1 Понижаване реда на диференциални уравнения.

1.1 В уравнението присъстват производни на функцията, но не и самата тя и първите и няколко производни

Ако диференциалното уравнение има вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

то редът може да бъде понижен полагайки $z = y^{(k)}$.

Примери:

1) $x^2y'' - y'^2 = 0$ 2) $y''' = -\frac{1}{2}y''^2$

3) $xy'' = y' + x\sin(\frac{y'}{x})$ 4) $y'' + y'^3 = (x + \frac{1}{2x})y'$

1.2 Автономно уравнение

Ако в диференциалното уравнение не е представен параметъра x, т.е.

$$F(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то редът може да бъде понижен с 1 полагайки $y^{(1)} = p(y)$ и гледайки на y като на нова променлива.

Примери:

5) $y^3y'' + 1 = 0$ 6) $y'' - 2yy' = 0$

7) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

1.3 Хомогенно уравнение относно неизвестната и производните и

Нека за дифференциалното уравнение

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

е изпълнено, че $F(x, \lambda y, \lambda y^{(1)}, \lambda y^{(2)}, \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$. Тогава понижаваме реда полагайки $y' = yz$, където z е нова неизвестна.

Примери:

8) $xyy'' - xy'^2 = yy'$ 10) $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$

9) $x^2yy'' = (y - xy')^2$ 11) $xyy'' - xy'^2 - \frac{bxy'^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$

1.3.1 Обобщена хомогенност

Още за квази-хомогенните ОДУ (от по-висок ред). Правейки субституцията $x \mapsto ax$, $y \mapsto a^ky$, $y' \mapsto a^{k-1}y'$, $y'' \mapsto a^{k-2}y''$ и т.нат. Може да се наложи да положим още и като $x = e^t$, $y = ze^{kt}$, където z е новата неизвестна, а t независима променлива.

Примери:

12) $2x''y'' - 3y^2 = x^4$

13) $\frac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy'' + 2\frac{yy'}{x}$

14) $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$

15) $y'' = (2xy - \frac{5}{y})y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$

16) $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$

1.4 Уравнения, които са пълни производни

Ако можем да преобразуваме уравнението $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, до уравнение $\frac{d}{dx}G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то реда се понижава незабавно.

Примери:
17) $yy'' = y'^2$ 20) $yy''' + 3y'y'' = 0$
18) $yy'' = y'(y' + 1)$ 21) $yy'' + y'^2 = 1$
19) $yy''' = 2y''^2$ 22) $xy'' - y' = x^2yy'$

Цветелина Задача (1) Вилия Задача (2)
Янис Задача (3) Георги К. Задача (4)
Александър М. Задача (5) Руди Задача (6)
Свилен Задача (7) Лилия Задача (8)
Георги Г. Задача (9) ...... Задача (17)
.... Задача (18) ...... Задача (19)