

$$1 = P_0 + P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1},$$

следователно

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1}}. \tag{6.16}$$

Така за $n \geq 1$,

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_n\mu_{n-1} \dots \mu_2\mu_1(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_n\mu_{n-1} \dots \mu_2\mu_1})}. \tag{6.17}$$

Също получаваме и необходимо условие за това , тези гранични вероятности да съществуват, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_n\mu_{n-1} \dots \mu_2\mu_1} < \infty.$$

(Може да се докаже, че това условие е също и достатъчно.)

Задача 6.2 *Нека в един цех има M машини, които се обслужват (поправят при повреда) от 1 човек. Нека времето, което работи всяка машина преди отказ е експоненциално разпределено със средно $1/\lambda$ и нека времето за ремонт е експоненциално разпределено със средно $1/\mu$. Ще отговорим на следните въпроси:*

а) Какъв е средният брой машини, които не се използват?

б) Каква част от времето всяка машина е в състояние работа?

Решение: Ако приемем, че системата е в състояние n, когато n от машините работят, то описахме един процес на раждане и гибел с параметри:

$$\mu_n = \mu, \quad n \geq 1,$$

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda, & n \leq M \\ 0, & n > M. \end{cases}$$

От (6.16) $\Rightarrow$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} [(M\lambda(M-1)\lambda \dots (M-n+1)\lambda)/\mu^n]} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} [(\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!}]},$$

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k M!/(M-k)!}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!}}, \quad k = 1, \dots, M.$$

а) Средният брой машини, които не работят е

$$\sum_{k=0}^{M} kP_k = \sum_{k=0}^{M} \frac{k(M!/(M-k)!)(\lambda/\mu)^k}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\lambda/\mu)^n \frac{M!}{(M-n)!}}. \tag{6.18}$$

б)

$$\mathbf{P}(\text{машина да работи}) =$$

$$\sum_{n=0}^{M} \mathbf{P}(\text{машина да работи}|\ n \text{ машини не работят}) P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{M} \frac{M-n}{M} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{M} \frac{nP_n}{M},$$

като последната сума е сметната в (6.18).

Задача 6.3 *Напишете ДУ на Колмогоров за Поасонов процес.*

Решение: $p_n(t)$ удовлетворяват (Система обратни ДУ на Колмогоров)

$$\left| \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n+1}(t). \end{array} \right.$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i, \\ \lambda, & j = i+1, \\ 0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) &= \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i) \\ &= \mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i | X(s) = i, X(0) = 0) \\ &\overset{\text{нез. на нар.}}{=} \mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i) \\ &= \mathbf{P}(X(t) - X(0) = j - i) \\ &= \mathbf{P}(X(t) = j - i) \overset{\text{П. проц.}}{=} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!}. \end{aligned}$$

Глава 7

Интегриране на случайни процеси

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дефинираме интеграл от случаен процес относно неслучайна мярка;
- да дефинираме интеграл от неслучайна функция относно случайна мярка;
- да докажем някои свойства на тези интегали;
- да разгледаме някои примери.

1 Интеграл от случаен процес относно неслучайна мярка

В много теоретични и приложни задачи се налага да се разглеждат интеграли от вида

$$I(\omega) = I = \int_a^b \xi(t)dt, \tag{7.1}$$

където $\xi(t), t \in [a, b]$ е даден случаен процес.

Този интеграл може да се дефинира по няколко начина:

Определение 7.1 *(I начин - Тази дефиниция се нарича потраекторна.) Ако фиксираме ω ще получим една обикновена функция на t, $\xi(t, \omega)$ и за да бъде тя интегруема е достатъчно да има не повече от изброимо много прекъсвания в $[a, b]$. Това означава, че $I(\omega) = I$ при фиксирано ω е граница на интегрални суми от вида:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi(s_k, \omega)(t_{k+1} - t_k), \quad s_k \in (t_k, t_{k+1}),$$

при $n \to \infty$ и $\max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$.

И така, ако $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ е измерима функция и $\int_a^b \mathbf{E}(\xi^2(t))dt < \infty$, то по теоремата на Фубини

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b \xi^2(t)dt\right) = \int_a^b \mathbf{E}(\xi^2(t))dt < \infty,$$

откъдето $\int_a^b \xi^2(t)dt$ съществува, а оттам и интеграла в (7.1) съществува с вероятност 1. При това $I = I(\omega)$ е сл. величина.

Определение 7.2 *(II начин - Можем да дефинираме I като средно квадратична граница на редица от сл. величини.) Нека $\xi(t) \in L_2[a,b]$ и нека $\xi(t)$ е елементарен процес, т.е. съществуват такива точки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$, и сл. величини $\xi_0, \ldots, \xi_n$, така че $\xi(t,\omega) = \xi_k(\omega)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. Тогава*

$$I = \int_a^b \xi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Delta t_k, \quad \Delta t_k = (t_{k+1} - t_k)$$

е дефиниран за всяко ω.

Ако $\xi(t), t \in [a,b]$ е произволен процес от $L_2[a,b]$, то съществува редица от елементарни процеси $\{\xi_n(t)\}, t \in [a,b]$, $n = 0,1,2,\ldots$, такава, че

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t), \ t \in [a,b], \ \text{п.с.}.$$

Тъй като $|\xi(t) - \xi_n(t)| \le |\xi(t)|$, то по Теоремата на Лебег

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_a^b \xi(t)dt - \int_a^b \xi_n(t)dt\right)^2\right\} \le \mathbf{E}\left\{\int_a^b (\xi(t) - \xi_n(t))^2 dt\right\} \to 0,$$

при $n \to \infty$ и следователно

$$(L_2)\int_a^b \xi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \xi_n(t)dt.$$

Определение 7.3 *(III начин - Като граница на риманови интегрални суми в термините на ковариационната функция $C(t,s)$ на процеса.) Разглеждаме*

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_{nk})\Delta t_{nk}, \quad \Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{n,k-1},$$

където

$$a = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = b.$$

Според критерия за непрекъснатост за съществуването на L_2- границата на I_n е НД изразът

$$\mathbf{E}(I_n I_m) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} C(t_{nk}, t_{mr})\Delta t_{nk}\Delta t_{mr}, \tag{7.2}$$

да има граница при $n \to \infty, m \to \infty$ и $\max_k \Delta t_{nk} \to 0$, $\max_r \Delta t_{mr} \to 0$.

Но това е еквивалентно на интегруемост по Риман на функцията $C(t,s)$ в квадрата $[a,b] \times [a,b]$.

Последната дефиниция на интеграла $\int_a^b \xi(t)dt$ е по-тясна от потраекторната, но има това предимство, че не е свързана с понятието измеримост.

Така дефинирахме интеграл от случаен процес потаекторно, а след това и като средно квадратична граница на сл. величини. Втория интеграл ще означаваме с $(L_2)\int_a^b \xi(t)dt$. Възниква въпросът, дали това не е един и същи интеграл? Отговорът е положителен, както ще се убедим.

Нека за всяко ω траекториите $\xi(t,\omega)$ са интегруеми. Понеже L_2-интегралът е граница в L_2-смисъл на интегрални суми (7.2), и следователно е граница и по вероятност на същите суми. От друга страна, потраекторният интеграл е граница на същите суми за почти всяко ω, от където следва, че и той е граница по вероятност на тези суми. Следователно двата интеграла съвпадат, тъй като при сходимостта по вероятност границата е единствена с точност до събитие с вероятност 0.

Да предположим, че $\xi(t), t \in [a,b]$ е L_2-непрекъснат процес. Тогава неговата ковариационна функция $C(t,s)$ е непрекъсната в $[a,b] \times [a,b]$ и следователно е интегруема в този квадрат, а оттам и интегралът $\int_a^b \xi(t)dt$ съществува.

Задача 7.1 *Винеровият процес $W_t, t \geq 0$ и Поасоновият процес $\pi_t, t \geq 0$ са интегруеми, т.е. съществуват*

$$\xi(t) = \int_0^t W_s ds, \ \ \text{и } \eta(t) = \int_0^t \pi_s ds, \ \ \text{за всяко } t \geq 0.$$

Освен това $\xi(t)$ и $\eta(t)$ са L_2-диференцируеми, при което $\xi'(t) = W_t, \ \eta'(t) = \pi_t$.

По-общо: Нека процесът $x(t), \ t \in [a,b]$ е L_2-интегруем. Тогава

$$y(t) = \int_a^t x(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{7.3}$$

е сл. процес в пространството $L_2[a,b]$. Ще покажем, че за $y(t)$ е изпълнено:

1) $y(t)$ е L_2-непрекъснат в $[a,b]$;

2) ако $x(t)$ е L_2-непрекъснат в $[a,b]$, то $y(t)$ е L_2- диференцируем в $[a,b]$ и $y'(t) = x(t)$.

Решение: От (7.3) следва

$$\mathbf{E}[(y(t+h) - y(t))^2] = \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} C(s,\tau) ds d\tau \to 0, \quad h \to 0,$$

което доказва 1).

Имаме

$$\Delta_h = \mathbf{E}\left\{ \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - x(t) \right)^2 \right\} =$$

$$h^{-2}\mathbf{E}\left\{ \left[\int_t^{t+h} (x(\tau) - x(t))d\tau \right]^2 \right\} =$$

$$= \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} \mathbf{E}\{(x(s) - x(t))(x(\tau) - x(t))\} ds d\tau / h^2 =$$

$$\leq \left[\int_t^{t+h} (\mathbf{E}\{(x(\tau) - x(t))^2\})^{1/2} d\tau \right]^2 / h^2,$$

но

$$\int_t^{t+h} (\mathbf{E}\{(x(\tau) - x(t))^2\})^{1/2} d\tau = h^2 \left(\mathbf{E}\{(x(\tau_0) - x(t))^2\} \right)^{1/2},$$

$$\tau_0 \in (t, t+h),$$

следователно $\Delta_h \to 0$ при $h \to 0$ с което е доказано и 2).

Понякога представлява интерес да се намери разпределението на интеграла от случаен процес. В общия случай тази задача е трудна, даже и да знаем съвместното разпределение на произволен брой сл. величини. Все пак за един широк и важен клас сл. процеси разпределението на $\int_a^b \xi(t)dt$ може да се намери. Това са Гаусовите процеси.

Предложение 7.1 *Нека $\xi(t)$ е Гаусов процес и е известно, че той е L_2 непрекъснат. Тогава $I = \int_a^b \xi(t)dt$ съществува и има Гаусово разпределение.*

Доказателство: I е L_2-граница на интегрални суми от вида

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \xi(s_k)(t_{k+1} - t_k).$$

Очевидно

$$I_n = C_0 + C_1\xi(s_1) + \ldots + C_n\xi(s_n).$$

Тъй като даденият процес е Гаусов, тази линейна комбинация има Гаусово разпределение и за характеристичната функция $\phi_n(z)$ на I_n имаме $\phi_n(z) = \exp[iza_n + \sigma_n^2 z^2/2]$. Остава да се отбележи, че $I_n \to I, n \to \infty$, а това означава, че a_n и σ_n^2 имат граници и границата на характеристичните функции има същия вид, следователно I също има Гаусово разпределение. $\square$

Задача 7.2 *Ако $\xi(t) = \int_0^t W_s ds$, където $W_t, t \geq 0$ е Винеров процес има Гаусово разпределение с параметри 0 и $t^3/3$.*

Решение:

$$\int_0^t \mathbf{E}W_s^2 ds = \int_0^t s^2 ds = t^3/3.$$

Задача 7.3 *Отново за $\xi(t) = \int_0^t W_s ds$, да се докаже, че при $\forall t$ двумерната сл. в. (W_t, ξ_t) има Гаусово разпределение със средни стойности $(0,0)$ и ковариационна матрица равна на $\begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}$.*

Упътване: $\begin{pmatrix} \mathbf{E}W_t^2 & \mathbf{E}W_t\xi(t) \\ \mathbf{E}W_t\xi(t) & t^3/3 = \mathbf{E}\xi^2(t) \end{pmatrix}$.

Често е важно не разпределението на интеграла, а някои негови числени характеристики.

Теорема 7.1 *Нека сл. процес $\xi(t)$, $t \in [a,b]$ е L_2-непрекъснат и принадлежи на $L_2[a,b]$. Нека $a(t)$ и $C(t,s)$ са средната стойност и ковариационната функция на процеса. Ще покажем, че за интеграла $I = \int_a^b \xi(t)dt$ са в сила следните съотношения:*

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b \xi(t)dt\right) = \int_a^b \mathbf{E}\xi(t)dt = \int_a^b a(t)dt; \tag{7.4}$$

$$\mathbf{Cov}\left(\int_a^b \xi(t)dt, \xi(s)\right) = \int_a^b C(t,s)dt; \tag{7.5}$$

$$\mathbf{Cov}\left(\int_a^b \xi(t)dt, \int_a^b \xi(s)ds\right) = \int_a^b \int_a^b C(t,s)dtds. \tag{7.6}$$

Доказателство: Имаме

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b \xi(t)dt\right) = \mathbf{E}\left(\lim_n \sum_{k=0}^n \xi(s_k)\Delta t_k\right) = \lim_n \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\xi(s_k))\Delta t_k.$$

Но по условие $\xi(t)$ е L_2-непрекъснат, което означава, че $a(t)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и следователно интегруема, като границата в последния израз на горното равенство е точно $\int_a^b a(t)dt$. С това е доказано (7.4).

Всъщност (7.4) е вариант на теоремата на Фубини, тъй като е обоснована смяната на интегрирането по мярката $\mathbf{P}$ и интегрирането по Лебеговата мярка dt.

$$\int_\Omega \left(\int_a^b \xi(t,\omega)dt\right) d\mathbf{P}(\omega) = \int_a^b \left(\int_\Omega \xi(t,\omega\right) d\mathbf{P}(\omega))dt.$$

Тогава (7.5) и (7.6) са ясни. □

По аналогичен начин се доказва и равенството

$$\mathbf{Cov}\left(\int_a^b f(t)\xi(t)dt, \int_a^b g(s)\eta(s)\right) = \int_a^b \int_a^b f(t)C_{\xi\eta}(t,s)g(s)dtds, \tag{7.7}$$

където $\xi(t)$ и $\eta(t)$ са произволни L_2-непрекъснати сл. процеси с ковариационна функция $C_{\xi\eta}(t,s)$, а f,g са неслучайни функции от $L_2[a,b]$.

До тук разглеждахме интеграли от случайни процеси, предполагайки, че те са дефинирани в краен затворен интервал. По аналогия с класическия анализ и тук има смисъл да говорим за несобствени интеграли от сл. процеси. Ясно е, че ако съществува несобствен интеграл $\int_0^\infty \int_0^\infty C(t,s)dtds$ от ковариационната функция, тогава процесът $\xi(t)$ ще бъде интегруем в $[0,\infty)$, т.е. съществува несобствен интеграл $\int_0^\infty \xi(t)dt$.

2 Основна теорема на стохастичното смятане (аналог на формулата на Лайбниц-Нютон)

Теорема 7.2 *Нека $x(t), t \in [a,b]$ е сл. процес с ковариационна функция $C(t,s)$. Нека съществуват $\dfrac{\partial C(t,s)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 C(t,s)}{\partial t \partial s}$ и са непрекъснати. Тогава $x(t)$ е L_2- диференцируем, неговата производна $x'(t)$ е L_2-интегруема и за всяко $t \in [a,b]$ с вероятност 1*

$$x(t) - x(a) = \int_a^t x'(s)ds.$$

Доказателство: Ще докажем, че за всяко $t \in [a,b]$

$$\delta_t = \mathbf{E}\left\{\left(x(t) - x(a) - \int_a^t x'(s)ds\right)^2\right\} = 0. \tag{7.8}$$

Знаем, че $\dfrac{\partial^2 C(t,s)}{\partial t \partial s}$ е ковариационната функция на $x'(t)$, а $\dfrac{\partial C(t,s)}{\partial t}$ е ковариационната функция на $x'(t)$ и $x(s)$. Тогава за величината δ_t от (7.8) намираме

$$\delta_t = \mathbf{E}\left\{(x(t)-x(a))^2 - 2(x(t)-x(a))\int_a^t x'(s)ds + \int_a^t x'(s)ds \int_a^t x'(\tau)d\tau\right\} =$$

$$C(t,t) - 2C(t,a) + C(a,a) - 2\int_a^t \left[\frac{\partial C(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial C(a,s)}{\partial s}\right] ds +$$
$$\int_a^t \int_a^t \frac{\partial^2 C(t,s)}{\partial s \partial \tau} ds d\tau.$$

От направените предположения следва, че при пресмятане на интегралите в дясната страна на последното равенство можем да приложим класическата формула на Лайбниц-Нютон. Тогава се получава, че $\delta_t = 0, \forall t \in [a,b]$. $\Box$

3 Интеграл от неслучайна функция по случаен процес

Следващата ни цел е да построим стохастичен интеграл от вида

$$J(f) = \int_a^b f(t) d\eta(t), \tag{7.9}$$

където $f(t)$ е неслучайна функция, а $\eta(t)$ е сл. процес.

Забележка 7.1 *Няма смисъл да разглеждаме интеграла $J(f)$, когато $\eta(t)$ е L_2-диференцируем, тъй като вместо $J(f)$ можем да вземем $\int_a^b f(t)\eta'(t)dt$, а с неговото построяване вече се запознахме.*

Ще дефинираме (7.9) за процеси с некорелирани нараствания, а те както не е трудно да се види са недиференцируеми.

Нека е даден сл. процес $\eta(t), t \in [a,b], \eta \in L_2[a,b]$, чиито нараствания са некорелирани, т.е. за произволни $a \le t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \le b$ имаме $\mathbf{E}[(\eta(t_2) - \eta(t_1))(\eta(t_4) - \eta(t_3))] = 0$.

Първо ще покажем, че съществува ненамаляваща функция $F(t), t \in [a,b]$ такава, че $\eta(t) - \eta(s), t > s$ има дисперсия $F(t) - F(s)$. Нека $t_0 \in [a,b]$ е фиксирано число. Полагаме

$$F(t) = \begin{cases} \mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\}, & t_0 \le t \le b \\ -\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\}, & a \le t \le t_0 \end{cases} \tag{7.10}$$

Очевидно $F(t)$ зависи от t_0, но ако вземем друго фиксирно число $t_0' \in [a,b]$, то $F(t)$ ще се измени само с адитивна константа. Нека $t_0' < t_0 < t$ (аналогично се разглеждат случайте $t_0' > t_0 > t$). Тогава

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0'))^2\} = \mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0) + \eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\} =$$
$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\} + 2\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))(\eta(t_0) - \eta(t_0'))\} +$$
$$\mathbf{E}\{(\eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\}.$$

Сега твърдението следва от факта. че:

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))(\eta(t_0) - \eta(t_0'))\} = 0;$$

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\} = F(t);$$

и

$$\mathbf{E}\{(\eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\} = const.$$

Ако отново използуваме свойството некорелираност (7.10) на нарастванията на процеса $\eta(t)$, то за всеки $t > s$

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(s))^2\} = F(t) - F(s).$$

Следователно $F(t)$ е ненамаляваща функция. Освен това, може да се докаже, че съществува граница отдясно $F(t+0)$ и отляво $F(t-0)$ за всяко $t \in [a, b]$. По-нататък

$$\eta(t+0) - \eta(t) = \lim_{h \downarrow 0} (\eta(t+h) - \eta(t)),$$

$$\eta(t) - \eta(t-0) = \lim_{h \downarrow 0} \eta(t) - \eta(t-h),$$

откъдето

$$\mathbf{E}\{(\eta(t+0) - \eta(t))^2\} = F(t+0) - F(t),$$
$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t-0))^2\} = F(t) - F(t-0).$$

Нека в заключение да отбележим, че нарастването $\eta(t) - \eta(t_0)$ е L_2- непрекъснато в т. $t \iff$, когато $F(t)$ е непрекъсната в тази точка. Ако $F(t)$ има прекъсване в т. t, то поне една от сл. величини $\eta(t+0) - \eta(t)$ и $\eta(t) - \eta(t-0)$ ще има нулева дисперсия. Да допуснем, че $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната отдясно. Следователно $F(t)$ е непрекъсната отдясно. От $\eta(t) \in L_2[a, b]$ следва, че $F(t)$ е ограничена в $[a, b]$, при което е допустимо $a = -\infty, b = +\infty$. Но всяка ограничена и ненамаляваща функция, непрекъсната отдясно (каквато е $F(t)$) поражда в дефиниционната си област $[a, b]$ крайна мярка и то такава, че мярката на интервала (s, t) е $F(t) - F(s)$. Именно относно такива функции се строи интеграл на Стилтес $\int_a^b g(t) dF(t)$.

Нека $f(t), t \in [a, b]$ е неслучайна функция, за която $\int_a^b f^2(t) dF(t) < \infty$. Целта е да дефинираме стохастичния интеграл

$$J(f) = \int_a^b f(t) d\eta(t). \tag{7.11}$$

1) Нека $f(t)$ е елементарна функция, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & a \leq t \leq t_1, \\ f_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \vdots & \\ f_n, & t_n \leq t \leq b. \end{cases}$$

За такава функция е естествено да положим

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} f_k [\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)], \tag{7.12}$$

където $t_0 = a, t_{n+1} = b$.

От (7.12) следва, че $J(f)$ зависи линейно от f:

$$J(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 J(f_1) + c_2 J(f_2). \tag{7.13}$$

Освен това

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[J(f)] = 0, \\ &\mathbf{E}[J^2(f)] = \textstyle\sum_{k=0}^{n} f_k^2 [F(t_{k+1}) - F(t_k)]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Или (7.14) може да се представи и като

$$\mathbf{E}[J^2(f)] = \mathbf{Var}[J(f)] = \int_a^b f^2(t)dF(t). \tag{7.15}$$

Нека $g(t), t \in [a,b]$ е друга елементарна функция от типа на f с $\int_a^b g^2(t)dF(t) < \infty$. Тогава

$$\mathbf{Cov}(J(f), J(g)) = \mathbf{E}(J(f), J(g)) = \int_a^b f(t)g(t)dF(t). \tag{7.16}$$

Наистина, нека f има постоянни стойности в интервалите определени от $a, t_1, t_2, \ldots, b$, а g има постоянни стойности в интервалите определени от $a, s_1,\ s_2, \ldots, b$.

Обединяваме точките от двете деления в обща растяща редица

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < b.$$

Нека $f_0, f_1, \ldots, f_m$ са стойностите на f в $[a,\tau_1], (\tau_1,\tau_2], \ldots, (\tau_m, b]$ и $g_0, g_1, \ldots, g_m$ са съответните стойности на g. Тогава

$$J(f) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i)),$$

$$J(g) = \sum_{j=0}^{m} g_j(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j)),$$

откъдето

$$\mathbf{E}[J(f)J(g)] = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} f_i g_j \mathbf{E}\{(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i))(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j))\}.$$

Но

$$\mathbf{E}\{(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i))(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j))\} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ F(\tau_{i+1}) - F(\tau_i), & i = j. \end{cases}$$

Следователно

$$\mathbf{E}[J(f)J(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dF(t).$$

Накратко до тук, ако f, g са елементарни, то с (7.12) дефинирахме стохастични интеграли $J(f)$ и $J(g)$, за които са изпълнени (7.13) и (7.14), а ковариацията се задава с (7.16).

Да продължим построяването на $J(f)$ за произволни функции, удовлетворяващи $\int_a^b f^2(t)dF(t) < \infty$. Съвкупността на тези функции ще означаваме с $L_2(dF)$.

Но всяка функция $f \in L_2(dF)$ може да се апроксимира с помощта на елементарни функции от същия клас, т.е. съществува редица от елементарни функции $f_n(t)$ такива, че

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dF(t) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогава $J(f_n)$ се дефинират с (7.12), а

$$J(f) = \int_a^b f^2(t)d\eta(t)$$

ще бъде L_2- границата на $J(f_n)$

$$\mathbf{E}\{(J(f_n) - J(f))^2\} = \int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dF(t) \to 0, n \to \infty.$$

Свойствата на $J(f)$ се получават за произволно $f \in L_2(dF)$ чрез граничен преход от свойствата на $J(f_n)$.

И така построихме $J(f) = \int_a^b f(t)d\eta(t), f \in L_2(dF)$ при условие, че $\eta(t) \in L_2$-непрекъсн отдясно (Следователно $F(t)$ е непрекъсната отдясно). Аналогично може да се постъпи и когато $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната отляво.

Ако $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната, то тогава F е непрекъсната и редицата от елементарни функции може да се избере по който и да е от двата начина. Възможно е $F(t)$ да е абсолютно непрекъсната, т.е. да съществува $F'(t) = p(t)$. Тогава $J(f)$ се дефинира по същия начин с тази разлика, че искаме $\int_a^b f^2(t)p(t)dt < \infty$.

Глава 8

Стохастични интеграли - интеграл на Ито

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дефинираме стохастичен интеграл по Винеров процес (Интеграл на Ито);
- да покажем някои негови свойства;
- да изведем формулата на Ито;
- да дефинираме стохастично диференциално уравнение;
- да разгледаме примери.

1 Стохастичен интеграл (СИ) по Винеров процес

1.1 Свойства на траекториите на Винеровия процес

Всяко уравнение, чиито коефициенти зависят от сл. в. или от случайни процеси, определени в дадено вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ се нарича стохастично.

При достатъчно общи предположения, решенията на такова уравнение са случайни процеси в същото вероятностно пространство.

Строгата математическа теория на стохастичните уравнения е започнала да се създава с работите на Бернщайн през 30-те години и особено в средата на 40-те години на двадесети век с работите на Ито и Гихман. Ще разгледаме основните въпроси свързани със стохастичните диференциални уравнения (СДУ) на базата на Винеровия процес.

Целта е най-напред да построим и да намерим основните свойства на интеграла на Ито, а именно

$$J_T(f) = \int_0^T f(t, \omega) dW_t, \tag{8.1}$$

където $f(t)$ е случайна функция и W_t е Винеров процес.

Досега разглежданите методи не са приложими, тъй като траекториите на Винеровия процес в произволно малък интервал имат неограничена вариация.

Коментар 8.1 *Да напомним дефиницията на ограничена вариация: Казваме, че функцията F е с ограничена $p-$вариация в интервала $[0, T]$, ако за някое $p \geq 1$ е изпълнено:*

$$\sup_{\delta} \sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})|^p < \infty,$$

където супремума е взет по всички възможни разлагания $\delta : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$.

При $p = 1$ казваме, че F е с ограничена вариация. При $p = 2$ казваме, че F е с ограничена квадратична вариация.

Лема 8.1 *Винеровият процес има неограничена вариация.*

Доказателство: Разглеждаме $[0, T]$ с точки на делене $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Вариацията в $[0, T]$ ще получим като супремум на величините

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|.$$

Тъй като Винеровия процес е с независими и Гаусово разпределени нараствания, то

$$\mathbf{E}V_n = c\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) \geq \frac{cT}{\max\limits_k(t_{k+1} - t_k)} \to \infty, \max_k \Delta t_k \to 0,$$

$$\mathbf{Var}V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Var}|W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| = c_1 \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) = c_1 T.$$

Следователно $V_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty,\ n \to \infty.$ □

Възможността да се построи стохастичен интеграл (8.1) се дължи на следното свойство на Винеровия процес, (аналогично на ограничена квадратична вариация). Нека $n \to \infty$, $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Тогава

$$\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \xrightarrow{L_2} T, \tag{8.2}$$

т.е.

$$\mathbf{E}\{\left(\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) - T\}^2 \to 0,\ n \to \infty.$$

Наистина

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = T,$$

$$\mathbf{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) =$$

$$c_2 \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)^2 \leq c_2 T \max_k \Delta t_k \to 0,\ n \to \infty.$$

Тогава (8.2) е следствие от неравенството на Чебишов.

Първата конструкция на (8.1) е дадена още през 30-те години на двадесети век от Пели, но за неслучайна функция f с интегруем квадрат ($\int_0^T f^2(t)dt < \infty$), т.е. $f \in L_2[0,T]$.

Нека първо f има непрекъсната производна f' и $f(0) = f(T) = 0$. Тогава полагаме

$$J_T(f) = \int_0^T f(t)dW_t = -\int_0^T f'(t)W_t dt.$$

Като вземем предвид, че за Винеровия процес $\mathbf{E}W_t = 0$ и $\mathbf{E}W_tW_s = \min\{t,s\}$ получаваме

$$\mathbf{E}J_T(f) = 0,$$

$$\mathbf{E}(J_T(f)J_T(g)) = \mathbf{E}\left(\int_0^T f'(t)W_t dt \int_0^T g'(s)W_s ds\right) =$$

$$\int_0^T \int_0^T f'(t)g'(s)\min(t,s)dtds = \int_0^T f(s)g(s)ds.$$

В частност $\mathbf{E}J_T^2(f) = \int_0^T f^2(t)dt$.

По-нататък се използува фактът, че произволна функция $f \in L_2[0,T]$ може да се апроксимира с функции от типа на разгледаната. По такъв начин стохастичния интеграл $J_T(f)$ е дефиниран за всяко $f \in L_2[0,T]$.

Но този метод не може да се приложи, ако f е случайна функция, т.е. $f = f(t,\omega)$.

1.2 Стохастичен интеграл по Винеров процес за елементарни функции

Нека $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \geq 0$ е семейство от ненамаляващи σ-подалгебри на основната σ-алгебра $\mathcal{F}$, т.е. при $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ и за всяко $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Определение 8.1 *Казваме, че процесът ξ_t, $t \geq 0$ е съгласуван с потока от $\sigma-$ алгебри $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, ако за всяко $t \geq 0 : \xi_t$ е $\mathcal{F}_t-$измерим и записваме по следния начин $(\xi_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$.*

Да предположим, че $(W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$ е Винеров процес. Това означава, че W_t е $\mathcal{F}_t-$измерима сл.в., но неговите нараствания, например $W_{t+h} - W_t$ не зависят от $\mathcal{F}_t$. Често в качеството на $\mathcal{F}_t$ се взема $\sigma-$алгебрата $\mathcal{F}_t^W$, породена от самия Винеров процес в интервала $[0,t]$.

С $L_2([0,T] \times \Omega)$ означаваме съвкупността на всички (t,ω) измерими случайни функции $(f(t,\omega), \mathcal{F}_t)$, $t \in [0,T]$, за които $\mathbf{E}(\int_0^T f^2(t,\omega)dt) < \infty$.

Първо ще дефинираме стохастичния интеграл $J_T(f)$ за някакво множество от "елементарни функции", със свойства:

1) да бъде достатъчно "богато", за да може с функции от него да се апроксимира произволна функция от $L_2([0,T] \times \Omega)$;

2) Просто и нагледно да се опишат свойствата на стохастичния интеграл.

Определение 8.2 *Функцията $e(t)$, $t \in [0,T]$ от класа $L_2([0,T] \times \Omega)$ се нарича елементарна, ако съществуват точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и случайни величини $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, където ξ_k е $\mathcal{F}_{t_k}-$измерима, такива че:*

$$e(t,\omega) = \xi_k(\omega),$$

при $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Нека $e(t,\omega)$ е елементарна функция. Тогава стохастичният интеграл се дефинира с

$$J_T(e) = \int_0^T e(t,\omega)dW_t = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]. \tag{8.3}$$

1.3 Някои свойства на $J_T(e)$

Ако a_1, a_2 са константи, а $e_1(t,\omega)$, $e_2(t,\omega)$ са елементарни функции от $L_2([0,T]\times\Omega)$, то:

1) $J_T(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1J_T(e_1) + a_2J_t(e_2)$;

2) Ако $\displaystyle\int_s^t e(u,\omega)dW_u = \int_0^T e(u,\omega)\mathbb{I}_{[s,t]}(u)dW_u$, където $\mathbb{I}_{[s,t]}(u)$ е индикаторът на $[s,t]$, то

$$\int_0^t e(u,\omega)dW_u = \int_0^{t_1} e(u,\omega)dW_u + \int_{t_1}^t e(u,\omega)dW_u;$$

3) $\displaystyle\int_0^t e(u,\omega)dW_u$ е непрекъсната функция на горната си граница $t \in [0,T]$;

4) При $s < t$ с вероятност 1

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t e(u,\omega)dW_u|\mathcal{F}_s\right\} = \int_0^s e(u,\omega)dW_u;$$

(мартингално свойство)

в частност

4') $\mathbf{E}\left\{\displaystyle\int_0^t e(u,\omega)dW_u\right\} = 0$ за всяко $t \in [0,T]$;

5) $\mathbf{E}\left\{\displaystyle\int_0^t e_1(u,\omega)dW_u \int_0^t e_2(u,\omega)dW_u\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^t e_1(u,\omega)e_2(u,\omega)du\right\}.$

Доказателство: Свойствата 1) и 2) са очевидни; 3) следва от непрекъснатостта на Винеровия процес. За 4) е достатъчно да се отбележи, че при $t_k \geq s$ с вероятност 1

$$\mathbf{E}\{\xi_k(\omega)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(\xi_k[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s\} =$$

$$\mathbf{E}\{\xi_k(\omega)\mathbf{E}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s\} = 0.$$

Аналогично се доказва 5). Без ограничение на общността, можем да смятаме, че $e_1(t,\omega)$, $e_2(t,\omega)$ приемат постоянни стойности върху едни и същи интервали. После разсъждаваме, както при $J_T(f) = \displaystyle\int_0^T f(s)d\eta(s)$. $\square$

1.4 СИ по Винеров процес за произволна функция с интегруем квадрат

И така от $J_T(e)$ ще дефинираме стохастичен интеграл за произволна функция $f \in L_2([0,T] \times \Omega)$.

Лема 8.2 *За всяка функция $f \in L_2([0,T] \times \Omega)$ съществува редица от елементарни функции g_n, $n = 1, 2, \ldots$ от същия клас, така че*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{\int_0^T |g_n(t,\omega) - f(t,\omega)|^2 dt\} = 0. \tag{8.4}$$

Доказателство:

Доказателството ще извършим в три стъпки:

Първа стъпка:

Ще покажем, че за произволна случайна функция $f(t,\omega) \in L_2([0,T] \times \Omega)$, съществува редица $\{\varphi_n\}$ от ограничени функции в $L_2([0,T] \times \Omega)$ такива, че

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{\int_0^T |f(t,\omega) - \varphi_n(t,\omega)|^2 dt\} = 0. \tag{8.5}$$

Нека да дефинираме за всяко n

$$\varphi_n = [-n \vee f(t)] \wedge n,$$

т.е. $\varphi_n(t,\omega) = f(t,\omega)\mathbb{I}_{[-n,n]}$.

Коментар 8.2 *На това място е подходящо да напомним следната теорема за мажорируемата сходимост от теория на вероятностите:*

Теорема 8.1 *Нека $p \geq 1$, $\{X_k\} \subset L_p(\Omega, R^d)$ и $Y \in L_p(\Omega, R^d)$. Да предположим, че $|X_k| \leq Y$ п.с. и $\{X_k\}$ клони към X по вероятност. Тогава $X \subset L_p(\Omega, R^d)$, $\{X_k\}$ клони към X в L_p, и*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}X_k = \mathbf{E}X.$$

Когато Y е ограничена, тази теорема се нарича още теорема за ограничената сходимост.

Тогава (8.5) следва от Теорема (8.1).

Втора стъпка:

В тази стъпка твърдим, че ако $\varphi(t,\omega) \in L_2([0,T] \times \Omega)$ е ограничена, т.е. $\varphi \leq C = const$, то съществува редица $\{\phi_n\}$ от ограничени непрекъснати процеси от $L_2([0,T] \times \Omega)$ такива, че

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{\int_0^T |\varphi(t,\omega) - \phi_n(t,\omega)|^2 dt\} = 0. \tag{8.6}$$

Наистина, нека за всяко n дефинираме непрекъсната функция $\rho_n : R \to R_+$ такава, че $\rho_n = 0$ за $s \leq -\frac{1}{n}$ и $s \geq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(s) ds = 1.$$

Дефинираме

$$\phi_n(t) = \phi_n(t,\omega) = \int_0^T \rho_n(s-t)\varphi(s,\omega)ds.$$

За всяко ω, $\phi_n(.,\omega)$ са непрекъснати и ограничени ($|\phi_n(t,\omega)| \le C$), принадлежат на $L_2([0,T]\times\Omega)$, ϕ_n са $\mathfrak{F}_t$–измерими и образуват редица, за която

$$\int_0^T |\varphi(s,\omega) - \phi_n(s,\omega)|^2 ds \to 0,$$

когато $n \to \infty$ за всяко ω. Тогава (8.6) следва от Теорема (8.1).

Трета стъпка:

Сега твърдим, че ако $\phi \in L_2([0,T]\times\Omega)$ е ограничена и непрекъсната, то тогава съществува редица от елементарни процеси $\{g_n\}$ такава, че

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{\int_0^T |\phi(t,\omega) - g_n(t,\omega)|^2 dt\} = 0. \tag{8.7}$$

за всяко n дефинираме

$$g_n(t) = \phi\left(\frac{kT}{n}\right), t \in \left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right)$$

и получаваме редицата g_n, $n = 1,2,\ldots$, където $g_n \in L_2([0,T]\times\Omega)$ и за всяко ω

$$\int_0^T [g_n(t,\omega) - \phi(t,\omega)]^2 dt \to 0,\ n \to \infty.$$

Отново от Теоремата (8.1) следва (8.7).

□

И така нека $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Съгласно доказаната Лема (8.2) , съществува редица от елементарни функции g_n, $n = 1,2,\ldots$, за които е изпълнено (8.4). Но тогава

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\{\int_0^T [g_n(t,\omega) - g_m(t,\omega)]^2 dt\} = 0$$

и от Свойство 5) следва, че

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}|\int_0^T g_n(t,\omega)dW_t - \int_0^T g_m(t,\omega)dW_t|^2 =$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}|\int_0^T [g_n(t,\omega) - g_m(t,\omega)]dW_t|^2 =$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |g_n(t,\omega) - g_m(t,\omega)|^2 dt = 0,$$

т.е. $J_T(g_n)$ е фундаментална в L_2–смисъл. Следователно съществува граница, която означаваме с $J_T(f)$ или $\int_0^T f(t,\omega)dW_t$, т.е.

$$J_T(f) \equiv \int_0^T f(t,\omega)dW_t = \text{l.i.m.}_n J_T(g_n).$$

По този начин се дефинира стохастичен интеграл $J_T(f)$ по Винеров процес за произволна функция от $L_2([0,T]\times\Omega)$. Дефиницията не зависи от избора на апроксимиращата редица, т.е. стойността на границата не зависи от апроксимиращата редица с точност до стохастична еквивалентност. Същите свойства 1)-5) са в сила и в общия случай.

Дефинираме семейството стохастични интеграли $J_t(f)$ при $t \in [0,T]$, като положим

$$J_t(f) = J_T(f\mathbb{I}_{[0,t]})$$

т.е.

$$J_t(f) = \int_0^T f(s,\omega)\mathbb{I}_{[0,t]}(s,\omega)dW_s = \int_0^t f(s,\omega)dW_s.$$

Дадената конструкция на стохастични интеграли $J_T(f), t \in [0,T]$ и техните основни свойства остават в сила и при $T = \infty$. Трябва само $f \in L_2([0,\infty) \times \Omega)$, т.е. $\mathbf{E}\{\int_0^\infty f^2(s,\omega)ds\} < \infty$.

Пример 8.1 *Нека $W_t, t \geq 0, W_0 = 0$ е Винеров процес. Ще покажем, че*

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

Функцията W_t е измерима, $\mathcal{F}_t-$ съгласувана и за всяко $T < \infty$ имаме

$$\int_0^T \mathbf{E}W_t^2 dt = \int_0^T t dt = T^2/2.$$

Нека $0 = t_0 < t_1 < t_2, \ldots < t_n = T$. Полагаме $f(t,\omega) = W_{t_k}$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Следователно

$$\int_0^T \mathbf{E}\{[f(t,\omega) - W_t]^2\}dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{E}\{[W_t - W_{t_k}]^2\}dt = 1/2 \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \to 0,$$

$$\max(t_{k+1} - t_k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следователно

$$\int_0^T W_t dW_t = \text{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}].$$

Разглеждаме равенството

$$W_T^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j<k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \tag{8.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Лявата страна на (8.8) не зависи от точките на делене на $[0,T]$. От (8.2) следва, че първата сума в (8.8) клони към T. Тогава от (8.2) и (8.8) следва

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T).$$

1.5 Свойства на СИ по ВП за произволна функция с интегруем квадрат

Да означим накратко $\eta_t = \displaystyle\int_0^t f(s,\omega)dW_s$.

1) За всяко $t \in [0,T]\mathbf{E}|\eta_t| < \infty$; Наистина

$$\mathbf{E}|\eta_t| \leq \left(\mathbf{E}(\eta_t)^2\right)^{1/2} = \left(\mathbf{E}\{\int_0^t f^2(s,\omega)ds\}\right)^{1/2} < \infty,$$

тъй като $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$.

2) При $t > s$ с вероятност 1 е изпълнено (поради свойство 4))

$$\mathbf{E}(\eta_t|\mathcal{F}_s) = \eta_s.$$

Знаем, че W_t е мартингал и от последното свойство 2) следва, че интеграла по Винеров процес е също мартингал. При това с вероятност 1

$$\mathbf{E}\{(\eta_t-\eta_s)^2|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\left\{\int_s^t f^2(u,\omega)du|\mathcal{F}_s\right\}.$$

2 Формула на Ито за смяна на променливите

Този апарат е разработен за пресмятане за интеграли от функции от случайни процеси.

Нека $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ е вероятностно пространство, $\mathcal{F}_t$ е поток от σ алгебри, $t \geq 0$ и $(W_t,\mathcal{F}_t)$ е Винеров процес.

Дадени са случайните функции $a(t,\omega)$ и $b(t,\omega)$, $t \geq 0$, които са съгласувани с потока $\mathcal{F}_t$ и удовлетворяват неравенствата

$$\begin{cases} \mathbf{P}\left\{\displaystyle\int_0^\infty |a(s,\omega)|ds < \infty\right\} = 1, \\ \mathbf{P}\left\{\displaystyle\int_0^\infty b^2(s,\omega)ds < \infty\right\} = 1. \end{cases} \tag{8.9}$$

Определение 8.3 *Казваме, че случайният процес ξ_t, $t \geq 0$ допуска стохастичен диференциал с коефициенти на пренос $a(t,\omega)$ и дифузия $b^2(t,\omega)$, ако за всяко $t \geq 0$ с вероятност 1*

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dW_s, \tag{8.10}$$

където ξ_0 е сл. величина **независима** *от Винеровия процес.*

Вместо (8.10) за **удобство** *записваме*

$$d\xi_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t, \quad \xi_t|_{t=0} = \xi_0.$$

Ако $g(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$ е измерима функция и вместо аргумента x заместим процеса ξ_t, то ще получим нов случаен процес

$$\eta(t) = g(t,\xi_t), \quad t \geq 0.$$

Основен въпрос, който ни интересува е при какви условия $\eta(t), t \geq 0$ допуска стохастичен диференциал?

Теорема 8.2 *(Формула на Ито в едномерния случай) Нека* $g(t,x)$ *има непрекъснати производни* $g'_t = \frac{\partial g}{\partial t}$, $g'_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ *и* $g''_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, *а* ξ_t, $t \geq 0$ *се задава със (8.10). Тогава* $\eta(t)$ *допуска стохастичен диференциал*

$$d\eta(t) = A(t,\omega)dt + B(t,\omega)dW_t, \quad \eta(0) = g(0,\xi_0), \tag{8.11}$$

където

$$A(t,\omega) = g'_t(t,\xi_t) + a(t,\omega)g'_x(t,\xi_t) + \frac{1}{2}b^2(t,\omega)g''_{xx}(t,\xi_t),$$
$$B(t,\omega) = b(t,\omega)g'_x(t,\xi_t).$$

Ще отбележим два важни случая на формулата на Ито в многомерния случай.

I. Нека $g = g(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), t \geq 0, x_k \in \mathbf{R}, k = 1,2,\ldots,n$ е такава, че производните

$$g'_t = \frac{\partial g}{\partial t},\ g'_k = \frac{\partial g}{\partial x_k},\quad g''_{kj} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}, \quad k,j = 1,\ldots,n$$

съществуват и са непрекъснати. Дадени са n случайни процеса $\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)$, където

$$d\xi_k(t) = a_k(t,\omega)dt + b_k(t,\omega)dW_t, \quad k = 1,\ldots,n,$$

и функциите a_k и b_k са от типа (8.9). Тогава случайния процес $\eta(t) = g(t,\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$ има стохастичен диференциал

$$d\eta(t) = \left[g'_t + \sum_{k=1}^n a_k g'_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n b_k b_j g''_{kj}\right]dt + \left[\sum_{k=1}^n g'_k b_k\right]dW_t, \tag{8.12}$$
$$\eta(0) = g(0,\xi_1(0),\ldots,\xi_n(0)).$$

II. Нека $\xi(t), t \geq 0$ има диференциал

$$d\xi(t) = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dw(t),$$

където $a(t,\omega) = (a_1(t,\omega),\ldots,a_n(t,\omega)), b(t,\omega) = (b_{kj}(t,\omega)), k,j = 1,\ldots,n, w(t) = (W_1(t),\ldots,W_n(t))$.

Ако $g(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ е гладка функция, то

$$dg(t,\xi(t)) = \left[g'_t(t,\xi(t)) + \sum_{k=1}^n g'_k a_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g''_{ij}(\sum_{k=1}^n b_{ik}b_{kj})\right]dt + \sum_{i,j=1}^n g'_i b_{ij} dW_j(t). \tag{8.13}$$

Формулите (8.12) и (8.13) също се наричат формули на Ито.
Формулата (8.12) може да се запише в следната еквивалентна форма

$$d\eta(t) = g'_t dt + \sum_{k=1}^n g'_k d\xi_k(t) + (1/2)\sum_{j,k=1}^n g''_{kj} d\xi_k(t) d\xi_j(t). \tag{8.14}$$

Ако в (8.14) $d\xi_k(t)$ заместим с неговото равно, $k = 1,\ldots,n$ и използуваме таблицата за умножение на диференциали

$\times$	dw	dt
dw	dt	0
dt	0	0

то може да се получи (8.12).

Пример 8.2 *Нека в (8.14) $n = 2$, $g = x_1x_2$. Тогава*

$$d[\xi_1(t)\xi_2(t)] = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt,$$

а също

$$d[\xi_1(t)\xi_2(t)] = [\xi_1(t)a_2(t) + \xi_2(t)a_1(t)+ \\ b_1(t)b_2(t)]dt + [\xi_1(t)b_2(t) + \xi_2(t)b_1(t)]dW_t.$$

Частни случаи:
1) $\xi_1(t) = t, \quad \xi_2(t) = W_t : d[tW_t] = W_tdt + tdW_t.$
2) $\xi_1(t) = \xi_2(t) = W_t : d[W_t^2] = dt + 2W_tdW_t.$

(Откъдето следва, че $\displaystyle\int_0^T W_tdW_t = (1/2)(W_t^2 - T)$*).*

Пример 8.3 *Нека* $\xi(t) = \int_0^t b(s,\omega)dW_s, \quad g(x) = x^4$*. Тогава*

$$d[\eta(t)] = d[\xi^4(t)] = 6\int_0^t \xi^2(s)b^2(s,\omega)ds + 4\int_0^t \xi^3(s)b(s,\omega)dW_s.$$

Пример 8.4 *За* $\forall m \geq 2$

$$d[W_t^m] = mW_t^{m-1}dW_t + \frac{m(m-1)}{2}W_t^{m-2}dt.$$

Като следствие от тук могат да се изведат съотношенията:

$$\int_a^b W_t^n dW_t = \frac{1}{n+1}[W_b^{n+1} - W_a^{n+1}] - \frac{n}{2}\int_a^b W_t^{n-1}dt,$$

$$\int_a^b W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}[W_b^3 - W_a^3] - \frac{1}{2}[W_b^2 - W_a^2] + \frac{1}{2}(b-a).$$

И изобщо, ако g не зависи от t и има две непрекъснати производни, то

$$\int_a^b g'(W_s)dW_s = g(W_b) - g(W_a) - (1/2)\int_a^b g''(W_s)ds.$$

2.1 Стохастични диференциални уравнения - примери и задачи

Задача 8.1 *Дадена е функцията* $f(t) = f(t, \omega)$, *за която*

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^\infty f(t)^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Разглеждаме процеса

$$z_t = \exp[\int_0^t f(s)dW_s - (1/2)\int_0^t f^2(s)ds].$$

По формулата на Ито имаме

$$dz_t = z_t\left(f(t)dW_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}z_t\left[f(t)dW_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right]^2$$
$$= z_t\left(f(t)dW_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}z_t f^2(t)dt.$$

Следователно

$$dz_t = z_t f(t)dW_t. \tag{8.15}$$

Ясно е, че за всяко $t \geq 0, z_t > 0$ *с вероятност 1. Тогава можем да приложим формулата на Ито и към* z_t^{-1} :

$$d(z_t^{-1}) = f^2(t)z_t^{-1}dt - f(t)z_t^{-1}dW_t.$$

(8.15) е най-простото стохастично диференциално уравнение. Задаваме начално условие $z_0 = 1$ *и записваме (8.15) в интегрална форма*

$$y_t = 1 + \int_0^t y_s f(s)dW_s. \tag{8.16}$$

Ще покажем, че единственото непрекъснато решение на (8.16) се задава с равенството:

$$z_t = \exp\left[\int_0^t f(s)dW_s - (1/2)\int_0^t f^2(s)ds\right]. \tag{8.17}$$

От направените разсъждения следва, че z_t *от (8.17) удовлетворява (8.16). Нека* x_t *е някакво друго непрекъснато решение на същото уравнение. Тогава по формулата на Ито имаме*

$$d(x_t/z_t) = d(x_t z_t^{-1}) = z_t^{-2}[x_t dz_t - z_t dx_t] + z_t^{-3}x_t(dz_t)^2 - z_t^2 dx_t dz_t = 0$$

което означава, че $x_t = z_t$ *с вероятност 1 за всяко* $t \geq 0$.

Разгледаната задача показва, че някои стохастични диференциални уравнения могат да се решат само с помощта на формулата на Ито.

Теорема 8.3 *Нека* $f(t, \omega) = f(t)$ *е детерминирана функция с ограничена вариация в* $[0, t]$. *Тогава*

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s df(s).$$

2.2 Доказателство на формулата на Ито

Определение 8.4 *Случайният процес X_t зададен чрез*

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t, \tag{8.18}$$

където $a(t)$ е измерима функция, а $b(t) \in L_2(R)$, се нарича процес на Ито.

С $C^{2,1}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ означаваме съвкупността на всички реални функции $V(x,t)$ дефинирани върху $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$ такива, че имат непрекъсната втора производна по x и първа по t.

Теорема 8.4 *Нека X_t е процес на Ито и $g(t,x) \in C^{2,1}([0,\infty) \times \mathbf{R})$. Тогава процесът $Y_t = g(t, X_t)$ е отново процес на Ито и*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{8.19}$$

където $(dX_t)^2 = dX_t dX_t$ се пресмята по правилата

$$dt.dt = dt.dW_t = dW_t.dt = 0, \quad dW_t.dW_t = dt. \tag{8.20}$$

Доказателство: Да заместим $dX_t = adt + bdW_t$ в (8.19) и да приложим (8.20). Получаваме

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) +$$
$$\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + a_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{b_s^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds + \tag{8.21}$$
$$\int_0^t b_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dW_s,$$

където $a_s = a(s,\omega), b_s = b(s,\omega)$ и това е отново процес на Ито.

Можем да предполагаме, че g и производните и са ограничени в $[0,t]$ и използваме, че всяка непрекъсната функция можем да апроксимираме със стъпаловидни функции. Предполагаме, че $a(t,\omega)$ и $b(t,\omega)$ са елементарни функции. Тогава по формулата на Тейлор имаме:

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_{t_j}) =$$
$$g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 +$$
$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum R_j,$$

където $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ са пресметнати в точката (t_j, X_{t_j}), $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$, $\Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_{t_j})$ и $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$ за всички j.

Когато $\Delta t_j \to 0$, тогава

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s)ds. \tag{8.22}$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s. \tag{8.23}$$

Тъй като функциите a и b са елементарни, получаваме

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j^2(\Delta t_j)^2 + \tag{8.24}$$

$$+2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j(\Delta t_j)(\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}b_j^2(\Delta W_j)^2,$$

където $a_j = a(t_j, \omega)$ и $b_j = b(t_j, \omega)$.

Първите две събираеми отдясно в (8.24) клонят към 0, когато $\Delta t_j \to 0$.

Например

$$\mathbf{E}\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j(\Delta t_j)(\Delta W_j)^2\right) =$$

$$= \sum_j \mathbf{E}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j\right)^2 (\Delta t_j)^3 \to 0, \ \ \Delta t_j \to 0.$$

Да покажем, че и третият клони в L_2 смисъл към 0, при $\Delta t_j \to 0$.

Да положим

$$\tilde{a}(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)b^2(t, \omega), \quad \tilde{a}_j = \tilde{a}(t_j)$$

и да разгледаме

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_j \tilde{a}_j(\Delta W_j)^2 - \sum_j \tilde{a}_j \Delta t_j\right)^2\right] =$$

$$\sum_{i,j} \mathbf{E}\left[\tilde{a}_i\tilde{a}_j\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right)\left((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right)\right].$$

Ако $i < j$, то $\tilde{a}_i\tilde{a}_j\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right)$ и $(\Delta W_j)^2 - \Delta t_j$ са независими и този член отпада, както аналогично и при $i > j$. Така остава само

$$\sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2\left((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right)^2] =$$

$$\sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2]\mathbf{E}[(\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2\Delta t_j + (\Delta t_j)^2] =$$

$$= \sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2].(3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) =$$

$$2\sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2](\Delta t_j)^2 \to 0, \ \text{при } \Delta t_j \to 0.$$

С други думи доказахме, че

$$\sum_j \tilde{a}_j (\Delta W_j)^2 \xrightarrow{L_2} \int_0^t \tilde{a}(s) ds, \quad \Delta t_j \to 0,$$

което се означава по странния начин като $(dW_t)^2 = dt$. $\Box$

Глава 9

Стохастични диференциални уравнения

В тази глава си поставяме следните цели:

- да дефинираме стохастично диференциално уравнение (СДУ);
- да намерим решенията на някои СДУ;
- да разгледаме примери.

1 Определение

Нека на вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ е зададена случайна функция $f(t, x, \omega)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$. Разглеждаме уравнението

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \omega), \quad x(t) = x_0. \tag{9.1}$$

При определени условия то има единствено решение $x(t) = x(t, \omega)$, $t \geq 0$, което е непрекъснат и диференцируем случаен процес. Следователно, уравнението (9.1) може да се използва за описване на движение, притежаващо скорост.

С въведеното понятие стохастичен интеграл и стохастичен диференциал можем да дефинираме един клас процеси, който е по-широк от процесите описвани с (9.1), и от Винеровия процес. Този клас процеси е свързан с уравнения от вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^t b(s, \xi(s))dW_s, \tag{9.2}$$

които се наричат стохастични диференциални уравнения. Функциите $a(t, x)$ и $b(t, x)$ са дефинирани за $t \in [0, T]$ и $x \in \mathbf{R}$, измерими са по (t, x) и се наричат коефициенти на уравнението, ξ_0 е сл.в. или константа (начално условие на (9.2)).

Очевидно (9.2) е обобщение на (9.1) и на Винеровия процес. С помощта на (9.2) могат да се описват непрекъснати движения, които нямат скорост. Ако една система се намира под въздействието на случайни смущения от типа на ”бял шум”, то като един стохастичен модел се използва именно уравнение от вида (9.2).

Определение 9.1 *Ако коефициентите a и b на уравнението не зависят от t, то СДУ се нарича хомогенно (еднородно), иначе се нарича нехомогенно (нееднородно).*

Вместо (9.2) често се използува диференциалния запис

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dW_t, \quad \xi(0) = \xi_0. \tag{9.3}$$

Какво е решение на (9.3) (респ. на (9.2))?

Освен $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ нека е зададен и потокът от σ алгебри $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, T]$, с който е съгласуван Винеровия процес. Нека ξ_0 е $\mathcal{F}_0-$ измерима. Тогава под решение на (9.2) ще разбираме случаен процес $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, където

1) $\xi(t)$ е измерим по (t, ω);

2) За $\forall t \in [0, T]$, $\xi(t, \omega)$ е $\mathcal{F}_t-$ измерим;

3) с вероятност 1 за $\forall t \in [0, T]$, $\xi(t)$ удовлетворява (9.2).

2 Примери

Пример 9.1 *Нека коефициентите a и b не зависят от x, т.е.*

$$a(t, x) = a(t), \quad b(t, x) = b(t).$$

Тогава уравнението се задава с

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s, \tag{9.4}$$

и процесът $\xi(t)$ е процес с независими нараствания, които са Гаусово разпределени и имат параметри $\mathbf{E}\{\xi(t) - \xi(s)\} = \int_s^t a(u)du$ и $\mathbf{Var}\{\xi(t) - \xi(s)\} = \int_s^t b^2(u)du$.

Пример 9.2 *Нека коефициентите a и b зависят линейно от x, т.е.*

$$a(t, x) = a(t)x, \quad b(t, x) = b(t)x.$$

Тогава уравнението се задава с

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)\xi(s)ds + \int_0^t b(s)\xi(s)dW_s, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

За да намерим $\xi(t)$ ще въведем нов процес $\zeta(t) = \log \xi(t)$, ако $\xi_0 > 0$ или $\zeta(t) = \log(-\xi(t))$, ако $\xi_0 < 0$. По формулата на Ито имаме

$$d\zeta(t) = \frac{1}{\xi(t)} a(t)\xi(t)dt - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi(t)^2} b^2(t)\xi^2(t)dt + \frac{1}{\xi(t)} b(t)\xi(t)dW_t.$$

Следователно

$$d\zeta(t) = \left(a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)\right)dt + b(t)dW_t, \quad \zeta(0) = \zeta_0 = \log \xi_0,$$

т.е. $\zeta(t)$ е от типа (9.4).

Следователно,

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))dt + \int_0^t b(s)dW_s,$$

откъдето намираме

$$\xi(t) = \xi_0 \exp\left\{\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))dt + \int_0^t b(s)dW_s\right\}.$$

Пример 9.3 *Нека коефициентите a и b зависят линейно от x, т.е.*

$$a(t,x) = a_1(t) + a_2(t)x, \quad b(t,x) = b_1(t) + b_2(t)x.$$

Търсим случаен процес с диференциал

$$d\xi(t) = [a_1(t) + a_2(t)\xi(t)]dt + [b_1(t) + b_2(t)\xi(t)]dW_t, \tag{9.5}$$

с начално условие

$$\xi(0) = \xi_0.$$

За да намерим $\xi(t)$ ще въведем нов процес $\zeta(t) = \eta(t)\xi(t)$, където

$$\eta(t) = \exp\left\{-\int_0^t (a_2(s) - \frac{1}{2}b_2^2(s))ds + \int_0^t b_2(s)dW_s\right\},$$

с начално условие

$$\eta(0) = 1.$$

Като приложим формулата на Ито получаваме:

$$\zeta(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(s)(a_1(s) - b_1(s)b_2(s))ds + \int_0^t b_1(s)\eta(s)dW_s.$$

Като заместим $\eta(s)$ с неговото равно получаваме

$$\xi(t) = \exp\left[\int_0^t (a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2})ds + \int_0^t b_2(s)dW_s\right] \times$$

$$\times[\xi_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s (a_2(u) - \frac{b_2^2(u)}{2})du - \int_0^s b_2(u)dW_u\right) \times$$

$$\times(a_1(s) - b_1(s)b_2(s))ds$$

$$+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^s (a_2(u) - \frac{b_2^2(u)}{2})du - \int_0^s b_2(u)dW_u\right) b_1(s)dW_s].$$

3 Съществуване и единственост на решението на СДУ

Примерите показват, че решенията на СДУ могат да се намерят явно. Естествен е въпросът дали произволно СДУ може да се преобразува с помощта на взаимно еднозначна функция в линейно? Доказва се, че при допълнителни предположения за гладкост на коефициентите $a(t,x)$ и $b(t,x)$ това може да се постигне, но се стига до ЧДУ, което не винаги може да се реши. По-често се прави така: коефициентите на даденото уравнение (9.2) се линеаризират и нататък се изследва полученото линейно СДУ. Във всички случаи неговото решение може да се приеме като първо приближение на процеса $\xi(t)$, описващ сложната нелинейна система.

Теорема 9.1 *Да допуснем, че за някоя константа C и за всички $t \in [0,T]$ и $x \in \mathbf{R}$ са изпълнени условията:*

$$\begin{cases} |a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)| \le C|x-y|, \\ a^2(t,x)+b^2(t,x) \le C^2(1+x^2). \end{cases} \tag{9.6}$$

Нека началното условие ξ_0 е $\mathcal{F}_0-$ измерима сл.в. с $\mathbf{E}\{\xi_0^2\} < \infty$. Тогава
1) с вероятност 1 съществува непрекъснато решение $\xi(t)$ с $\xi(0)=\xi_0$;
2) $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\{\xi^2(t)\} < \infty$;
3) Ако ξ_1 и ξ_2 са две решения на (9.2) удовлетворяващи 1) и 2), то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]} |\xi_1(t)-\xi_2(t)| = 0\} = 1.$$

Доказателство: Първо ще покажем, че решението на (9.2) е единствено. Нека за $i = 1,2$

$$\xi_i(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s,\xi_i(s))ds + \int_0^t b(s,\xi_i(s))dW_s.$$

Тогава

$$\mathbf{E}\left(\xi_1(t)-\xi_2(t)\right)^2 = \mathbf{E}\left(\int_0^t [a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]ds + \right.$$

$$\left.\int_0^t [b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]dW_s\right)^2$$

$$\le 2\mathbf{E}\left(\int_0^t [a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]ds\right)^2 +$$

$$2\mathbf{E}\left(\int_0^t [b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]dW_s\right)^2$$

$$\le 2t\mathbf{E}\int_0^t [a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]^2 ds +$$

$$2\mathbf{E}\int_0^t [b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]^2 ds \le$$

$$2tC^2\int_0^t \mathbf{E}\{(\xi_1(s)-\xi_2(s))^2\}ds +$$

$$2C^2\int_0^t \mathbf{E}\{(\xi_1(s)-\xi_2(s))^2\}ds \le$$

$$\le C_1\int_0^t \mathbf{E}\{(\xi_1(s)-\xi_2(s))^2\}ds,$$

където $C_1 = 2(T+1)C^2$.

Ще използуваме следното неравенство на Гронуол-Белман: Ако $c \ge 0$, $u(t) \ge 0$, $v(t) \ge 0$, то от неравенството

$$u(t) \le c + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

следва
$$u(t) \leq c \exp[\int_0^t v(s)ds].$$

Прилагаме това неравенство при $c = 0$, $u(t) = \mathbf{E}\{[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2\}$ и $v(t) = C_1$ и тогава се получава
$$\mathbf{E}\{(\xi_1(t) - \xi_2(t))^2\} = 0.$$

Следователно
$$\mathbf{P}\{\xi_1(t) = \xi_2(t)\} = 1$$

за всяко $t \in [0, T]$. Тогава за всяко изброимо подмножество $S \subset [0, T]$
$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in S} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = 1.$$

Тъй като $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ са непрекъснати, то ако S е множеството на сепарабелност в $[0, T]$,
$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in [0,T]} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = \mathbf{P}\{\sup_{t \in S} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = 1,$$

следователно (9.2) има единствено решение.

Съществуването на $\xi(t)$ ще докажем по метода на последователните приближения. Полагаме:
$$\begin{cases} \xi^0(t) \equiv \xi_0, \\ \xi^n(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi^{n-1}(s))ds + \int_0^t b(s, \xi^{n-1}(s))dW_s, \\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{9.7}$$

От условието (9.6) наложени на коефициентите a и b и от свойствата на стохастичните интеграли получаваме, че редицата $\xi^k(t)$, $k = 0, 1, , \ldots$ с вероятност 1 е равномерно сходяща по t в $[0, T]$. След граничен преход по $n \to \infty$ в (9.7) следва, че съществува решение $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ на (9.2). $\square$

4 Някои важни формули

Нека
$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dW_s \tag{9.8}$$

или
$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dW_t \tag{9.9}$$

и
$$g(t, X_t) = Y(t).$$

Тогава
$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}|_{(t,X_t)}dt + \frac{\partial g}{\partial x}|_{(t,X_t)}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|_{(t,X_t)}(dX_t)^2 \tag{9.10}$$

От
$$(dW_t)^2 = dt, \quad dW_t dt = dt dW_t = dt dt = 0, \tag{9.11}$$

следва
$$(dX_t)^2 = (a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dW_t)^2 = b^2 dt.$$

Следователно

$$dY_t = g'_t dt + g'_x dX_t + \frac{1}{2} g''_{xx} b^2 dt =$$

$$= g'_t dt + g'_x (adt + bdW_t) + \frac{1}{2} g''_{xx} b^2 dt =$$

$$(g'_t + g'_x a + \frac{1}{2} g''_{xx} b^2) dt + g'_x b dW_t.$$

Колко е $d(X_t.Y_t)$, ако

$$dX_t = a_1 dt + b_1 dW_t$$

$$dY_t = a_2 dt + b_2 dW_t.$$

Разглеждаме

$$g(t, x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \eta(t) = g(X_t, Y_t). \tag{9.12}$$

Тогава

$$d\eta(t) = (0 + a_1 T_t + a_2 X_t + \frac{1}{2} 2 b_1 b_2) dt$$

$$+(Y_t b_1 + X_t . b_2) dW_t$$

$$d\eta(t) = Y_t(a_1 dt + b_1 dW_t) + (a_2 dt + b_2 dW_t) X_t + b_1 b_2 dt =$$

$$Y_t dX_t + X_t dY_t + b_1 b_2 dt.$$

5 Задачи

Задача 9.1 *Представете като интеграл на Ито:*

а) $\int_0^t W_s^2 dW_s$.

Нека $g(t, x) = \frac{x^3}{3}$.

Тогава $g'_t = 0, g'_x = x^2, g''_{xx} = 2x$.

За

$$y_t = g(t, W_t) = \frac{1}{3} W_t^3$$

получаваме

$$dy_t = d(\frac{1}{3} W_t^3) = (0.W_t + \frac{1}{2}.1.2W_t) dt + 1.W_t^2 dW_t$$

$$\int_0^t \quad d(\frac{1}{3} W_t^3) = W_t dt + W_t^2 dW_t$$

т.е.

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 - \int_0^t W_s ds$$

или

$$d(\frac{1}{3} W_t^3) = W_t dt + W_t^2 dW_t.$$

б) Нека $X_t = 2 + t + e^{W_t}$,

Да вземем $g(x, t) = 2 + t + e^x$ *и* $Y_t = g(W_t, t)$.

Тогава

$$dX_t = (1 + 0 + \frac{1}{2}.1.e^{W_t}) dt + e^{W_t}.1.dW_t$$

$$dX_t = (1 + \frac{1}{2}e^{W_t})dt + e^{W_t}dW_t.$$

в) $X_t = W_1^2(t) + W_2^2(t),\ g(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$Y_t = g(t, W_1^2(t), W_2^2(t)) = W_1^2(t) + W_2^2(t)$$

$$dY_t = 2W_1(t)dW_1(t) + 2W_2(t).dW_2(t)$$

$$+\frac{1}{2}(2(dW_1(t))^2 + 2(dW_2(t))^2)dt.$$

Задача 9.2 *Нека* C, α *са константи.*

$$X_t = exp(Ct + \alpha W_t)$$

Докажете, че:

$$dX_t = (C + \frac{1}{2}\alpha^2)X_t dt + dX_t dW_t.$$

Избираме:

$$g(t, x) = e^{Ct+\alpha x}$$

Полагаме

$$X_t = g(t, W_t) = e^{Ct+\alpha W_t}.$$

Тогава

$$\frac{\partial g}{\partial t} = Ce^{Ct+\alpha W_t} = CX_t.$$

$$g'_x = \alpha X_t, \qquad g''_{xx} = \alpha^2 X_t.$$

И по формулата на Ито:

$$dX_t = (CX_t + 0 + \frac{1}{2}\alpha^2 X_t)dt + \alpha X_t.dW_t.$$

Глава 10

Дифузия на Ито

В тази глава ще разгледаме някои от основните резултати за дифузията на Ито:

- Марковско и строго Марковско свойство;
- Генератор на дифузията на Ито;
- Формула на Динкин;
- Уравнение на Колмогоров;
- Формула на Файман-Кац;
- Теорема на Гирсанов.

1 Марковско свойство

Да допуснем, че искаме да опишем движението на малка частица потопена в движеща се течност, подложена на случайни молекулни удари. Ако в $b(t,x) \in \mathbf{R}$ е скоростта на флуида в точка x в момента t, тогава един математически модел за позицията X_t на частицата в момент t ще бъде стохастично диференциално уравнение от вида

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \tag{10.1}$$

където с $W_t \in \mathbf{R}^3$ е означен "бял шум" и $\sigma(t, X_t) \in \mathbf{R}^{3\times 3}$.

Интерпретация на Ито на това уравнение е диференциално уравнение от вида

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{10.2}$$

където с B_t е тримерно брауново движение.

В едно стохастично диференциално уравнение от вида

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

където $X_t \in \mathbf{R}^n$, $\;b(t,x) \in \mathbf{R}^n$, $\;\sigma(t,x) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ и B_t е $m-$мерно Брауново движение, ще наричаме B коефициент на дрифт, а σ или $\frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ коефициент на дифузия.

Следователно решението на стохастичното диференциално уравнение може да се счита като математическо описание на движението на малка частица в движещ се флуид. Следователно такъв стохастичен процес се нарича дифузия (на Ито).

Определение 10.1 *Една (хомогенна във времето) дифузия на Ито е стохастичен процес* $X_t(\omega) = X(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^n$, *удовлетворяващ стохастично диференциално уравнение от вида*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s, \quad X_s = x, \tag{10.3}$$

където B_t *е* $m-$*мерно Брауново движение, и* $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n; \quad \sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$, *удовлетворяващо условията за съществуване на решение на уравнението (10.3), които в случая се свеждат до*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x-y|, \; x, y \in \mathbf{R}^n,$$

където $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$.

Ще означаваме единственото решение на (10.3) с $X_t = X_t^{s,x}, \quad t \geq s$.

Ако $s = 0$ ще означаваме $X_t^x := X_t^{0,x}$.

Да отбележим, че в (10.3) предполагаме, че b и σ не зависят от t, а само от x.

По-късно ще видим, че общия случай може да бъде сведен до тази ситуация. Полученият процес $X_t(\omega)$ ще има свойството хомогенност по времето в смисъл, че:

$$X_{s+h}^{s,x} = x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x})du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x})dB_u \tag{10.4}$$

$$= x + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})du + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{B}_v,$$

където $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s, \quad v \geq 0$.

Тъй като $\{\tilde{B}_v\}_{v\geq 0}$ и $\{B_v\}_{v\geq 0}$ имат едно и също $\mathbf{P}^0$ разпределение, от слабата единственост на решението на стохастичното диференциално уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x,$$

следва, че $\{X_{t+h}^{s,x}\}_{h\geq 0}$ и $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$ имат едно и също $\mathbf{P}^0$ разпределение, т.е. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ е хомогенен във времето.

Ще въведем вероятностни закони $\mathbf{Q}^x$ на $\{X_t\}_{t\geq 0}$ за $x \in \mathbf{R}^n$ интуитивно, $\mathbf{Q}^x$ дава разпределението на $\{X_t\}_{t\geq 0}$ допускайки, че $X_0 = x$. Нека $\mathcal{M}_\infty$ е $\sigma-$алгебрата (от подмножества на Ω) породена от сл. величини $\omega \to X_t(\omega) = X_t^y(\omega), \; t \geq 0, y \in \mathbf{R}^n$.

Да дефинираме $\mathbf{Q}^x$ върху елементите на $\mathcal{M}_\infty$ чрез

$$\mathbf{Q}^x[X_{t_1} \in E_1, X_{t_2} \in E_1, \dots, X_{t_k} \in E_k] \tag{10.5}$$

$$= \mathbf{P}^0[X_{t_1}^x \in E_1, X_{t_2}^x \in E_1, \dots, X_{t_k}^x \in E_k],$$

$E_i \subset \mathbf{R}^n$ са борелеви множества, $1 \leq i \leq k$.

Означаваме с $\mathcal{F}_t^{(m)}$ - $\sigma-$алгебрата, породена от $\{B_r, r \leq t\}$. С $\mathcal{M}_t$ - $\sigma-$алгебрата породена от $\{X_r, r \leq t\}$. Знаем, че X_t е измерим по отншение на $\mathcal{F}_t^{(m)}$, така че $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{F}_t^{(m)}$.

Ще покажем, че X_t удовлетворява важното Марковско свойство: Бъдещото поведение на процеса, при условие всичко до момента t е същото, както поведението, ако процесът започва от X_t. Това е съдържанието на следващата теорема.

Теорема 10.1 *(Марковско свойство на дифузията на Ито.) Нека f е ограничена Борелова функция: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Тогава за $t, h \geq 0$*

$$\mathbf{E}^x[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t^{(m)}](\omega) = \mathbf{E}^{X_t(\omega)}[f(X_h)]. \tag{10.6}$$

($\mathbf{E}^x$ е математическото очакване по отношение на $\mathbf{Q}^x$.)

Доказателство: Тъй като за $r \geq t$

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_t^r b(X_u)du + \int_t^r \sigma(X_u)dB_u,$$

от единствеността следва, че $X_r(\omega) = X_r^{t,X_t}(\omega)$.

С други думи, ако дефинираме

$$F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega), \quad r \geq t,$$

следва, че

$$X_r(\omega) = F(X_t, t, r, \omega), \quad r \geq t. \tag{10.7}$$

Отбелязваме, че $\omega \to F(x,t,r,\omega) \perp \mathcal{F}_t^{(m)}$. Като използуваме (10.7) можем да запишем (10.6) като

$$\mathbf{E}[f(F(X_t, t, t+h, \omega))|\mathcal{F}_t^{(m)}] = \mathbf{E}[f(F(x, 0, h, \omega))]_{x=X_t}. \tag{10.8}$$

Нека $g(x,\omega) = f \circ F(x,t,t+h,\omega)$. Тогава $(x,\omega) \to g(x,\omega)$ е измерима. Следователно, можем да апроксимираме g поточково с функции от вида

$$\sum_{k=1}^m \phi_k(x)\psi_k(\omega).$$

Като използуваме свойствата на условното математическо очакване следва, че

$$\mathbf{E}[g(X_t,\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}] = \mathbf{E}[\lim \sum \phi_k(X_t)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]$$

$$= \lim[\sum \phi_k(X_t)\mathbf{E}\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]$$

$$= \lim[\sum \mathbf{E}[\phi_k(y)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]_{y=X_t}]$$

$$= \mathbf{E}[g(y,\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]_{y=X_t} = \mathbf{E}[g(y,\omega)]_{y=X_t}.$$

Следователно, тъй като X_t е хомогенен по времето

$$\mathbf{E}[f(F(X_t,t,t+h,\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}] = \mathbf{E}[f(F(y,t,t+h,\omega)]_{y=X_t}$$

$$= \mathbf{E}[f(F(y,0,h,\omega)]_{y=X_t},$$

от където следва (10.8). $\square$

2 Строго Марковско свойство

Най-общо казано, строгото марковско свойство означава, че условието (10.6) е изпълнено, ако времето t бъде заменено със случайно време $\tau(\omega)$ от по-общ тип, наречено stopping time (или марковски момент).

Определение 10.2 *Нека $\{\mathcal{N}_t\} \uparrow$ е една нарастваща фамилия от $\sigma-$ алгебри.*

Една функция $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ се нарича Марковски момент (stopping time) по отношение на $\{\mathcal{N}_t\} \uparrow$ ако

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

С други думи, би трябвало да е възможно да решим дали събитието $\{\tau \leq t\}$ се е сбъднало или не на базата на знанието си за $\mathcal{N}_t$.

Пример 10.1 *Нека $U \subset \mathbf{R}^n$ е отворено.*

Тогава момента на първо напускане на U

$$\tau_U := \inf\{t > 0 : X_t \bar{\in} U\}$$

е stopping time по отношение на $\mathcal{M}_t$, тъй като

$$\{\omega : \tau_U \leq t\} = \bigcap_m \bigcup_{r \in \mathbf{Q}, r < t} \{\omega : X_r \bar{\in} K_m\} \in \mathcal{M}_t,$$

където $\{K_m\} \uparrow$ редица от затворени множества, такива че $U = \bigcup_m K_m$.

Забележка 10.1 *По-общо, ако $H \subset \mathbf{R}^n$ е произволно борелово множество, то можем да дефинираме момент на първо напускане на H, τ_H, като*

$$\tau_H := \inf\{t > 0 : X_t \bar{\in} H\}.$$

Ако добавим множествата с мярка 0 в $\mathcal{M}_t$, то $\{\mathcal{M}_t\}$ ще бъдат непрекъснати отдясно, т.е. $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}$, където $\mathcal{M}M_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{M}_s$ и следователно τ_H е време на спиране за всяко борелево множество H.

Определение 10.3 *Neka τ е време на спиране относно $\{\mathcal{N}_t\}$ и $\mathcal{N}_\infty$ е $\sigma-$ алгебра съдържаща $\mathcal{N}_t$ за всяко $t \geq 0$.*

Тогава $\mathcal{N}_\tau$ съдържа всички множества $N \in \mathcal{N}_\infty$:

$$N \bigcap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{N}_t, \quad t \geq 0.$$

В случай, когато $\mathcal{N}_t = \mathcal{M}_t$, алтернативно и по-интуитивно описание е:

$$\mathcal{M}_\tau = \sigma - \text{алгебрата породена от } \{X_{\min(s,\tau)}; s \geq 0\}. \tag{10.9}$$

Ако $\mathcal{N}_t = \mathcal{F}_t^{(m)}$, то $\mathcal{F}_\tau^{(m)} = \sigma-$ алгебрата породена от $\{B_{s \bigwedge \tau}; s \geq 0\}$.

Теорема 10.2 *(Строго марковско свойство на дифузията на Ито.)*

Нека f е ограничена борелова функция върху $\mathbf{R}^n$, $\tau-$ момент на спиране относно $\mathcal{F}_t^{(m)}$, $\tau < \infty$ п.с. Тогава

$$\mathbf{E}^x[f(X_{\tau+h}) | \mathcal{F}_\tau^{(m)}] = \mathbf{E}^{X_\tau}[f(X_h)], \quad \forall h \geq 0. \tag{10.10}$$

Доказателство: За почти всяко ω имаме, че $X_r^{\tau,x}(\omega)$ удовлетворява:

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_s^{\tau+h} b(X_u^{\tau,x})du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_u^{\tau,x})dB_u.$$

От строгото Марковско свойство за Брауновото движение процесът

$$\tilde{B}_v = B_{\tau+v} - B_\tau, \quad v \geq 0$$

е отново Брауново движение независимо от $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$. Следователно

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_0^h b(X_{\tau+v}^{\tau,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x})d\tilde{B}_v.$$

Следователо $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ трябва да съвпада п.н. с единственото (в строг смисъл) решение Y_h на уравнението:

$$Y_h = x + \int_0^h b(Y_v)dv + \int_0^h \sigma(Y_v)d\tilde{B}_v.$$

Тъй като $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ не зависи от $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$ следва, че $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ също не зависи от $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$.

Нещо повече, от единствеността (в смисъл, че крайномерните разпределения са едни и същи) следва, че $\{Y_h\}_{h\geq 0}$ а следователно и $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geq 0}$ имат един и същи закон на разпределение, както $\{X_h^{0,x}\}_{h\geq 0}$.

Нека $F(x,t,\tau,\omega) = X_\tau^{t,x}(\omega), \quad \tau \geq t$. Тогава (10.10) придобива вида:

$$\mathbf{E}[f(F(x,0,\tau+h,\omega))|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = \mathbf{E}[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau^{0,x}}.$$

Тогава с $X_t = X_t^{0,x}$

$$\begin{aligned} F(x,0,\tau+h,\omega) &= X_{\tau+h}(\omega) = \\ x + \int_0^{\tau+h} b(X_s)ds &+ \int_0^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s \\ = x + \int_0^\tau b(X_s)ds &+ \int_0^\tau \sigma(X_s)dB_s + \\ + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s)ds &+ \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s \\ = X_\tau + \int_\tau^{\tau+h} b(X_s)ds &+ \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s = F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega). \end{aligned}$$

Тогава (10.10) ще има вида

$$\mathbf{E}[f(F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega))|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = \mathbf{E}[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau}.$$

Да положим $g(x,t,\tau,\omega) = f(F(x,t,\tau,\omega))$ и да допуснем, че

$$g(x,t,\tau,\omega) = \sum_k \phi_k(x)\psi_k(t,\tau,\omega).$$

Тогава, тъй като $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ е независим от $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$, като използваме (3), следва че

$$\mathbf{E}[g(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = \sum_k \mathbf{E}[\phi_k(X_\tau)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$

$$= \sum_k \phi_k(X_\tau)\mathbf{E}[\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$

$$= \sum_k \mathbf{E}[\phi_k(x)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]_{x=X_\tau}$$

$$= \mathbf{E}[g(x,\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]_{x=X_\tau} = \mathbf{E}[g(x,\tau,\tau+h,\omega)]_{x=X_\tau}$$

$$\mathbf{E}[f(F(X_{\tau+h}^{\tau,x}))]_{x=X_\tau} = \mathbf{E}[f(X_h^{0,x}))]_{x=X_\tau}\mathbf{E}[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau}.$$

Сега ще разширим (10.10) по следния начин: Ако $f_1, f_2, \ldots, f_k$ са ограничени борелови функции върху $\mathbf{R}^n$, τ е $\mathcal{F}_t^{(m)}$ време на спиране, $\tau < \infty$ п.с., тогава

$$\mathbf{E}^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})\ldots f_k(X_{\tau+h_k}|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \tag{10.11}$$

$$= \mathbf{E}^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})f_2(X_{h_2})\ldots f_k(X_{h_k}]$$

за всеки $0 \le h_1 \le h_2 \le \ldots \le h_k$.

Доказателството се извършва с индукция по k. Ще го илюстрираме при $k = 2$.

$$\mathbf{E}^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] =$$

$$\mathbf{E}^x[\mathbf{E}^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_{\tau+h_1}]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$

$$= \mathbf{E}^x[f_1(X_{\tau+h_1})\mathbf{E}^x[f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_{\tau+h_1}]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$

$$= \mathbf{E}^x[f_1(X_{\tau+h_1})\mathbf{E}^{X_{\tau+h_1}}[f_2(X_{\tau+h_2})]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$

$$= \mathbf{E}^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})\mathbf{E}^{X_{\tau+h_1}}[f_2(X_{\tau+h_2})]]$$

$$= \mathbf{E}^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})\mathbf{E}^x[f_2(X_{h_2})|\mathcal{F}_{h_1}^{(m)}]] = \mathbf{E}^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})f_2(X_{h_2})].$$

По-нататък продължаваме с общата версия, която ни е необходима. Нека $\mathcal{H}$ е множеството на всички реални $\mathcal{M}_\infty$ измерими функции. За $t \ge 0$ дефинираме *shift*–оператор

$\theta_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ по следния начин.

Ако $\eta = g_1(X_{t_1})\ldots g_k(X_{t_k})$ (g_i са борелови функции, $t_i \ge 0$) то

$$\theta_t\eta = g_1(X_{t_1+t})\ldots g_k(X_{t_k+t}).$$

Сега да го продължим по естествен начин до всички функции в $\mathcal{H}$ като вземем граници на суми от такива функции. Тогава от (10.11) следва

$$\mathbf{E}^x[\theta_\tau\eta|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = \mathbf{E}^{X_\tau}[\eta],$$

за всяко $\tau-$ време на спиране по всички ограничени $\eta \in \mathcal{H}$, където $(\theta_\tau\eta)(\omega) = (\theta_t\eta)(\omega)$, ако $\tau(\omega) = t$. □

3 Генератор на дифузията на Ито. Формула на Динкин.

3.1 Генератор на дифузията на Ито.

От гледна точка на приложенията е много важно да можем да съпоставим диференциален оператор A от втори ред на дифузията на Ито – X_t. Основната връзка между A и X_t е, че A е генератор на процеса X_t.

Определение 10.4 *Нека $\{X_t\}$ е хомогенна във времето дифузия на Ито в $\mathbf{R}^n$. Инфинитезималният генератор на Ито A на X_t се дефинира чрез*

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbf{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Множеството от функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, за които границата съществува в т. x се означава с $D_A(x)$, докато D_A означава множеството от функции, за които границата съществува за всяко $x \in \mathbf{R}^n$.

За да намерим връзката между A и коефициентите b и σ в стохастичното дифернциално уравнение, дефиниращо X_t ще използваме следния резултат, който е важен в много отношения.

Лема 10.1 *Нека $Y_t = Y_t^x$ е процес на Ито в $\mathbf{R}^n$ от вида*

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s(\omega),$$

B е $m-$мерно. Нека $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ и τ е момент на спиране по отношение на $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$ и да допуснем, че $\mathbf{E}^x[\tau] < \omega$. Допускаме, че $u(t,\omega)$ и $v(t,\omega)$ са ограничени върху множеството от (t,ω) такова, че $Y(t,\omega)$ принадлежи на носителя на f. Тогава

$$\mathbf{E}^x[f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbf{E}^x \left[\int_0^\tau [\sum_i u_i(s,\omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j}(s,\omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)]ds \right],$$

където $\mathbf{E}^x$ е математическото очакване относно вероятностен закон $\mathbf{P}^x$ за Y_t, започващ от x:

$$\mathbf{P}^x[Y_{t_1} \in F_1, \dots, Y_{t_k} \in F_k] = \mathbf{P}^0[Y_{t_1}^x \in F_1, \dots, Y_{t_k}^x \in F_k],$$

F_i са борелови множества.

Доказателство: Да положим $Z = f(Y)$ и да приложим формулата на Ито (за опростяване на означенията е пропуснат индекса t и $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$ означават координатите на Y и B съответно.)

$$dZ = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)dY_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)dY_i dY_j$$

$$= \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (vdB)_i (vdB)_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (vdB)_i.$$

Тъй като

$$(vdB)_i (vdB)_j = (\sum_k v_{ik} dB_k)(\sum_n v_{jn} dB_n)$$
$$= (\sum_k v_{ik} v_{jk}) dt = (vv^t)_{ij} dt$$

и това дава

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds + \sum_{i,k} \int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k. \quad (10.12)$$

Следователно

$$\mathbf{E}^x [f(Y_\tau)] = f(x) + \mathbf{E}^x \left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (Y) \right.\right. \quad (10.13)$$
$$+ \left.\left. \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (Y) \right) ds \right] + \sum_{i,k} \mathbf{E}^x \left[\int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k \right].$$

Ако g е ограничена Борелова функция, $|g| \leq M$ следва, че за всички цели k имаме

$$\mathbf{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = \mathbf{E}^x \left[\int_0^k \mathbf{I}_{\{s<\tau\}} g(Y_s) dB_s \right] = 0$$

тъй като $g(Y_s)$ и $\mathbf{I}_{\{s<\tau\}}$ са $\mathcal{H}_s-$ измерими. Нещо повече

$$\mathbf{E}^x \left[\left(\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right)^2 \right] = \mathbf{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g^2(Y_s) dB_s \right] \leq M^2 E^x [\tau],$$

т.е. събитието $\left\{ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right\}$ е равномерно интегруемо относно мярката $\mathbf{P}^x$. Следователно

$$0 = \lim_{x \to \infty} \mathbf{E}^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right]$$
$$= \mathbf{E}^x \left[\lim_{k \to \infty} \int_)^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = \mathbf{E}^x \left[\int_0^\tau g(Y_s) dB_s \right].$$

Като го комбинираме с (10.13) следва твърдението на Лемата. □

Последната лема ни дава веднага формула за генератора A на дифузията на Ито.

Теорема 10.3 *Нека X_t е дифузия на Ито:*

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t.$$

Ако $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, т.е. $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ и f има компактен носител, тогава $f \in D_A$ и

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^T)(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (10.14)$$

Доказателство: Следва от лемата с $\tau = t$ и дефиницията на A. $\square$

Пример 10.2 *$n-$мерно Брауново движение е решение на стохастичното диференциално уравнение*

$$dX_t = dB_t,$$

т.е. $b = 0$ и $\sigma = I_n$ е $n \times n$ единична матрица. Тогава генераторът на B_t е

$$A_f = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C_0^2(\mathbf{R}^n).$$

т.е. $A = \frac{1}{2}\triangle$, където $\triangle$ е оператора на Лаплас.

Пример 10.3 *Нека B е едномерно брауново движение и $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ е решение на стохастичното диференциално уравнение*

$$\begin{cases} dX_1 = dt; & X_1(0) = t_0, \\ dX_2 = dB; & X_2(0) = x_0, \end{cases}$$

т.е.

$$dX = bdt + \sigma dB; \quad X(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

или

$$d\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dB.$$

С други думи X може да се разглежда като графика на Брауново движение. Генератора на X е

$$A = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f = f(t, x) \in C_0^2(\mathbf{R}^n).$$

По-нататък с A_X ще означим генератора на X_t дифузията на Ито и $L = L_X$ ще означава диференциаления оператор отдясно в (10.14). От последната теорема вече знаем, че A_X и L_X съвпадат за $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$.

3.2 Формула на Динкин

Нека $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ и τ е момент на спиране с $\mathbf{E}^x[\tau] < \infty$. Тогава

$$\mathbf{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbf{E}^x\left[\int_0^\tau Af(X_s)ds\right]. \tag{10.15}$$

Доказателство: Следва от (10.13) и (10.14). $\square$

Забележка 10.2 *Ако τ е момент на първо напускане на ограничено множество и $\mathbf{E}^x[\tau] < \infty$, то (10.15) е изпълнено за всяко $f \in C^2$.*

4 Уравнение на Колмогоров. Резолвента

Нека X_t е дифузия на Ито в $\mathbf{R}^n$ с генератор A. Ако $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ и $\tau = t$ във формулата на Динкин, то

$$u(t,x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)]$$

е диференцируема по t и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E}^x[Af(X_t)]. \tag{10.16}$$

Оказва се, че дясната страна на (10.16) може да бъде изразена в термините на u също.

Теорема 10.4 *(Обратно уравнение на Колмогоров). Нека $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$*

а) Определяме

$$u(t,x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)]. \tag{10.17}$$

Тогава $u(t,.) \in D_A$ за всяко t и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{10.18}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.19}$$

където дясната страна трябва да се разбира като оператор A приложен върху $u : x \to u(t,x)$.

б) Ако $\omega(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$ е ограничена функция удовлетворяваща (10.18) и (10.19), то

$$\omega(t,x) = u(t,x)$$

дефинирано чрез (10.17).

Доказателство: Нека $g(x) = u(t,x)$. Тогава, тъй като $t \to u(t,x)$ е диференцируема следва, че

$$\frac{\mathbf{E}^x[g(X_r)] - g(x)}{r} = \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[\mathbf{E}^{X_r}[f(X_t)] - \mathbf{E}^x[f(X_t)]]$$

$$= \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[\mathbf{E}^x[f(X_{t+\tau})|\mathcal{F}_r] - \mathbf{E}^x[f(X_t)|\mathcal{F}_r]]$$

$$= \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[f(X_{t+\tau}) - f(X_t)] = \frac{u(t+r,x) - u(t,x)}{r} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \quad r \downarrow 0.$$

Обратно, за да покажем б) да допуснем, че $\omega(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$ удовлетворява (10.18) и (10.19). Тогава

$$\tilde{A}\omega := -\frac{\partial \omega}{\partial t} + A\omega = 0, \quad \forall t > 0, x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.20}$$

и

$$\omega(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.21}$$

Да фиксираме $(s,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Да дефинираме процеса Y_t чрез

$$Y_t = (s-t, X_t^{0,x}), \quad t \geq 0.$$

Тогава Y_t има генератор $\tilde{A}$ и така от (10.20) и формулата на Динкин имаме за $\forall t \geq 0$ и $\forall T > 0$

$$\mathbf{E}^{s,x}[\omega(Y_{t\wedge\tau_R})] = \omega(s,x) + \mathbf{E}^{s,x}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} \tilde{A}\omega(Y_r)dr\right] = \omega(s,x),$$

където $\tau_r = \inf\{t > 0 : |X_t| > R\}$. Нека $R \to \infty$ следователно

$$\omega(s,x) = \mathbf{E}^{s,x}[\omega(Y_t)], \quad t \geq 0.$$

В частност, избирайки $t = s$ имаме

$$\omega(s,x) = \mathbf{E}^{s,x}[\omega(Y_s)] = \mathbf{E}[X_s^{0,x}] = \mathbf{E}[f(X_s^{0,x})] = \mathbf{E}^x[f(X_s)].$$

□

Забележка 10.3 *Ако въведем оператора $Q_t : f \to \mathbf{E}^\bullet[f(X_t)]$ тогава имаме $u(t,x) = (Q_t f)(x)$ и можем да запишем (10.16) и (10.18) така:*

$$\frac{d}{dt}(Q_t f) = Q_t(Af), \quad f \in C_0^2(\mathbf{R}^n) \tag{10.22}$$

$$\frac{d}{dt}(Q_t f) = A(Q_t f), \quad f \in C_0^2(\mathbf{R}^n). \tag{10.23}$$

Така еквивалентността на (10.16) и (10.18) ни води до заключението, че операторите Q_t и A комутират в някакъв смисъл. Или решението на (10.22) и (10.23) е $Q_t = e^{tA}$ и следователно $Q_t A = A Q_t$. Обаче този факт изисква по-нататъшно уточняване, тъй като в общия случай A е неограничен оператор.

Определение 10.5 *За $\alpha > 0$ и $g \in C_b(\mathbf{R}^n)$ дефинираме резолвента R_α чрез*

$$R_\alpha g(x) = \mathbf{E}^x[\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(X_t)dt]. \tag{10.24}$$

Лема 10.2 *$R_\alpha g$ е ограничена непрекъсната функция.*

Доказателство: Тъй като

$$R_\alpha g(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbf{E}[g(X_t)]dt,$$

то твърдението е директно следствие от следващото твърдение. □

Лема 10.3 *Нека g е ограничена отдолу, измерима функция в $\mathbf{R}^n$ и да дефинираме за всяко $t \geq 0$ фиксирано*

$$u(x) = \mathbf{E}^x[g(X_t)].$$

а) Ако g е ограничена отдолу и съществува $\liminf$, то u е ограничена отдолу и полунепрекъсната.

б) Ако g е ограничена и непрекъсната, то u е непрекъсната. С други думи всяка дифузия на Ито X_t е непрекъсната по Фелер.

Доказателство: Имаме

$$\mathbf{E}[X_t^x - X_t^y|^2] \le |y-x|^2 C(t),$$

където $C(t)$ не зависи от x и y. Нека $\{y_n\}$ е редица $y_n \to x$. Следва, че $X_t^{y_n} \to X_t^x$ в $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ при $n \to \infty$. Тогава, като вземем подредица $\{z_n\}$ на редицата $\{y_n\}$ получаваме

$$X_t^{z_n} \to X_t^x$$

за почти всяко $\omega \in \Omega$.

а) Ако g е ограничена отдолу и съществува $\liminf$, то по лемата на Фату следва, че

$$u(x) = \mathbf{E}[g(X_t^x)] \le \mathbf{E}[\liminf_{n\to\infty} g(X_t^{z_n})]$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[g(X_t^{z_n})] = \liminf_{n\to\infty} u(z_n).$$

Следователно за всяка редица $\{y_n\} \to x$ има подредица $\{z_n\}$, такава, че

$$u(x) \le \liminf_{n\to\infty} u(z_n).$$

Следователно u има точна долна граница.

б) Ако g е ограничена и непрекъсната, то резултатът от а) може да се приложи за g и $-g$. Следователно u и $-u$ са с точни долни граници следователно u е непрекъсната. $\square$

Ще покажем, че R_α и $\alpha - A$ са обратни оператори.

Теорема 10.5 *а) Ако $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, то $\mathbf{R}_\alpha(\alpha - A)f = f$ за всяко $\alpha > 0$.*

б) Ако $g \in C_b(\mathbf{R}^n)$ то $R_\alpha g \in D_A$ и $(\alpha - A)R_\alpha g = g$ за всяко $\alpha > 0$.

Доказателство: а) Ако $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, то по формулата на Динкин

$$\begin{aligned} & R_\alpha(\alpha - A)f(x) = \left(R_\alpha \alpha f - R_\alpha A f\right)(x) \\ = \ & \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbf{E}^x[f(X_t)]dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbf{E}^x[Af(X_t)]dt \\ = \ & -e^{-\alpha t}\mathbf{E}^x[f(X_t)]|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\mathbf{E}^x[f(X_t)]dt \\ - \ & \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathbf{E}^x[Af(X_t)]dt = \mathbf{E}^x[f(X_0)] = f(x). \end{aligned}$$

б) Ако $g \in C_b(\mathbf{R}^n)$, то от строгото Марковско свойство

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^x[E_\alpha g(X_t)] = \mathbf{E}^x\left[\mathbf{E}^{X_t}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s)\right] ds\right] \\ = \ & \mathbf{E}^x\left[\mathbf{E}^x\left[\theta_t \int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s) ds|\mathcal{F}_t\right]\right] \\ = \ & \mathbf{E}^x\left[\mathbf{E}^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s}) ds)|\mathcal{F}_t\right]\right] \\ = \ & \mathbf{E}^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s}) ds)\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha s}\mathbf{E}^x[g(X_{t+s})]ds. \end{aligned}$$

Следователно, тъй като $u(s,x) = \mathbf{E}^x[g(X_s)]$ е s диференцируема, то

$$\frac{1}{t}(\mathbf{E}^x[R_\alpha g(X_t)] - R_\alpha g(x)) = \int_0^\infty e^{-\alpha s}\frac{u(t+s,x)-u(s,x)}{t}ds$$

$$\to \int_0^\infty e^{-\alpha s}\frac{\partial}{\partial s}u(s,x)ds,$$

при $t \to \infty$.

Тъй като $R_\alpha g \in D_A$, то

$$(\alpha - A)R_\alpha g(x) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s}u(s,x)ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s}\frac{\partial}{\partial s}u(s,x)ds$$

$$= |_0^\infty - e^{\alpha s}u(s,x) = u(0,x) = g(x).$$

□

5 Формула на Файман-Кац.

Теорема 10.6 *Нека $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ и $q \in C(\mathbf{R}^n)$. Нека q е ограничена отдолу.*

а) Ако

$$v(t,x) = \mathbf{E}^x\left[\exp(-\int_0^t q(X_s)ds)f(X_t)\right], \tag{10.25}$$

то

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \ \forall t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{10.26}$$

$$v(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.27}$$

б) Ако $\omega(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ е ограничена върху $K \times \mathbf{R}^n$ за всеки компакт $K \subset \mathbf{R}$ и ω е решение на (10.26) и (10.27), то $\omega(t,x) = v(t,x)$, зададена чрез (10.25).

Доказателство: а) Нека $Y_t = f(X_t)$ и $Z_t = \exp(-\int_0^t q(X_s)ds)$. Тогава dY_t се задава чрез

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \left(\sum_i u_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)ds +$$

$$\sum_{i,k}\int_0^t v_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}dB_k,$$

и

$$dZ_t = -\exp\left(-\int_0^t q(X_s)ds\right)q(X_t)dt = -Z_t q(X_t)dt.$$

Така

$$d(Y_tZ_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t,$$

тъй като $dZ_t dY_t = 0$.

Да отбележим, че Y_tZ_t е отново процес на Ито такъв, че $v(t,x) = \mathbf{E}^x(Y_tZ_t)$ е диференцируема по t. Следователно, заедно с $v(t,x)$ от (10.25) получаваме (диференцираме по t) $r \to 0$

$$\frac{1}{r}(\mathbf{E}^x[v(t,X_r)] - v(t,x)) = \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[\mathbf{E}^{X_r}[Z_tf(X_t)] - \mathbf{E}^x[Z_tf(X_t)]]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[\mathbf{E}^x[f(X_{t+r})\exp\left(-\int_0^t q(X_{s+r})ds\right)|\mathcal{F}_r] - \mathbf{E}^x[Z_t f(X_t)|\mathcal{F}_r]]\\
&= \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[Z_{t+r}\exp\left(\int_0^r q(X_s)ds\right)f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)]\\
&= \frac{1}{r}\mathbf{E}^x[f(X_{t+r})Z_{t+r} - f(X_t)Z_t]+\\
&\frac{1}{r}\mathbf{E}^x\left[f(X_{t+r})Z_{t+r}\left(\exp(\int_0^r q(X_s)ds) - 1\right)\right]\\
&\to \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + q(x)v(t,x),
\end{aligned}
$$

тъй като

$$
\frac{1}{r}f(X_{t+r})Z_{t+r}\left(\exp\left(\int_0^r q(X_s)ds\right) - 1\right) \to f(X_t)Z_t q(X_0).
$$

б) Нека $\omega(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ удовлетворява (10.26) и (10.27) и ограничена върху $K\times\mathbf{R}^n$ за всеки компакт $K\subset\mathbf{R}$. Тогава

$$
\hat{A}\omega(t,x) := -\frac{\partial\omega}{\partial t} + A\omega - q\omega = 0,\ \forall t>0,\ x\in\mathbf{R}^n. \tag{10.28}
$$

и

$$
\omega(0,x) = f(x), \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{10.29}
$$

Фиксираме $(s,x,z) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ и дефинираме $Z_t = z + \int_0^t q(X_s)ds$ и $H_t = (s-t, X_t^{0,x}, Z_t)$. Тогава H_t е дифузия на Ито с генератор

$$
A_H\Phi(s,x,z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial s} + A\Phi + q(x)\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \Phi\in C_0^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n).
$$

Тогава от (10.28) и от формулата на Динкин имаме за всяко $t\geq 0, R>0$ и с $\Phi(s,x,z) = e^{-z}\omega(s,x)$:

$$
\mathbf{E}^{s,x,z}[\Phi(H_{t\bigwedge\tau_R})] = \Phi(s,x,z) + \mathbf{E}^{s,x,z}\left[\int_0^{t\bigwedge\tau_R} A_H\Phi(H_r)dr\right],
$$

където $\tau_R = \inf\{t>0 : |H_t|\geq R\}$.

Да отбележим, че с този избор на Φ от (10.28) получаваме

$$
A_H\Phi(s,x,z) = \exp(-z)\left[-\frac{\partial\omega}{\partial s} + A\omega - q(x)\omega\right] = 0.
$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
\omega(s,x) = \Phi(s,x,0) &= \mathbf{E}^{s,x,0}[\Phi(H_{t\bigwedge\tau_R})]\\
&= \mathbf{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^{t\bigwedge\tau_R} q(X_r)dr\right)\omega(s-t\bigwedge\tau_R, X_{t\bigwedge\tau_R})\right]\\
&\to \mathbf{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_r)dr\right)\omega(s-t, X_t)\right],
\end{aligned}
$$

когато $R\to\infty$, тъй като $\omega(r,x)$ е ограничена за $(r,x)\in K\times\mathbf{R}^n$.

В частност, при $t=s$

$$
\omega(s,x) = \mathbf{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^s q(X_r)dr\right)\omega(0, X_s^{0,x})\right] = v(s,x).
$$

□

6 Теорема на Гирсанов.

Най-общо казано, теоремата на Гирсанов гласи, че ако променим коефициента на drift на даден процес на Ито (с неизроден коефициент на дифузия), тогава законът (на разпределение) на процеса няма да се измени "драматично". Фактически, законът на новия процес е абсолютно непрекъснат по отношение на съответния коефициент на оригиналния процес, и можем точно да пресметнем производната на Радон-Никодим.

Теорема 10.7 *(P. Levy, характеризация на Брауново движение.)*
Нека $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ е непрекъснат стохастичен процес със стойности в $\mathbf{R}^n$, дефиниран върху $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbf{Q})$. Тогава следните две твърдения са еквивалентни.

а) $X(t)$ е Брауново движение по отношение на мярката $\mathbf{Q}$, т.е. законът на $X(t)$ спрямо $\mathbf{Q}$ е същият, както на $n-$ мерно Брауново движение;

б) (i) $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ е мартингал спрямо $\mathbf{Q}$ (и спрямо собствената си филтрация.)

(ii) $X_i(t)X_j(t) - \delta_{ij}t$ е мартингал спрямо $\mathbf{Q}$ за $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Лема 10.4 *Нека μ и ν са две вероятностни мерки върху измеримото пространство $(\Omega, \mathcal{G})$ такива, че*

$$d\nu(\omega) = f(\omega)d\mu(\omega)$$

за някое $f \in L^1(\mu)$. Нека X е сл. в. върху $(\Omega, \mathcal{G})$ такава, че

$$\mathbf{E}_\nu[|X|] = \int_\Omega |X(\omega)| f(\omega) d\mu(\omega) < \infty.$$

Нека $\mathcal{H}$ е $\sigma-$ алгебра, $\mathcal{H} \in \mathcal{G}$. Тогава

$$\mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}].\mathbf{E}_\mu[f|\mathcal{H}] = \mathbf{E}_\mu[fX|\mathcal{H}], \quad \textit{п.с.} \tag{10.30}$$

Доказателство: По дефиницията за условно математическо очакване имаме, че ако $H \in \mathcal{H}$, то

$$\int_H \mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] f d\mu = \int_H \mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] d\nu = \int_H X d\nu \tag{10.31}$$

$$= \int_H X f d\mu = \int_H \mathbf{E}_\mu[fX|\mathcal{H}] d\mu.$$

От друга страна

$$\int_H \mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] f d\mu = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] f \mathbf{I}_H] \tag{10.32}$$

$$= \mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_\mu[\mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] f \mathbf{I}_H]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}_\mu[\mathbf{I}_H \mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}].\mathbf{E}_\mu[f|\mathcal{H}]$$

$$= \int_H \mathbf{E}_\nu[X|\mathcal{H}] \mathbf{E}_\mu[f|\mathcal{H}] d\mu.$$

От (10.31) и (10.32) следва (10.30). □

Теорема 10.8 *(Гирсанов) Нека $Y(t) \in \mathbf{R}^n$ е процес на Ито от вида*

$$dY(t) = a(t, \omega)dt + dB(t), \;\; t \leq T, \; Y_0 = 0,$$

където $T \leq \infty$ е зададена константа и $B(t)$ е $n-$мерно Брауново движение. Да положим

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t a(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s,\omega)ds\right), \quad t \leq T. \tag{10.33}$$

Да допуснем, че $a(s,\omega)$ удовлетворява условието на Новиков

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty, \tag{10.34}$$

където $\mathbf{E} = \mathbf{E_P}$ е очакването спрямо $\mathbf{P}$. Да дефинираме мярката $\mathbf{Q}$ върху $(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)})$ чрез

$$d\mathbf{Q}(\omega) = M_T(\omega)d\mathbf{P}(\omega). \tag{10.35}$$

Тогава $Y(t)$ е $n-$мерно Брауново движение спраямо мярката $\mathbf{Q}$ за $t \leq T$.

Забележка 10.4

1) *Трансформацията $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, зададена чрез (10.35) се нарича трансформация (на мерки) на Гирсанов.*
2) *Условието на Новиков (10.34) е достатъчно условие, което гарантира, че M_t е мартингал, $t \leq T$, спрямо $\mathcal{F}_t^{(n)}$ и $\mathbf{P}$. Всъщност резултатът е валиден, ако предположим, че M_t е мартингал. Тогава ако M_t е мартингал, то*

$$M_T d\mathbf{P} = M_t d\mathbf{P}, \text{ върху } \mathcal{F}_t^{(n)}, \quad t \leq T. \tag{10.36}$$

Доказателство: Да допуснем, че $a(s,\omega)$ е ограничена. Ще проверяваме условие б) на Теоремата на Леви

$$(i) \qquad Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)) \tag{10.37}$$

е мартингал спрямо $\mathbf{Q}$;

$$(ii) \qquad Y_i(t)Y_j(t) - t\delta_{ij} \tag{10.38}$$

е мартингал относно $\mathbf{Q}$, за $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Да докажем (i). Нека означим $K(t) = M_tY(t)$ и по формулата на Ито получаваме

$$\begin{aligned} dK_i(t) &= M(t)dY_i(t) + Y_i(t)dM_t + dY_i(t).dM_t \qquad (10.39)\\ &= M(t)[a_i(t)dt + dB_i(t)] + Y_i(t)M_t(\sum_{k=1}^n -a_k(t)dB_k(t)) \\ &+ (dB_i(t))(-M_t\sum_{k=1}^n +a_k(t)dB_k(t)) \\ &= M_t(dB_i(t) - Y_i(t)\sum_{k=1}^n a_k(t)dB_k(t)) = M_t\gamma^{(i)}(t)dB(t). \end{aligned}$$

където

$$\gamma^{(i)}(t) = (\gamma_1^{(i)}(t), \gamma_2^{(i)}(t), \ldots, \gamma_n^{(i)}(t))$$

и

$$\gamma_j^{(i)}(t) = \begin{cases} -Y_i(t)a_j(t), & j \neq i, \\ 1 - Y_i(t)a_i(t), & j = i. \end{cases}$$

Следователно $K_i(t)$ е мартингал спрямо $\mathbf{P}$ и от Лема 10.4 за $t > s$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_i(t)|(F)_s]$$
$$= \frac{\mathbf{E}[M_t Y_i(t)|\mathcal{F}_s]}{\mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbf{E}[K_i(t)|\mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_i(s)}{M(s)} = Y_i(s),$$

т.е. $Y_i(s)$ е мартингал спрямо $\mathbf{Q}$.

Аналогично се доказва (ii). $\square$

Забележка 10.5 *Теоремата на Гирсанов гласи, че за всеки набор борелови множества $F_1, F_2, \dots, F_k \subset \mathbf{R}^n$ и всеки набор реални числа $t_1, t_2, \dots, t_k \leq T$ и $k = 1, 2, \dots$*

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}[Y(t_1) \in F_1, Y(t_2) \in F_2, \dots, Y(t_k) \in F_k] \\ &= \mathbf{P}[B(t_1) \in F_1, B(t_2) \in F_2, \dots, B(t_k) \in F_k]. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Еквивалентно преставяне на (10.36) е, че $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$ ($\mathbf{Q}$ е абсолютно непрекъсната спрямо $\mathbf{P}$) с производна на Радон-Никодим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = M_T, \ \textit{върху } \mathcal{F}_T^{(n)}. \tag{10.41}$$

Да отбележим, че $M_T(\omega) > 0$, п.с., следователно $\mathbf{P} << \mathbf{Q}$. Следователно двете мерки $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ са еквивалентни. Тогава от (10.40) следва, че

$$\mathbf{P}[Y(t_1) \in F_1, Y(t_2) \in F_2, \dots, Y(t_k) \in F_k] > 0$$

тогава и само тогава, когато

$$\mathbf{Q}[Y(t_1) \in F_1, Y(t_2) \in F_2, \dots, Y(t_k) \in F_k] > 0$$

тогава и само тогава, когато

$$\mathbf{P}[B(t_1) \in F_1, B(t_2) \in F_2, \dots, B(t_k) \in F_k] > 0.$$

Теорема 10.9 *Нека $Y(t) \in \mathbf{R}^n$ е процес на Ито:*

$$dY(t) = \beta(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)dB(t), \quad t \leq T, \tag{10.42}$$

където

$$B(t) \in \mathbf{R}^m, \beta(t,\omega) \in \mathbf{R}^n, \quad \theta(t,\omega) \in \mathbf{R}^{n\times m}.$$

Нека съществуват процеси $u(t,\omega) \in W_{\mathcal{H}}^m$ и $\alpha(t,\omega) \in W_{\mathcal{H}}^n$ такива, че

$$\theta(t,\omega)u(t,\omega) = \beta(t,\omega) - \alpha(t,\omega) \tag{10.43}$$

и да допуснем, че $u(t,\omega)$ удовлетворява условието на Новиков

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty. \tag{10.44}$$

Да положим

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t u(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds\right\}, \quad t \leq T \tag{10.45}$$

и

$$d\mathbf{Q}(\omega) := M_T(\omega)d\mathbf{P}(\omega), \qquad \text{върху } \mathcal{F}_T^{(m)}. \tag{10.46}$$

Тогава

$$\hat{B}(t) := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t), \quad t \le T \tag{10.47}$$

е Брауново двожение спрямо $\mathbf{Q}$ *и в термините на* $\hat{B}(t)$ *процесът* $Y(t)$ *има стохастичен интеграл процеса*

$$dY(t) = \alpha(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t). \tag{10.48}$$

Доказателство: От Теорема 10.8 следва, че $\hat{B}(t)$ е Брауново движение по отношение на $\mathbf{Q}$. Като заместим (10.47) в (10.42) от (10.43) следва

$$\begin{aligned} dY(t) &= \beta(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)(d\hat{B}(t) - u(t,\omega)dt) \\ &= [\beta(t,\omega) - \theta(t,\omega)u(t,\omega)]dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t) = \\ &\alpha(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t) \end{aligned}$$

т.е. получаваме (10.48). □

Ако $n = m$ следва, че $\theta \in \mathbf{R}^{n\times n}$ е обратимо следовтелно процесът $u(t,\omega)$, удовлетворяващ (10.43) се представя по единствен начин:

$$u(t,\omega) = \frac{\beta(t,\omega) - \alpha(t,\omega)}{\theta(t,\omega)}.$$

Теорема 10.10 *Нека* $X(t) = X^x(t) \in \mathbf{R}^n$ *и* $Y(t) = Y^x(t) \in \mathbf{R}^n$ *са дифузия на Ито и процес на Ито съответно от вида*

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \quad t \le T, \quad X(0) = x, \tag{10.49}$$

$$dY(t) = [\gamma(t,\omega) + b(Y(t))]dt + \sigma(Y(t))dB(t),\ t \le T, \tag{10.50}$$

с начално условие $Y(0) = x$*, където* $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$ *удовлетворяват условията на теоремата за съществуване и единственост на решение на стохастично диференциално уравнение и*

$$\gamma(t,\omega) \in W^n_{\mathcal{H}}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Да допуснем, че съществува процес $u(t,\omega) \in W^n_{\mathcal{H}}$ *такъв, че*

$$\sigma(Y(t))u(t,\omega) = \mu(t,\omega) \tag{10.51}$$

и $u(t,\omega)$ *удовлетворява условието на Новиков, т.е.*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_)^T u^2(t,\omega)ds\right)\right] < \infty. \tag{10.52}$$

Дефинираме M_t*,* $\mathbf{Q}$ *и* $\hat{B}(t)$ *както в (10.45), (10.46) и (10.47). Тогава*

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))d\hat{B}(t). \tag{10.53}$$

Следователно, законът на разпределение на $Y^x(t)$ *спрямо* $\mathbf{Q}$ *е същият, както този на* $X^x(t)$ *спрямо мярката* $\mathbf{P}$*,* $t \le T$*.*

Доказателство: Представянето (10.53) следва като се приложи теорема 10.9 към случая

$$\theta(t,\omega) = \sigma(Y(t)), \quad \beta(t,\omega) = \gamma(t,\omega) + b(Y(t)), \quad \alpha(t,\omega) = b(Y(t)).$$

Тогава заключението следва от съществуването в широк смисъл (слабо) на решение на стохастичното диференциално уравнение. □

Глава 11

Случайни процеси в застраховането

Базовият модел за застрахователен риск е моделът на Крамер и Лундберг. Той е модел за застраховане, което не е животозастраховане. Общата схема е следната. Нека имаме застрахователна компания с начален капитал $u > 0$, която получава константен приход от застрахованите с големина c за единица време. Също така в компанията постъпват искове, които са следствия от настъпване на застрахователни събития. В модела на Крамер-Лундберг имаме следните предположения:

(a) Големините на исковете $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ са положителни, независими и еднакво разпределени случайни величини с функция на разпределение F, крайно математическо очакване $\mu = \mathbf{E}X_1$, и дисперсия $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1) \leq \infty$.

(b) Исковете постъпват в случайни моменти от време $0 < T_1 < T_2 < \dots$

(c) Броят на исковете в интервала $[0, t]$ означаваме с $N(t)$, където $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\},\ t \geq 0$ (приемаме, че $\sup \emptyset = 0$).

(d) Времената между постъпване на два последователни иска

$$Y_1 = T_1,\ Y_k = T_k - T_{k-1},\ \ k = 2, 3, \dots$$

са независими и еднакво разпределени експоненциални случайни величини с крайно математическо очакване $\mathbf{E}Y_1 = 1/\lambda$.

(e) Редиците $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ са независими една от друга.

Когато вместо (d) е изпълнено следното условие:

(d′) Времената между постъпване на два последователни иска

$$Y_1 = T_1,\ Y_k = T_k - T_{k-1},\ \ k = 2, 3, \dots$$

са независими и еднакво разпределени случайни величини с крайно математическо очакване $\mathbf{E}Y_1 = 1/\lambda$, моделът се нарича модел на възстановяване. Тук за случайните величини не се налага изискването да са експоненциално разпределени. Нека да означим $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y_1 \leq y),\ y \in [0, \infty)$.

Забележка 11.1

1) От горните предположения (a)-(e) следва, че $N(t)$ е хомогенен Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$, и следователно

$$\mathbf{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ \ k = 0, 1, 2, \dots$$

2) *Моделът на възстановяване е обобщение на модела на Крамер-Лундберг, който моделира процесът $N(t)$ като общ процес на възстановяване, а не обезателно Поасонов процес, който е един частен случай на процес на възстановяване.*

Сега можем да дефинираме процес на сумарният иск $\{S(t),\ t \geq 0\}$ по следния начин:

$$S(t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

Много важна характеристика в модела на Крамер-Лундберг е разпределението на сумарния иск. Ако означим с $G_t(x) = \mathbf{P}(S(t) \leq x)$, то е в сила следното равенство

$$\begin{aligned} G_t(x) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x | N(t) = n\right) \mathbf{P}(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x), \quad x \geq 0,\ t \geq 0 \end{aligned}$$

където $F^{*n}(x) = \mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \leq x)$ е $n-$кратната конволюция на функцията на разпределение F на големината на исковете. По нататък навсякъде за функцията на разпределение H, дефинирана на $\mathbb{R}$, ще считаме за вярно следното равенство

$$H^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Сега можем да дефинираме процес $U(t)$, който се нарича процес на риск и се дава чрез

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0 \tag{11.1}$$

Вероятността за фалит за краен интервал от време се дава чрез следното равенство

$$\psi(u, T) = \mathbf{P}\{U(t) < 0, \quad \text{за някое } t \leq T\}, \quad T \in (0, \infty),$$

а вероятността за фалит изобщо (безкраен интервал от време) е $\psi(u) = \psi(u, \infty),\ u \geq 0$. Моментът на фалит е $\tau(T) = \inf\{t \in (0, T] : U(t) < 0\},\ 0 < T \leq \infty$.

Лема 11.1 *За моделът на Крамер-Лундберг е в сила*

$$\mathbf{E}U(t) = u + ct - \lambda\mu t, \tag{11.2}$$

а за моделът на възстановяване е в сила

$$\mathbf{E}U(t) = u + ct - \mu\mathbf{E}N(t). \tag{11.3}$$

Доказателство: Тъй като $\mathbf{E}U(t) = u + ct - \mathbf{E}S(t)$, и

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(S(t)|N(t)=n)\mathbf{P}(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i | N(t)=n\right)\mathbf{P}(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\mathbf{P}(N(t)=n) \\
&= \mu \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{P}(N(t)=n) = \mu\mathbf{E}N(t).
\end{aligned}$$

и тъй като при хомогенен Поасонов процес е в сила $\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, то твърдението на лемата е доказано. □

Теорема 11.1 *Ако $F_Y(0) < 1$ и $F_Y(\infty) = 1$, то е в сила следното:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}N(t)}{t} = \begin{cases} \lambda, & \text{ако } \lambda^{-1} < \infty \\ 0, & \text{ако } \lambda^{-1} = \infty. \end{cases} \tag{11.4}$$

От горната теорема (която е известна като елементарна теорема на възстановяването) и от уравнение (11.3) имаме, че

$$\frac{\mathbf{E}U(t)}{t} = u/t + c - \mu\frac{\mathbf{E}N(t)}{t}$$

откъдето следва

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}N(t)}{t} = c - \lambda\mu$$

Понеже искаме застрахователната компания да е платежоспособна с течение на времето, то от последното гранично съотношение естествено произлиза условието $c - \lambda\mu > 0$, което означава, че $U(t)$ има положителен тренд при големи t. Това условие е известно като net-profit condition и навсякъде по-нататък ще предполагаме, че то е изпълнено. Нека да означим $\rho = c/\lambda\mu - 1 > 0$. Константата ρ се нарича safety loading.
От дефиницията на процеса на риск следва, че фалит може да настъпи само в моментите на постъпване на исковете T_i. Тогава за $u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \mathbf{P}(u + ct - S(t) < 0, \text{ за някое } t \geq 0) \\
&= \mathbf{P}(u + cT_n - S(T_n) < 0, \text{ за някое } n \geq 1) \\
&= \mathbf{P}(u + \sum_{k=1}^{n}(cY_k - X_k) < 0, \text{ за някое } n \geq 1) \\
&= \mathbf{P}(\sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n}(X_k - cY_k) > u).
\end{aligned}$$

Тогава, ако искаме $\psi(u) < 1$, то това е еквивалентно на следното неравенство:

$$\overline{\psi}(u) = 1 - \psi(u) = \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n}(X_k - cY_k) \leq u\right) > 0, \; u \geq 0. \tag{11.5}$$

От уравнение (11.5) се вижда, че в модела на възстановяване изследването на вероятността за оцеляване $\overline{\psi}(u)$ се свежда до изучаване на поведението на максимум на случайно лутане. И по-точно на функцията на разпределение на този максимум. Действително, да разгледаме редицата от независими и еднакво разпределени сл.в.

$$Z_k = X_k - cY_k, \quad k \geq 1$$

и случайното лутане, дефинирано чрез тази редица е

$$R_0 = 0, \quad R_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n \geq 1. \tag{11.6}$$

Веднага може да се види, че за математическото очакване на Z_k е изпълнено $\mathbf{E}Z_1 = \mu - c/\lambda < 0$ поради "net profit condition". Сега можем да запишем вероятността за оцеляване по следният еквивалентен на (11.5) начин, а именно:

$$\overline{\psi}(u) = 1 - \psi(u) = \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} R_n \leq u\right) > 0, \quad u \geq 0. \tag{11.7}$$

Разпределението на максимум на случайно лутане с отрицателно математическо очакване се знае в явен вид и се изразява чрез разпределението на първия строг горен рекорден момент. Това е общият метод за получаване на оценка за вероятността за фалит $\psi(u)$ в модела на възстановяване. Ако се ограничим само в модела на Крамер-Лундберг, където броящият процес е Поасонов, тогава можем да получим формула за $\psi(u)$, която включва явно функцията на разпределение F на големините на исковете $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Всъщност при предположение, че е в сила net-profit condition $c - \lambda\mu > 0$ може да се докаже, че

$$\overline{\psi}(u) = 1 - \psi u = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_I^{n*}(u)}{(1+\rho)^n}, \tag{11.8}$$

където

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(u) du, x \geq 0 \tag{11.9}$$

и с $\overline{F}(x)$ сме означили опашката на $F(x)$, т.е. $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.
Твърдението на тази теорема ще докажем малко по-нататък.

Определение 11.1 *Нека H е функция на разпределение, концентрирана на $(0, \infty)$, тогава*

$$\widehat{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x), \quad s \in \mathbb{R} \tag{11.10}$$

се нарича трансформация на Лаплас-Стилтес на H.

Следващата теорема, известна като теорема на Крамер-Лундберг е фундаментална в теорията на риска.

Теорема 11.2 *Нека разглеждаме модел на Крамер-Лундберг, за който е изпълнено условието* $\rho = c/(\lambda\mu) - 1 > 0$. *Да допуснем, че съществува константа* $\nu > 0$, *такава че:*

$$\widehat{f}_I(-\nu) = \int_0^\infty e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho. \tag{11.11}$$

Тогава са в сила следните връзки
(a) За всяко $u \geq 0$ *е в сила*

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u}. \tag{11.12}$$

(b) Ако освен това

$$\int_0^\infty x e^{\nu x} \overline{F}(x) dx < \infty \tag{11.13}$$

тогава

$$\lim_{u\to\infty} e^{\nu u}\psi(u) = C < \infty \tag{11.14}$$

където

$$C = \left[\frac{\nu}{\rho\mu} \int_0^\infty x e^{\nu x} \overline{F}(x) dx\right]^{-1} \tag{11.15}$$

(c) Когато $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, *т.е. големините на исковете са експоненциално разпределени със средно* μ, *то уравнение* (11.8) *добива следния вид:*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} exp\left[-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)} u\right], \; u \geq 0. \tag{11.16}$$

Забележка 11.2 *Фундаменталното условие на Лундберг* (11.10) *може да бъде записано и по следния еквивалентен начин*

$$\int_0^\infty e^{\nu x} \overline{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$$

Доказателство: Както показахме $\overline{\psi}(u)$ може да бъде изразена чрез случайно лутане, генерирано от случайните величини $(X_i - cY_i)$. Тогава

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) &= \mathbf{P}(S(t) - ct \leq u, \forall t > 0) \\
&= \mathbf{P}(\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u, \forall n \geq 1) \\
&= \mathbf{P}(\sum_{k=2}^n (X_k - cY_k) \leq u + cY_1 - X_1, \forall n \geq 2, X_1 - cY_1 \leq u) \\
&= \mathbf{P}(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1, \forall t > 0, X_1 - cY_1 \leq u),
\end{aligned}$$

където S' е вероятностно копие на S. Тогава имаме

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) &= \mathbf{E}(\mathbf{P}(S'(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1, \forall t > 0, X_1 - cY_1 \leq u | X_1, Y_1)) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{P}(S'(t) - ct \leq u + cy - x, \forall t > 0, x \leq u + cy) dF(x) dF_Y(y)
\end{aligned}$$

но тъй като Y_i е експоненциална случайна величина, то $dF_Y(y) = d(1 - e^{-\lambda y}) = \lambda e^{-\lambda y}$ и освен това $\mathbf{P}(S'(t) - ct \leq u + cy - x, \forall t > 0) = 0$ при $x \geq u + cy$ следователно горното равенство добива вида

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{u+cy} \mathbf{P}(S'(t) - ct \leq u + cy - x, \forall t > 0) dF(x) \lambda e^{-\lambda y} dy \\
&= \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \int\limits_0^{u+cy} \overline{\psi}(u + cy - x) dF(x) dy
\end{aligned}$$

сега като направим смяната $u + cy = z$ получаваме

$$= \frac{1}{c} \int\limits_u^\infty \lambda e^{-\lambda(\frac{z-u}{c})} \left[\int\limits_0^z \overline{\psi}(z - x) dF(x) \right] dz$$

и така получаваме

$$= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int\limits_u^\infty e^{-\lambda z/c} \left[\int\limits_0^z \overline{\psi}(z - x) dF(x) \right] dz \tag{11.17}$$

От уравнение (11.16) следва, че $\overline{\psi}$ е абсолютно непрекъсната с плътност

$$\overline{\psi}'(u) = \frac{\lambda}{c} \overline{\psi}(u) - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^u \overline{\psi}(u - x) dF(x) \tag{11.18}$$

Сега, ако интегрираме уравнението (11.18) от 0 до t относно Лебеговата мярка, получаваме:

$$\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \overline{\psi}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \int\limits_0^u \overline{\psi}(u - x) dF(x) du.$$

Откъдето

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(t) &= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \overline{\psi}(u) du - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \int\limits_0^u \overline{\psi}(u - x) dF(x) du \\
&= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \overline{\psi}(t - u) du - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \int\limits_x^t \overline{\psi}(u - x) du dF(x) \\
&= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \overline{\psi}(t - u) du - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-x} \overline{\psi}(u) du dF(x)
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{t-x} \overline{\psi}(u) du \right) dF(x) &= \left(\int\limits_0^{t-x} \overline{\psi}(u) du \cdot F(x) \right) \Bigg|_0^t + \int\limits_0^t F(x) \overline{\psi}(t - x) dx \\
&= \int\limits_0^t F(u) \overline{\psi}(t - u) du
\end{aligned}$$

Откъдето следва, че

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(t) &= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)du - \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t F(u)\overline{\psi}(t-u)du \\ &= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t (1-F(u))\overline{\psi}(t-u)du\end{aligned}$$

И така получихме следното уравнение

$$\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)\overline{F}(u)du \tag{11.19}$$

Все още обаче не знаем стойността на $\overline{\psi}(0)$. Ако пуснем $t \uparrow \infty$ в горното уравнение и като използваме net-profit condition ($\overline{\psi}(\infty) = 1 - \psi(\infty) = 1$) се получава, че

$$\overline{\psi}(\infty) = \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty \overline{\psi}(\infty)\overline{F}(u)du,$$

което е еквивалентно на

$$1 = \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^\infty \overline{F}(u)du. \tag{11.20}$$

Както знаем $\int\limits_0^\infty \overline{F}(u)du = \mathbf{E}X_1 = \mu$, откъдето излиза стойността на $\overline{\psi}(0)$, а именно

$$\overline{\psi}(0) = 1 - \lambda\mu/c = \rho/(1+\rho).$$

По този начин уравнение (11.19) добива вида

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(t) &= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)\overline{F}(u)du \\ &= \overline{\psi}(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)dF_I(u) \\ &= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)dF_I(u)\end{aligned}$$

или окончателно имаме

$$\overline{\psi}(t) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int\limits_0^t \overline{\psi}(t-u)dF_I(u), \tag{11.21}$$

което е уравнение на възстановяване с несобствена функция на разпределение $F_\rho(t) = \frac{1}{1+\rho}F_I(t), \quad F_\rho(\infty) = \frac{1}{1+\rho} < 1$. Следователно неговото решение се дава с

$$\overline{\psi}(t) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^\infty F_\rho^{*n}(t) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+\rho)^n}F_I^{*n}(t),$$

което е и доказателството на (11.8). Като вземе предвид, че F е разпределението на исковете X_i и в случайното лутане дефинирано с $Z_i = X_i - cY_i$, имаме $-cY_i$ е отрицателна, а X_i е положителна сл. величина, и Y_i е експоненциално разпределена, то горната формула е всъщност формулата на Полячек-Хинчин.

Поради това, че $F_\rho(\infty) = \frac{1}{1+\rho} F_I(\infty) = \frac{1}{1+\rho}$, то за функцията на възстановяване $H_\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\rho^{*n}(t)$ знаем, че $H_\rho(\infty) = \frac{1}{1-F_\rho(\infty)} = \frac{1+\rho}{\rho}$. Тогава

$$\overline{\psi}(\infty) = \frac{\rho}{1+\rho} H_\rho(\infty) = 1.$$

Нека да предположим, че съществува константа $\nu > 0$ такава, че е изпълнено (11.10) и освен това

$$\mu_\rho = \int_0^\infty x e^{\nu x} dF_\rho(x) < \infty.$$

Да разгледаме равнение (11.21) (считаме, че $F_\rho(0+) = 0$):

$$\begin{aligned}
1 - \overline{\psi}(t) &= 1 - \frac{\rho}{1+\rho} - \frac{1}{1+\rho} \int_0^t \overline{\psi}(t-u) dF_I(u) \\
\Rightarrow \psi(t) &= 1 - \frac{\rho}{1+\rho} - \int_0^t \overline{\psi}(t-u) dF_\rho(u) \\
&= 1 - \frac{\rho}{1+\rho} + \int_0^t dF_\rho(u) - \int_0^t \overline{\psi}(t-u) dF_\rho(u) - \int_0^t dF_\rho(u) \\
&= 1 - \frac{\rho}{1+\rho} + \int_0^t (1 - \overline{\psi}(t-u)) dF_\rho(u) - F_\rho(t) \\
&= (F_\rho(\infty) - F_\rho(t)) + \int_0^t \psi(t-u) dF_\rho(u)
\end{aligned}$$

или окончателно

$$\psi(t) = (F_\rho(\infty) - F_\rho(t)) + \int_0^t \psi(t-u) dF_\rho(u).$$

Да умножим двете страни на това уравнение с $e^{\nu t}$. Получаваме

$$e^{\nu t}\psi(t) = e^{\nu t}(F_\rho(\infty) - F_\rho(t)) + \int_0^t e^{\nu(t-u)} \psi(t-u) d\left(\int_0^u e^{\nu x} dF_\rho(x)\right),$$

като $\int_0^u e^{\nu x} dF_\rho(x)$ е собствена функция на разпределение с крайно математическо очакване μ_ρ, съгласно направените по-горе предположения. Освен това функцията $e^{\nu t}(F_\rho(\infty) -$

$F_\rho(t))$ е интегруема (поради крайното математическо очакване, по мярката $\int\limits_0^u e^{\nu x} dF_\rho(x))$. Тогава по възловата теорема на възстановяването ще получим

$$e^{\nu t}\psi(t) \to \frac{1}{\mu_\rho}\left(\int\limits_0^\infty e^{\nu t}(F_\rho(\infty) - F_\rho(t))dt\right), \quad t \to \infty.$$

Остава да видим, че

$$\frac{1}{\mu_\rho}\int\limits_0^\infty e^{\nu t}\left(\frac{1}{1+\rho} - F_\rho(t)\right)dt = \frac{1}{\mu_\rho}\frac{1}{\nu}(1 - F_\rho(\infty)) = \frac{\rho}{(1+\rho)\nu\mu_\rho}$$

е равно на константата C дадена в теоремата. $\square$

Използвали сме следните резултати от теория на възстановяването:

Нека $F(t)$ е несобствена функция на разпределение съсредоточена на $[0, \infty)$, т.е. $F(\infty) < 1$ и $F(0+) = 0$. В този случай $U(t) \to \frac{1}{1-F(\infty)}$, $t \to \infty$ и $(1 - F(\infty))U(t)$ е собствена функция на разпределение на $[0, \infty)$.

Да предположим, че $z(t) = 0$ при $t < 0$ и че съществува границата

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = z(\infty). \tag{11.22}$$

Тогава за решението на уравнението на възстановяване

$$Z(t) = z(t) + \int\limits_0^\infty Z(t-u)dF(u),$$

имаме

$$Z(\infty) := \lim_{t\to\infty} U * z(t) = \frac{z(\infty)}{1 - F(\infty)}.$$

Наистина,

$$Z(t) = \int\limits_0^t z(t-u)dU(u) = \int\limits_0^{t/2} z(t-u)dU(u) + \int\limits_{t/2}^t z(t-u)dU(u) = I_1(t) + I_2(t).$$

За $I_1(t)$ получаваме

$$\inf_{t/2\le u\le t} z(u)[U(t/2+) - U(0-)] \le I_1(t) \le \sup_{t/2\le u\le t} z(u)[U(t/2+) - U(0-)].$$

Интегрирането е винаги в интервала $(-\infty, \infty)$ така, че се включват крайните точки. Като вземем в предвид, че $U(0-) = 0$, че съществува границата на $z(t)$ и $U(t)$ и оставим $t \to \infty$ получаваме

$$\lim_{t\to} I_1(t) = \frac{z(\infty)}{1 - F(\infty)}.$$

За $I_2(t)$ намираме

$$|I_2(t)| \le \int\limits_{t/2}^t |z(t-u)|dU(u) \le \sup_{0\le t<\infty} |z(t)|[U(t+) - U(t/2-)].$$

Понеже $z(t)$ е ограничена функция на $[0, \infty)$ и

$$\lim_{t\to\infty} U(t+) = \lim_{t\to\infty} U(t/2-) = \frac{1}{1-F(\infty)},$$

получаваме, че

$$\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0,$$

с което твърдението е доказано. В този случай, при определени допълнителни условия е възможно да се намери оценка за асимптотиката на $Z(\infty) - Z(t)$ при $t \to \infty$.

Да допуснем, че съществува число $\alpha > 0$ такова, че

$$\int\limits_0^\infty e^{\alpha t} dF(t) = 1. \tag{11.23}$$

Ако има такова число, то то е единствено. Сега както и по-горе можем да дефинираме собствена вероятностна функция на разпределение

$$F_\alpha(t) = \int\limits_0^t e^{\alpha u} dF(u)$$

съсредоточена също на $[0, \infty)$, за която $F_\alpha(t) = e^{\alpha t} dF(t)$. Нека освен това

$$\mu_\alpha = \int\limits_0^\infty t dF_\alpha(t) \in (0, \infty). \tag{11.24}$$

Нека $z(\infty) = \lim_{t\to\infty} z(t) \neq 0$.

Теорема 11.3 *Ако са изпълнени условията* (11.23) *и* (11.24) *и* $e^{\alpha t}(z(\infty) - z(t))$ *и* $e^{\alpha t}(F(\infty - f(t)))$ *са непосредствено интегруеми по Риман, то*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_\alpha e^{\alpha t}[Z(\infty) - Z(t)] = \frac{z(\infty)}{1-F(\infty)} - z(t) - \int\limits_0^t Z(t-u) dF(u)$$

Библиография

[1] Grimmett G., Stirzaker D., *Probability and Random Processes*, 3rd edition, Oxford University Press, 2001.

[2] Karlin S., Taylor H.M., *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd edition, Academic Press, 1975.

[3] Oksendal B., *Stochastic Differential Equations*, 6th edition, Springer, 2003.

[4] Ross S.M., *Introduction to Probability Models*, 10th edition, Academic Press, 2010.

[5] Гихман И.И., Скороход А.В., *Теория случайных процессов*, т.1 и 2, Наука, 1971.

[6] Димитров Б., *Вериги на Марков*, Наука и изкуство, 1974.

[7] Димитров Б., Янев Н., *Вероятности и статистика*, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", 1998.

[8] Стоянов Й., *Стохастични процеси – теория и приложение*, Наука и изкуство, 1978.