

1. ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ ОТ 1-И РЕД. УРАВНЕНИЯ НА БЕРНУЛИ И РИКАТИ.
ТОЧНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ.

1.1. **Линейни ОДУ от първи ред.** За ОДУ от първи ред

$$\dot{x} + a(t)x = b(t), t \in I, a, b \in C(I)$$

общото решение се дава по формулата $x(t) = e^{-\int a(t)dt}[C + \int b(t)e^{\int a(t)dt}dt]$.

За съответната задача на Коши,

$$\dot{x} + a(t)x = b(t), x(t_0) = x_0$$

решението е

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}[x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\zeta)d\zeta}d\tau].$$

(1) Намерете решението на следните уравнения:

$$(1.1) \quad \dot{x} + \frac{3}{t}x = \frac{2}{t^3}, \text{ за } x(1) = 1$$

$$(1.2) \quad t\dot{x} = 2t^2x + t^4(t^5)$$

$$(1.3) \quad t\dot{x} = (t+1)x + 3t^2e^{-2t}$$

$$(1.4) \quad \dot{x} + x \sin(t) = \sin^3(t)$$

$$(1.5) \quad \dot{x} - x \tan t = \cos^2(t)$$

$$(1.6) \quad (2t+1)\dot{x} = 4t + 2x$$

$$(1.7) \quad t(\dot{x} - t \cos(t)) = x$$

$$(1.8) \quad xdt - (2t + x^3)dx = 0$$

Задача 1.1. Покажете, че всяко решение на $\dot{x} + ax = b(t)$ е ограничено за $t \rightarrow \infty$ ако $a > 0$, $|b(t)| < M$, $b(t) \in C$.

Задача 1.2. Нека $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две частни решения на $\dot{x} + a(t)x = b(t)$. Изразете общото решение посредством $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

1.2. **Уравнения на Бернули.** Уравненията от вида

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^k, k \neq 0, 1$$

се наричат *уравнения на Бернули*. Тях ги решаваме посредством смяната $y = x^{1-k}$, като ги свеждаме до линейни, които вече знаем как да решаваме.

(2) Намерете решението на следните уравнения:

$$(2.1) \quad (x+1)(y' + y^2) = -y$$

$$(2.2) \quad \dot{x} + 2x = x^2e^t$$

$$(2.3) \quad 2\dot{x} = \frac{xt}{t^2-1} + \frac{t}{x}$$

$$(2.4) \quad \dot{x} = x \tan(t) + x^4 \cos(t)$$

$$(2.5) \quad tx^2\dot{x} = t^2 + x^3$$

$$(2.6) \quad \dot{x}(t^2x^3 + tx) = 1$$

1.3. Уравнения на Рикати. Уравненията от вида $\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = c(t)$ се наричат *уравнения на Рикати*. Те не се решават винаги, но ако е известно едно частно решение, могат да бъдат намерени и всички останали. За целта, ако $x_1(t)$ е едно частно решение, то със субституцията $x = x_1(t) + \frac{1}{z}$, ние стигаме до линейно уравнение за z . Няма общ метод за търсене на частното решение, но видът на функциите a, b, c може да го подсказе.

(3) Намерете решението на следните уравнения на Рикати:

$$(3.1) \quad \dot{x} + 2x^2 = \frac{6}{t^2}$$

$$(3.2) \quad \dot{x} + x^2t - t^3x - 2t = 0$$

$$(3.3) \quad \dot{x} = (2e^t + 1)x - x^2 - e^{2t}$$

$$(3.4) \quad \dot{x} - x^2 + x \sin(t) - \cos(t) = 0$$

$$(3.5) \quad \cos^2(t)\dot{x} + x^2 \sin(t) \cos^2(t) = 2 \sin(t)$$

$$(3.6) \quad \dot{x} = \frac{1}{t^2} - \frac{x}{t} - x^2, \text{ използвайте } x_1 = at^n$$

$$(3.7) \quad \dot{x}(1 - t^3) - x^2 + t^2x + 2t = 0, \text{ използвайте } -t^2$$

Задача 1.3. Нека $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ са три частни решения на уравнението на Рикати $\dot{x} + a(t)x = b(t)x^k$, $k \neq 0, 1$. Изразете общото решение посредством $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

Задача 1.4. Нека $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две частни решения на $\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = c(t)$. Изразете общото решение посредством $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

1.4. Точни диференциални уравнения. Уравнението $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ се нарича *точно диференциално уравнение* ако е изпълнено, че $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ (в по-общ смисъл, съответния диференциал се казва че е затворен) където $(x, y) \in D$ и $D \subset \mathbf{R}^2$ е *contractible*. За да го решим вкарваме всичко под общ диференциал $d\Phi(x, y)$ и ако се изисква от задачата, определяме $y = y(x)$ от уравнението $\Phi(x, y) = \text{const}$. С други думи, ние определяме $\Phi(x, y)$, такава че $\Phi(x, y)_x = P(x, y)$ и $\Phi(x, y)_y = Q(x, y)$, или още че $d\Phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, т.е. формата е точна. Лемата на Пуанкаре ни гарантира че (в *contractible* област) ако формата е затворена, то тя е и точна.

Забележка 1.5. Дефиниционната област в която се разглеждат съответните уравнения за диференциали е съществена. Само условието $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ не ни гарантира съществуването на $\Phi(x, y)$, за която $\Phi(x, y)_x = P(x, y)$ и $\Phi(x, y)_y = Q(x, y)$. Разгледайте

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Покажете, че в областта $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$ не съществува $\Phi(x, y)$, за която $\Phi(x, y)_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ и $\Phi(x, y)_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$ въпреки че дадения диференциал е затворен.

(4) Намерете съответните точни диференциали

$$(4.1) \quad (3x^2 + y^2)dx + (2xy - 6y^2)dy = 0$$

$$(4.2) \quad (x^2 - y^2 + 2xy)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$$

$$(4.3) \quad (1 + y)dx + (x + y)dy = 0$$

$$(4.4) \quad e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$

$$(4.5) \quad (x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

Задача 1.6. Намерете функция $A = A(x, y)$ такава, че уравнението

$$3x^2(1 + Ay)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0$$

да бъде точно ДУ. За така определената функция, решете съответното точно ДУ. Забележете, че задачата допуска повече от едно решение!

1.5. Интегриращ множител. Ако се окаже, че $P_y \neq Q_x$, тогава се опитваме да намерим т.нар. интегриращ множител $\mu = \mu(x, y)$, т.е. решаваме уравнение $\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$, където е изпълнено $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Често пъти интегриращият множител се търси от вида $\mu(x, y) = \varphi(x)$, $\mu(x, y) = \psi(y)$, $\mu(x, y) = \mu(x, y)$, $\mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$. Ако уравнението е редуцирано до уравнение от вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy + d\Theta(x, y) = 0$, то за уравнението $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ търсим интегриращ множител във вида $\mu(x, y) = \mu\Theta(x, y)$.

(5) Намерете интегриращ множител:

$$(5.1) \quad ydx - xdy = 0$$

$$(5.2) \quad (x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0, \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$(5.3) \quad (x - y\sqrt{1 + x^2})dx - x\sqrt{1 + x^2}dy = 0, \mu = \mu(x)$$

$$(5.4) \quad -2ydx + (\ln(y) + 2x - 1)dy = 0, \mu = \mu(y)$$

$$(5.5) \quad y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx), \mu =$$

$$(5.6) \quad (x^2 + 1)(2xdx + \cos(y)dy) = 2x \sin(y)dx, \mu =$$

$$(5.7) \quad \sin(2x)dx + \sin(2y)dy = 0, \mu =$$

$$(5.8) \quad ydx = xdy = 2x^3 \tan\left(\frac{y}{x}\right)dx, \mu =$$

$$(5.9) \quad (y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2x^3y)dy = 0, \mu = \mu(xy)$$

Цветелина Задача (1.1) Вилия Задача (2.1)

Янис Задача (1.2) Георги К. Задача (2.2)

Александър М. Задача (1.3) Георги Г. Задача (2.3)

Свилен Задача (1.8) Лилия Задача (2.5)