25.II.2014г. Комплексен анализ

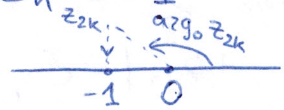
Нека $z_n \Rightarrow z_0$, $z_n = |z_n| \cdot e^{i\varphi_n}$, $\varphi_n = \arg_0 z_n$

Тогава е ясно, че $|z_n| \to |z_0|$. Но дали $\{\varphi_n\}$ е сходяща?

Дали, ако е сходяща $\varphi_n \to \arg_0 z_0$?

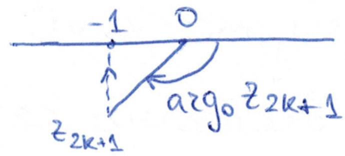
Примери: ① $z_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n}$ $z_n \to -1$

1) $n = 2k$ $z_{2k} = -1 + i\frac{1}{2k}$



$\arg_0 z_{2k} \to \pi$

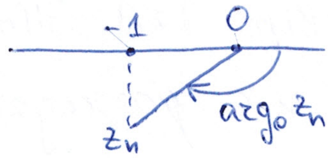
2) $n = 2k+1$ $z_{2k} = -1 - i\frac{1}{2k+1}$



$\arg_0 z_{2k+1} \to -\pi$

Следователно $\{\arg_0 z_n\}$ е разходяща.

② $z_n = -1 - i\frac{1}{n}$



$z_n \to -1$ $\arg_0 z_n \to -\pi \neq \pi = \arg_0(-1)$

$(\arg_0 z \in (-\pi, \pi])$

НО в сила е следното твърдение.

Нека $z_n \to z_0 \neq 0$ и φ_0 е фиксиран аргумент на z_0.

Тогава, ако изберем $\arg_0 z_n \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi]$, $n = 1, 2, \dots$, то $\arg z_n \to \varphi_0$

Дефиниция: Точката z_0 е точка на сгъстяване на $\{z_n\}_1^\infty$, ако $\forall \varepsilon > 0$, в $K(z_0, \varepsilon) = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ има безбройно много z_n.

Твърдение: z_0 е точка на сгъстяване на $\{z_n\} \Leftrightarrow$ $\exists$ подредица $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $z_{n_k} \to z_0$.

Теорема на Болцано – Вайерщрас (Т. (Б. В.)): Всяка ограничена редица има сходяща подредица ($\Leftrightarrow$ има точка на сгъстяване)

Редове от комплексни числа

$\{z_n\}_1^\infty \quad z_1+z_2+\dots+z_n+\dots \;, \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Дефиниция: $\sum_1^\infty z_n$ е сходящ, ако $\{S_n\}_1^\infty$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k$ е сходяща.

Критерий на Коши: Редът $\sum_1^\infty z_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \nu=\nu(\varepsilon)$ така че $|z_{m+1}+z_{m+2}+\dots+z_n|<\varepsilon$, $\forall n>m>\nu$

$\Rightarrow$ Ако $\sum_1^\infty z_n$ е сходящ, то $z_n\to 0$.

Дефиниция: $\sum z_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum_1^\infty |z_n|<+\infty$

Ако $\sum z_n$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Критерий на Коши: Нека $l=\overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|}$. Тогава редът $\sum_{n=1}^\infty z_n$ е абсолютно сходящ при $l<1$ и е разходящ при $l>1$.

Топология в $\mathbb{C}$ - отворени, затворени, компактни и свързани множества

X, τ

1) $X, \emptyset \in \tau$
2) Ако $U_\alpha \in \tau$, $\alpha\in A$, то $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$
3) Ако $U_k\in\tau$, $k=1,\dots,n$, то $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$

(X,τ) - топологично пространство

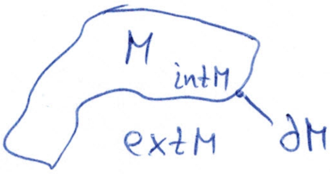
$U \in \tau$, U - отворено множество

Дефиниция: Нека $M\subseteq\mathbb{C}$. Точката $z_0\in\mathbb{C}$ се нарича:

вътрешна точка на M, ако $\exists K(z_0,\varepsilon)\subset M$ ($z_0\in M$!);

външна точка на M, ако $\exists K(z_0,\varepsilon)\subset \mathbb{C}\setminus M$;

гранична точка на M, ако във $\forall K(z_0,\varepsilon)$ има точки от M и от $\mathbb{C}\setminus M$



$\operatorname{int} M = \{$вътрешните точки на $M\}$

$\operatorname{ext} M = \{$външните точки на $M\}$

$\partial M = \{$граничните точки на $M\}$

$\mathbb{C} = \operatorname{int} M \cup \operatorname{ext} M \cup \partial M$

Дефиниция: Пробита околност на $z_0 \in \mathbb{C}$

$K'(z_0, \varepsilon) = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ 

Дефиниция: Точката z_0 е точка на сгъстяване на M, ако във всяка пробита околност на z_0 има точка на M.
($\Rightarrow$ във ~~[illegible]~~ всяка пробита околност на z_0 има безброй много точки на M)

Примери:

1) $M = K(z_0, \varepsilon)$ 

$\overline{M} = M \cup \{$точките на сгъстяване на $M\}$

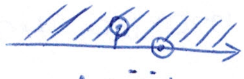
$\overline{M}$ – затворена обвивка на M

$\operatorname{int} M = M = k(z_0, \varepsilon)$

$\operatorname{ext} M = \{z : |z - z_0| > \varepsilon\}$

$\partial M = \{|z - z_0| = \varepsilon\} := C(z_0, \varepsilon)$

$\overline{M} = \{|z - z_0| \leq \varepsilon\}$

2) $M = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ 

$\operatorname{int} M = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ $\operatorname{ext} M = \{\operatorname{Im} z < 0\}$ $\partial M = \{\operatorname{Im} z = 0\}$ $\overline{M} = M = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$

3) $M = \{i, \frac{i}{2}, \dots, \frac{i}{n}, \dots\}$

$\operatorname{int} M = \emptyset$

$\operatorname{ext} M = \mathbb{C} / M$

$\partial M = M \cup \{0\}$

$\overline{M} = \partial M = M \cup \{0\}$

4) $M = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}$

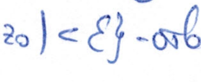
$\operatorname{int} M = \emptyset$ $\partial M = \overline{M} = \mathbb{C}$

$\operatorname{ext} M = \emptyset$

Твърдение: $\overline{M} = M \cup \partial M = \operatorname{int} M \cup \partial M$

Дефиниция: $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича отворено, ако всичките му точки са вътрешни, т.е. $M \subset \operatorname{int} M$ ($\Rightarrow$ M е отворено $\Leftrightarrow$ $M = \operatorname{int} M$)

Примери:

1) $\mathbb{C}$ – отворено
2) $\emptyset$ – отворено
3) $K(z_0, \varepsilon) = \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ – отворено
4) $M = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ – не е отворено 
5) $K'(z_0, \varepsilon) = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ – отворено

Твърдение: 1) Ако $U_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ са отворени множества $(\alpha \in A)$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено.

2) Ако U_k, $k = 1, 2, \dots, n$ са отворени множества, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ е отворено.

Примери: $K(0, \frac{1}{n})$ - отворено множество, $\forall n \geq 1$, но $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K(0, \frac{1}{n}) = \{0\}$ - не е отворено.

Дефиниция: $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича затворено, ако $\mathbb{C} / M$ е отворено.

Твърдение: M е затворено $\Leftrightarrow$ M съдържа всичките си точки на сгъстяване, т.е. $\bar{M} \subset M$ $(\Leftrightarrow M = \bar{M})$

Твърдение: Точката z_0 е точка на сгъстяване на $M \subseteq \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow \exists \{z_n \in M\}$, $z_n \to z_0$

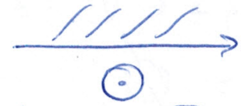
Твърдение: $M \subseteq \mathbb{C}$ е затворено $\Leftrightarrow$ От $\{z_n \in M\}$, $z_n \to z_0 \Rightarrow z_0 \in M$

Примери: 1) $\mathbb{C}$ - затворено

2) $\emptyset$ - затворено

3) $\overline{K(z_0, \varepsilon)} = \{|z - z_0| \leq \varepsilon\}$ - затворено

4) $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ - затворено



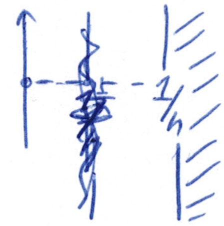
5) $\{0 < |z - z_0| \leq 1\}$ - нито отворено, нито затворено

Твърдение: 1) Ако $V_k \subseteq \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$ са затворени множества, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$ е затворено.

2) Ако $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha \in A$ са затворени множества, то $\bigcap\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ е затворено.

Пример: $V_n = \{\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{n}\}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ - отворено



Компакти в $\mathbb{C}$

Дефиниция: $M \subset \mathbb{C}$ е компакт, ако M е ограничено и затворено.

Примери:
1) $M = K(z_0, \varepsilon)$ - не е компакт (не е затворено)
2) $M = \{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ - не е компакт (не е ограничено)
3) $\mathbb{C}$ - не е компакт (не е ограничено)
4) $\emptyset$ - компакт
5) $\overline{K(z_0, \varepsilon)}$ - компакт