Задачи по случайни процеси

Ангел Г. Ангелов
agangelov@gmail.com

31. V. 2012 г.

© 2010, 2012 Ангел Георгиев Ангелов, agangelov@gmail.com

Тези записки или произволна част от тях могат да бъдат отпечатвани с нетърговска цел. Произволни части от тези записки могат да бъдат използвани в текстови произведения, при условие, че бъдат цитирани (автор, заглавие, дата, интернет адрес).

Съдържание

Предговор

Nothing in life is to be feared,
it is only to be understood.
Marie Curie

Тези записки следват приблизително упражненията по *Случайни процеси*, които съм водил във Факултета по математика и информатика на Софийския университет от 2009 година до момента. Написването им е породено от недостига на подобни учебни материали на български език.

. . .

Искам да благодаря на доц. Марусия Божкова за възможността да водя тези упражнения, за доверието и съвместната работа. Благодаря и на всички студенти, които проявяваха интерес към предмета.

Ангел Г. Ангелов

0. Вероятности

The most important questions of life are indeed,
for the most part, only problems of probability.

The theory of probability is only
common sense reduced to calculation.
Pierre Simon Laplace

Ще изложим основни понятия и резултати от теорията на вероятностите, които ще ни бъдат необходими по-нататък.

► *Събития и техните вероятности*

(1) Определена последователност от действия ще наричаме **експеримент**. Предполагаме, че са известни всички възможни резултати от дадения експеримент. Когато не знаем предварително какъв ще бъде резултата (изхода) от нашия експеримент, го наричаме **случаен експеримент**.

(2) Множеството от всички възможни изходи от даден експеримент наричаме **пространство на елементарните събития** и означаваме с Ω, а елементите му с ω и наричаме елементарни събития или **изходи**.

а) Хвърляне на зар

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

б) Стрелба в кръгова мишена

$$\Omega = \{\text{всички точки от мишената}\}$$

в) Конно надбягване

$$\Omega = \{\text{всички пермутации на конете}\}$$

г) Въпрос от социологическо проучване

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

д) Измерване на пулса

Ω е подмножество на естествените числа

(3) Произволно подмножество на Ω наричаме случайно събитие или само **събитие**. Събитията означаваме с $A, B, C, \ldots$

а) Хвърляне на зар

$$A = \{\text{не се пада шестица}\}$$

б) Стрелба в кръгова мишена

$$A = \{\text{точките от даден венец}\}$$

в) Конно надбягване

$$A = \{\text{спечелил е кон с номер 3}\}$$

г) Въпрос от социологическо проучване

$$A = \{\text{отговори 4 или 5}\}$$

д) Измерване на пулса

$$A = \{\text{пулс над 100}\}$$

(4) Празното множество $\emptyset$ ще наричаме **невъзможно събитие**, а Ω **достоверно (сигурно) събитие**. Събитието $A^c = \Omega \setminus A$ наричаме допълнение или **отрицание** на A.

$A \cap B \iff$ сбъднали са се събитията A и B.
$A \cup B \iff$ сбъднало се е поне едно от събитията A и B.
$A \subseteq B \iff$ събитието A влече събитието B.
$A^c \iff$ не се е сбъднало събитието A.
Използваме означението $AB = A \cap B$.
Събитията A и B наричаме **несъвместими**, ако $AB = \emptyset$.
Когато A и B са несъвместими изполваме записа $A + B = A \cup B$.

(5) Съвкупността от събития $H_1, H_2, \ldots, H_n$ наричаме **пълна група от събития** или **разделяне** на Ω, ако $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

(6) Нека $\mathcal{F}$ е съвкупност от събития. $\mathcal{F}$ се нарича σ**-алгебра** ако са изпълнени условията:
(a1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(a2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
(a3) $A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, 3, \ldots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

(7) Функцията $\mathbf{P}$, дефинирана върху $\mathcal{F}$, наричаме **вероятност** ако:
(m1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
(m2) $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1,\ \forall A \in \mathcal{F}$
(m3) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \Longrightarrow \mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots.$

(8) Тройката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наричаме **вероятностно пространство**.

Свойства:
(а) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$
(б) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
(в) $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B)$
(г) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$

(9) Нека A и B са събития и $\mathbf{P}(B) \neq 0$. **Условна вероятност** на A при условие B наричаме

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Формула за умножение на вероятности:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B)$$

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 A_2) \dots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ е разделяне на Ω.

Формула за пълната вероятност:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \mid B^c)\,\mathbf{P}(B^c)$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\,\mathbf{P}(H_i)$$

Формула на Бейс:

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\,\mathbf{P}(H_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\,\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\,\mathbf{P}(H_i)}$$

(10) Събитията A и B наричаме **независими** ако $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.

Ако A и B са независими, то $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$.

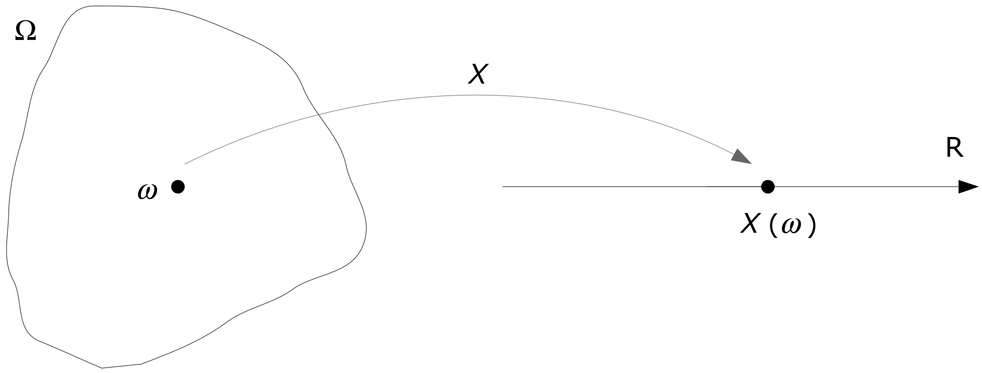
► *Случайни величини*

(1) Нека $X(\omega)$ е функция, дефинирана върху Ω и приемаща реални стойности $X: \ \Omega \mapsto \mathbb{R}$, за която е вярно, че множествата $B_x = \{\omega : \ X(\omega) \leq x\}$ са събития от $\mathcal{F}$, т.е. $B_x \in \mathcal{F}$. Функцията $X = X(\omega)$ наричаме **случайна величина**.

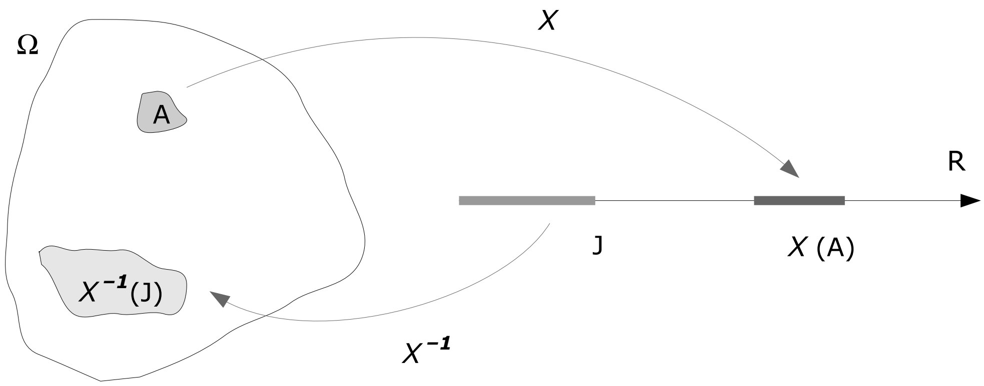
(2) Функцията

$$F_X(x) = \mathbf{P}(B_x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

наричаме **функция на разпределение** на случайната величина X.



Случайната величина е функция, която съпоставя на всеки изход $\omega \in \Omega$ реално число $X(\omega)$.



Ако J е множество от реалната права, $X^{-1}(J) = \{\omega : \ X(\omega) \in J\}$ е праобраза на J, $X^{-1}(J) \subset \Omega$. Изискването $B_x = \{\omega : \ X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ може да се запише $B_x = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$, т.е. искаме праобразите на интервалите $(-\infty, x]$ да са събития от $\mathcal{F}$. По този начин функцията на разпределение $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ е коректно дефинирана (знаем вероятностите на събитията $\{X \leq x\}$).

Изпълнени са следните:

$$\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(X \leq a) + \mathbf{P}(a < X \leq b)$$

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(3) Две случайни величини X и Y наричаме **независими**, ако $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \le x,\, Y \le y) = \mathbf{P}(X \le x)\,\mathbf{P}(Y \le y)$$

(4) Дискретна сл.в. Случайната величина X наричаме дискретна, ако възможните стойности, които приема са крайно или изброимо множество. Функцията

$$p(x_k) = p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$$

наричаме **вероятностно разпределение** на X или дискретна плътност.

$$\sum_k p_k = 1$$

$$F(x) = \sum_{k \le x} p_k$$

Обикновено разпределението на дискретна сл.в. се представя в таблица:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

(5) Математическо очакване на дискретната сл.в. X дефинираме по следния начин:

$$EX = \sum_k x_k\,\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k$$

$$Y = h(X) \Longrightarrow EY = Eh(X) = \sum_k h(x_k) p_k$$

Дискретната сл.в. X наричаме целочислена, ако приема стойности от множеството на целите числа $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Тогава горните формули приемат вида:

$$p(k) = p_k = \mathbf{P}(X = k)$$

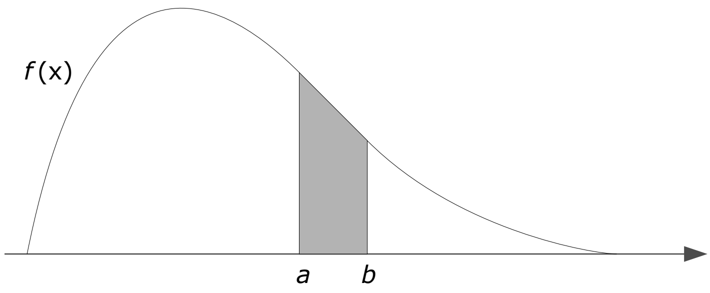
$$EX = \sum_k k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_k k p_k$$

$$Eh(X) = \sum_k h(k) p_k$$

(6) Непрекъсната сл.в. Случайната величина X наричаме непрекъсната, ако съществува неотрицателна функция $f(x)$, такава че

$$\mathbf{P}(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

(7) Функцията $f(x)$ наричаме **плътност** на сл.в. X.



Изпълнени са следните:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

(8) **Математическо очакване** на непрекъснатата сл.в. X дефинираме по следния начин:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$Y = h(X) \Longrightarrow EY = Eh(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

(9) **Моменти** Нека X е произволна сл.в.
EX^k наричаме k-ти момент на X,
$E(X - EX)^k$ наричаме k-ти централен момент на X.

(10) Вторият централен момент се нарича **дисперсия** на X:

$$VarX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

Ако X и Y са независими:

$$Var(aX + bY) = a^2VarX + b^2VarY$$

(11) Нека X е произволна случайна величина. **Пораждаща функция на моментите** на X наричаме функцията $M_X(t) = Ee^{tX}$

$$EX^k = M_X^{(k)}(0)$$

Ако X и Y са независими $\Longrightarrow M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(12) Нека X е целочислена случайна величина. **Вероятностна пораждаща функция** (пораждаща функция) на X наричаме функцията $G_X(s) = Es^X$

$$G(s) = \sum_k s^k \, \mathbf{P}(X = k) = \sum_k s^k p_k$$

$$EX = G'(1)$$

$$E[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G^{(k)}(1)$$

$$VarX = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$G_{X+a}(s) = Es^{X+a} = s^a G_X(s)$$

Ако X и Y са независими $\Longrightarrow G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$

Неравенство на Марков. Ако X е сл.в. с крайно очакване, тогава за всяко $a > 0$

$$\mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}.$$

Ако X е неотрицателна сл.в., тогава за всяко $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}.$$

Неравенство на Чебишев. Ако X е сл.в. с очакване μ и дисперсия σ^2, тогава за всяко $c > 0$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

При $c = k\sigma$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

(13) Две случайни величини X и Y наричаме **еднакво разпределени**, $X \overset{d}{=} Y$, ако $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \leq u) = \mathbf{P}(Y \leq u),$$

т.е. функциите им на разпределение съвпадат.

(14) Две случайни величини X и Y наричаме **стохастично еквивалентни**, ако

$$\mathbf{P}\{\omega: \ X(\omega) = Y(\omega)\} = 1,$$

или, записано по друг начин,

$$\mathbf{P}\{\omega: \ X(\omega) \neq Y(\omega)\} = 0.$$

► *Някои дискретни разпределения*

А. Разпределение на Бернули

Разглеждаме експеримент (опит) с два възможни изхода — *успех* и *неуспех*, като вероятността за *успех* е p (такъв опит наричаме Бернулиев опит). Дефинираме сл.в. X

$$X = \begin{cases} 1, & \text{при } \textit{успех} \\ 0, & \text{при } \textit{неуспех} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p = q$$

Казваме, че случайната величина X има Бернулиево разпределение с параметър p.
За очакването и дисперсията намираме:

$$EX = 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X = 1) = 1p + 0q = p$$

$$EX^2 = 1^2 p + 0^2 q = p$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Забележка. Нека A е събитие. Може да дефинираме X по следния начин:

$$X = \mathbb{I}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

Така дефинираната сл.в. обикновено се нарича индикаторна сл.в. (индикатор на събитието A) и очевидно е еквивалентна на първоначално дефинираната, ако наречем A *"успех"*.

Б. Биномно разпределение

Разглеждаме поредица (серия) от n независими Бернулиеви опити с вероятност за *успех* p и нека $q = 1 - p$. Нека X е броя успехи в серия от n Бернулиеви опити.

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Случайната величина X наричаме биномно разпределена с параметри $n, p: \ X \in \mathrm{Bi}(n, p)$
Бернулиевата сл.в. е $\mathrm{Bi}(1, p)$. Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими Бенулиеви сл.в. с параметър p, то е в сила представянето

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

От линейността на очакването получаваме:

$$EX = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = nEX_1 = np$$

Използваме, че $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими:

$$VarX = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = nVarX_1 = npq$$

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} = (ps + q)^n$$

В. Геометрично разпределение

Разглеждаме поредица (серия) от независими Бернулиеви опити с вероятност за *успех* p и нека $q = 1 - p$. Нека X е броя опити до първия успех.

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Случайната величина X наричаме геометрично разпределена с параметър p : $X \in \mathrm{Ge}(p)$.

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} s^k q^{k-1} p$$

$$= ps \sum_{k=1}^{\infty} (sq)^{k-1} = \frac{ps}{1 - qs}$$

$$G'(s) = \frac{p(1 - qs) + psq}{(1 - qs)^2} = \frac{p}{(1 - qs)^2}$$

$$G''(s) = \frac{2pq(1 - qs)}{(1 - qs)^4}$$

Така лесно пресмятаме очакването и дисперсията на X:

$$EX = G'(1) = \frac{p}{(1 - q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$VarX = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = \frac{2p^2q}{p^4} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Забележка. Понякога случайната величина $Y =$ брой неуспехи преди първия успех в серия от независими Бернулиеви опити, също се нарича геометрично разпределена. Очевидно $X = Y + 1$.

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k + 1) = q^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$EY = E(X - 1) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$$

$$VarY = Var(X - 1) = VarX = \frac{q}{p^2}$$

Г. Поасоново разпределение

Казваме, че сл.в. X има Поасоново разпределение с параметър $\lambda > 0$, $X \in \text{Po}(\lambda)$, ако

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ще намерим пораждащата функция на X:

$$G(s) = \sum_k s^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

Не е трудно да се покаже, че:

$$EX = VarX = \lambda$$

Теорема (Поасон). Нека $n \to \infty$, $p_n \to 0$ по такъв начин, че $np_n = \lambda > 0$, тогава

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Най-лесно това се показва с помощта на пораждащи функции:

$$(p_n s + q_n)^n = \left(1 + \frac{(s-1)\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow e^{\lambda(s-1)}$$

	p_k	k	$G(s)$	E	Var
$\mathrm{Bi}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	$0,1,2,\dots,n$	$(ps+q)^n$	np	npq
$\mathrm{Ge}(p)$	$q^{k-1}p$	$1,2,3,\dots$	$\dfrac{ps}{1-qs}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
$\mathrm{Po}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$0,1,2,\dots$	$e^{\lambda(s-1)}$	λ	λ

Задача. Хвърляме последователно зар. Да се намерят:

а) Вероятността в първите 5 хвърляния да не се падне шестица;

б) Вероятността в първите 6 хвърляния да се паднат 2 шестици;

в) Вероятността първата шестица да се падне на 3-тото хвърляне;

г) Средния брой хвърляния докато се падне шестица.

▶ *Някои непрекъснати разпределения*

А. Равномерно разпределение

Случайната величина X наричаме равномерно разпределена в интервала (a,b), $X \in \mathrm{U}(a,b)$, ако нейната плътност има вида:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \qquad VarX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Б. Експоненциално разпределение

Случайната величина X наричаме експоненциално разпределена с параметър $\lambda > 0$, $X \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, ако нейната плътност има вида:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Б. Гама разпределение

Случайната величина X наричаме гама разпределена с параметри n, λ: $\lambda > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $X \in \Gamma(n, \lambda)$, ако нейната плътност има вида:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \frac{n}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{n}{\lambda^2}$$

Очевидно $X \in \mathrm{Exp}(\lambda) \iff X \in \Gamma(1, \lambda)$.

Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими експоненциално разпределени с параметър λ, то сумата им има гама разпределение: $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \in \Gamma(n, \lambda)$.

Г. Нормално разпределение

Случайната величина X наричаме нормално разпределна с параметри μ, σ^2, $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ако нейната плътност има вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$EX = \mu, \qquad VarX = \sigma^2$$

► *Пълна вероятност. Пълно математическо очакване*

Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е разделяне на Ω.

Формула за пълната вероятност

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\, \mathbf{P}(H_i)$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{y} \mathbf{P}(A \mid Y = y)\, \mathbf{P}(Y = y) \qquad \text{ако } Y \text{ е дискретна сл.в.}$$

$$\mathbf{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A \mid Y = y)\, f_Y(y) dy \qquad \text{ако } Y \text{ е непрекъсната сл.в.}$$

Формула за пълното математическо очакване

Нека X е дискретна сл.в. и A е събитие с ненулева вероятност. Очакване на X при условие A дефинираме така:

$$E(X \mid A) = \sum_k x_k \, \mathbf{P}(X = x_k \mid A)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_k x_k \, \mathbf{P}(X = x_k \, , A)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_{x_k \in X(A)} x_k \, \mathbf{P}(X = x_k)$$

Нека X е непрекъсната сл.в. с плътност $f(x)$ и A е събитие с ненулева вероятност. Очакване на X при условие A дефинираме така:

$$E(X \mid A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_{X(A)} x f(x) dx$$

В сила е следната **формула за пълното математическо очакване:**

$$EX = \sum_k E(X \mid H_k) \, \mathbf{P}(H_k).$$

Задача 1. Нека $X \in \operatorname{Exp}(\lambda)$ и $Y \in \operatorname{Exp}(\mu)$ са независими сл.в. Да се намери $\mathbf{P}(X < Y)$.

$\triangleright$ $\qquad \mathbf{P}(X < Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X < Y \mid X = x) \, \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(x < Y) \, \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y > x) \, \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu) x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \square$$

Задача 2. Броят на пътно-транспортни произшествия (ПТП) в даден град при дъждовен ден е Поасоново разпределена сл.в. със средно 17, а при сух ден — Поасоново разпределена сл.в. със средно 5. Нека X е броя на ПТП утре. Ако вероятността утре деня да е сух е 0.4, а вероятността да вали дъжд е 0.6, да се намерят:

а) EX;

$$A = \{\text{утре вали дъжд}\}$$

$$EX = E(X \mid A) \, \mathbf{P}(A) + E(X \mid A^c) \, \mathbf{P}(A^c)$$

$$= 17(0.6) + 5(0.4) = 12.2$$

б) $VarX$;

$$EX^2 = E(X^2 \mid A)\,\mathbf{P}(A) + E(X^2 \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c)$$

$$= (17^2 + 17)(0.6) + (5^2 + 5)(0.4) = 195.6$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = 195.6 - (12.2)^2 = 46.76$$

$X \in \mathrm{Po}(\lambda) \Longrightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda$

в) $\mathbf{P}(X \geq 1)$.

$$\mathbf{P}(X \geq 1) = \mathbf{P}(X \geq 1 \mid A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(X \geq 1 \mid A^c)\,\mathbf{P}(A^c)$$

$$= (1 - e^{-17})(0.6) + (1 - e^{-5})(0.4) = 0.997$$

Задача 3. Ръкопис е даден за набор във фирма, в която работят 3 машинописки. Първата машинописка прави случаен брой грешки, като броят им е Посоново разпределен със средно 2.5 на страница от набрания текст. Броят грешки на втората е Поасоново разпределен със средно 3.1 на страница, а на третата машинописка — Поасоново разпределен със средно 3.5 на страница. Ръкописът се набира от една от машинописките, като всяка от тях има равен шанс да го получи за набор. Нека X е броя грешки в набрания текст. Да се намери EX, ако дължината на набрания текст е:

а) 1 страница;

б) 7 страници.

► *Многомерни сл.в.*

(1) Нека X и Y са случайни величини. Функцията

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x,\, Y \leq y)$$

наричаме **съвместна функция на разпределение** на X и Y.

(2) Нека X и Y са дискретни, функцията

$$p_{ij} = p(x_i, x_j) = \mathbf{P}(X = x_i\,,\, Y = x_j)$$

наричаме **съвместно разпределение** на X и Y.

Изпълнени са следните:

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$$

$$Eh(X, Y) = \sum_{i,j} h(x_i, x_j) p_{ij}$$

(3) Нека X и Y са непрекъснати, функцията $f(x,y)$ наричаме **съвместна плътност** на X и Y, ако за всяко $A \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{P}((X,Y) \in A) = \int\int_A f(x,y)dxdy.$$

Изпълнени са следните:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$Eh(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

(4) **Ковариация** на случайните величини X и Y наричаме:

$$cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY.$$

(5) **Корелация (коефициент на корелация)** на случайните величини X и Y наричаме:

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

а) ако X и Y са независими, то $cov(X,Y) = 0, \quad \rho_{XY} = 0.$
б) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
в) $cov(X,X) = VarX$

► *Гранични теореми*

Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots, X$ са случайни величини в пространството $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Казваме, че

(1) редицата X_n клони **почти сигурно** към X, записваме $X_n \xrightarrow{\text{п.с.}} X$, ако

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \ X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \quad \text{при} \quad n \to \infty\right\} = 1;$$

(2) редицата X_n клони **в средно от ред** r към X, записваме $X_n \xrightarrow{L_r} X$, ако $E|X_n^r| < \infty$ и

$$E|X_n - X|^r \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

(3) редицата X_n клони **по вероятност** към X, записваме $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

(4) редицата X_n клони **по разпределение** към X, записваме $X_n \xrightarrow{d} X$, ако за всички x, в които $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ е непрекъсната, е изпълнено

$$\mathbf{P}(X_n \leq x) \longrightarrow \mathbf{P}(X \leq x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ са независими еднакво разпределени сл.в. с очакване $EX_i = \mu$ и дисперсия $VarX_i = \sigma^2$. Тогава при $n \to \infty$ са в сила:

Слаб закон за големите числа

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu.$$

Усилен закон за големите числа

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{п.с.}} \mu.$$

Централна гранична теорема

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \longrightarrow \Phi(a),$$

т.е. сл.в. $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ има стандартно нормално разпределение при $n \to \infty$.

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

1. Случаен процес. Основни понятия

From where we stand, the rain seems random.
If we could stand somewhere else,
we would see the order in it.
T. Hillerman

▶ *Дефиниции*

(1) Нека $\{X_t,\ t \in T\}$ е съвкупност (фамилия) от случайни величини дефинирани над пространството $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и зависещи от параметъра t. Съвкупността $\{X_t,\ t \in T\}$ наричаме **случаен процес**.

(2) T се нарича **параметрично** или **индексно множество**, а t обикновено се интерпретира като време и се нарича времеви параметър. Когато $T = \mathbb{Z}$ или $T = \mathbb{N}$ казваме, че процесът е с **дискретно време** (процесът с дискретно време е всъщност редица от случайни величини), а когато $T = \mathbb{R}_+$ — с **непрекъснато време**. Множеството от стойности на X_t се нарича **пространство на състоянията** и обикновено се означава с S.

Ако фиксираме $\omega = \omega_0 \in \Omega,\ X_t(\omega_0)$ е функция на t, която наричаме **траектория** или реализация на процеса.

Ако фиксираме $t = t_0 \in T,\ X_{t_0}(\omega)$ е случайна величина над пространството $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Процесът X_t ще записваме по някой от следните начини $X_t = X(t) = X_t(\omega) = X(t, \omega)$, ако е с дискретно време: X_n, а ако е с непрекъснато: $\{X_t,\ t \geq 0\}$.

(3) За фиксирано $t \in T,\ X_t$ е сл.в. и нейното очакване ще означаваме с $m(t) = EX_t,\ m(t)$ е функция на t, която наричаме **очакване на процеса**.

(4) За фиксирани t, $s \in T$ ковариацията на случайните величини X_t и X_s означаваме с $cov(X_t, X_s) = EX_tX_s - EX_tEX_s = \gamma(t, s),\ \ \gamma(t, s)$ е функция на t и s, която наричаме **ковариационна функция на процеса**.

(5) За произволно фиксирано n и произволни $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, съвместната функция на разпределение на случайните величини $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \ldots, X_{t_n} < x_n)$$

се нарича **крайномерно разпределение на процеса** X_t.

(6) Процесът $\{X_t,\ t \in T\}$ наричаме **слабо стационарен** (стационарен в широк смисъл) ако за произволни $t, t+h \in T,\ h > 0$

$$EX_t = const \qquad \text{и} \qquad \gamma(t, t+h) = \gamma(0, h) = \gamma^*(h),$$

т.е. очакването е константа и ковариационната функция в произволни моменти зависи само от разликата между моментите.

Условието $\gamma(t, t+h) = \gamma(0, h)$ може да се запише и така $\gamma(t, s) = \gamma(t+h, s+h)$.

(7) Процесът $\{X_t,\ t \in T\}$ наричаме **силно стационарен** (стационарен в тесен смисъл) ако за произволни $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T,\ h > 0$ е изпълнено

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}).$$

т.е. крайномерното разпределение не се променя при отместване със h.

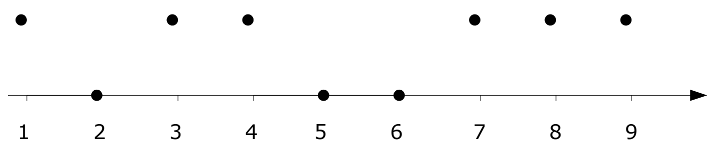
(8) Процес с непрекъснато време, чиито крайномерните разпределения са многомерни нормални, наричаме **Гаусов процес**.

Пример 1. Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ са независими Бернулиево разпределени сл.в. $\mathbf{P}(X_i = 1) = p,\ \mathbf{P}(X_i = 0) = q = 1 - p$. Редицата от сл.в. $\{X_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ е случаен процес, който се нарича процес на Бернули.

а) Да се опише процеса (пространство на състоянията, индексно множество) и да се даде примерна траектория (за $n \leq 9$).

$\triangleright$ X_n е процес с дискретно време, $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$ и приема стойности от множеството $\{0, 1\}$.

На фигурата е изобразена примерна траектория на процес на Бернули:



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\ldots$
X_n	1	0	1	1	0	0	1	1	1	$\ldots$

$\square$

б) Да се намери вероятността за поява на траекторията от (а).

$$\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 1, X_9 = 1) = p^6 q^3$$

Пример 2. Нека X_n е броя пътни инциденти в n-тия ден от годината в София. X_n е процес с дискретно време и множество на състоянията $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Пример 3. Нека X_t е нивото на река Дунав при станция Русе в момента t. X_t е процес с непрекъснато време и приема реални стойности – $S = \mathbb{R}$.

► *Проста случайна разходка*

Karl Pearson coined the term 'random walk' in 1906, and (using a result of Rayleigh) demonstrated the theorem that the most likely place to find a drunken walker is somewhere near his starting point, empirical verification of which is not hard to find.

"A drunk man will find his way home but a drunk bird may get lost forever."

(1) Нека $X_1, X_2, X_3 \ldots$ са независими еднакво разпределени сл.в. и

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X_i = -1) = q = 1 - p.$$

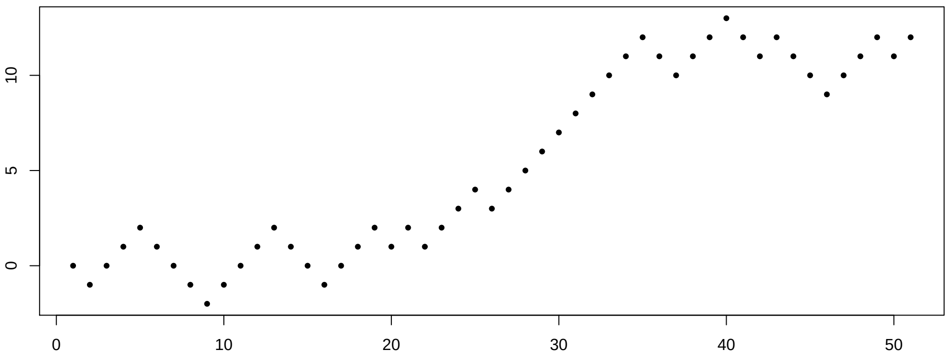
Дефинираме

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

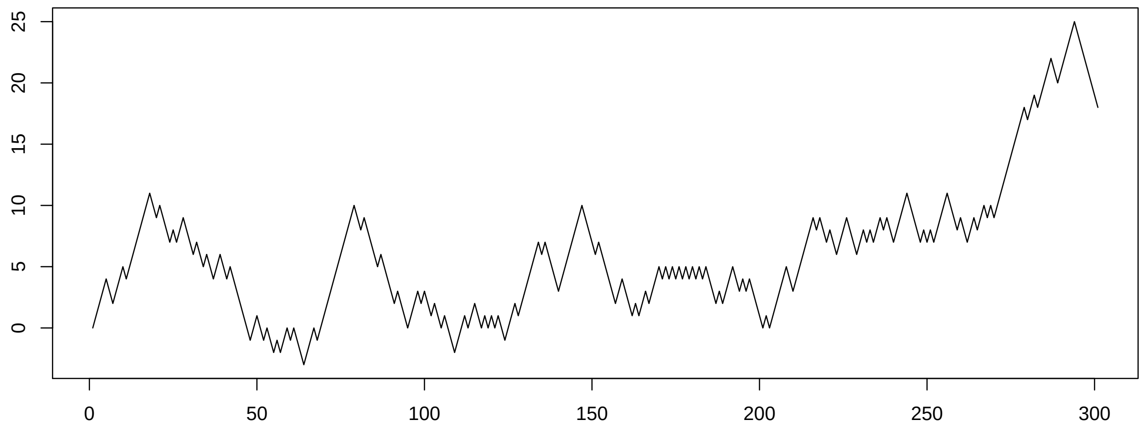
Редицата от сл.в. $\{S_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ се нарича проста случайна разходка (случайно лутане, случайно блуждаене).

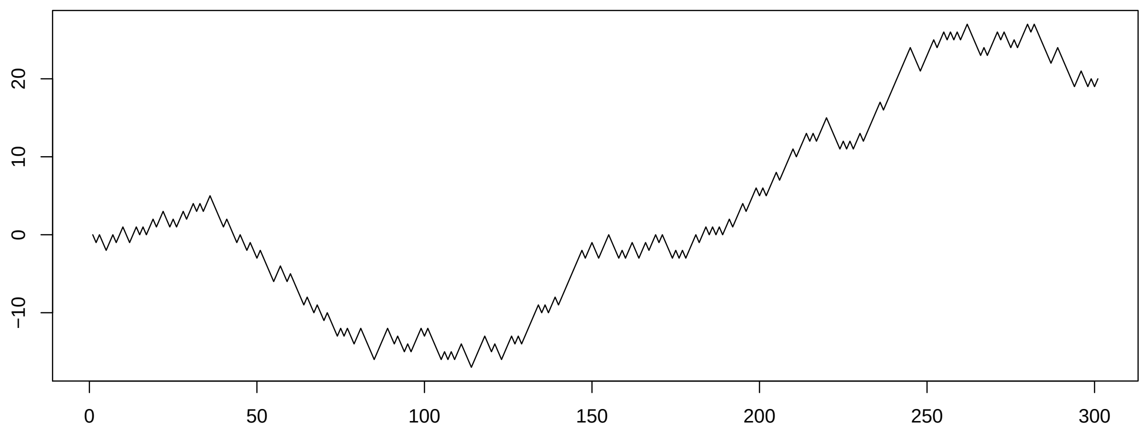
S_n е процес с дискретно време, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и приема стойности от множеството на целите числа $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

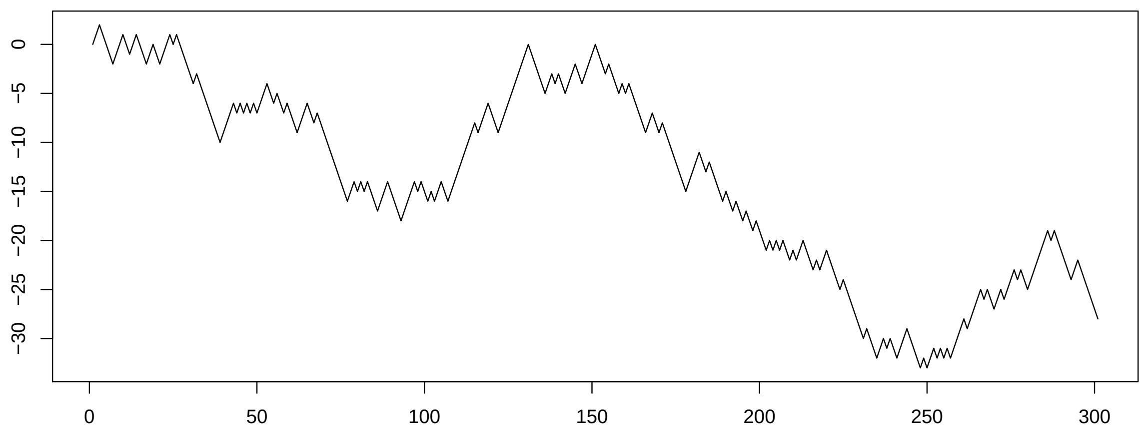
На фигурата е показана примерна траектория на проста случайна разходка, $p = \dfrac{1}{2}$:

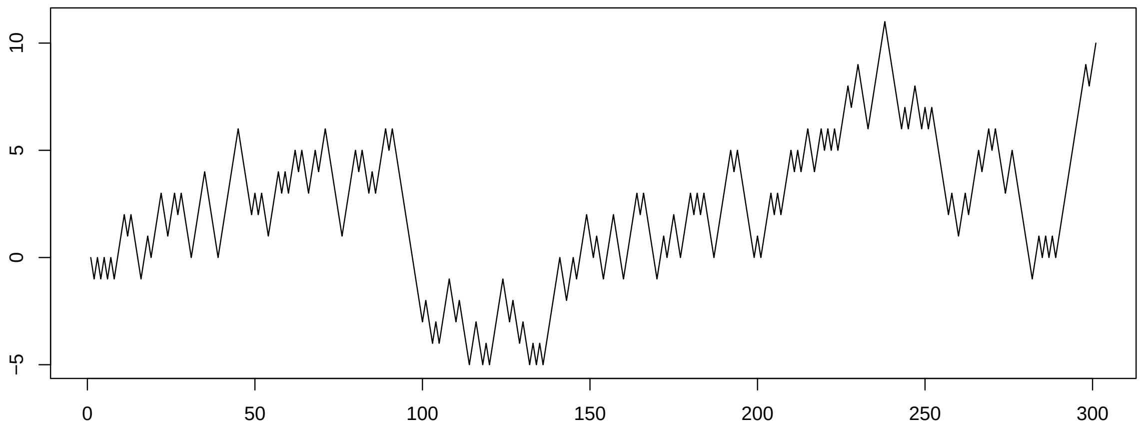


На следващите фигури са дадени няколко примерни траектории на проста случайна разходка, $p = \dfrac{1}{2}$, като точките са свързани с линия:

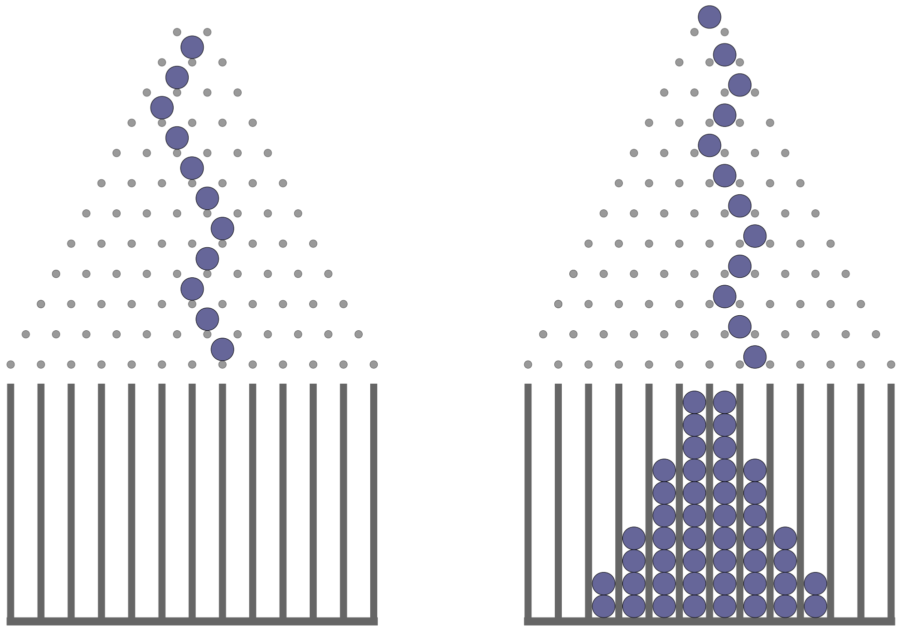

0
5
10
15
20
25
0
50
100
150
200
250
300


−10
0
10
20
0
50
100
150
200
250
300


0
−5
−10
−15
−20
−25
−30
0
50
100
150
200
250
300



Пример 1. (Кутия на Галтон) На фигурата е показан уред, наречен кутия на Галтон (Galton box / board, quincunx, bean machine).



Пример 2. Частица се движи по точките $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на оста x, като започва от 0 и всяка минута прави единична стъпка надясно с вероятност p, или наляво — с вероятност $q = 1 - p$. Нека S_n е координатата на частицата в n-тата минута.

Пример 3. Разглеждаме игра, при която на всеки ход (разиграване) печелим 1 лев с вероятност p или губим 1 лев с вероятност $q = 1 - p$. Нека S_n е общата ни печалба след n-тото разиграване.

Задача 1.1. Да се намери разпределението на S_n, т.е. $\mathbf{P}(S_n = k)$.

$\triangleright$ Първо ще отбележим, че $\mathbf{P}(S_n = k) = 0$, ако $n < |k|$, затова разглеждаме $n \geq |k|$. Нека $N^{(+)}$ е броя $+1$ за n стъпки, а $N^{(-)}$ броя -1 за n стъпки. Тогава

$$n = N^{(+)} + N^{(-)}$$

$$S_n = N^{(+)} - N^{(-)}$$

От горните получаваме

$$N^{(+)} = \frac{n + S_n}{2}$$

Очевидно $N^{(+)} \in \mathrm{Bi}(n, p)$ и $\{S_n = k\} = \{N^{(+)} = \dfrac{n+k}{2}\}$, следователно

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}$$

От $2N^{(+)} = n + S_n$ следва, че n и S_n трябва да са едновременно четни или нечетни, т.е. горната формула е в сила за n и k едновременно четни (нечетни) и $n \geq |k|$, в останалите случаи $\mathbf{P}(S_n = k) = 0$ $\square$

Задача 1.2. Да се намери очакването и дисперсията на простата случайна разходка.

$\triangleright$ Използваме линейното свойство на очакването:

$$ES_n = E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n = nEX_i$$

$$EX_i = (1)p + (-1)q = p - q = 2p - 1$$

$$ES_n = nEX_i = n(p - q)$$

Дисперсията на сума на независими сл.в. е сумата на дисперсиите им:

$$VarS_n = Var(X_1 + \ldots + X_n) = VarX_1 + \ldots + VarX_n = nVarX_i$$

$$EX_i^2 = (1)^2 p + (-1)^2 q = p + q = 1$$

$$VarX_i = EX_i^2 - [EX_i]^2 = 1 - (p - q)^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq$$

$$VarS_n = nVarX_i = 4npq$$

$$p = q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad ES_n = 0, \quad VarS_n = n \qquad \square$$

Задача 1.3. Да се намери ковариационната функция на простата случайна разходка.

$\triangleright$ $\quad cov(S_m, S_n) = E(S_m S_n) - E(S_m)E(S_n) = E(S_m S_n) - mn(p-q)^2$
Нека $n < m$

$$E(S_m S_n) = E(X_1 + \ldots + X_m)(X_1 + \ldots + X_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E(X_i X_j) = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum_{i,j:\, i\neq j} E(X_i)E(X_j)$$
$$= n + (mn - n)(p-q)^2$$

Аналогично, при $m < n$

$$E(S_m S_n) = m + (mn - m)(p-q)^2$$

Следователно можем да запишем

$$E(S_m S_n) = \min(m,n) + [mn - \min(m,n)](p-q)^2$$

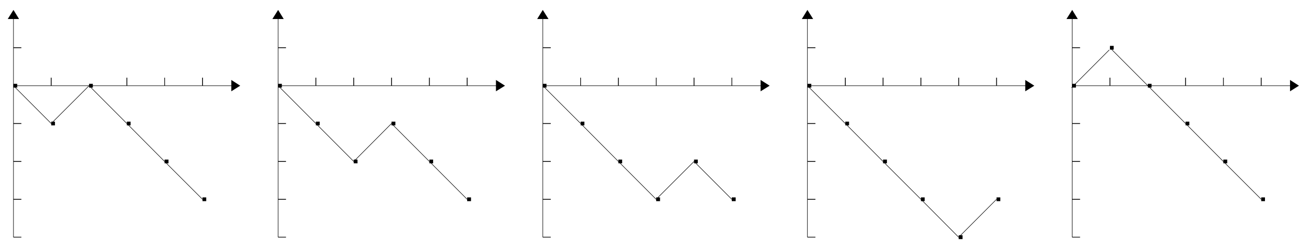
$$cov(S_m, S_n) = \min(m,n) + [mn - \min(m,n)](p-q)^2 - mn(p-q)^2$$
$$= 4pq \min(m,n)$$
$$p = q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad cov(S_m, S_n) = \min(m,n) \qquad \square$$

$$\begin{array}{cccc} X_1X_1 & X_1X_2 & \ldots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2X_2 & \ldots & X_2X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & \ldots & X_nX_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_mX_1 & X_mX_2 & \ldots & X_mX_n \end{array}$$

Задача 1.4. Да се пресметне $\mathbf{P}(S_5 = -3)$. Да се нарисуват всички траектории, които водят до $S_5 = -3$.

$\triangleright$

$$\mathbf{P}(S_5 = -3) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5pq^4$$



□

⟨!⟩ Да пресметнем

$$\mathbf{P}(S_5 = -1) = \binom{5}{2} p^2 q^3 = \frac{5!}{2!3!} p^2 q^3 = 10p^2 q^3$$

т.е. има 10 траектории, които водят до $S_5 = -1$.

Първо достигане на ниво. Нека S_n е проста случайна разходка. Случайната величина

$$T_b = \min\{n : S_n = b\}$$

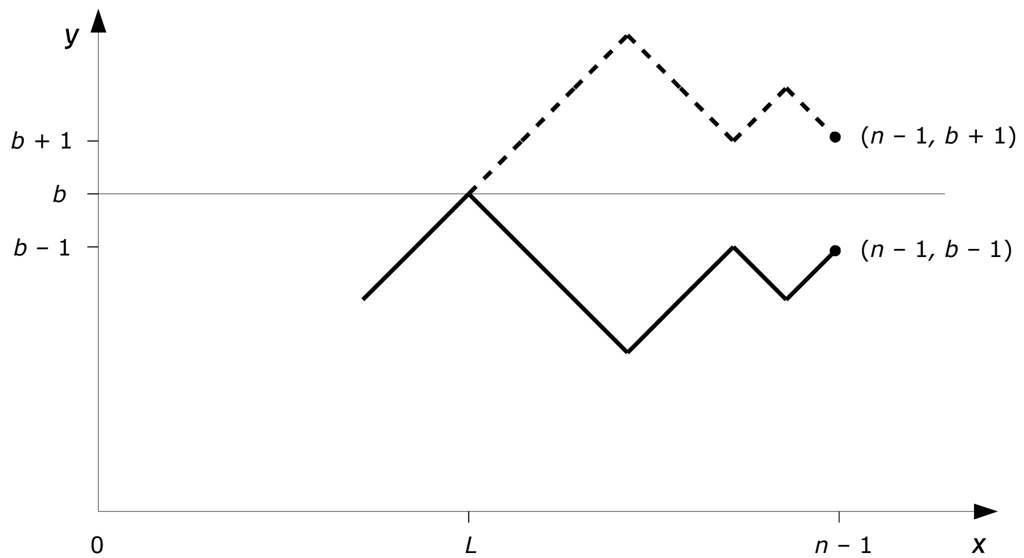
наричаме момент на първо достигане на нивото b.

Целта ни е да намерим $\mathbf{P}(T_b = n)$. Първо ще докажем едно помощно твърдение. Нека с $N_n(0, b)$ означим броя на траекториите на случайната разходка от $(0, 0)$ до (n, b). Разглеждаме $b > 0$.

Твърдение (Принцип на отражението). Нека $N^b_{n-1}(0, b-1)$ е броя на траекториите от $(0, 0)$ до $(n-1, b-1)$, които достигат поне веднъж нивото b. Тогава

$$N^b_{n-1}(0, b-1) = N_{n-1}(0, b+1).$$

▷ Нека разгледаме една траектория от $(0, 0)$ до $(n-1, b-1)$, която поне веднъж достига нивото b. Нека в момента L да е последното достигане на b. Отразяваме частта от траекторията след L в линията $y = b$. Така получаваме траектория от $(0, 0)$ до $(n-1, b+1)$. Обратно, всяка траектория $(0, 0)$ до $(n-1, b+1)$ може да бъде отразена в частта след последното достигане на b и ще се получи траектория от $(0, 0)$ до $(n-1, b-1)$. Така описаното отразяване е взаимно еднозначно изображение и следователно $N^b_{n-1}(0, b-1) = N_{n-1}(0, b+1)$.
□



Твърдение. За момента на първо достигане на ниво е в сила:

$$\mathbf{P}(T_b = n) = \frac{b}{n}\mathbf{P}(S_n = b) = \frac{b}{n}\binom{n}{(n+b)/2} p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2}$$

$\triangleright$ За да се случи събитието $T_b = n$ е необходимо $S_{n-1} = b - 1$ и $X_n = +1$. Има $N_{n-1}(0, b-1)$ траектории от $(0, 0)$ до $(n-1, b-1)$, от които $N^b_{n-1}(0, b-1)$ достигат поне веднъж b. Всяка от тези траектории има вероятност $p^{\frac{1}{2}(n+b)-1} q^{\frac{1}{2}(n-b)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_b = n) &= p\Big[N_{n-1}(0, b-1) - N^b_{n-1}(0, b-1)\Big] p^{\frac{1}{2}(n+b)-1} q^{\frac{1}{2}(n-b)} \\
&= \Big[N_{n-1}(0, b-1) - N_{n-1}(0, b+1)\Big] p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} \\
&= \left[\binom{n-1}{(n+b-2)/2} - \binom{n-1}{(n+b)/2}\right] p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} \\
&= \frac{b}{n}\binom{n}{(n+b)/2} p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} \\
&= \frac{b}{n}\mathbf{P}(S_n = b) \qquad \square
\end{aligned}$$

2. Марковски вериги

The advanced reader who skips parts that appear to him too elementary may miss more than the less advanced reader who skips parts that appear to him too complex.

G. Polya

Понятието *Марковска верига* произлиза от работите на руския математик А.А.Марков (1856 — 1922) от началото на 20. век. Той разглежда редици от опити, в които изходът от всеки опит зависи само от предходния опит. Това е най-простото обобщение на сериите независими опити. Марков изследва редуването на гласни и съгласни букви в поемата *Евгений Онегин* на Пушкин и неговият модел дава добра оценка за честотите на гласни и съгласни. Днес Марковските процеси намират приложение в различни области като биология, физика, компютърни и инженерни науки, икономика и са полезни при анализиране на практически проблеми.

► *Дефиниция*

(1) Нека $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ е случаен процес с дискретно време и крайно или изброимо множество на състоянията S. X_n наричаме **Марковска верига** (МВ), ако за призволни $n \geq 1,\ s_0, s_1, \ldots, s_i, s_j \in S$ е вярно:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_i) = \mathbf{P}(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i).$$

Това условие означава, че е едно и също дали знаем цялата история на процеса до настоящия момент или само състоянието в настоящия момент за да прогнозираме състоянието в бъдеще. Понякога се казва, че *бъдещето не зависи от миналото при фиксирано настояще*. Горното равенство обикновено се нарича Марковско свойство.

(2) Марковската верига наричаме **хомогенна**, ако

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad \forall\, n, i, j.$$

Ще разглеждаме само хомогенни Марковски вериги, освен ако не е казано друго.

(3) Вероятността $\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ наричаме **вероятност за преход** от състояние i в състояние j. Свойството хомогенност означава, че вероятностите за преход не зависят от момента n. Използваме означението $p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

(4) Матрицата $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$ наричаме **матрица на преходните вероятности**. Когато процесът е с безкраен брой състояния, матрицата на преходните вероятности е безкрайна.

За p_{ij} е изпълнено:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad \forall\, i, j.$$

Матрица, която притежава тези свойства се нарича **стохастична**.

Ще изразим вероятността $\mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$ чрез преходните вероятности и разпределението на X_0.

$\triangleright$ Нека $\alpha_i = \mathbf{P}(X_0 = i),\ i \in S$. Прилагаме правилото за умножение на вероятности

$$\mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})\, \mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

/Изпозваме Марковското свойство/

$$= \mathbf{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})\, \mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$= p_{i_{n-1},i_n}\, \mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

/Прилагаме същата процедура за втория множител/

$$= p_{i_{n-1},i_n}\, p_{i_{n-2},i_{n-1}}\, \mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2})$$

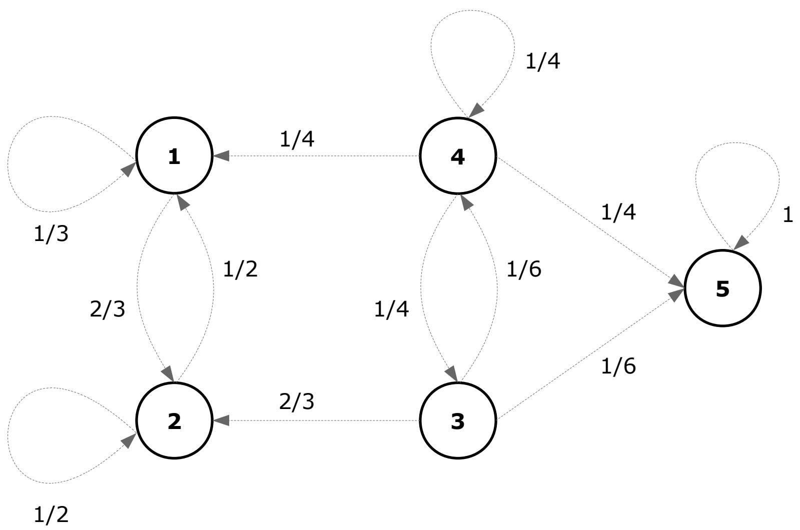
$$\vdots$$

$$\mathbf{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0}\, p_{i_0,i_1} \ldots p_{i_{n-2},i_{n-1}}\, p_{i_{n-1},i_n} \qquad \square$$

Пример 1. Разглежаме Марковска верига с матрица на преходните вероятности:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Всяка МВ може да се изобрази графично като ориентиран граф с тегла (преходните вероятности). Графът на разглежданата МВ изглежда така:



► *Уравнения на Чепмен – Колмогоров*

С $p_{ij}^{(n)}$ означаваме вроятностите за преход за n стъпки, които се дефинират така:

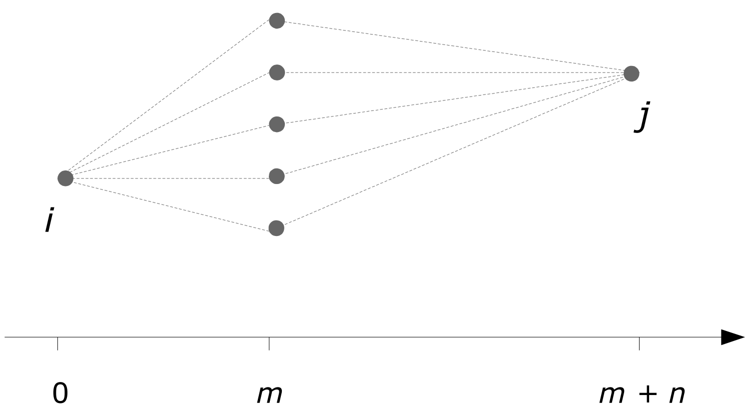
$$p_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \mathbf{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = i)$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

В сила са следните уравнения

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad \forall\, m, n \geq 0, \quad \forall\, i, j,$$

известни като **уравнения на Чепмен – Колмогоров**.



Означаваме $\mathbb{P}^{(n)} = \{p_{ij}^{(n)}\}$ матрицата на преходните вероятности за n стъпки. В матричен вид уравненията на Чепмен – Колмогоров се записват така

$$\mathbb{P}^{(m+n)} = \mathbb{P}^{(m)} \mathbb{P}^{(n)}$$

Не е трудно да се покаже, че $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$, т.е. матрицата на преходите за n стъпки равна на матрицата $\mathbb{P}$, повдигната на n-та степен.

► *Класификация на състоянията*

(1) Състоянието j се нарича **достижимо** от състоянието i, ако $\exists\, n \geq 1 :\ p_{ij}^{(n)} > 0$.

(2) Състоянията i и j се наричат **съобщаващи се** $(i \leftrightarrow j)$, ако i е достижимо от j и j е достижимо от i.

**Забележка 1.* Приемаме, че $p_{ii}^{(0)} = \mathbf{P}(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$ и съответно, че всяко състояние е достижимо от себе си, както и съобщаващо със себе си.

Релацията "$\leftrightarrow$" има следните свойства

(c1) $i \leftrightarrow i$ (рефлексивност)

(c2) $i \leftrightarrow j \Longleftrightarrow i \leftrightarrow j$ (симетричност)
(c3) $i \leftrightarrow k,\ k \leftrightarrow j \Longrightarrow i \leftrightarrow j$ (транзитивност)
следователно "$\leftrightarrow$" е релация на еквивалентност и множеството на състоянията се разбива на непресичащи се класове от съобщаващи се състояния.

(4) Казваме, че една МВ е **неразложима**, ако всеки две състояния са съобщаващи се.

(5) Състоянието j наричаме **поглъщащо**, ако никое друго състояние не може да бъде достигнато от него, т.е. $p_{jj} = 1$.

(6) Състоянието i наричаме **възвратно**, ако $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(7) Състоянието i наричаме **преходно**, ако $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

**Забележка 2.* Едно състояние е преходно, ако може да настъпи момент, след който ще е невъзможно да се върнем някога в това състояние. Това означава, че състоянието i е преходно, тогава и само тогава, когато има състояние j, което е достижимо от i, но i не е достижимо от j $(j \neq i)$. Едно състояние е възвратно, ако не е преходно.

Във веригата от Пример 1, състоянието 4 е преходно, защото ако от него отидем в състояние 1 или в 5, ще е невъзможно някога да се върнем в 4. По подобни съображения състояние 3 също е преходно. Състоянията $1, 2$ и 5 са възвратни.

(8) Състоянието i наричаме възвратно, ако, започвайки от i, очакваният брой връщания в i е безкраен и преходно, ако е краен.

Твърдение. Нека N_i е броя на посещенията на сътояние i, т.е.

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[X_n = i]},$$

тогава

$$E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Доказателство. Като използваме, че $E(\mathbb{I}_A) = \mathbf{P}(A)$, като и линейността на очакването, получаваме

$$E(N_i \mid X_0 = i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[X_n = i]} \mid X_0 = i \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(\mathbb{I}_{[X_n = i]} \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \qquad \square$$

За произволно състояние i означаваме вероятността започвайки от i процесът да се върне някога в i :

$$f_i = \mathbf{P}(X_n = i \text{ за някое } n \geq 1 \mid X_0 = i)$$

Твърдение. В сила са следните връзки:

Състоянието i е възвратно $\iff E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \iff f_i = 1.$

Състоянието i е преходно $\iff E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \iff f_i < 1.$

(9) Дадено свойство на състоянията на МВ наричаме **единно**, ако от това, че i притежава свойството и $i \leftrightarrow j$ следва, че j притежава свойството, т.е. всички състояния от класа съобщаващи се с i го притежават.

Твърдение. Свойствата възвратност и преходност са единни.

Твърдение. В крайна и неразложима МВ всички състояния са възвратни.

(10) **Период** на състоянието i дефинираме така:

$$d(i) = \gcd\{n \geq 1 : \ p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

където gcd = най-голям общ делител.

(11) Ако $d(i) = 1$, наричаме състоянието i **апериодично**.

(12) Ако $d(i) > 1$, наричаме състоянието i **периодично** с период $d(i)$. Това означава, че връщането в i е възможно само по траектории с дължина кратна на $d(i)$.

Пример. Ако разгледаме случайна разходка с отразяващи бариери (вижте задача 2.1), състоянието 0 има период 2, т.е. $d(0) = 2$ (не можем да се върнем в 0 за нечетен брой стъпки).

Твърдение. Периодичността е единно свойство.

(13) Една МВ наричаме **периодична**, ако е неразложима и има периодично състояние.

(14) Състоянието i наричаме **положително възвратно**, ако е възвратно и, започвайки от i, очакваното време, за което процесът ще се върне в i е крайно, т.е. ако

$$\tau_i = \min\{m \geq 1 : \ X_m = i \mid X_0 = i\}, \qquad E\tau_i < \infty.$$

Твърдение. Положителната възвратност е единно свойство.

Твърдение. В крайна МВ възвратните състояния са положително възвратни.

(15) Една МВ наричаме **положително възвратна**, ако е неразложима и има поне едно положително възвратно състояние.

► *Стационарно разпределение*

(1) Векторът $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots)$, $\pi_i \geq 0$ наричаме **стационарно разпределение** на Марковската верига с матрица на преходните вероятности $\mathbb{P}$, ако удовлетворява следните:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \sum_i \pi_i = 1$$

Теорема M1. Ако една МВ е неразложима и положително възвратна, то съществува единствено стационарно разпределение и

$$\pi_j = \frac{1}{E\tau_j}.$$

Теорема M2. Ако една МВ е неразложима, положително възвратна и апериодична, то стационарното разпределение е гранично, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

С други думи, за големи n, вероятността процесът да е в състояние j е приблизително π_j (без значение от състоянието в началния момент), $\mathbf{P}(X_n = j) \longrightarrow \pi_j$.

Теорема M3. Нека X_n е неразложима и положително възвратна МВ и $N_j(n)$ е времето прекарано в j за n стъпки (броя посещения):

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{I}_{[X_k=j]}.$$

Тогава е изпълнено

$$\frac{N_j(n)}{n} \xrightarrow{\text{п.с.}} \pi_j$$

т.е. π_j показва каква част от времето е прекарано в състояние j след достатъчно голям брой стъпки (колко често процесът е бил в състояние j).

* В случай на крайна МВ, горните две теореми могат да бъдат изказани по следния начин:

Теорема M2*. Ако една МВ е крайна, неразложима и апериодична, то стационарното разпределение е гранично, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Теорема M3*. Нека X_n е крайна и неразложима МВ и $N_j(n)$ е времето прекарано в j за n стъпки (броя посещения). Тогава е изпълнено

$$\frac{N_j(n)}{n} \xrightarrow{\text{п.с.}} \pi_j.$$

Теорема М4. Нека Марковската верига с матрица $\mathbb{P}$ има гранично разпределение (възможно е да е различно в зависимост от състоянието в началния момент), т.е. матрицата на преходите за n стъпки $\mathbb{P}^{(n)}$ клони към матрица Π, $\mathbb{P}^{(n)} \longrightarrow \Pi = \{\pi_{ij}\}$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_{ij}.$$

Тогава всеки ред π_{i*} на граничната матрица Π удовлетворява

$$\pi_{i*}\mathbb{P} = \pi_{i*}.$$

В частност, ако са изпълнени условията на теорема М2, всеки ред на матрицата Π съвпада с вектора $\boldsymbol{\pi}$, т.е. граничното разпределение не зависи от състоянието в началния момент.

Теорема М5. Нека X_n е неразложима и положително възвратна МВ и нека $r: S \mapsto \mathbb{R}$ е ограничена функция. Тогава

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r(X_k) = \sum_j r(j)\pi_j$$

Ако $r(j)$ наречем печалба от състояние j, то след достатъчно време, средната печалба за единица време ще бъде $\sum_j r(j)\pi_j$.

Намиране на граничното разпределение на крайна и апериодична МВ:

а) Ако веригата е неразложима, граничното разпределение е единствено (не зависи от състоянието в началния момент). Намираме го като решение на системата

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \textstyle\sum_i \pi_i = 1.$$

б) Ако веригата има *само* един възвратен клас и *поне един* преходен клас, граничното разпределение е съсредоточено във възвратния клас, т.е. $\pi_i = 0$ за всяко преходно състояние i. Може да се намери като решение на системата по-горе *или* да се разгледа само подматрицата от възвратните състояния (и да се реши системата с тази подматрица).

в) Ако веригата има *няколко* възвратни класа и *няма* преходни, граничното разпределение зависи от състоянието в началния момент. За всеки от класовете, може да го намерим като разгледаме съответната му подматрицата. В случая записваме граничните разпределения в матрица, като всеки ред съответства на състоянието в началния момент.

г) Ако веригата има *няколко* възвратни класа и *поне един* преходен клас, граничното разпределение зависи от състоянието в началния момент. При начално състояние във възвратен клас, го намираме като разгледаме съответната подматрицата на класа. При начално състояние в преходен клас, граничното разпределение се намира по следния начин:

Намират се вероятностите, тръгвайки от преходното състояние, в някакъв момент да попаднем във всеки от възвратните класове. Граничното разпределение ще е смес от граничните разпределения на възвратните класове (с тегла – намерените вероятности). Например, нека имаме верига със следните класове: $\{1\}$ - преходен, $\{2,3\}$ - възвратен, $\{4,5\}$ - възвратен. Намерили сме граничните разпределения при започване от възвратните класове: $\pi_{2*} = \pi_{3*} = (0, a, b, 0, 0)$ и $\pi_{4*} = \pi_{5*} = (0, 0, 0, c, d)$. Намерили сме, че вероятността да попаднем във $\{2, 3\}$ е p, а да попаднем в $\{4, 5\}$ е $q = 1 - p$. Тогава $\pi_{1*} = (0, pa, pb, qc, qd)$. Матрицата с граничните разпределения ще бъде:

$$\mathbb{P}^{(n)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & pa & pb & qc & qd \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

▶ *Разклоняващи се процеси*

В начален момент популация се състои от един индивид, който в края на живота си оставя k индивида от същия вид с вероятност p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Всеки от наследниците се възпроизвежда по същите вероятностни закони както родителя (поражда k индивида с вероятност p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$), независимо от останалите индивиди. Преките наследници (децата) на първия индивид образуват първото поколение, броят им означаваме с X_1. Преките наследници на индивидите от първото поколение образуват второто поколение — с X_2 на брой индивида, и т.н. $\Rightarrow X_n$ е броя индивиди от n-тото поколение *($X_n =$ броя на преките наследници на индивидите от $(n-1)$-то поколение)*. Редицата X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ е Марковска верига с множество на състоянията $\{0, 1, 2, \ldots\}$, нарича се **процес на Галтон – Уотсън** и е най-простия пример за разклоняващ се процес. Формално се дефинира така:

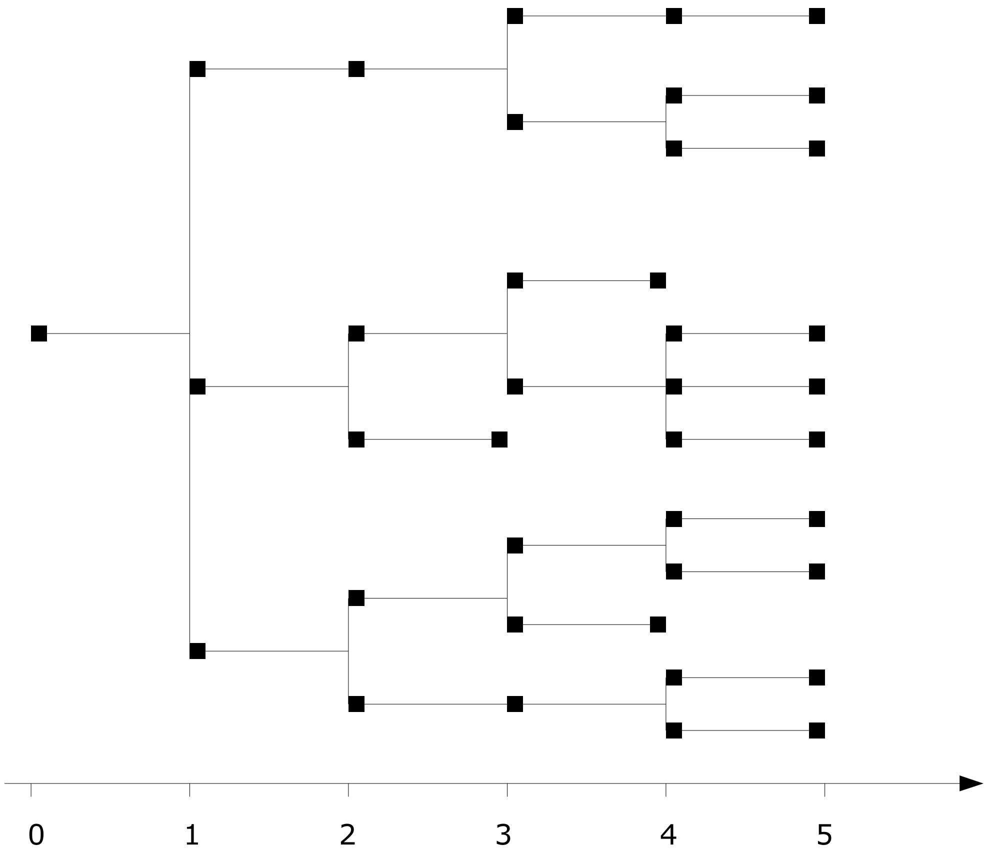
$$\begin{aligned} X_0 &= 1 \\ X_1 &= Z_0^{(1)} \\ X_2 &= Z_1^{(1)} + \ldots + Z_1^{(X_1)} \\ &\vdots \\ X_n &= Z_{n-1}^{(1)} + \ldots + Z_{n-1}^{(X_{n-1})} = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_{n-1}^{(i)} \end{aligned}$$

където $Z_{n-1}^{(i)}$ е броя на наследниците на i-тия индивид от $(n-1)$-то поколение. $Z_{n-1}^{(i)}$ са независими и разпределени както X_1:

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Вероятностите p_k се наричат индивидуални вероятности.

На фигурата е показана траектория на процес на Галтон – Уотсън изобразена като дърво:



Нека $\mu = \sum_k kp_k = EX_1,\ \sigma^2 = \sum_k (k-\mu)^2 p_k = VarX_1$. Изпълнени са следните:

$$EX_n = \mu^n, \quad VarX_n = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1}(\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}), & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases}$$

► *Задачи*

Задача 2.1. (Случайна разходка с отразяващи бариери) Частица се движи по оста x, като прави единична стъпка надясно с вероятност p, или единична стъпка наляво с вероятност $q = 1 - p$. При попадане в 0 се връща в 1, а при попадане в N се връща в $N - 1$. Да се намери матрицата на преходните вероятности.

Задача 2.2. (Случайна разходка с поглъщащи бариери) Разликата от предишната е, че при достигане на 0 или N частицата остава там завинаги. Да се намери матрицата на преходните вероятности.

Задача 2.3. Нека имаме m кутии и неограничен брой топки. Разглеждаме следния експеримент: поставяме една топка в произволна кутия. X_n е броя на кутиите в които има поне една топка след n-тия опит. МВ ли е X_n? Ако да — намерете преходните вероятности.

Отговор:

$p_{jj} = \frac{j}{m}$

$p_{j,j+1} = \frac{m-j}{m}$

Задача 2.4. Две неразличими топки са поставени в две кутии (по една във всяка). Избираме произволно една кутия и преместваме една топка от нея в другата. Ако избраната кутия е празна — не правим нищо. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя на топките в първата кутия след n-тия опит. МВ ли е X_n? Ако да — намерете преходните вероятности.

Задача 2.5. Модел на Еренфест (Ehrenfest). Две кутии съдържат общо m топки, номерирани с числата от 1 до m. Избираме случайно число от 1 до m, намираме топката с избраното число и я преместваме в другата кутия. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя на топките в първата кутия след n-тия опит. МВ ли е X_n? Ако да — намерете преходните вероятности.

Отговор:

$p_{j,j-1} = \frac{j}{m}$

$p_{j,j+1} = \frac{m-j}{m}$

Задача 2.6. Урнова схема на Пойа (Polya). В една кутия има 2 топки – червена и зелена. Вадим произволна топка и я връщаме заедно с още една от същия цвят. Повтаряме многократно описания експеримент. Кои от следните случайни редици са МВ? За тези, които са МВ намерете преходните вероятности.

а) X_n е броя на зелените топките в кутията след n-тия опит;

б) $Y_n = 1$, ако извадената топка (на n-тия опит) е зелена и 0, ако е червена.

Отговор:

$\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = \frac{k}{n+2}$

$\mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = 1 - \frac{k}{n+2}$

Задача 2.7. Три бели и три черни топки са разпределени в 2 кутии така, че във всяка кутия има по три топки. Разглеждаме следния експеримент: изваждаме по една случайно избрана топка от всяка кутия и поставяме топката от първата кутия във втората, а тази от втората в първата. Нека X_n е броя на белите топки в първата кутия след n-тия опит. МВ ли е X_n? Ако да — намерете преходните вероятности.

Отговор:

	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1/9	4/9	4/9	0
2	0	4/9	4/9	1/9
3	0	0	1	0

Задача 2.8.

а) В кутия има една червена и една зелена топки. Вадим произволна топка, премахваме я и връщаме в кутията топка с противоположния цвят. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя червени топки в кутията след n-тия опит. Да се намерят преходните вероятности.

Отговор:

	0	1	2
0	0	1	0
1	1/2	0	1/2
2	0	1	0

б) В кутия има една червена и една зелена топки. Вадим произволна топка и хвърляме монета. Ако се падне ези – връщаме извадената топка, ако се падне тура – премахваме я и връщаме в кутията топка с противоположния цвят. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя червени топки в кутията след n-тия опит. Да се намерят преходните вероятности.

Задача 2.9. В две кутии има общо N топки, номерирани с числата от 1 до N. Разглеждаме следния експеримент: избираме случайно число от 1 до N, намираме топката с избраното число и я изваждаме от кутията, в която се намира. След това избираме произволно една от кутиите (първата кутия избираме с вероятност p, а втората с вероятност q) и поставяме извадената топка в нея. Нека X_n е броя на топките в първата кутия след n-тия опит. Защо X_n е МВ? Да се намерят преходните вероятности.

Отговор:

$p_{i,i+1} = \frac{N-i}{N}p$

$p_{ii} = \frac{i}{N}p + \frac{N-i}{N}q$

$p_{i,i-1} = \frac{i}{N}q$

Задача 2.10. В две кутии има общо N топки. Избираме една от двете кутии по следния начин: ако в първата кутия има k топки, избираме нея с вероятност k/N, а втората с вероятност $(N-k)/N$. След това вадим произволно една топка, като с вероятност p тя е от първата кутия и с вероятност q от втората. Извадената топка поставяме в първоначално избраната кутия. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя на топките в първата кутия след n-тия опит. Защо X_n е МВ? Да се намерят преходните вероятности.

Отговор:

$p_{i,i+1} = \frac{i}{N}q$

$p_{ii} = \frac{i}{N}p + \frac{N-i}{N}q$

$p_{i,i-1} = \frac{N-i}{N}p$

Задача 2.11. Имаме тесте от n карти. Взимаме горната карта и я връщаме на произволно място в тестето (може да я сложим пак най-отгоре). Повтаряме многократно описания експеримент. Нека разгледаме Марковска верига със $n!$ състояния, всяко от които съответства на определена пермутация на картите. Да се намери матрицата на преходните вероятности при $n = 3$.

Отговор:

	123	132	213	231	312	321
123	1/3	0	1/3	1/3	0	0
132	0	1/3	0	0	1/3	1/3
213	1/3	1/3	1/3	0	0	0
231	0	0	0	1/3	1/3	1/3
312	1/3	1/3	0	0	1/3	0
321	0	0	1/3	1/3	0	1/3

Задача 2.12. Един зар се хвърля многократно. Кои от следните случайни редици са МВ. За тези, които са МВ намерете преходните вроятности.

а) $X_n =$ най-голямото число, паднало се до n-тото хвърляне;

б) $Y_n =$ брой шестици за n хвърляния;

в) в момента n, $Z_n =$ брой хвърляния (различни от шестица) след последната паднала се шестица.

Отговор:

а) Ако W_n е резултата от n-тото хвърляне, $X_{n+1} = \max\{X_n, W_{n+1}\}$.

$p_{ij} = 0, j < i; \quad p_{ij} = \frac{i}{6}, j = i; \quad p_{ij} = \frac{1}{6}, j > i$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $p_{ii} = \frac{5}{6}; \quad p_{i,i+1} = \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & & & \\ & 5/6 & 1/6 & & \\ & & 5/6 & 1/6 & \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

в) $p_{i0} = \frac{1}{6}; \quad p_{i,i+1} = \frac{5}{6}$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & & & \\ 1/6 & & 5/6 & & \\ 1/6 & & & 5/6 & \\ \dots & & & & \dots \end{pmatrix}$$

Задача 2.13. Модел на Wright–Fisher. В кутия има m топки, като i са зелени и $m - i$ сини. Имаме и една празна кутия. Вадим топка от кутията и след това я връщаме, като във втората кутия слагаме нова топка със същия цвят. Повтаряме процедурата m пъти. Запълването на втората кутия с m топки разглеждаме като един експеримент. Следващият експеримент се прави, като се вадят топки от втората кутия и се пълни нова (трета) кутия и т.н. Нека X_n е броя на зелените топките във $(n + 1)$-та кутия (след n-тия експеримент).

Да се намерят преходните вероятности на X_n.

Отговор:

$$p_{ij} = \binom{m}{j}\left[\frac{i}{m}\right]^j\left[1-\frac{i}{m}\right]^{m-j}$$

Задача 2.14. В кутия има 3 червени и 3 зелени топки. Вадим две произволни топки. Ако са червена и зелена ги премахваме, а в кутията връщаме 2 сини топки. Ако извадим друга комбинация от топки, ги връщаме в кутията. Повтаряме описания експеримент докато в кутията има само сини топки. Нека X_n е броя червени топки в кутията след n-тия опит. Да се намерят преходните вероятности.

Отговор:

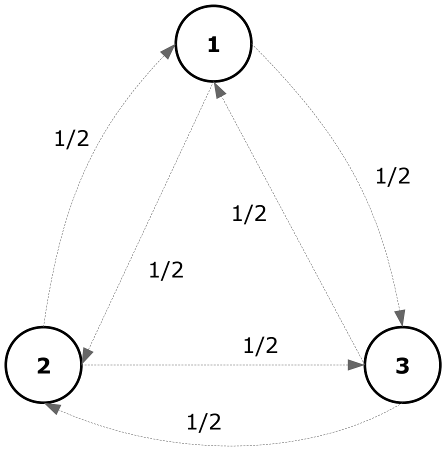
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1/15	14/15	0	0
2	0	2/5	3/5	0
3	0	0	3/5	2/5

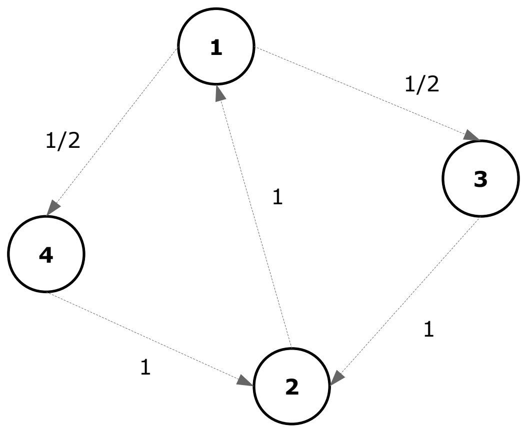
Задача 2.15. Да се класифицират състоянията на МВ:

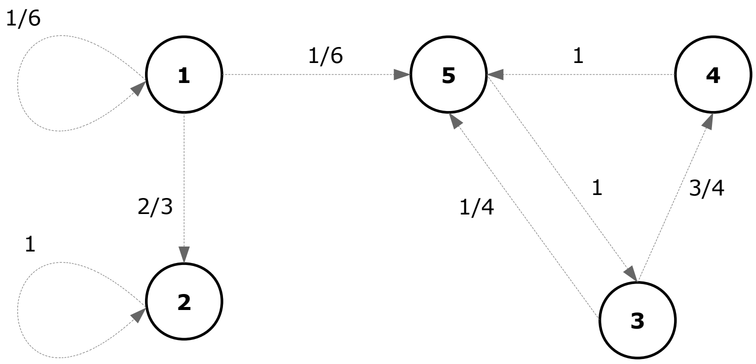
$$\textbf{а)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{б)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{в)}\ \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отговор: **а)** неразложима, апериодична; **б)** неразложима, периодична с период 3; **в)** $\{2\}$ - поглъщащо, $\{1\}$ - преходно, $\{3, 4, 5\}$ - възвратни.



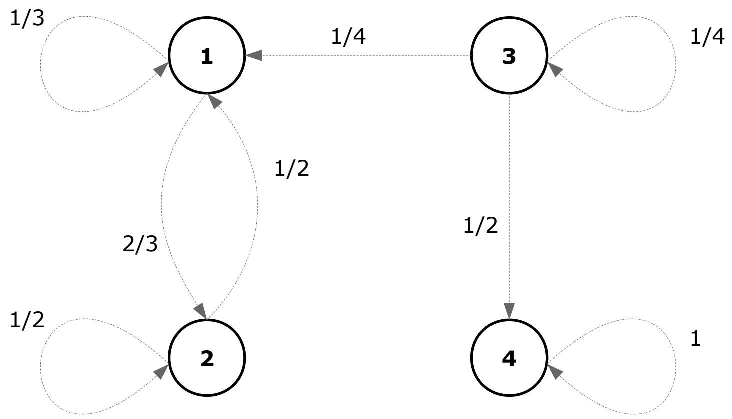




Задача 2.16. Да се класифицират състоянията на МВ:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

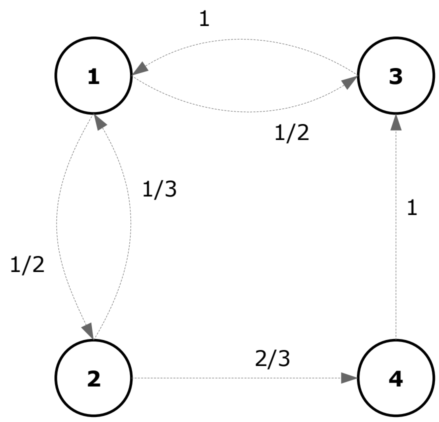
Отговор: $\{4\}$ - поглъщащо, $\{3\}$ - преходно, $\{1,2\}$ - възвратни.



Задача 2.17. Да се класифицират състоянията на МВ. Да се намери стационарното разпределение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отговор: неразложима, периодична с период 2, $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{8}\right)$.

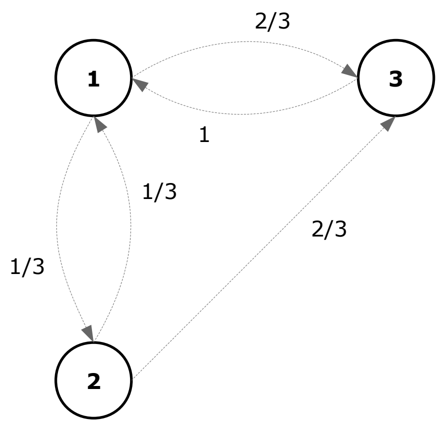


Задача 2.18. Емил често играе баскетбол с приятелите си. Продуктивността му в една игра може да е **1** (отбелязал е 0 или 1 точки), **2** (отбелязал е от 2 до 5 точки) или **3** (отбелязал е повече от 5 точки). Ако в една игра отбележи много точки, в следващата неговите съотборниците му подават по-рядко и той отбелязва по-малко точки. След доста наблюдения, статистикът на отбора заключил, че продуктивността на Емил може да бъде моделирана със следната МВ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) В какъв процент от игрите Емил ще има продуктивност 3 (след голям брой игри)?

$\triangleright$ Рисуваме съответстващия граф:



Веригата е неразложима. Следователно по теорема М3* $\frac{N_3(n)}{n} \longrightarrow \pi_3$.
Решаваме системата:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 = \pi_2 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

И получаваме $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{9}{20}, \frac{3}{20}, \frac{8}{20}\right)$.

$\pi_3 = 8/20 = 0.4 \quad \Longrightarrow \quad$ в 40% от игрите ще има продуктивност **3**. $\square$

б) При продуктивност **3** Емил печели 40, при **2** $\to$ 30, а при **1** $\to$ 20. Каква ще бъде средната му печалба от игра?

$\triangleright$ Прилагаме теорема М5:

$$(20)\tfrac{9}{20} + (30)\tfrac{3}{20} + (40)\tfrac{8}{20} = 29.5 \qquad \square$$

Задача 2.19. Всяка сутрин, излизайки за работа, ако вали и има чадър вкъщи – Иван си взема един, ако не вали – не си взема чадър. Всяка вечер, тръгвайки си от офиса, отново ако вали и има чадър в офиса – си взема един, ако не вали – не си взема чадър. Той има общо 3 чадъра и взема само от тях, ако вали. Предполагаме, че сутринта вали с вероятност p, независимо от миналото; вечерта вали със същата вероятност, независимо от миналото. Колко често ще му се наложи да излезе без чадър, когато вали (т.е. да се намокри)?

$\triangleright$ Разглеждаме Марковска верига със състояния, съответстващи на броя чадъри вкъщи и в офиса: (вкъщи, офис).

	$(0,3)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,0)$
$(0,3)$	q	p	0	0
$(1,2)$	pq	p^2+q^2	qp	0
$(2,1)$	0	pq	p^2+q^2	qp
$(3,0)$	0	0	pq	p^2+q

Веригата е неразложима (проверете). Ще използваме теорема М3*. За стационарното разпределение получаваме $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{q}{3+q}, \frac{1}{3+q}, \frac{1}{3+q}, \frac{1}{3+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\text{Иван се мокри})\\
&\;= \mathbf{P}(\text{вали сутринта})\,\mathbf{P}(\text{няма чадър вкъщи}) + \mathbf{P}(\text{вали вечерта})\,\mathbf{P}(\text{няма чадър в офиса})\\
&\;= \mathbf{P}(\text{вали сутринта})\,\mathbf{P}(\text{няма чадър вкъщи})\\
&\qquad + \mathbf{P}(\text{вали вечерта})\,\mathbf{P}(\text{всички чадъри са били вкъщи})\,\mathbf{P}(\text{сутринта не е валяло})\\
&\;= p\pi_1 + p\pi_4 q \;=\; p\frac{q}{3+q} + pq\frac{1}{3+q} \;=\; \frac{2pq}{3+q} \qquad \square
\end{aligned}$$

Задача 2.20. Къщата на Иван има два входа. Всяка сутрин той излиза на разходка през един от двата входа (равновероятно избира един от двата). На излизане обува чифт обувки, а ако при избрания вход няма нито един чифт обувки, излиза бос. На връщане влиза през един от двата входа (избирайки равновероятно един от двата) и си оставя там обувките. Ако Иван има общо 3 чифта обувки, колко често ще излиза бос?

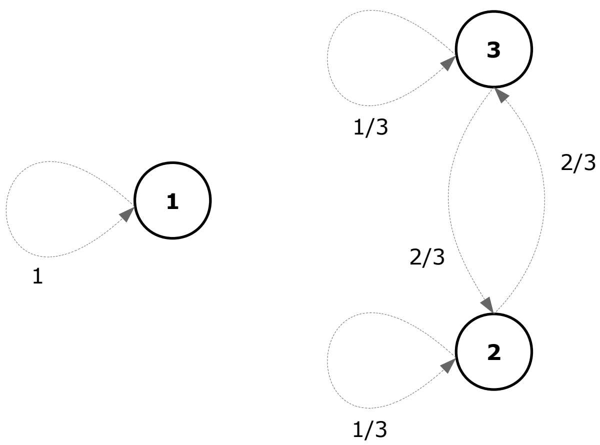
Упътване: Разгледайте МВ с множество на състоянията $S = \{(n_1, n_2) : \; n_1 + n_2 = 3\}$

	$(0,3)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,0)$
$(0,3)$	$3/4$	$1/4$	0	0
$(1,2)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0
$(2,1)$	0	$1/4$	$1/2$	$1/4$
$(3,0)$	0	0	$1/4$	$3/4$

Задача 2.21. Да се намери стационарното разпределение на МВ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

▷ Рисуваме съответстващия граф:



Веригата е апериодична (защо). Разлага се на два класа: $\{1\}$, $\{2,3\}$. И двата класа са възвратни.

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \qquad \iff \qquad \left| \begin{array}{l} \pi_1 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array} \right.$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Решението на системата има вида $\boldsymbol{\pi} = (1 - 2a, a, a)$.
Ако $X_0 = 1$, $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0)$, а ако $X_0 = 2$ или $X_0 = 3$, $\boldsymbol{\pi} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

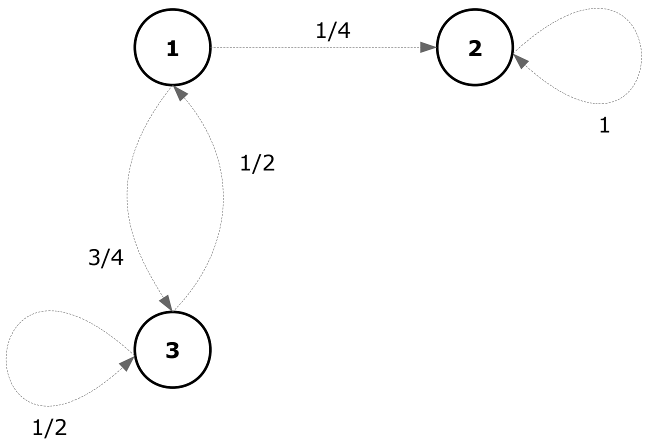
$$\mathbb{P}^{(n)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

Задача 2.22. Да се намери граничното разпределение на МВ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

▷ Рисуваме съответстващия граф:



Веригата е апериодична. Разлага се на два класа $\{1, 3\}$ - преходен, $\{2\}$ - възвратен. Ако тръгнем от някое от състоянията 1 или 3, рано или късно ще напуснем класа и ще останем завинаги в поглъщащото състояние 2. Ако пък тръгнем от състояние 2, завинаги оставаме в него. Така след достатъчно стъпки ще сме с вероятност единица в състояние 2, т.е. граничното разпределение е $(0, 1, 0)$. Същото получаваме като решим системата:

$$\begin{aligned}&(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \\ &\sum_i \pi_i = 1\end{aligned} \iff \left| \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\pi_3 = \pi_1 \\ &\tfrac{1}{4}\pi_1 + \pi_2 = \pi_2 \\ &\tfrac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_3 = \pi_3 \\ &\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{aligned} \right.$$

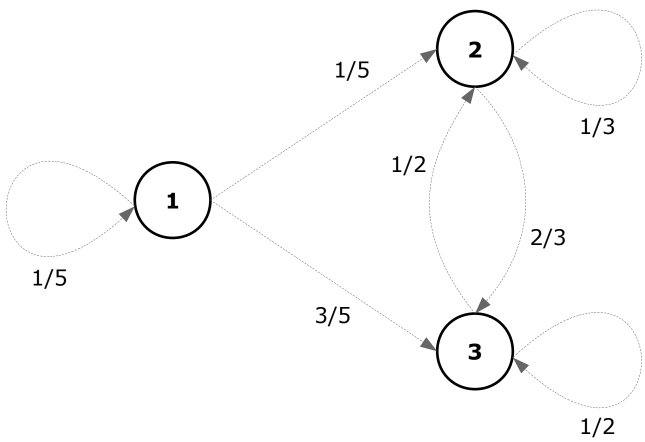
$$\boldsymbol{\pi} = (0, 1, 0)$$

□

Задача 2.23. Да се намери граничното разпределение на МВ.

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 3/5 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

▷ Рисуваме съответстващия граф:



Веригата е апериодична. Разлага се на два класа $\{1\}$ - преходен, $\{2,3\}$ - възвратен. Рано или късно ще попаднем във възвратния клас $\{2,3\}$ и ще останем завинаги в него.

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix}1/5 & 1/5 & 3/5\\ 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix} = (\pi_1,\pi_2,\pi_3) \qquad \sum_i \pi_i = 1 \qquad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{5}\pi_1 = \pi_1 \\ \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array} \right.$$

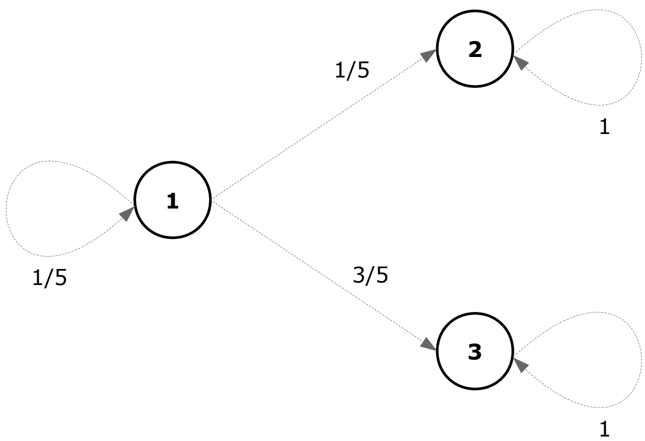
$$\boldsymbol{\pi} = \left(0, \tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{7}\right)$$

□

Задача 2.24. Да се намери граничното разпределение на МВ.

$$\begin{pmatrix}1/5 & 1/5 & 3/5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

▷ Рисуваме съответстващия граф:



Веригата е апериодична. Разлага се на три класа $\{1\}$ - преходен, $\{2\}$ - възвратен и $\{3\}$ - възвратен. Ясно е, че ако тръгнем от състояние 2, оставаме в него завинаги, същото се отнася и за състояние 3. Остава да намерим вероятността, ако тръгнем от състояние 1, в някакъв момент да попаднем в 2. Означаваме тази вероятност с p. Намираме я като решение на уравнението:

$$p = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot p \iff \frac{4}{5}p = \frac{1}{5} \iff p = \frac{1}{4}$$

Вероятността, ако тръгнем от състояние 1, в някакъв момент да попаднем в 3 е $1-p = 3/4$. Така матрицата с граничните разпределения е:

$$\mathbb{P}^{(n)} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

□

Задача 2.25. През един граничен пункт преминават два вида автомобили — леки и товарни. Служителят Иванов забелязал, че около $3/4$ от товарните коли са следвани от леки, а само $1/5$ от леките коли са следвани от товарни. Като се вземе предвид, че на ден преминават значителен брой коли през пункта, да се намери каква част от тях са товарни.

Задача 2.26. Разглеждаме процес на възпроизвеждане на кръвни клетки. В момента 0 има една червена клетка. След една минута тя произвежда една от следните комбинации, с вероятности съответно: $\mathbf{P}(2 \text{ червени клетки}) = 1/4$, $\mathbf{P}(1 \text{ червена и една бяла клетка}) = 2/3$, $\mathbf{P}(2 \text{ бели клетки}) = 1/12$. Всяка червена клетка живее 1 минута и се възпроизвежда по горните правила. Всяка бяла клетка живее 1 минута и не се възпроизвежда. Клетките се възпроизвеждат независимо една от друга. Нека X_n е броя на червени клетки след n минути.

а) Да се намерят EX_n, $VarX_n$.

б) Ако Y_n е процес започващ с 10 червени клетки, всяка от които се възпроизвежда по горните правила, да се намерят EY_n, $VarY_n$.

Задача 2.27. Нека X_n е процес на Галтон – Уотсън с индивидуални вероятности $p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ k = 0, \ldots, N$. Да се намерят EX_n, $VarX_n$.

3. Поасонов процес

All models are wrong but some are useful.
G.P.E. Box

Броящ процес е процес, който преброява появяванията на определено събитие във времето, например пристигането на клиенти в магазин, възникването на повреда в дадена система и т.н. Поасоновият процес е броящ процес, при който времето между две появявания на събитие е експоненциално разпределено.

► *Експоненциално разпределение*

Дефиниция. Казваме, че случайната величина X е експоненциално разпределена с параметър $\lambda > 0$, $X \in \text{Exp}(\lambda)$, ако има функция на разпределение:

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Пораждащата функция на моментите на X е:

$$M(t) = M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda.$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \quad VarX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Експоненциалното разпределение обикновено се използва за моделиране на времето до настъпване на дадено събитие, например време на безотказна работа на машина, време до постъпване на иск в застрахователна компания и др.

Липса на памет. Казваме, че случайната величина X притежава свойството липса на памет (последействие), ако

$$\mathbf{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbf{P}(X > s) \qquad \forall\, t, s \geq 0. \qquad (\star)$$

Нека си мислим, че X е времето до настъпване на дадено събитие. Липсата на памет означава, че ако сме чакали t минути до събитието, вероятността да чакаме още s минути е същата като да чакаме s минути от началния момент, т.е. това, че сме чакали t минути няма значение.

$$(\star) \Longleftrightarrow \frac{\mathbf{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \mathbf{P}(X > s) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(X > s + t) = \mathbf{P}(X > s)\mathbf{P}(X > t)$$

Нека $X \in \text{Exp}(\lambda)$, тогава последното очевидно е изпълнено:

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}$$

т.е. X има липса на памет. Може да се покаже, че експоненциалното разпределение е единственото непрекъснато разпределение с това свойство.

Остатъчно време. Нека $X \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ е времето до настъпване на дадено събитие и запишем свойството липса на памет така:

$$\mathbf{P}(X > s + t_0 \mid X > t_0) = \mathbf{P}(X > s) = e^{-\lambda s}$$

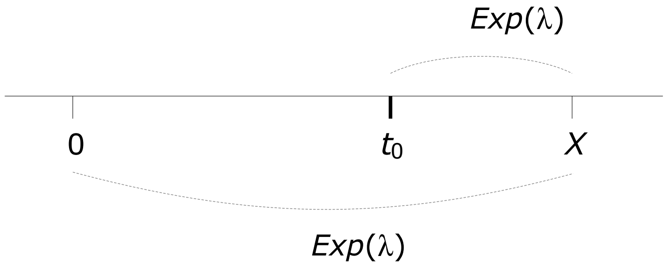
или еквивалентно

$$\mathbf{P}(X - t_0 > s \mid X > t_0) = \mathbf{P}(X > s) = e^{-\lambda s} \qquad (\star\star)$$

Дефинираме случайната величина

$$Y = (X - t_0 \mid X > t_0),$$

която интерпретираме като оставащо време до настъпване на събитието, при условие, че сме чакали време t_0. Равенството $(\star\star)$ означава, че Y е също експоненциално разпределена с параметър λ.



Други свойства

а) Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими и $X_i \in \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, тогава

$$Y = \min[X_1, \dots, X_n] \in \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n).$$

$\triangleright$ $\mathbf{P}(\min[X_1, \dots, X_n] > x) = \mathbf{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \mathbf{P}(X_1 > x) \dots \mathbf{P}(X_n > x)$

$= e^{-\lambda_1 x} \dots e^{-\lambda_n x} = e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x}$ $\square$

б) Нека X_1, X_2 са независими и $X_i \in \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, тогава

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

► *Броящи процеси. Поасонов процес*

Броящ процес. Процесът $N(t), t \geq 0$ наричаме броящ процес ако $N(t)$ е броя на сбъдванията (появяванията) на дадено събитие в интервала $[0, t]$.

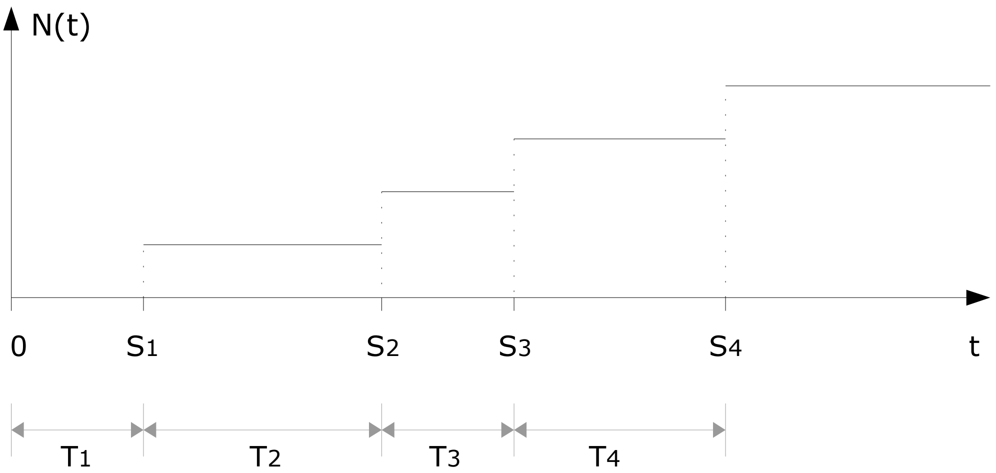
За краткост ще казваме, че $N(t)$ е броя събития в $[0, t]$. Нека T_1 е времето до настъпване на първото събитие, а T_n е времето между $(n-1)$-то и n-то събитие. Случайните величини $T_1, T_2, T_3, \dots$ наричаме времена между сбъдванията на събитията (*interarrival times*).

Дефинираме $S_n = T_1 + \ldots + T_n,\ n = 1, 2, 3, \dots$; очевидно S_n е момента на настъпване на n-то събитие (времето на чакане до n-то събитие).

Броящият процес може да се дефинира така: $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[S_n \leq t]}$.

Поасонов процес. Един броящ процес наричаме Поасонов процес, ако времената между сбъдванията на събитията са независими и експоненциално разпределени случайни величини, т.е. $T_1, T_2, T_3, \ldots \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, независими. Параметърът λ наричаме степен или интензивност.

На фигурата е показана примерна траектория на Поасонов процес:



Свойства на Поасоновия процес:

а) Независими нараствания — броевете събития в непресичащи се интервали са независими сл.в.

б) Стационарни нараствания — броят събития във всеки интервал с дължина t е еднакво разпределен $\mathrm{Po}(\lambda t)$, т.е. зависи само от дължината на интервала.

$$\mathbf{P}\{N(t+s) - N(s) = k\} = \mathbf{P}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

в) Условно разпределение на времената за появяване: $\mathbf{P}\{T_1 < s \mid N(t) = 1\} = \dfrac{s}{t}$

г) За $s < t$ и $k \leq n$ е изпълнено:

$$\mathbf{P}\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \binom{n}{k}\frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} = \binom{n}{k}\left[\frac{s}{t}\right]^k \left[\frac{t-s}{t}\right]^{n-k}$$

Друга дефиниция на Поасонов процес е: броящ процес, който (i) има независими нараствания; (ii) броят събития във всеки интервал с дължина t има Поасоново разпределение с параметър λt и (iii) $N(0) = 0$.

Поасоново разпределение. Казваме, че сл.в. X има Поасоново разпределение с параметър $\lambda > 0$, $X \in \text{Po}(\lambda)$, ако

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$EX = VarX = \lambda$$

► *Съставен Поасонов процес*

Сума на случаен брой случайни величини. Нека X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ са н.е.р. сл.в. и $EX_i = \mu$, $VarX_i = \sigma^2$, нека N е неотрицателна целочислена сл.в. независима от X_i. Случайната величина

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

наричаме *сума на случаен брой случайни величини*. За нея е вярно:

$$ES_N = \mu EN, \quad VarS_N = \sigma^2 EN + \mu^2 VarN$$

▷ За очакването на S_N получаваме:

$$ES_N = \sum_n E(X_1 + \ldots + X_N \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) = \sum_n E(X_1 + \ldots + X_n)\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= \sum_n n\mu\,\mathbf{P}(N = n) = \mu \sum_n n\,\mathbf{P}(N = n) = \mu EN \qquad \square$$

▷ За да намерим дисперсията първо ни трябва:

$$E(S_N^2) = \sum_n E[(X_1 + \ldots + X_N)^2 \mid N = n]\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= \sum_n E(X_1 + \ldots + X_n)^2\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= \sum_n [nEX_i^2 + (n^2 - n)\mu^2]\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= EX_i^2 \sum_n n\,\mathbf{P}(N = n) + \mu^2 \sum_n (n^2 - n)\,\mathbf{P}(N = n)$$
$$= EX_i^2 EN + \mu^2 E(N^2 - N)$$

За дисперсията на S_N се получава:

$$VarS_N = E(S_N^2) - [ES_N]^2 = EX_i^2 EN + \mu^2 E(N^2 - N) - \mu^2 [EN]^2$$
$$= (\sigma^2 + \mu^2)EN + \mu^2(EN^2 - EN) - \mu^2[EN]^2$$
$$= \sigma^2 EN + \mu^2 VarN \qquad \square$$

Когато $N \in \text{Po}(\lambda) \Rightarrow ES_N = \lambda\mu$, $VarS_N = \lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2$

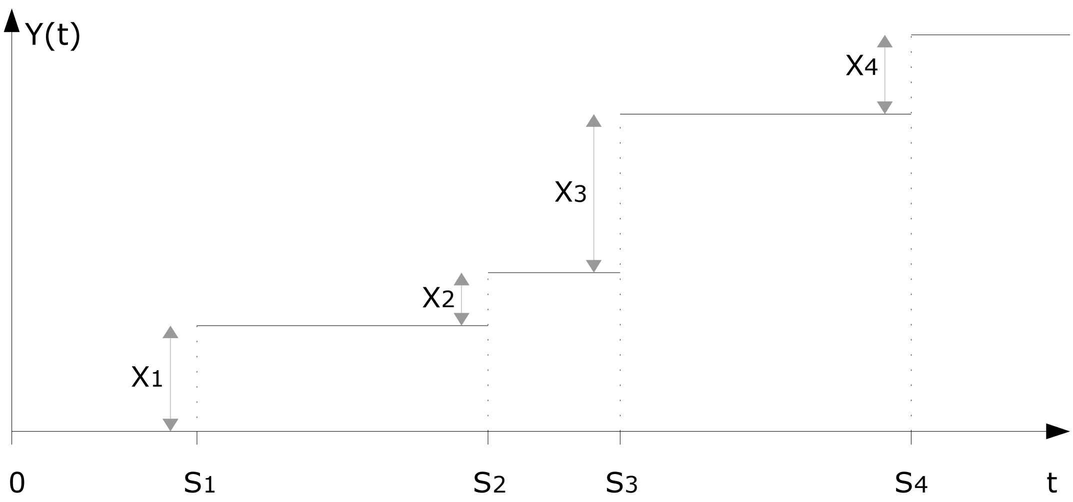
Съставен Поасонов процес. Нека $N(t)$ е Поасонов процес, а $\{X_i\}$ са н.е.р. сл.в. независими от $N(t)$, процесът

$$Y(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)}$$

се нарича съставен Поасонов процес. Нека $EX_i = \mu$, $VarX_i = \sigma^2$, тогава

$$EY(t) = \lambda t\mu, \quad VarY(t) = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$$

На фигурата е дадена примерна траектория на съставен Поасонов процес:



Да разгледаме $t \in [S_3, S_4)$, т.е. до момента t са настъпили точно 3 събития и $N(t) = 3$, следователно $Y(t) = X_1 + X_2 + X_3$.

▶ *Обединяване и разделяне на Поасонови процеси*

Твърдение 1. Нека $N_1(t)$ и $N_2(t)$ са независими Поасонови процеси със степени съответно λ_1 и λ_2. Тогава $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ е Поасонов процес със степен $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Твърдение 2. Нека $N(t)$ е Поасонов процес със степен λ и всяко събитие се класифицира като събитие от тип 1, с вероятност p или като събитие от тип 2, с вероятност $1 - p$, независимо от останалите събития. Нека $N_i(t)$, $i = 1, 2$, е броя събития от тип i в интервала $[0, t]$. Тогава $N_1(t)$ и $N_2(t)$ са независими Поасонови процеси със степени съответно λp и $\lambda(1 - p)$.

▶ **Пространствен Поасонов процес*

Да разгледаме редица (изброимо множество) от точки в пространството $\mathbb{R}^3$. Нека $N_{\mathcal{B}}$ е броя точки в областта $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Предполагаме, че $N_{\mathcal{B}}$ е случайна величина. Съвкупността от сл.в. $\{N_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3\}$ е Поасонов процес ако:

(c1) За произволни непресичащи се области $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ случайните величини $N_{\mathcal{B}}$ и $N_{\mathcal{C}}$ са независими;

(c2) За произволна област $\mathcal{B}$ с краен обем, сл.в. $N_{\mathcal{B}}$ е Поасоново разпределена с параметър $\lambda v_{\mathcal{B}}$, $N_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Po}(\lambda v_{\mathcal{B}})$, където $v_{\mathcal{B}}$ е обема на $\mathcal{B}$.

Пространствен Поасонов процес възниква, например, при разглеждане на пространственото разпространение на животни или растения, на бактерии върху предметно стъкло и т.н.

Пример. Колко стафидки трябва да сложим в тестото, така че с вероятност 0.99 във всяка кифличка да попадне поне една стафидка.

$\triangleright$ Нека $\mathcal{B}$ е парче от тестото и $N_{\mathcal{B}}$ е броя стафидки в $\mathcal{B}$. Предполагаме, че $\{N_{\mathcal{B}}\}$ е Поасонов процес. Нека v е обема на една кифличка, а $\mathcal{C}$ е произволна част от тестото с обем v. Тогава

$$\{\text{поне една стафидка във всяка кифличка}\} = \{N_{\mathcal{C}} \geq 1\}$$

$$\mathbf{P}(N_{\mathcal{C}} \geq 1) \;=\; 1 - \mathbf{P}(N_{\mathcal{C}} = 0) \;=\; 1 - e^{-\lambda v} \geq 0.99 \quad \Longleftrightarrow$$

$$e^{-\lambda v} \leq 0.01 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda v \geq \ln 100 = 4.6$$

Т.е. трябва да предвидим по 4.6 стафидки на кифличка (λv е средния брой стафидки на кифличка) $\square$

► *Задачи*

Задача 3.1. Хора имигрират в дадена държава съгласно Поасонов процес със степен 1 на ден.

а) Какво е очакваното време до пристигане на 7-мия имигрант?

$$E(T_1 + \ldots + T_7) = 7\frac{1}{\lambda} = 7$$

б) Каква е вероятността времето между 7-мия и 8-мия имигрант да е повече от 2 дни?

$$\mathbf{P}(T_8 > 2) = e^{-2\lambda} = 0.133$$

Задача 3.2. Когато е на работа, Деси понякога си разлива кафето върху бюрото. Предполагаме, че времето между две разливания е експоненциално разпределено със средно 30 дни.

а) Каква е вероятността Деси да си разлее кафето след повече от 30 дни от предишното разливане?

$$T_i \in \mathrm{Exp}(\lambda),\; ET_i = 30 = 1/\lambda \implies \lambda = 1/30$$

$$\mathbf{P}(T_i > 30) = e^{-\lambda 30} = e^{-\frac{1}{30}30} = e^{-1}$$

б) Ако първото разливане е на 50-тия ден, каква е вероятността в следващите 15 дни Деси да не си разлива кафето?

$$\mathbf{P}(T_2 > 15) = e^{-\frac{1}{30}15} = e^{-\frac{1}{2}}$$

в) Ако през първите 20 дни няма разливане, да се намери очакваното време до второто разливане.

$$E(T_1 + T_2 \mid T_1 > 20) = E(T_1 \mid T_1 > 20) + ET_2$$
$$= 20 + E(T_1 - 20 \mid T_1 > 20) + ET_2 = 20 + 30 + 30 = 80$$

г) Ако през първите 60 дни има едно разливане, каква е вероятността то да е настъпило през първите 20 дни?

$$\mathbf{P}\{T_1 < 20 \mid N(60) = 1\} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

д) Ако през първите 120 дни има три разливания, каква е вероятността точно две да са през първите 50 дни?

$$\mathbf{P}\{N(50) = 2 \mid N(120) = 3\} = \binom{3}{2}\left[\frac{50}{120}\right]^2\left[\frac{70}{120}\right]^1$$

е) Да се намери очаквания брой разливания за една година (360 дни).

$$N(t) \in \mathrm{Po}(\lambda t) \implies E[N(360)] = \lambda\,360 = \frac{1}{30}360 = 12$$

ж) При разливане на кафето върху бюрото е възможно да има щети за фирмата. Ако щетата при едно разливане е сл.в. със средно 10 лв. да се намери очакването на сумата, която фирмата трябва да плати за покриване на щетите от разлятото от Деси кафе за една година.

$$Y(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)} \qquad \text{/съставен Пасонов процес/}$$
$$E[Y(360)] = \lambda\,360\,EX_1 = 12 \cdot 10 = 120$$

Задача 3.3. Клиент отива в офис на банка с едно работещо гише, на което имало 5 други клиенти, чакащи на опашка и се наредил накрая. Ако времето за обслужване на един клиент е експоненциално с параметър λ, да се намери очакваното време, през което клиентът ще бъде в офиса на банката.

Задача 3.4. Всеки ден Иван пътува в градския транспорт без билет. Понякога се случва да се качи контрольор и да го глоби. Предполагаме, че времето между две последователни глобявания на Иван е експоненциално разпределено със средно 50 дни.

а) Каква е вероятността да не бъде глобен за период от 2 месеца?

б) Каква е вероятността да бъде глобен поне веднъж за период от 3 месеца?

в) Да се намери средния брой глобявания за 1 година.

Задача 3.5. Клиенти пристигат в банка в съответствие с Поасонов процес със степен λ.

а) Ако един клиент е пристигнал през първия час, каква е вероятността да е пристигнал през първите 20 минути?

б) Ако двама са пристигнали през първия час, каква е вероятността двамата да са дошли през първите 20 минути?

в) Ако двама са пристигнали през първия час, каква е вероятността поне един да е пристигнал през първите 20 минути?

Задача 3.6. Коли преминават през дадена точка от шосе в съответствие с Поасонов процес със степен $\lambda = 3$ на минута. Ако Деси иска да пресече в тази точка без да се огледа, каква е вероятността да не бъде блъсната от кола? (Предполагаме, че тя пресича за s секунди и ще бъде блъсната, ако е на шосето когато преминава кола.)

Задача 3.7. Коли преминават през дадена точка от улица в съответствие с Поасонов процес със степен λ. Ирена пресича улицата в тази точка, ако види, че в следващите T минути няма да дойде кола. Да се намери вероятността да чака 0 минути.

Задача 3.8. Клиенти пристигат в офис на банка в съответствие с Поасонов процес със степен $\lambda = 2$ на час.

а) Да се намери очакваното време до пристигане на втория клиент.

б) Ако за първия час са пристигнали петима клиенти, каква е вероятността в следващите 2 часа да пристигнат 10 клиенти?

в) Ако за първия час не е имало клиенти, каква е вероятността в следващия един час също да няма?

г) Каква е вероятността 7-мият клиент да пристигне след повече от половин час от 6-тия?

д) Ако за първите 2 часа е пристигнал един клиент, каква е вероятността да е пристигнал през първите 15 минути?

е) Да се намери очаквания брой клиенти за 5 часа.

Задача 3.9. Времето на безотказна работа на машина е експоненциално разпределено със средно 30 дни. При повреда машината се заменя веднага с нова, от същия вид.

а) Каква е вероятността да няма повреда през първите 45 дни?

б) Ако през първите 90 дни е имало 2 повреди, каква е вероятността през следващите 90 дни да има повече от 2 повреди?

в) Ако през първите 35 дни няма повреда, какво е очакваното време до третата повреда?

г) Да се намери очаквания брой повреди за 1 година.

д) Цената на една машина е сл.в. със средно 100 лв. и дисперсия 50 лв. Да се намери очакваната сума, която трябва да се плати за машини за една година.

Задача 3.10. Застрахователна компания изплаща обезщетения по даден вид полици в съответствие с Поасонов процес със степен $\lambda = 5$ на седмица. Сумата изплащана по една полица има очакване 200 лв. и дисперсия 200 лв. Да се намери очакването и дисперсията на общата сума, която ще изплати застрахователната компания за 4 седмици.

Задача 3.11. Във фирма постъпват поръчки в съответствие с Поасонов процес със степен $\lambda = 2$ на седмица. Приходът от една поръчка е сл.в. със средно 8000 лв. и дисперсия 6000 лв. Да се намери очакването и дисперсията на приходите от поръчки за 4 седмици.

Задача 3.12. В офис на фирма има принтер. При изразходване на тонера, той веднага се сменя с нов. Предполагаме, че времето между две смени е експоненциално разпределено със средно 60 дни.

а) Каква е вероятността тонера да бъде сменен след повече от 60 дни от поставянето му?

б) Ако първата смяна е на 90-тия ден, каква е вероятността в следващите 30 дни тонера да не се изразходи?

в) Ако през първите 50 дни няма смяна, да се намери очакваното време до втората смяна.

г) Ако през първите 60 дни има една смяна, каква е вероятността тя да е през първите 10 дни?

д) Ако през първите 90 дни има 3 смени, каква е вероятността 2 от тях да са през първите 30 дни?

е) Да се намери очаквания брой тонери, които трябва да смени фирмата за една година (360 дни).

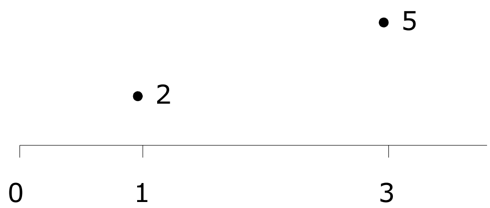
ж) Ако цената на един тонер е сл.в. със средно 200 лв. и дисперсия 100 лв. да се намери очакването и дисперсията на сумата, която фирмата трябва да плати за тонери една година.

Задача 3.13. В офис има автомат за вода. Да предположим, че времето между две последователни наливания е експоненциално разпределено със средно $1/2$ час.

а) Ако през първите 3 часа има само едно наливане, каква е вероятността то да се е случило през първия един час?

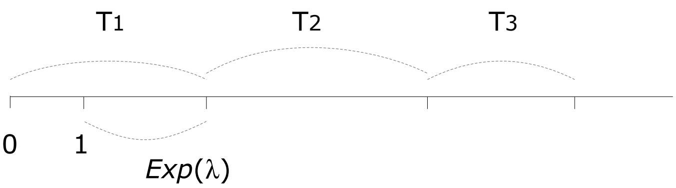
$$\mathbf{P}\{N(1) = 1 \mid N(3) = 1\} = \tfrac{1}{3}$$

б) Ако през първите 3 часа има 5 наливания, каква е вероятността точно 2 да са през първия един час?



$$\mathbf{P}\{N(1) = 2 \mid N(3) = 5\} = \binom{5}{2}\left[\frac{1}{3}\right]^2\left[\frac{2}{3}\right]^3$$

в) Ако през първия един час, никой не си е наливал вода, да се намери очакваното време до третото наливане.

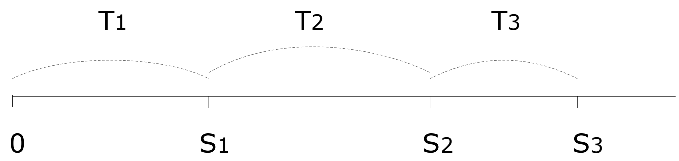


$ET_i = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \implies \lambda = 2$

$E(T_1 + T_2 + T_3 \mid T_1 > 1) = E(T_1 \mid T_1 > 1) + ET_2 + ET_3 =$

$1 + \frac{1}{\lambda} + 2(\frac{1}{\lambda}) = 1 + \frac{3}{\lambda} = 1 + \frac{3}{2} = 2.5$

г) Да се намери вероятността времето между второто и третото наливане да е повече от 1 час.

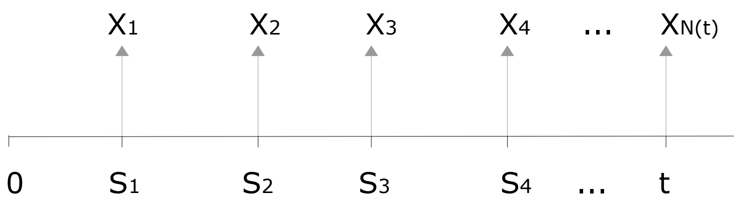


$\mathbf{P}(T_i > 1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-2}$

д) Ако през първите 2 часа няма наливания, каква е вероятността в следващите 2 часа също да няма?

$\mathbf{P}\{N(4) - N(2) = 0 \mid N(2) = 0\} = \mathbf{P}\{N(2) = 0\} = e^{-\lambda \cdot 2} = e^{-4}$

е) Нека количеството вода при едно наливане е сл.в. със средно 0.3 литра и дисперсия 0.1 литра. Да се намери очакването и дисперсията на количеството налята вода за 9 часа.



$Y(t) = X_1 + \ldots + X_{N(t)}$ /съставен Пасонов процес/

$E[Y(9)] = \lambda * 9 * 0.3 = 2 * 9 * 0.3 = 5.4$

ж) Ако количеството вода при едно наливане е винаги 0.3 литра, да се намери вероятността количеството налята вода за 9 часа да е по-малко от 6 литра.

$$\mathbf{P}\{0.3\,N(9) < 6\} = \mathbf{P}\{N(9) < 20\}$$

$$= \mathbf{P}\{N(9) = 0\} + \mathbf{P}\{N(9) = 1\} + \ldots + \mathbf{P}\{N(9) = 19\} = \sum_{k=0}^{19} e^{-9\lambda}\,\frac{(9\lambda)^k}{k!}$$

Задача 3.14. Машинен елемент от подводница има експоненциално разпределено време на живот със средно 4 месеца. При повреда се сменя с нов, от същия вид. Ако се предвижда едногодишно пътуване, с колко такива машинни елементи трябва да се запасим, така че вероятността да стигнат да е (поне) 0.95 ? Може да използвате вероятностите:

$$X \in \mathrm{Po}(3) \implies \mathbf{P}(X \le 5) = 0.916082;\ \mathbf{P}(X \le 6) = 0.9664915$$

$$X \in \mathrm{Po}(48) \implies \mathbf{P}(X \le 59) = 0.9476717;\ \mathbf{P}(X \le 60) = 0.9604999$$

$\triangleright$ Нека $N(t)$ е броя повреди за време t. Времето между две повреди е експоненциално разпределено $\implies$ $N(t)$ е Поасонов процес. За параметъра λ (на месец) намираме:

$$ET_i = \frac{1}{\lambda} = 4 \implies \lambda = \frac{1}{4}$$

Броят повреди за една година е $N(12)$. Търсим онова k, за което:

$$\mathbf{P}(N(12) \le k) \ge 0.95$$

Знаем, че $N(12) \in \mathrm{Po}\big(\frac{1}{4}12\big)$. От вероятностите, дадени по-горе, $\mathbf{P}(N(12) \le 6) = 0.966$, следователно $k = 6$, т.е. трябват ни 6 машини. $\square$

Задача 3.15. В застрахователна компания постъпват искове по 2 типа застаховки. Нека $N_i(t)$ е броя искове от тип i до момента t и нека $N_1(t)$ и $N_2(t)$ са независими Поасонови процеси със степени $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 2$ на седмица.

а) Каква е вероятността за 2 седмици да постъпят общо 5 иска?

б) Ако през първите 2 седмици са постъпили общо 4 иска, каква е вероятността те да са от тип 1?

$$\mathbf{P}\{N_1(t) = k \mid N_1(t) + N_2(t) = n\} = \binom{n}{k}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right]^k \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right]^{n-k}$$

Задача 3.16. Клиенти пристигат в офис на банка в съответствие с Поасонов процес със степен $\lambda = 3$ на час. Всеки от пристигащите клиенти внася пари с вероятност p.

а) Каква е вероятността за първите 3 часа само 1 клиент да внесе пари?

б) Ако през първите 5 часа са пристигнали 10 клиента, каква е вероятността само 5 от тях да са внесли пари?

Задача 3.17. Времето за поправка на даден уред е експоненциално разпределено със средно 2 часа.

а) Каква е вероятността поправката да продължи повече от 3 часа?

$\triangleright$ Нека T е времето за поправка на уреда. От условието $ET = 2 = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/2$ и за търсената вероятност получаваме:

$$\mathbf{P}(T > 3) = e^{-\lambda 3} = e^{-\frac{1}{2}3} = e^{-\frac{3}{2}} \qquad \square$$

б) Ако са изминали 2 часа от началото на поправката, каква е вероятността поправката да отнеме още поне 1 час?

$\triangleright$ От липсата на памет на експоненциалното разпределение получаваме:

$$\mathbf{P}(T > 3 \mid T > 2) = \mathbf{P}(T > 1) = e^{-\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} \qquad \square$$

Задача 3.18. Времето на живот на радио е експоненциално разпределено със средно 10 години. Ако Тошо има 10-годишно радио, каква е вероятността, че то ще работи след още 10 години?

Задача 3.19. Провежда се тест за времето на живот на електрически крушки. Едновременно са включени 50 крушки. Предполага се, че времената на живот на крушките са независими и експоненциално разпределени със средно 1000 часа. Да се намери очакваното време до първото изгаряне на крушка.

Задача 3.20. Времето на живот на машина е експоненциално разпределено с параметър μ. Сервизен екип проверява дали машината е в изправност в случайни моменти съгласно Поасонов процес със степен λ. Ако при такава проверка се установи, че машината е повредена, тя се сменя незабавно с нова, от същия тип. Да се намери средното време между две последователни смени на машина.

Отговор: $1/\mu + 1/\lambda$

Задача 3.21. Пламен отишъл в магазин на мобилен оператор, за да си плати сметката за телефон. Имало две работещи каси, на всяка от които имало по един клиент. Той изчакал и бил обслужен на първата каса, която се освободила, след което си тръгнал. Ако времето за обслужване от i-тата каса е $\text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, да се намерят:

а) Очакваното време на чакане, докато се освободи каса.

$\triangleright$ Нека $R_i, i = 1, 2$ е оставащото време за обслужване на клиента на каса i след момента на пристигане на Пламен. Естествено предполагаме, че времената за обслужване на двете каси са независими. От липсата на памет на експоненциалното разпределение $R_i \in \text{Exp}(\lambda_i)$.

Времето на чакане, докато се освободи каса ще бъде $\min[R_1, R_2]$. Знаем, че $\min[R_1, R_2] \in \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Тогава търсеното очакване е

$$E(\min[R_1, R_2]) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad \square$$

б) Очакваното време, прекарано в магазина.

$\triangleright$ Нека S е времето, за което е обслужен Пламен. Следователно времето, прекарано в магазина ще бъде $\min[R_1, R_2] + S$. Ще пресметнем ES по формулата за пълното очакване:

$$ES = E(S \mid R_1 < R_2)\, \mathbf{P}(R_1 < R_2) + E(S \mid R_1 \geq R_2)\, \mathbf{P}(R_1 \geq R_2)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}.\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2}.\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$= \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Така търсеното очакване е:

$$E(\min[R_1, R_2] + S) = E(\min[R_1, R_2]) + ES = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{3}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad \square$$

в) Нека $ER_1 = 3$ минути, а $ER_2 = 5$ минути. Да се намерят очакванията от а) и б).

$\triangleright$ За λ_1 и λ_2 имаме:

$$ER_1 = 3 = 1/\lambda_1 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1/3$$

$$ER_2 = 5 = 1/\lambda_2 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 1/5$$

Заместваме в горните формули и полчаваме, че очакваното време на чакане е

$$E(\min[R_1, R_2]) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{15}{8} = 1.875$$

и очакваното време, прекарано в магазина е

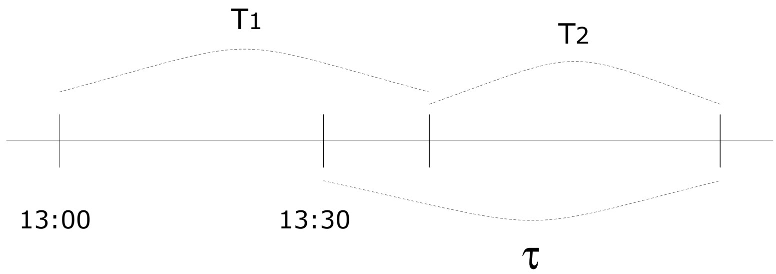
$$E(\min[R_1, R_2] + S) = \frac{3}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 3\left(\frac{15}{8}\right) = 5.625 \qquad \square$$

Задача 3.22. Лекар има 2 уговорени прегледа — в 13:00 и в 13:30. Продължителността на един преглед е експоненциално разпределена сл.в. със средно 30 минути. Предполагаме, че двамата пациенти са дошли навреме и ако прегледът на първия продължи повече от 30 минути, вторият изчаква докато свърши. Да се намери очакваното време, което вторият пациент е прекарал в медицинския център, ако си е тръгнал веднага след края на прегледа.

$\triangleright$ Нека T_1 е продължителността на прегледа на първия пациент, а T_2 на втория. Времето прекарано от втория в медицинския център ще е продължителността на прегледа му плюс времето, през което е чакал първия (ако прегледът на първия е повече от 30 минути), т.е.

$$\tau = \begin{cases} T_2, & \text{ако } T_1 \le 30 \\ T_1 - 30 + T_2, & \text{ако } T_1 > 30 \end{cases}$$

На фигурата е онагледен случаят, когато прегледът на първия е повече от 30 минути:



По формулата за пълното математическо очакване:

$$E\tau = E(T_2 \mid T_1 \le 30)\, \mathbf{P}(T_1 \le 30) + E(T_1 - 30 + T_2 \mid T_1 > 30)\, \mathbf{P}(T_1 > 30)$$

Използваме, че T_1 и T_2 са независими:

$$E(T_2 \mid T_1 \le 30) = ET_2 = 30$$

$$E(T_2 \mid T_1 > 30) = ET_2 = 30$$

Знаем, че случайната величина $(T_1 - 30 \mid T_1 > 30)$ е експоненциално разпределена със средно 30 минути:

$$E(T_1 - 30 + T_2 \mid T_1 > 30) = E(T_1 - 30 \mid T_1 > 30) + E(T_2 \mid T_1 > 30) = 30 + 30 = 60$$

$$\mathbf{P}(T_1 > 30) = e^{-\lambda 30} = e^{-\frac{1}{30}30} = e^{-1}$$

Окончателно получаваме:

$$E\tau = 30(1 - e^{-1}) + 60e^{-1} = 30(1 + e^{-1}) = 41.036 \qquad \square$$

Задача 3.23. В пощенски офис има две работещи каси. Когато Иван влиза в пощата вижда, че на едната каса е Петко, а на другата Гошо. Той изчакал и бил обслужен на първата каса, която се освободила, след което си тръгнал. Ако времето за обслужване от i-тата каса е $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, да се намери вероятността Иван да си тръгне последен от тримата.

Отговор:

$$\mathbf{P}(A^c) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2$$

Задача 3.24. Нека $N(t)$ е Поасонов процес със степен λ. Да означим със S_n времето на настъпване на n-тото събитие. Намерете:

а) $E(S_4)$

б) $E(S_4 \mid N(1) = 2)$

в) $E(N(4) - N(2) \mid N(1) = 3)$

г) $E(N(4) - N(1) \mid N(1) = 3)$

Задача 3.25. Нека $N(t)$ е Поасонов процес със степен λ. Намерете:

а) $\mathbf{P}\{N(7) > N(5)\}$

б) $\mathbf{P}\{N(2) = 0,\, N(4) = 3\}$

в) $E(N(5) \mid N(3) = 4)$

г) $E(N(3) \mid N(5) = 4)$

Задача 3.26. Нека $N(t)$ е Поасонов процес със степен $\lambda = 2$. Намерете:

а) $\mathbf{P}\{N(1) = 2\}$

б) $\mathbf{P}\{N(1) = 2,\, N(3) = 6\}$

в) $\mathbf{P}\{N(1) = 2 \mid N(3) = 6\}$

г) $\mathbf{P}\{N(3) = 6 \mid N(1) = 2\}$

Задача 3.27. Нека $N(t)$ е Поасонов процес със степен λ. Да означим със S_n времето на настъпване на n-тото събитие. Намерете:

а) $E(S_5)$

$$E(S_5) = E(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) = 5 \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{\lambda}$$

б) $E(S_5 \mid N(2)=3)$

$$E(S_5 \mid N(2)=3) = 2 + \frac{2}{\lambda}$$

в) $E(N(6)-N(4) \mid N(2)=3)$

$$E(N(6)-N(4) \mid N(2)=3) = 2\lambda$$

г) $E(N(4)-N(2) \mid N(2)=3)$

$$E(N(4)-N(2) \mid N(2)=3) = 2\lambda$$

д) $E(N(8) \mid N(5)=2)$

$$E(N(8) \mid N(5)=2) = 2 + 3\lambda$$

е) $E(N(5) \mid N(8)=4)$

$$E(N(5) \mid N(8)=4) = \sum_{k=0}^{4} k \binom{4}{k} \left[\frac{5}{8}\right]^k \left[\frac{3}{8}\right]^{4-k} = 4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{2}$$

$$N(5) \mid N(8)=4 \in \mathrm{Bi}(4, 5/8) \implies E(N(5) \mid N(8)=4) = 4 \cdot \frac{5}{8}$$

ж) $\mathbf{P}\{N(2)=3\}$

$$\mathbf{P}\{N(2)=3\} = e^{-2\lambda}\,\frac{(2\lambda)^3}{3!}$$

з) $\mathbf{P}\{N(2)=3,\, N(5)=7\}$

$$\mathbf{P}\{N(2)=3,\, N(5)=7\} = \mathbf{P}\{N(2)=3,\, N(5)-N(2)=7-3\}$$

$$= \mathbf{P}\{N(2)=3\}\,\mathbf{P}\{N(5)-N(2)=7-3\} = e^{-2\lambda}\,\frac{(2\lambda)^3}{3!} \cdot e^{-3\lambda}\,\frac{(3\lambda)^4}{4!}$$

и) $\mathbf{P}\{N(2)=3 \mid N(5)=7\}$

$$\mathbf{P}\{N(2)=3 \mid N(5)=7\} = \binom{7}{3} \left[\frac{2}{5}\right]^3 \left[\frac{3}{5}\right]^4$$

к) $\mathbf{P}\{N(5)=7 \mid N(2)=3\}$

$$\mathbf{P}\{N(5)=7 \mid N(2)=3\} = \mathbf{P}\{N(5)-N(2)=7-3\} = e^{-3\lambda}\,\frac{(3\lambda)^4}{4!}$$

л) $\mathbf{P}\{N(5) > N(2)\}$

$$\mathbf{P}\{N(5) > N(2)\} = \mathbf{P}\{N(5)-N(2) > 0\} = 1 - \mathbf{P}\{N(5)-N(2)=0\} = 1 - e^{-3\lambda}$$

м) $\mathbf{P}\{N(5)=6 \mid N(1)=2,\, N(3)=3\}$

$$\mathbf{P}\{N(5)=6 \mid N(1)=2,\, N(3)=3\} = \mathbf{P}\{N(5)=6 \mid N(3)=3\}$$

$$= \mathbf{P}\{N(5)-N(3)=6-3\} = e^{-2\lambda}\,\frac{(2\lambda)^3}{3!}$$

4. Винеров процес

The human mind treats a new idea the same way
the body treats a strange protein; it rejects it.
P.B. Medawar

Винеровият процес (наричан още Брауново движение) е често използван при вероятностно моделиране, например за анализ на цените на финансовите пазари. Първоначално, английският ботаник Робърт Браун през 1827 наблюдава хаотичното движение на малки частици във флуид и в негова чест, явлението е наречено Брауново движение. Физическо обяснение на това движение прави Айнщайн през 1905. Математическа дефиниция като случаен процес е дадена от Норберт Винер през 1918.

► *Гаусови процеси*

(1) Нормално разпределение. Случайната величина X наричаме нормално разпределена с параметри μ, σ^2, $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ако има плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Полезни са следните:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$$

$$X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Longrightarrow \ aX + b \in \mathcal{N}(a\mu + b, \ a^2\sigma^2)$$

$$X \in \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ Y \in \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \text{ независими} \quad \Longrightarrow \ X + Y \in \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

(2) Многомерно нормално разпределение. Нека $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{N}(0,1)$, независими. Ако съществуват константи a_{ij}, μ_i, за които:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}Z_1 + \ldots + a_{1n}Z_n + \mu_1 \\ &\vdots \\ X_m &= a_{m1}Z_1 + \ldots + a_{mn}Z_n + \mu_m, \end{aligned}$$

тогава казваме, че $(X_1, \ldots, X_m)$ има многомерно нормално разпределение.

$$EX_i = \mu_i, \qquad VarX_i = a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2$$

$$cov(X_i, X_j) = \ldots$$

(3) Многомерно нормално разпределение. Казваме, че $(X_1, \ldots, X_m)$ има многомерно нормално разпределение, ако всяка линейна комбинация $(a_1X_1 + \ldots + a_mX_m)$ е нормално разпределена сл.в., $(a_1, \ldots, a_m) \neq (0, \ldots, 0)$.

(4) Процес с непрекъснато време, чиито крайномерните разпределения са многомерни нормални, наричаме **Гаусов процес**.

► *Винеров процес — дефиниции, свойства*

(1) Процес с независими нараствания. Казваме, че X_t е процес с независими нараствания, ако за произволни $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайните величини

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}},\ X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}},\ \ldots\ , X_{t_2} - X_{t_1}$$

са независими в съвкупност.

(2) Процес със стационарни нараствания. Казваме, че X_t е процес със стационарни нараствания ако за произволни t, s случайната величина $X_{t+s} - X_t$ е еднакво разпределена с $X_s - X_0$ (не зависи от t).

(3) Случайният процес $\{W_t,\ t \geq 0\}$ се нарича **Винеров процес**, ако са изпълнени условията:

(b1) $W_0 = 0$;

(b2) има стационарни и независими нараствания;

(b3) $W_t \in \mathcal{N}(0,\ \sigma^2 t)$;

Когато $\sigma = 1$ процесът се нарича стандартен Винеров процес (W_t/σ е стандартен ВП).

(4) Случайният процес $\{W_t,\ t \geq 0\}$ се нарича **Винеров процес**, ако са изпълнени условията:

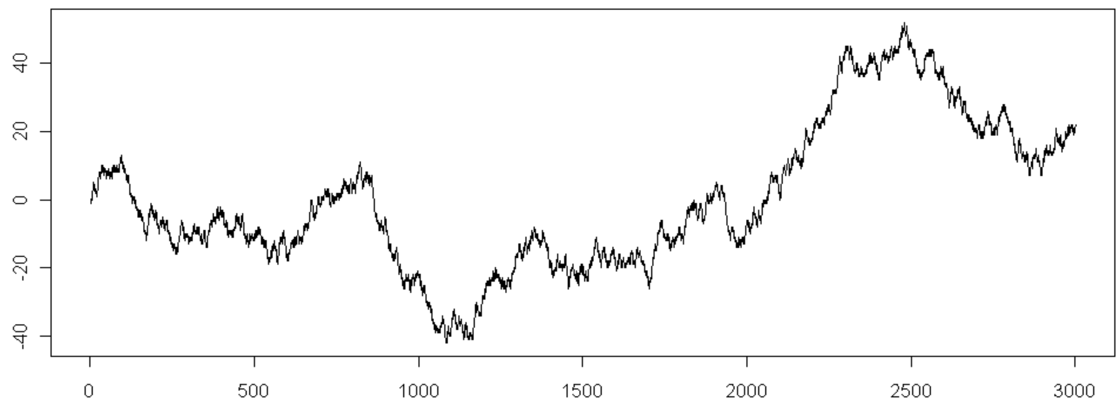
(c1) $W_0 = 0$;

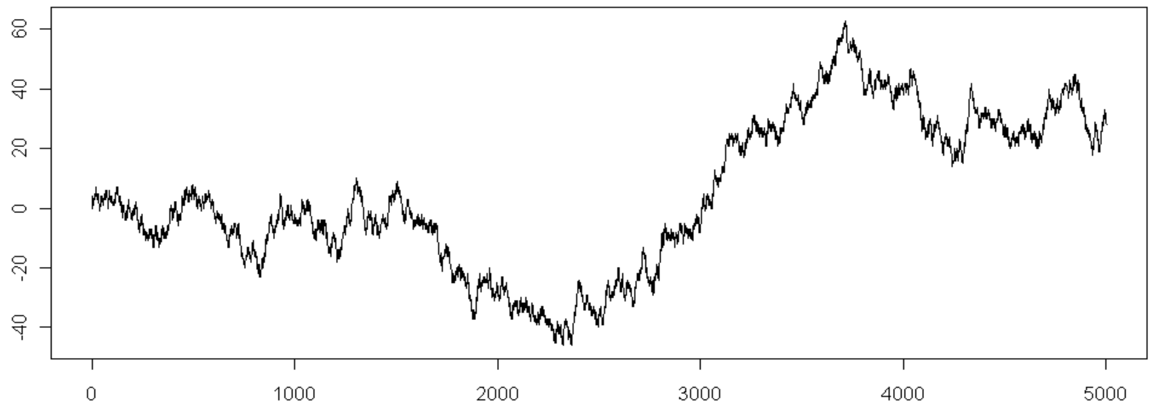
(c2) $EW_t = 0$;

(c3) W_t е Гаусов процес;

(c4) $cov(W_t, W_s) = \sigma^2 \min(t, s)$.

На фигурата е показана примерна траектория на Винеров процес:





⟨!⟩ *Дефиниции (3) и (4) са еквивалентни.*
⟨!⟩ $W_t - W_s \in \mathcal{N}(0,\, \sigma^2|t-s|)$.

Случайна разходка и Винеров процес. Разглеждаме симетрична проста случайна разходка. Да предположим, че ускоряваме процеса, като правим по-малки стъпки за по-малки времеви интервали. За време Δt правим стъпка с дължина Δx наляво или надясно. С $X(t)$ означаваме координатата в момента t

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \ldots + X_{[t/\Delta t]})$$

където $X_i = 1$, ако i-тата стъпка с дължина Δx е надясно и $X_i = -1$, ако е наляво, а $[t/\Delta t] = \max(k:\ k \le t/\Delta t)$ и

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

$$EX_i = 0, \quad VarX_i = 1$$

$$\Rightarrow EX(t) = 0, \quad VarX(t) = (\Delta x)^2[t/\Delta t]$$

Нека $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ и $\Delta t \to 0$, тогава $VarX(t) \to \sigma^2 t$ и от ЦГТ

$$X(t) \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2 t).$$

От свойствата на случайната разходка следва, че $X(t)$ има стационарни и независими нараствания. Съгласно дефиниция (3), полученият "граничен процес" е Винеров.

Свойство 1. Винеровият процес е Гаусов.

$\triangleright$ Нека $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и $a_1, \ldots, a_n$ са произволни реални числа. Искаме да проверим дали случайната величина $a_1 W_{t_1} + \ldots + a_n W_{t_n}$ има нормално разпределение.

$$a_1 W_{t_1} + a_2 W_{t_2} + \ldots + a_n W_{t_n}$$

$$= a_1(W_{t_1} - W_0) + a_2(W_{t_2} - W_{t_1} + W_{t_1} - W_0) + \ldots + a_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}} + W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}} + \ldots + W_{t_1} - W_0)$$

$$= c_1(W_{t_1} - W_0) + c_2(W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + c_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

Случайната величина $c_1(W_{t_1} - W_0) + c_2(W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + c_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ е нормално разпределена, тъй като е линейна комбинация на независими нормално разпределени случайни величини (независими нараствания) $\Longrightarrow a_1 W_{t_1} + \ldots + a_n W_{t_n}$ има нормално разпределение.

Константите c_i имат вида:

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&c_2 = a_2 + \ldots + a_n \\
&\quad \ldots \\
&c_n = a_n
\end{aligned}$$

Свойство 2. Всеки процес с независими нараствания е Марковски.
В частност, Винеровият процес е Марковски.

$\triangleright$ Нека $s_1 < s_2 < \ldots < s_m < s < t$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X(t) \le a \mid X(s_1) = x_1, \ldots, X(s_m) = x_m, X(s) = x\} \\
&= \mathbf{P}\{X(t) - X(s) \le a - x \mid X(s_1) = x_1, \ldots, X(s_m) = x_m, X(s) = x\} \\
&= \mathbf{P}\{X(t) - X(s) \le a - x \mid X(s_2) - X(s_1) = x_2 - x_1, \ldots, X(s) - X(s_m) = x - x_m, X(s) = x\} \\
&= \mathbf{P}\{X(t) - X(s) \le a - x \mid X(s) = x\} \\
&= \mathbf{P}\{X(t) \le a \mid X(s) = x\} \qquad \Box
\end{aligned}$$

Свойство 3. Означаваме с $f_t(x) = f_{W_t}(x)$ плътността на $W(t)$ и с $f_{t_k}(x_k)$ съответно на $W(t_k)$. Съвместната плътност на $W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)$ означаваме $f_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$W(t) \in \mathcal{N}(0,\, t) \Longrightarrow f_t(x) = f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

$$W(t) - W(s) \overset{d}{=} W(t-s) \in \mathcal{N}(0,\, t-s) \Longrightarrow f_{t-s}(x) = f_{W_t - W_s}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-x^2/2(t-s)}$$

Нека $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Вярна е следната връзка:

$$f_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \ldots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$$

$$f_{W_1,W_2,\ldots,W_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{W_1}(x_1)f_{W_2-W_1}(x_2-x_1)\ldots f_{W_n-W_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$$

$W_k = W_{t_k}$
$h_k = W_k - W_{k-1}$
$W_k = h_1 + \ldots + h_k$

Свойство 4. Нека $W(t)$ е стандартен Винеров процес. За $s < t$ разглеждаме случайната величина

$$Z = (\ W(s) \mid W(t) = y\ ).$$

Да се покаже, че Z е нормално разпределена с очакване $\frac{s}{t}y$ и дисперсия $\frac{s}{t}(t-s)$.

$\triangleright$ $f_Z(x|y) = \dfrac{f_{st}(x,y)}{f_t(y)} = \dfrac{f_s(x)f_{t-s}(y-x)}{f_t(y)}$

$f_s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-x^2/2s}$

$f_Z(x|y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}$

$\mu = \dfrac{s}{t}y \qquad \sigma^2 = \dfrac{s}{t}(t-s)$

(5) Винеров процес с тренд. Нека $W(t)$ е стандартен Винеров процес. Процесът

$$X(t) = \sigma W(t) + \mu t$$

наричаме Винеров процес с тренд μ.

$\langle$**!**$\rangle$ *$X(t)$ има стационарни и независими нараствания и $X(t) \in \mathcal{N}(\mu t,\ \sigma^2 t)$*

(6) Геометричен Винеров процес. (Геометрично Брауново движение)
Нека W_t е стандартен Винеров процес. Процесът $X_t = e^{W_t}$ се нарича геометричен Винеров процес.

$\langle$**!**$\rangle$ *Геометричният Винеров процес е Марковски.*

► *Задачи*

Задача 4.1. Нека X_t е геометричен Винеров процес. Да се покаже, че $EX_t = e^{t/2}$, $VarX_t = e^{2t} - e^t$.

$\triangleright$ Нека $Y \in \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$. Случайната величина $X = e^Y$ наричаме логнормална. Ще намерим EX и $VarX$ с помощта на пораждащата функция на моментите на Y:

$$M_Y(s) = Ee^{sY} = \exp\{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\}$$

$$M_Y(1) = Ee^Y = EX = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

$$M_Y(2) = Ee^{2Y} = E(e^Y)^2 = EX^2 = e^{2\mu+2\sigma^2}$$
$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\sigma^2/2})^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$$
$$= e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$$

Като заместим $\mu = 0,\ \sigma^2 = t$ получаваме за процеса X_t:

$$EX_t = e^{t/2}$$

$$VarX_t = e^{2t} - e^t \qquad \square$$

Задача 4.2. Нека W_t е стандартен Винеров процес, а $W_1(t)$ и $W_2(t)$ са независими стандартни Винерови процеси. Кои от следните процеси са Винерови?

а) $Y_t = 3W_{t/9}$

$\triangleright$ Проверяваме дали са изпълнени условията на дефиниция (4):

1. $Y_0 = 3W_{0/9} = 3W_0 = 0$

2. $EY_t = E(3W_{t/9}) = 3\,E(W_{t/9}) = 0$

3. Нека $a_1, \ldots, a_n$ са произволни реални числа. Искаме да проверим дали случайната величина $a_1Y_{t_1} + \ldots + a_nY_{t_n}$ има нормално разпределение.

$$a_1Y_{t_1} + \ldots + a_nY_{t_n} = a_1 3W_{t_1/9} + \ldots + a_n 3W_{t_n/9} = c_1W_{t_1/9} + \ldots + c_nW_{t_n/9} \ \in\ \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$$

Случайната величина $c_1W_{t_1/9} + \ldots + c_nW_{t_n/9}$ е нормално разпределена, тъй като W_t е Гаусов.

4. $cov(Y_t, Y_s) = EY_tY_s - EY_tEY_s = EY_tY_s$

$$= E(3W_{t/9}3W_{s/9}) = 9\,E(W_{t/9}W_{s/9})$$

$$= 9\ \min(\tfrac{t}{9}, \tfrac{s}{9}) = \min(t, s)$$

Условията на дефиницията са изпълнени, следователно Y_t е Винеров процес $\square$

б) $Y_t = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(t) + W_2(t)]$

$\triangleright$ Проверяваме дали са изпълнени условията на дефиниция (4):

1. $Y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(0) + W_2(0)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 0) = 0$

2. $EY_t = E\frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(t) + W_2(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[EW_1(t) + EW_2(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 0) = 0$

3. Нека $a_1, \ldots, a_n$ са произволни реални числа. Искаме да проверим дали случайната величина $a_1 Y_{t_1} + \ldots + a_n Y_{t_n}$ има нормално разпределение.

$$a_1 Y_{t_1} + \ldots + a_n Y_{t_n} = a_1 \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(t_1) + W_2(t_1)] + \ldots + a_n \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(t_n) + W_2(t_n)]$$
$$= c_1 W_1(t_1) + \ldots + c_n W_1(t_n) + c_1 W_2(t_1) + \ldots + c_n W_2(t_n)$$

4. $cov(Y_t, Y_s) = EY_t Y_s - EY_t EY_s = EY_t Y_s$

$= E\frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(t) + W_2(t)]\frac{1}{\sqrt{2}}[W_1(s) + W_2(s)]$

$= \frac{1}{2}E[W_1(t) + W_2(t)][W_1(s) + W_2(s)]$

$= \frac{1}{2}E[W_1(t)W_1(s) + W_1(t)W_2(s) + W_2(t)W_1(s) + W_2(t)W_2(s)]$

$= \frac{1}{2}[\min(t, s) + 0 + 0 + \min(t, s)]$

$= \min(t, s)$

Условията на дефиницията са изпълнени, следователно Y_t е Винеров процес $\square$

в) $Y_t = W_{2t} - W_t$

$\triangleright$ Проверяваме дали са изпълнени условията на дефиниция (4):

1. $Y_0 = W_0 - W_0 = 0$

2. $EY_t = E(W_{2t} - W_t) = EW_{2t} - EW_t = 0 - 0 = 0$

3. Нека $a_1, \ldots, a_n$ са произволни реални числа. Искаме да проверим дали случайната величина $a_1 Y_{t_1} + \ldots + a_n Y_{t_n}$ има нормално разпределение.

$$a_1 Y_{t_1} + \ldots + a_n Y_{t_n} = a_1(W_{2t_1} - W_{t_1}) + \ldots + a_n(W_{2t_n} - W_{t_n}) \stackrel{d}{=} a_1 W_{t_1} + \ldots + a_n W_{t_n}$$

4. $cov(Y_t, Y_s) = EY_t Y_s - EY_t EY_s = EY_t Y_s$

$= E(W_{2t} - W_t)(W_{2s} - W_s) = E(W_{2t}W_{2s} - W_{2t}W_s - W_t W_{2s} + W_t W_s)$

Нека $t < 2t < s < 2s$, тогава

$cov(Y_t, Y_s) = 2t - 2t - t + t = 0 \neq \min(t, s) = t$

Тъй като $cov(Y_t, Y_s) \neq \min(t, s)$, Y_t не е Винеров процес $\square$

Задача 4.3. В състезание между двама велосипедисти A и B, нека $Y(t)$ е предднината на A пред B в момента $t \in [0,1]$. Предполагаме, че $Y(t)$ е Винеров процес с дисперсия $\sigma^2 t$.

а) Ако състезателят A води със σ метра по средата на състезанието ($t = 1/2$), каква е вероятността, че той е победител в края на състезанието?

$$\mathbf{P}\{Y(1) > 0 \mid Y(1/2) = \sigma\} = \mathbf{P}\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma \mid Y(1/2) - Y(0) = \sigma\}$$

/независими нараствания/

$$= \mathbf{P}\{Y(1) - Y(1/2) > -\sigma\}$$

/стационарни нараствания/

$$= \mathbf{P}\{Y(1/2) > -\sigma\}$$

$$= \mathbf{P}\{\frac{Y(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} > -\sqrt{2}\} = 1 - \Phi(-\sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2})$$

Използваме, че $Y(1/2) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2/2) \implies \dfrac{Y(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} \in \mathcal{N}(0,1)$.

б) Ако състезателят A побеждава със σ метра пред B, каква е вероятността той да е бил по-напред и в средата на състезанието?

$$\mathbf{P}\{Y(1/2) > 0 \mid Y(1) = \sigma\}$$

$$= \mathbf{P}\{\frac{Y(1/2)}{\sigma} > 0 \mid \frac{Y(1)}{\sigma} = 1\}$$

$$= \mathbf{P}\{W(1/2) > 0 \mid W(1) = 1\} = \mathbf{P}\{V > 0\}$$

От свойство 4 $\implies V \in \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$\mathbf{P}\{V > 0\} = \mathbf{P}\{\frac{V - 1/2}{1/2} > \frac{-1/2}{1/2}\}$$

$$= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1)$$

Задача 4.4. Нека $X(t)$ е нивото на индекса Дау Джоунс в момента t, $t \in [0,30]$. Предполагаме, че $W(t) = X(t) - \mu t$ е Винеров процес с дисперсия $\sigma^2 t$.

а) Ако е известно, че $X(15) = 15\mu + \sigma$, да се намери вероятността $X(30)$ да надвишава 30μ.

б) Ако е известно, че $X(30) = 30\mu + \sigma$, да се намери вероятността $X(15)$ да е надвишавало 15μ.

Отг. а) $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$ б) $\Phi\left(\frac{1/2}{\sqrt{15/2}}\right)$

Задача 4.5. Нека $W(t)$ е стандартен Винеров процес, а $W_1(t)$ и $W_2(t)$ са независими стандартни Винерови процеси. Кои от следните процеси са Винерови?

а) $W(t+a) - W(a)$

б) $tW(1/t)$

в) $W(1) - W(1-t),\ t \in [0, 1]$

г) $-W(t)$

д) $\sqrt{t}W(1)$

з) $aW_1(t) + bW_2(t)$

и) $\frac{1}{3}W(9t)$

5. Мартингали с дискретно време

The important thing is not to stop questioning;
curiosity has its own reason for existing.
Albert Einstein

Мартингалите са клас случайни процеси, първоначално въведени като модел на т.нар. справедливи игри. В последствие теорията на мартингалите се развива и заема специално място в теорията на случайните процеси с важни приложения. Фундаментални са работите на Дуб (J.L.Doob, 1910 — 2004).

► *Условно математическо очакване*

Понятието условно математическо очакване е ключово в теорията на вероятностите, но е трудно за усвояване. Тук ще се опитаме да го изясним, като се стремим да не навлизаме в теорията на мярката.

(1) Нека X и Y са дискретни сл.в. със съвместно разпределение $f(x,y) = \mathbf{P}(X = x,\ Y = y)$ и маргинални разпределения

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y), \quad f_Y(y) = \sum_x f(x,y).$$

Условно разпрделение на Y при условие X наричаме функцията

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\mathbf{P}(Y = y,\ X = x)}{\mathbf{P}(X = x)}.$$

Условно очакване на Y при условие $X = x$ дефинираме по следния начин:

$$E(Y \mid X = x) = \sum_y y\mathbf{P}(Y = y \mid X = x) = \sum_y y\mathbf{P}(Y = y,\ X = x)/\mathbf{P}(X = x)$$

$$= \sum_y y f_{Y|X}(y \mid x) = \sum_y y \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

(2) Нека X и Y са непрекъснати сл.в. със съвместна плътност $f(x,y)$ и маргинални плътности $f_X(x)$, $f_Y(y)$. **Условна плътност** наричаме функцията

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Условно очакване на Y при условие $X = x$ дефинираме по следния начин:

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy.$$

⟨**!**⟩ Условното очакване $E(Y \mid X = x)$ зависи от стойността x на случайната величина X. За различни стойности x на X имаме различни стойности на очакването $E(Y \mid X = x)$. Така получаваме случайна величина със стойности $E(Y \mid X = x)$, която означаваме $E(Y \mid X)$.

(3) Нека $X_1, \ldots, X_n, Y$ са дискретни сл.в. със съвместни разпределения

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, Y = y)$$

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \sum_y f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Условно разпределение на Y при условие $X_1, \ldots, X_n$ наричаме функцията

$$f_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n, y)}{g(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Условно очакване на Y при условие $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ дефинираме така:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \sum_y y f_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y \mid x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_y y \frac{f(x_1, \ldots, x_n, y)}{g(x_1, \ldots, x_n)}.$$

(4) Аналогично, ако $X_1, \ldots, X_n, Y$ са непрекъснати сл.в. и $f(x_1, \ldots, x_n, y)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ са съответните съвместни плътности, условната плътност се дефинира както по-горе. **Условно очакване** на Y при условие $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ дефинираме така:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y \mid x_1, \ldots, x_n) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x_1, \ldots, x_n, y)}{g(x_1, \ldots, x_n)} dy.$$

⟨**!**⟩ Условното очакване $E(Y \mid X_1, \ldots, X_n)$ е функция на случайните величини $X_1, \ldots, X_n$, т.е. $E(Y \mid X_1, \ldots, X_n) = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$.

(5) Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ е редица от сл.в. и $\mathcal{F}_n$ е σ-алгебрата породена от $X_1, \ldots, X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, която интерпретираме като информацията, съдържаща се в $X_1, \ldots, X_n$. Ще записваме $E(Y \mid X_1, \ldots, X_n) = E(Y \mid \mathcal{F}_n)$.

Пример. Дадено е съвместното разпределение на случайните величини X и Y:

		Y **4**	**5**	**6**	Σ
	4	2/20	2/20	1/20	5/20
X	**5**	0	1/20	9/20	10/20
	6	0	1/20	4/20	5/20
	Σ	2/20	4/20	14/20	

Да се намери условното разпределение на Y при условие X. Да се намерят условните очаквания $E(Y \mid X = k),\ k = 4, 5, 6$.

$(Y\|X)$		Y **4**	**5**	**6**	$E(Y\|X)$	$\mathbf{P}(X = x)$
	4	2/5	2/5	1/5	**4.8**	5/20
X	**5**	0	1/10	9/10	**5.9**	10/20
	6	0	1/5	4/5	**5.8**	5/20

Свойства на условното очакване:

а) Формула за пълното математическо очакване: $E(E(Y \mid \mathcal{F}_n)) = EY$.

б) Линейно свойство: $E(a\,Y_1 + b\,Y_2 \mid \mathcal{F}_n) = a\,E(Y_1 \mid \mathcal{F}_n) + b\,E(Y_2 \mid \mathcal{F}_n)$.

в) Ако $Y = \psi(X_1, \ldots, X_n)$, тогава $E(Y \mid \mathcal{F}_n) = Y$.

г) Ако Y е независима от $X_1, \ldots, X_n$, тогава $E(Y \mid \mathcal{F}_n) = EY$.

д) Ако $Z = \psi^*(X_1, \ldots, X_n)$, тогава $E(ZY \mid \mathcal{F}_n) = Z\,E(Y \mid \mathcal{F}_n)$.

► *Дефиниция за мартингал. Примери*

(1) Нека $X_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ е редица от сл.в. и $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Казваме, че редицата от сл.в. $M_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ е **мартингал** относно $\mathcal{F}_n$, ако за всяко n:

(c1) $E|M_n| < \infty$;
(c2) $M_n = \psi(X_1, \ldots, X_n)$, т.е. $M_n \in \mathcal{F}_n$;
(c3) $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$.

Забележка.

(i) *Когато $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, \ldots, M_n)$, не е необходимо да се уточнява $\mathcal{F}_n$ и просто казваме, че M_n е мартингал.*
(ii) *От условие (c3) следва, че $E(M_n \mid \mathcal{F}_k) = M_k,\ \forall k < n$.*
(iii) *Ако заменим (c3) с $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \le M_n$, наричаме M_n супермартингал.*
(iv) *Ако заменим (c3) с $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \ge M_n$, наричаме M_n субмартингал.*

Задача 5.1. Нека $X_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ са независими сл.в. със средно μ и

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Да се покаже, че $Y_n = S_n - n\mu$ е мартингал относно $\mathcal{F}_n$.

Решение. Ще отбележим, че $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, т.е. едно и също е дали знаем $X_1, \ldots, X_n$ или $S_1, \ldots, S_n$ (ако знаем $X_1, \ldots, X_n$ можем да изразим $S_1, \ldots, S_n$ и обратно).

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(S_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n)$$
$$= E(X_1 + \ldots + X_n + X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n)$$
$$\overset{\text{свойство б}}{=} E(X_1 + \ldots + X_n \mid X_1, \ldots, X_n) + E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) \overset{\text{свойства в,г}}{=} X_1 + \ldots + X_n + \mu$$

Получихме

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + \mu.$$
$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(S_{n+1} - (n+1)\mu \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - (n+1)\mu = S_n + \mu - (n+1)\mu = S_n - n\mu = Y_n.$$

Т.е. $E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Y_n$, следователно Y_n е мартингал относно $\mathcal{F}_n$ $\square$

Задача 5.2. Нека $X_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ са независими сл.в. със средно $EX_n = 0$ и

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Да се покаже, че S_n е мартингал. *(Изполвайте задача 1. Дайте пример за такъв процес.)*

Задача 5.3. Урнова схема на Пойа (Polya). В една кутия има 2 топки – червена и зелена. Вадим произволна топка и я връщаме заедно с още една от същия цвят. Повтаряме многократно описания експеримент. Нека X_n е броя на зелените топките в кутията след n-тия опит. X_n е Марковска верига с преходни вероятности:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = \frac{k}{n+2}, \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = k) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

Нека $M_n = \dfrac{X_n}{n+2}$ е пропорцията на зелените топки след n-тия опит.
Да се покаже, че M_n е мартингал.

Решение. Първо ще пресметнем:

$$E(X_{n+1} \mid X_n = k) = (k+1) \cdot \frac{k}{n+2} + k \cdot \frac{n+2-k}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}\,k$$
$$\Longrightarrow\ E(X_{n+1} \mid X_n) = \frac{n+3}{n+2}\,X_n.$$

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E\left(\frac{1}{n+3}\,X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{n+3}\,E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n)$$
$$\overset{\text{МВ}}{=} \frac{1}{n+3} E(X_{n+1} \mid X_n) = \frac{1}{n+3}\,\frac{n+3}{n+2}\,X_n = \frac{X_n}{n+2} = M_n \qquad \square$$

Задача 5.4. Процес с независими нараствания, такъв че $X_0 = c$ п.с. и $EX_n = m = const$ е мартингал.

Решение. Нека $s < t$

$$E(X_t \mid X_0, X_1, \ldots, X_s) = E(X_t - X_s + X_s \mid X_0, X_1, \ldots, X_s)$$

$$= E(X_t - X_s \mid X_0, X_1, \ldots, X_s) + E(X_s \mid X_0, X_1, \ldots, X_s)$$
$$= E(X_t - X_s \mid X_1 - X_0, X_2 - X_1 \ldots, X_s - X_{s-1}) + X_s$$
$$= E(X_t - X_s) + X_s = EX_t - EX_s + X_s = m - m + X_s = X_s \qquad \square$$

Ще отбележим, че ако знаем $X_0, X_1, \ldots, X_s$ можем да изразим $X_1 - X_0, X_2 - X_1 \ldots, X_s - X_{s-1}$ и обратно.

Приложение

random experiment	случаен експеримент
sample space	пространство на елементарните събития
outcome	изход
event	събитие
certain event	сигурно (достоверно) събитие
impossible event	невъзможно събитие
disjoint events	несъвместими събития
sigma algebra, sigma field	сигма-алгебра
partition	разделяне
conditional probability	условна вероятност
independence	независимост
independent identically distributed (i.i.d.)	независими еднакво разпределени (н.е.р.)
random variable (r.v.)	случайна величина (сл.в.)
distribution function	функция на разпределение
probability mass function (p.m.f.)	дискретно разпределение, дискретна плътност
probability density function (p.d.f.)	вероятностна плътност
discrete r.v.	дискретна сл.в.
continuous r.v.	непрекъсната сл.в.
expectation, mean	математическо очакване, средно
variance	дисперсия
covariance	ковариация
correlation	корелация
moment generating function (m.g.f.)	пораждаща функция на моментите, моментна пораждаща функция
probability generating function (p.g.f.)	вероятностна пораждаща функция
joint distribution function	съвместна функция на разпределение
joint mass function	съвместно разпределение (дискретно)
joint density function	съвместна плътност
convergence	сходимост
almost surely	почти сигурно
law of large numbers (LLN)	закон за големите числа (ЗГЧ)
central limit theorem (CLT)	централна гранична теорема (ЦГТ)
random process, stochastic process	случаен процес, стохастичен процес
state space	пространство на състоянията
parameter set	параметрично множество
sample path, realization	траектория, реализация
stationary	стационарен
random walk	случайна разходка, случайно лутане

Markov chain	Марковска верига
transition probabilities	преходни вероятности
(time) homogeneous	хомогенна (във времето)
accessible	достижимо
communicate	съобщаващо се
absorbing	поглъщащо
recurrent (persistent)	възвратно
transient	преходно
irreducible	неразложима
stationary distribution	стационарно разпределение
branching process	разклоняващ се процес
extinction	израждане, изчезване
lack of memory, memoryless	липса на памет, липса на последействие
waiting time	време за чакане
lifetime	време на живот
counting process	броящ процес
independent increments	независими нараствания
stationary increments	стационарни нараствания
interarrival times	времена между сбъдвания на събития
compound Poisson process	съставен (сложен) Поасонов процес
Wiener process	Винеров процес
Brownian motion	Брауново движение
Brownian motion with drift	Брауново движение с тренд
Gaussian process	Гаусов процес
multivariate normal distribution	многомерно нормално разпределение
first hitting time	момент на първо достигане
martingale	мартингал
conditional expectation	условно очакване
stopping time, Markov time	момент на спиране, Марковски момент
measurable	измерим

Литература

[1] Karlin S., Taylor H.M., *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed, Academic Press, 1975.

[2] Taylor H.M., Karlin S., *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3rd ed, Academic Press, 1998.

[3] Ross S.M., *Introduction to Probability Models*, 10th ed, Academic Press, 2010.

[4] Feldman R.M., Valdez-Flores C., *Applied Probability and Stochastic Processes*, 2nd ed, Springer, 2010.

[5] Tijms H.C., *A First Course in Stochastic Models*, John Wiley & Sons, 2003.

[6] Hsu H., *Probability, Random Variables, and Random Processes*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1997.

[7] Lawler G.F., *Introduction to Stochastic Processes*, Chapman & Hall, 1995.

[8] Ross S.M., *Stochastic Processes*, 2nd ed, John Wiley & Sons, 1996.

[9] Grimmett G., Stirzaker D., *Probability and Random Processes*, 3rd ed, Oxford University Press, 2001.

[10] Stirzaker D., *Stochastic Processes and Models*, Oxford University Press, 2005.

[11] Suhov Y., Kelbert M., *Markov Chains: a Primer in Random Processes and their Applications*, Cambridge University Press, 2008.

[12] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1*, 3rd ed, John Wiley & Sons, 1968.

[13] Resnick S., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, 2005.

[14] Serfozo R., *Basics of Applied Stochastic Processes*, Springer, 2009.

[15] Blom G., Holst L., Sandell D., *Problems and Snapshots from the World of Probability*, Springer-Verlag, 1994.

[16] Ross S.M., *A First Course in Probability*, 5th ed, Prentice-Hall, 1998.

[17] Stirzaker D., *Elementary Probability*, 2nd ed, Cambridge University Press, 2003.

[18] Grinstead C.M., Snell J.L., *Introduction to Probability*, 2nd ed, AMS, 1997.

[19] Johnson N.L., Kotz S., *Urn Models and Their Application*, John Wiley & Sons, 1977.

[20] Hillier F.S., Lieberman G.J., *Introduction to Operations Research*, 7th ed, McGraw-Hill, 2001.

[21] Божкова М., *Лекции по случайни процеси*, електронно издание, 2001.

[22] Въндев Д., *Записки по теория на вероятностите*, електронно издание, 2002.

[23] Димитров Б., *Вериги на Марков*, Наука и изкуство, 1974.