Уравнението $e^z = c$, $c \in \mathbb{C} \setminus 0$

Нека $c = re^{i\varphi}$, $r = |c|$, $\arg z = \varphi$

и $z = x + iy$. Тогава $e^z = c \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = re^{i\varphi}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} e^x = r \\ y = \varphi + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \ln r \\ y = \varphi + 2k\pi \end{array} \right.$$

Следователно $z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Пример: $e^z = 1$, $z = i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Изображението $w = e^z$

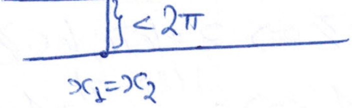
1) Тъй като $(e^z)' = e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, изображението $w = e^z$ е конформно $\forall z \in \mathbb{C}$

2) $w = e^z$ не е еднолистно: $e^{z + i2k\pi} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

3) Област на еднолистност (f-еднолистна в D, ако $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$)

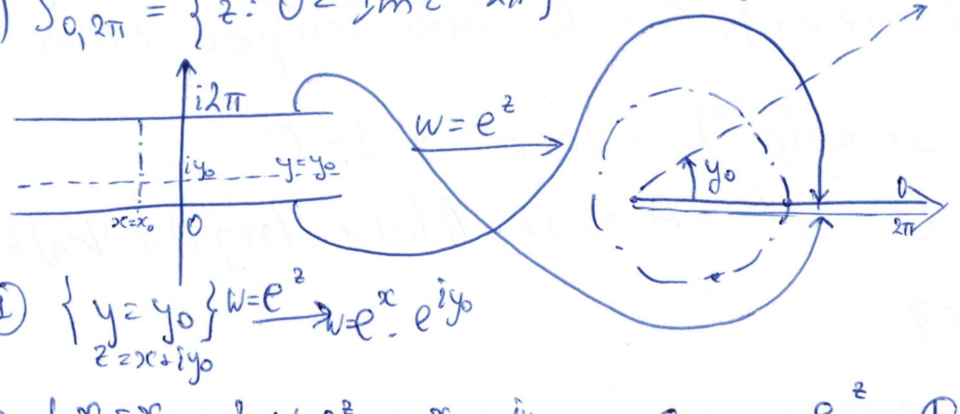
Нека $z_1 \neq z_2$ и $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1 + iy_1} = e^{x_2 + iy_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow$

$e^{x_1} = e^{x_2}$ и $y_1 - y_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 - y_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



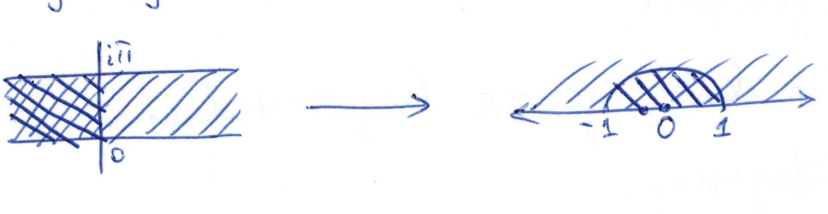
Всяка хоризонтална ивица $S_{a,b} = \{z : a < \operatorname{Im} z < b,\ b - a \leq 2\pi\}$

4) $S_{0,2\pi} = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\} \xrightarrow{e^z} ?$



① $\{y = y_0\} \xrightarrow{w = e^z} w = e^x \cdot e^{iy_0}$, $z = x + iy_0$

② $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ 0 < y < 2\pi \end{array} \right\} \xrightarrow{w = e^z} e^{x_0} \cdot e^{iy}$ $\qquad S_{0,2\pi} \xleftrightarrow{e^z} \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$



sin z, cos z

Деф: $\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, z \in \mathbb{C}$

$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, z \in \mathbb{C}$

$R_{cx} = +\infty \Rightarrow \sin z, \cos z$ са цели ф-ии

$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z$

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$
$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ $\Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Свойства на sin z, cos z

1) sin z, cos z са периодични с основен период 2π

① $\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+i2k\pi} + e^{-iz-i2k\pi}}{2} =$

$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

② Нека w е период на $\cos z$, т.е. $\cos(z+w) = \cos z, \ \forall z \in \mathbb{C}$

При $z = 0 \Rightarrow \cos w = 1 \Leftrightarrow e^{iw} + e^{-iw} = 2 \Leftrightarrow (e^{iw})^2 - 2e^{iw} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{iw} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{iw} = 1 \Rightarrow w = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) Нулите на sin z, cos z

$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{i2z} = 1 \Rightarrow 2z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi - z)} \Leftrightarrow e^{i(z - \pi + z)} = 1 \Leftrightarrow e^{i(2z - \pi)} = 1$

$2z - \pi = 2k\pi \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3) Уравнението $\cos z = c$ ($\sin z = c$), $c \in \mathbb{C}$ има безброй много решения

$\cos z = c \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2c \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2c\, e^{iz} + 1 = 0$

$(e^{iz})_{1,2} = \underbrace{c \pm \sqrt{c^2 - 1}}_{A} \neq 0 \qquad e^{iz} = A \Rightarrow iz = \ln|A| + i(\arg A + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$z = \arg A + 2k\pi - i\ln A, \ k \in \mathbb{Z}$

Коши-Риман – 2 задачи
- точки във производни
- 2 реални променливи, да се възстанови холоморфна функция

②

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\;\frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}$$

$\operatorname{tg} z$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{cotg} z$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

функция на Жуковски $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right)$$

Функцията $\log z$

Деф: Всяко решение на у-нието $e^{w} = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ наричаме $\log z$.

Ако $z = r . e^{i\varphi}$ $\log z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Примери: $\log 1 = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\log(-1) = i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\log(i) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$\log(-i) = i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Свойства на $\log z$

1) $e^{\log z} = z$
2) $\log e^{z} = z + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ $:_1=$ "като съвпадане на множества"
4) $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$ $:_2=$ "като съвпадане на множества"

Пример: $\log 1^2 = \log 1 + \log 1$

$\log(-1)^2 = \log(-1) + \log(-1)$ $\Rightarrow$ $\log 1 + \log 1 = \log(-1) + \log(-1)$

$!\,2\log 1 = 2\log(-1)$

$\log 1 = \log(-1)$

$i2k\pi = i(2l+1)\pi$!

Деф: Нека $D \subset \mathbb{C} \setminus 0$ е област и $f: D \to \mathbb{C}$. Казваме, че f е еднозначен клон на $\log z$ в D, ако f е непрекъсната в D и $e^{f(z)} = z, z \in D$.

Th. 1: Нека $f_0: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C} \setminus 0$ е един еднозначен клон на $\log z$ в D. Тогава всички еднозначни клонове на $\log z$ в D са от вида $f_0(z) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Д-во: 1) Ясно е, че $f_0 + i2k\pi$ е еднозначен клон на $\log z$ в D за $\forall k \in \mathbb{Z}$.

2) Нека $f_1 : D \to \mathbb{C}$ е еднозначен клон на $\log z$ в D. Имаме, че $e^{f_1(z)} = z = e^{f_0(z)}$, $z \in D$. $\Leftrightarrow e^{f_1(z) - f_0(z)} = 1$, $z \in D \Leftrightarrow f_1(z) - f_0(z) = i2k(z)\pi$, $k(z) \in \mathbb{Z}, z \in D$

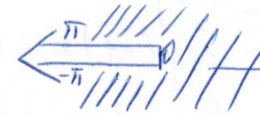
$\Leftrightarrow k(z) = \frac{f_1(z) - f_0(z)}{2i\pi}$. Тъй като $k(z)$ е непрекъсната в D и D е област (свързано множество), то $k(D)$ също е свързано множество. Но $k(D) \subset \mathbb{Z}$. Това е възможно, само ако $k(D) = \{\cdot\}$, т.е. $k(z) \equiv k$, $\forall z \in D$. Следователно $f_1(z) = f_0(z) + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Th. 2: Ако $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C} \setminus 0$ е еднозначен клон на $\log z$ в D, то f е холоморфна функция в D и $f'(z) = \frac{1}{z}$, $z \in D$.

Главен клон на $\log z$

Деф: $\log_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z$, $-\pi < \arg_0 z < \pi$

$\mathbb{C}^- = \{z : -\pi < \arg z < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{z : z \le 0\}$



$\mathbb{C}^-$

Тв. $\log_0 z$ е еднозначен клон на $\log z$ в $\mathbb{C}^-$. Всички еднозначни клонове на $\log z$ в $\mathbb{C}^-$ са $\log_0 z + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Развитие на $\log_0(1+z)$ в степенен ред около 0.

$(\log_0(1+z))' = \frac{1}{1+z}$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots$

Нека $\varphi(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$, $R_{сх.} = 1$

$\Rightarrow \varphi$ е холоморфна в $|z| < 1$

Тъй като $\varphi'(z) = \frac{1}{1+z} = (\log_0(1+z))'$, $|z| < 1$, то $\varphi(z) - \log_0(1+z) = const = \varphi(0) - \log_0 1 = 0$, $|z| < 1$. Следователно $\log_0(1+z) = \varphi(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$, $|z| <$

Функцията z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Деф: $z^\alpha := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log_0 z + i2k\pi)} = e^{i2k\alpha\pi} \cdot e^{\alpha \log_0 z}$

1) Ако $\alpha \in \mathbb{N}$ $z^n = e^{n \log_0 z} = \underbrace{z . z . \dots z}_{n}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, $\alpha = -n$ $z^{-n} = \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdots \frac{1}{z}}_{n}$

2) $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$

$e^{i2\frac{p}{q}k\pi}$ – q на брой стойности $q > 0$, $(p,q) \neq \pm 1$

3) $\alpha \notin \mathbb{Q}$ Да допуснем, че $\exists k_1, k_2$ т.ч. $e^{i2k_1\alpha\pi} = e^{i2k_2\alpha\pi}$

$\Rightarrow e^{i2(k_1 - k_2)\alpha\pi} = 1 \Leftrightarrow 2i(k_1 - k_2)\alpha\pi = i2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k}{k_1 - k_2} \in \mathbb{Q}$!

$e^{i2k\alpha\pi}$ – безбройно много стойности