ЛЕКЦИИ ПО ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Огнян Христов, Севджан Хаккъев

Този учебник е предназначен за дистанционно обучение по "Обикновени диференциални уравнения" за студентите от Шуменския университет от специалностите Математика и информатика, Икономическа информатика, Компютърна информатика и Компютърни и информационни технологии.

Авторите сме се старали да напишем стандартен учебник, много близък до лекционните курсове, като целенасочено сме избягвали включването на други важни и интересни теми. Като всеки математически текст, лекциите съдържат доказателства на някои основни теореми. Тези доказателства са дадени с малък шрифт и могат да бъдат пропуснати на първо четене. Методите, разгледани във всяка тема, са илюстрирани с много примери. Всяка секция завършва с набор от задачи за самостоятелна работа. Тяхното решаване е гаранция за добро усвояване на материала. Дадени са и две допълнения, припомнящи някои от необходимите за изложението сведения от Математическия анализ и Линейната алгебра.

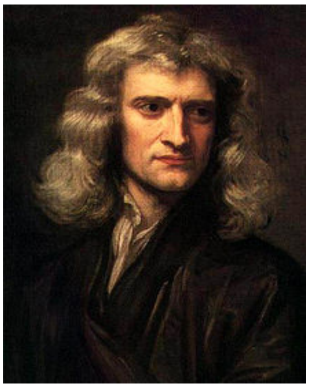
Авторите ще са благодарни на всякакви забележки, коментари и критика, които биха спомогнали евентуално подобряване на изложението. Пишете ни на адреси:

christov@fmi.uni-sofia.bg, shakkaev@fmi.shu-bg.net.

Написването на този учебник е частично подпомогнато от договор с МОНМ на тема "Модернизиране на Центъра за дистанционно обучение в Шуменски университет "Епископ Константин Преславски" чрез въвеждане на съвременни електронни форми на обучение " рег. N: BG 051 PO 001-4.3.04-0020 .

Съдържание

Галерия



Нютон

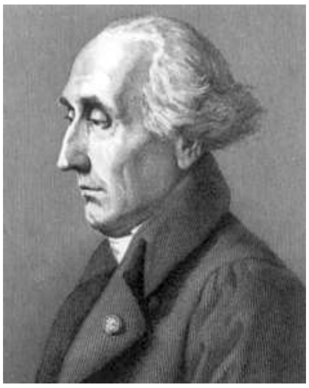
Лайбниц

Й. Бернули

Якоб Бернули

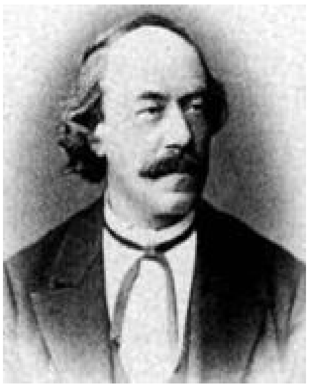
Д. Бернули

Рикати


Лагранж


Ойлер


Коши

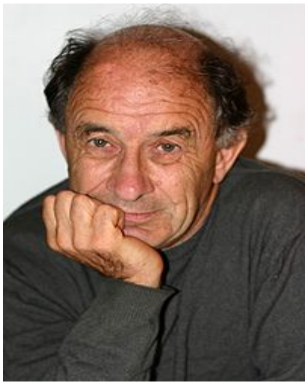

Липшиц


Пеано


Пикар


А. Ляпунов


Поанкаре


В. Арнолд

Глава 0

Увод

Диференциалните уравнения възникват в края на 17 век. По всяка вероятност датата 11 ноември 1675 г. може да се счита начало на науката диференциални уравнения. Тогава Лайбниц написва уравнението

$$\int y dy = \frac{1}{2} y^2,$$

с което решава едно просто диференциално уравнение и същевременно открива едно мощно средство за изследване – интегралното смятане.

Счита се, че терминът *диференциално уравнение* е употребен за пръв път от Хюйгенс през 1693 г.

Горедолу по същото време Нютон (1642 – 1727) класифицира няколко диференциални уравнения (записани около 1671 г. и публикувани през 1736 г.). Нютон е търсил решенията на диференциалните уравнения във вид на степенни редове. Това, което е по-важно е, че той пръв осъзнава важността им за естествознанието. Във фундаменталния си труд "Principia" (1687 г.) Нютон формулира своите закони, вторият от които гласи: "Силата е равна на масата по ускорението" . Този закон, написан с формули, ще видим малко по нататък. С помощта на своите закони Нютон излага теорията за движението на планетите на Слънчевата система и по този начин поставя основите на съвременната физика.

През 18 век особено големи приноси в развитието на диференциалните уравнения има фамилията Бернули. Те интерпретират различни физични и геометрични задачи в термините на диференциални уравнения. В частност, те откриват някои класове уравнения, които могат да се решат явно (вижте Глава 1).

Не може да не отбележим и приносите на Ойлер (1707 – 1783) и на Лагранж (1736 – 1813), които създават теорията на линейните уравнения (вижте Глава 4).

През 19 век с Поанкаре (1854 – 1912) започва нов етап. Създадената от него *качествена теория* за изследване на диференциалните уравнения е активно изследвана област и до днес с много важни приложения в естествознанието.

Понастоящем теорията на диференциалните уравнения е огромен набор от различни идеи и методи, използващи апарата на други математически дисциплини като алгебра, анализ (реален, комплексен, функционален), теория на групите на Ли и др. Представянето на съвременното състояние излиза извън рамките на тези лекции.

0.1 Основни понятия

Диференциално уравнение е уравнение, което съдържа неизвестна функция и нейните производни. В тези лекции ще предполагаме, че имаме само една независима променлива и тогава говорим за обикновени диференциални уравнения (ще ги означаваме накратко с ОДУ). Ние ще се занимаваме само с ОДУ.

Формално, *обикновено диференциално уравнение* наричаме уравнение, което свързва независима променлива x, неизвестна функция y и няколко нейни производни

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{0.1}$$

Тук $y', y'', \dots, y^{(n)}$ означават първата, втората, ..., n-тата производна на функцията y по отношение на x.

Дефиниция 0.1. *Редът на най-високата производна, участваща в уравнението, се нарича ред на ОДУ (0.1).*

Примери
1) $y' = f(x)$ е уравнение от първи ред;
2) $y'' + 2(y')^4 = 1$ е уравнение от втори ред;
3) $y^{(8)} - 4(y'')^3 = x^2$ е уравнение от осми ред .

Ние ще използваме също така t като независима променлива. В повечето приложения с t обикновенно се означава времето. Аналогично с $\dot{x}.\ddot{x}, \dots, x^{(n)}$ означаваме първата, втората, ..., n-тата производна на променливата x относно независимата променлива t.

Решение на диференциалното уравнение от n-ти ред (0.1) върху интервала (a, b) е функция $y = \varphi(x)$, дефинирана в интервала (a, b) заедно със своите производни до n-ти ред включително, и такава, че заместена в (0.1), го превръща в тъждество по x в интервала (a, b) .

Графикът на решението в равнината (x, y) се нарича *интегрална крива.*

Понякога решенията на ОДУ имат вида $y = y(x)$ (когато успеем да ги намерим). Също така е възможно да получим като решение и обратната функция $x = x(y)$. Почесто намираме решението като неявна функция $\Phi(x, y(x)) = 0$. Възможно е да получим решението в параметричен вид $x = x(p), y = y(p)$, където p е параметър.

Да се върнем към Пример 1 – задача, позната ни от Интегралното смятане. Интегрираме веднъж и получаваме

$$y(x) = \int f(x)dx + C. \tag{0.2}$$

Това е и решението на диференциалното уравнение от този пример. Първото нещо, което забелязваме е, че процесът на намиране на решенията е свързан с интегриране. Затова често ще използваме думата *интегриране* на диференциалното уравнение като синоним на решаване.

Задачата за интегриране на диференциално уравнение се състои в намирането на всички негови решения. В случаите, в които успеем да намерим решението с явна формула като (0.2), дори да не можем да пресметнем интеграла, казваме, че уравнението се интегрира в *квадратури*.

Второто нещо, което забелязваме от формула (0.2) е, че решениието зависи от константа.

Ще използваме следната конвенция. Под *общо решение* на уравнение от n-ти ред (0.1) разбираме решение, зависещо от n произволни константи

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \tag{0.3}$$

В случай, когато константите са по-малко (или еквивалентно на някоя от константите е дадено конкретно числово значение), говорим за *частно решение*.

0.2 Задача на Коши

Понякога се интересуваме не от всички решения, а от някое специално решение, преминаващо през зададена точка. Така зададената точка се нарича *начално условие*.

Дефиниция 0.2. *Задача на Коши за уравнението (0.1) се задава с диференциалното уравнение*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{0.4}$$

и началните условия

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{0.5}$$

Разбира се, решението на задачата на Коши (0.4), (0.5) е частно решение.

Пример. За уравнението от първи ред, разрешено относно производната, поставяме задачата на Коши по следния начин:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{0.6}$$

като (x_0, y_0) са известни стойности от областта, в която разглеждаме диференциалното уравнение.

Нека да отбележим, че априори не е ясно дали задачата на Коши има решение, ако има, колко решения минават през точката (x_0, y_0). Не е ясно също така дали решението зависи по непрекъснат или диференцируем начин от началните условия. Тези въпроси се разглеждат в Глава 3 при разумни предположения върху функциите в диференциалното уравнение.

0.3 Системи диференциални уравнения

Нека сега да разгледаме случая, когато зависимите променливи са повече от една. Това води до изучаването на системи диференциални уравнения. С помощта на евентуално въвеждане на нови променливи записваме една система ОДУ в така наречената нормална форма – система уравнения от първи ред, разрешени относно производните

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = v_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = v_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{array} \right. \tag{0.7}$$

Тази система се записва също като векторно уравнение

$$\dot{x} = v(t, x), t \in \mathbb{R}^1, x \in U \subset \mathbb{R}^n, \tag{0.8}$$

където $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, v(t, x) = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$. Тези записи удостоверяват употребата на термините "уравнение" и "система" като синоними. Ние ще употребяваме и двата термина.

Уравнението (0.8) е обобщение на едно скаларно диференциално уравнение

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{0.9}$$

Да припомним от Диференциалното смятане механичната интерпретация на производната. Ако $x(t)$ е законът за движение (грубо казано пътят) на частица, то $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ е скоростта, която зависи от t и координатата x. Тогава задачата за решаване на уравнение (0.9) може да се преформулира така: да се намери пътят на движеща се частица по зададена нейна скорост.

Аналогично за системата (0.8) на дясната страна можем да гледаме като на вектор в n-мерното пространство, допирателен към траекторията $x(t)$ (и отново с интерпретация на скорост). Казано по друг начин, задачата на диференциалните уравнения е по зададен допирателен вектор, да се определи кривата, до която той се допира във всяка точка.

За системата (0.8) *фазово пространство* наричаме множеството от точките $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^n$, за които системата е дефинирана.

Съответно множеството $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ наричаме *разширено фазово пространство.*

По дефиниция *интегрална крива* на (0.8) наричаме графиката на решението $x(t)$ на (0.8) в разширеното фазово пространство.

Проекцията на една интегрална крива върху фазовото пространство се нарича *фазова крива.* Набор от фазови криви се нарича *фазов портрет.*

Естествен е въпросът какво искаме да изучаваме за системи ОДУ.

Първото нещо, което бихме желали да намерим, са всички решения. За съжаление, в повечето случаи това е невъзможно. Единственият клас системи, който е изучен достатъчно пълно, е класът от линейните системи и уравнения. В трета глава ще изведем формули за общото решение и ще дадем алгоритъм за намирането на тези решения в ниските размерности.

След като не можем да намерим решенията, следва да се обърнем към методи, които не изискват намирането на решенията. Тези методи се наричат геометрични или качествени. Например бихме желали да нарисуваме фазовите портрети на системи в размерност 2 и 3. Такава задача разглеждаме в Глава 5, секция 5.1 за линейни системи с постоянни коефициенти в $\mathbb{R}^2$. Ще отбележим, че тази задача не е решена напълно дори за двумерна полиномиална система.

Бихме желали да изучим поведението на решения, близки до някое специфично решение на безкрайни интервали от време. С такова разглеждане се занимаваме в секция 5.2 на Глава 5.

След всичко казано дотук можем да отделим основните направления в диференциалните уравнения:

1) Съставяне на адекватни модели в естествознанието, описвани с ОДУ.

Тази дейност е важна и доста сложна по своя характер. Примери на прости модели от различни области на естествознанието са дадени в следващата секция.

2) Намиране на класове ОДУ, които се интегрират в квадратури.

3) Качествен анализ на диференциални уравнения.

Това е една област, която е активно изследвана и до днес.

0.4 Модели от естествознанието, които се описват с ДУ

В този параграф разглеждаме примери на диференциални уравнения, заедно с описание на процесите или явленията, на които те съответстват.

Механика

Вторият закон на Нютон постулира, че масата на една частица, умножена по нейното ускорение, е равна на силата, приложена върху частицата. С формули този закон се записва така

$$ma = F.$$

Ако $x(t)$ е законът за движение, то ускорението е равно на $\ddot{x}$, следователно горната формула се записва като диференциално уравнение от втори ред

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \tag{0.10}$$

Този закон е всеобщо валиден в класическата механика, въпреки че не е формално доказан или опроверган досега. Механиката и физиката ни дават примери на системи от уравнения от вида (0.10), в които $x \in \mathbb{R}^n$. Полагайки $y = \dot{x}$, привеждаме системата (0.10) в нормална форма

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = F(t, x, y).$$

Биология

1) Нека $x(t)$ е някакво количество бактерии в безкрайна хранителна среда. Еволюцията на $x(t)$ се описва с така нареченото уравнение на нормално размножаване

$$\dot{x} = ax, \quad a > 0,$$

където a е параметър. В Глава 1 ще видим, че такива уравнения се решават точно и от формулата на общото решение $x(t) = Ce^{at}$, където C е произволна константа; може да се види например, че $x(t)$ не става нула или безкрайност за крайни t.

Това уравнение при отрицателно a описва радиоактивен разпад.

2) Да разгледаме двумерната система, описваща системата жертва – хищник (например зайци и лисици) и изведена от Волтера и Лотка:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x(a_1 + b_1 y) \\ \dot{y} = y(a_2 + b_2 x) \end{array}\right.$$

Тук константите a_1, a_2, b_1, b_2 могат да дадат различни типове поведение на системата.

Химия

Моделира се реакцията на окисляване на въглеродния окис върху платинов катализатор. Предлага се следният нелинеен кинетичен механизъм:

1) $O_2 + 2Pt \leftrightarrows 2PtO$
2) $CO + Pt \leftrightarrows PtCO$
3) $PtCO + PtO \to 2Pt + CO_2$
4) $CO + Pt \leftrightarrows (PtCO)$,

където PtO и $PtCO$ са адсорбираните кислород и въглероден окис, Pt – активният център на повърхността на платиновия катализатор, $(PtCO)$ – нереакционноспособна форма на CO върху повърхността на катализатора.

На схемата от реакции 1 – 4 при условия на постоянна температура и концентрация на веществата в газовата фаза, съответства следната система диференциални уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2k_1 z^2 - 2k_{-1}x^2 - k_3 xy \\ \dot{y} = k_2 z - k_{-2} y - k_3 xy \\ \dot{s} = k_4 z - k_{-4} s, \end{array}\right.$$

където $z = 1 - x - y - s; x, y, s$ са безразмерните концентрации на веществата Pt, PtO, $PtCO$, $(PtCO)$ съответно, k_i са константите на скоростите на съответните химически реакции, разглеждани като параметри на модела.

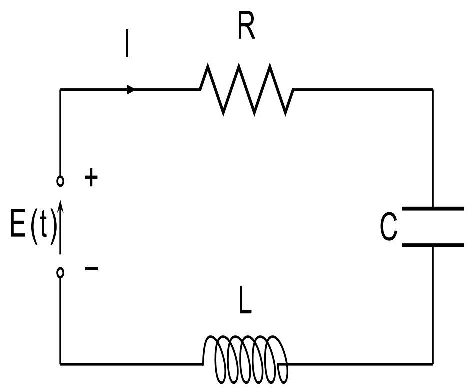
Електрически вериги

Нека да разгледаме следната проста електрическа верига. Тя се състои от съпротивление R, капацитет C, индуктор L и батерия или генератор $E(t)$, свързани последователно.

Нека I е токът, а $q(t)$ е зарядът на капацитета. Връзката между тях е следната

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

В сила е следният закон на Кирхоф:



Фигура 1: Електрическа верига

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0.$$

Заествайки I и производната му по t , получаваме линейно диференциално уравнение от втори ред

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

С линейни уравнения ще се занимаваме в Глава 4.

Икономика

Немалко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения (и по-общо с динамични системи). Една от общите им черти е, че се формулират сложно. Другата черта е, че наподобяват на описания вече модел на Лотка–Волтера (хищник – жертва), което е естествено.

Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelmo (1956), изглежда така. Нека производствената функция е

$$Y = KN^a,$$

където Y е продукцията, $K > 0$ е капиталово вложение (фиксирано), а N е предлаганата работна сила.

Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta\frac{N}{Y}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Комбинирайки двете, получаваме нелинейно уравнение от първи ред

$$\dot{N} = \alpha N - \beta\frac{N^{2-a}}{K},$$

което е уравнение на Бернули и се решава точно (виж Глава 1).

Глава 1

Методи за решаване на ОДУ от първи ред

В тази глава ще разгледаме някои класове от ОДУ от първи ред, които се интегрират в квадратури. Ще се ограничим само с уравнения, които са разрешени относно производната, т.е. ще разглеждаме уравнения от вида

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

или сводими към тях. Например

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

където $P(x, y), Q(x, y)$ са ненулеви функции, дефинирани в някаква област в равнината, се свежда към (1.1). Да разделим на Q и dx. След елементарни трансформации получаваме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

което е уравнение от тип (1.1).

Ще отбележим, че засега в повечето случаи няма да се занимаваме с това къде са дефинирани диференциалните уравнения и намерените техни решения. Ще считаме, че това може да се направи с методите, известни от Математическия анализ.

На пръв поглед човек може да помисли, че диференциалните уравнения се решават с набор от трикове. Всъщност както бързо ще се види, много малко диференциални уравнения се решават в квадратури. Зад факта дали едно уравнение може да се реши или не в квадратури, стои друга теория, която е доста сложна и следователно няма да я излагаме тук.

1.1 Уравнения с отделящи се променливи

Уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.2}$$

се наричат диференциални уравнения с отделящи се променливи. За да решим такова уравнение, умножаваме двете страни на уравнението с dx и $h(y) = \frac{1}{g(y)}$

$$h(y)dy = f(x)dx. \tag{1.3}$$

Интегрираме двете страни на горното уравнение

$$\int h(y)dy = \int f(x)dx$$

$$H(y) = F(x) + C, \tag{1.4}$$

където $H(y)$ и $F(x)$ са примитивни съответно на $h(y)$ и $f(x)$. Уравнение (1.4) наричаме общо решение на даденото диференциално уравнение с отделящи се променливи.

В следващите примери да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

Пример 1. $y' = 1 + y^2$.
Записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Умножаваме двете страни с dx и $\frac{1}{1+y^2}$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Интегрираме двете страни на горното уравнение

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int 1dx$$

$$\arctan(y) = x + c.$$

Пример 2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
Записваме уравнението във вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}.$$

След като умножим двете страни с dx и y и интегрираме, получаваме

$$ydy = \frac{x^2}{1+x^3}dx.$$

$$\int ydy = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C.$$

Коментар. Уравнения от типа $y' = f(ax+by)$ се свеждат лесно до уравнения с отделящи се променливи. За целта полагаме $z(x) = ax + by$.

Пример 3. Да намерим решението на задачата на Коши

$$y' = \cos(y-x), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Първо ще намерим общото решение и после ще изразим началното условие. Тъй като не се вижда веднага, че това е уравнение с отделящи се променливи, полагаме $z = y - x$. Оттук $z' = y' - 1$. Заместваме в уравнението и получаваме

$$z' = \cos z - 1 = -2\sin^2\frac{z}{2}.$$

Сега разделяме променливите

$$-\frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}} = dx$$

и интегрираме двете страни, за да получим

$$cotg z = x + C$$

или

$$cotg(y-x) = x + C.$$

Изразяваме началното условие, като заместим в последната формула $y = \frac{\pi}{2}$ и $x = 0$. Получаваме $0 = 0 + C$, откъдето $C = 0$, и решението на задачата на Коши е

$$cotg(y-x) = x.$$

Забележка. Можем да намерим решението на задачата на Коши за уравнение с отделящи се променливи

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

без да минаваме през общото решение, като изчислим определените интеграли

$$\int_{y_0}^{y} h(\eta)d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $y' = \frac{x+4}{y+3}$.
2. $y' = \frac{(x^2+2)e^{(x+y)}}{y}$.
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-x^2}$.
4. $(1+x^2)(1+y^2)dx - xydy = 0$.
5. $y' = x - 1 - y^2 + xy^2$.
6. $y' = \cot(x)\tan(y)$.

1.2 Хомогенни диференциални уравнения

Ако дясната страна на диференциалното уравнение

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворява следното условие $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ (т.е. ако може да се запише като функция на $\frac{y}{x}$), уравнението се нарича хомогенно.

Метод за решаване на хомогенни диференциални уравнения:

1) полагаме $y = xz$, където $z = z(x)$.

2) диференцираме по x двете страни - $y' = z + xz'$ и заместваме в даденото уравнение.

3) полученото уравнение е с отделящи се променливи.

В следващите примери да се намерят общите решения на диференциалните уравнения.

Пример 1. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^3$.

Полагаме $y = xz$. Диференцираме по x, $y' = z + xz'$, заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$z + xz' = z + \frac{1}{z^3}$$

$$z' = \frac{1}{xz^3}$$

уравнение с отделящи се променливи, което записваме във вида

$$z^3 dz = \frac{dx}{x}.$$

Интегрираме

$$\frac{z^4}{4} = \ln|x| + C,$$

където C е произволна константа. Заместваме z с $\frac{y}{x}$ и получаваме общото решение на даденото диференциално уравнение

$$y^4 = 4x^4 \ln|x| + 4Cx^4.$$

Пример 2. $y' = \frac{x^2+y^2+xy}{x^2}$

Записваме уравнението във вида

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x},$$

което е хомогенно диференциално уравнение. Полагаме $z = xy$. След диференциране по x, двете страни на полагането, получаваме $y' = z + xz'$. Заместваме получените изрази в даденото диференциално уравнение

$$z + xz' = 1 + z^2 + z,$$

или

$$xz' = 1 + z^2.$$

Последното уравнение е с отделящи се променливи. Отделяме изразите, съдържащи x, в едната страна, а тези, съдържащи y, в другата страна:

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}.$$

След интегриране получаваме

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\arctan z = \ln|x| + C.$$

Като заместим z с $\frac{y}{x}$ и решим полученото уравнение относно y, получаваме

$$y = x\tan(\ln|x| + C).$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $xy^2dy = (x^3+y^3)dx$.
3. $xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2+y^2}$.
4. $e^{\frac{x}{y}}(y-x)dy + y(1+e^{\frac{x}{y}})dx = 0$.

1.3 Уравнения от вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Уравнения от този тип се свеждат до хомогенни. За да видим това, започваме с по-простата задача

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right).$$

Вадим пред скоби в числителя и знаменателя отдясно x и съкращаваме на него. Получаваме

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right),$$

но това е едно хомогенно уравнение. За да сведем общата ситуация до тази, очевидно трябва да елиминираме c_1 и c_2. За целта решаваме

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1 &= 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ако решението е (α,β), то правим субституция $x = X+\alpha$, $y = Y+\beta$, която ги свежда до хомогенни.

Пример. $(x-y+1) = (y-2x-1)y'$.

За да приложим горната процедура, решаваме системата

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ -2x + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Решението е $(0,1)$. Полагаме $x = X$, $y = Y + 1$. Получаваме

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{Y - 2X}.$$

Вадим X пред скоби в числителя и знаменателя на дясната част и достигаме до

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{\frac{Y}{X} - 2},$$

което е хомогенно уравнение.

1.4 Линейни диференциални уравнения

Диференциални уравнения от вида

$$a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{1.5}$$

където функциите $a_1(x), a_2(x)$ и $b(x)$ зависят само от независимата променлива x, наричаме линейни диференциални уравнения. Да предположим, че $a_0(x) \neq 0$. След като разделим двете страни на $a_0(x)$, уравнението се записва в стандартен вид

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1.6}$$

Ако $q = 0$, то уравнението добива вида

$$y' + p(x)y = 0,$$

което наричаме линейно хомогенно уравнение. Да отбележим, че линейното хомогенно уравнение е уравнение с отделящи се променливи, чието общо решение е

$$y_h(x) = Ce^{-\int p(x)dx},$$

където C е произволна константа. За да намерим общото решение на нехомогенното диференциално уравнение, търсим решение от същия вид, като предполагаме, че C е функция на независимата променлива x, $C = C(x)$, т.е.

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Като заместим горния израз в даденото нехомогенно линейно диференциално уравнение, получаваме

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

или
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$
След интегриране на горното уравнение получаваме
$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$
където C_1 е произволна константа. Откъдето в крайна сметка общото решение на линейното диференциално уравнение се задава чрез формулата
$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{1.7}$$

В следващите примери да се намери общото решение на уравненията.

Пример 1. $y' - \frac{2}{x}y = x.$

Даденото уравнение е линейно с $p(x) = -\frac{2}{x}$ и $q(x) = x$. Съгласно формула (1.7) общото решение е
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(C_1 + \int xe^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right) \\ &= e^{\ln(x^2)}\left(C_1 + \int xe^{-\ln(x^2)}dx\right) \\ &= x^2\left(C_1 + \int \frac{1}{x}dx\right) = x^2(C_1 + \ln|x|). \end{aligned}$$

Пример 2. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x.$

Първо записваме даденото диференциално уравнение в стандартен вид, като разделяме двете страни на $1+x^2$,
$$y' + \frac{3x}{1+x^2}y = \frac{6x}{1+x^2}.$$
В този случай $p(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ и $q(x) = \frac{6x}{1+x^2}$. Съгласно формула (1.7) общото решение е
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{3x}{1+x^2}dx}\left(C_1 + \int \frac{6x}{1+x^2}e^{\int \frac{3x}{1+x^2}dx}dx\right) \\ &= e^{-\frac{3}{2}\ln(1+x^2)}\left(C_1 + \int \frac{6x}{1+x^2}e^{\frac{3}{2}\ln(1+x^2)}dx\right) \\ &= (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(C_1 + \int \frac{6x}{1+x^2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right) \\ &= (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(C_1 + \int 6x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(C_1 + 2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Пример 3. Да решим задачата на Коши
$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, \qquad y(1) = 1.$$

Първо ще намерим общото решение и после ще изразим началното условие. Прилагаме формула (1.7)

$$y = e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left(C + \int \frac{2}{x^3} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right)$$

и след пресмятане на интегралите намираме, че

$$y = \frac{C + 2x}{x^3}.$$

Изразяваме началното условие, като заместим в последната формула $y = 1$ и $x = 1$. Получаваме $1 = 2 + C$, откъдето $C = -1$ и решението на задачата на Коши е

$$y = \frac{2x - 1}{x^3}.$$

Забележка. За намиране общото решение на задачата на Коши за линейно уравнение

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y(x_0) = x_0$$

можем да използваме също така и формулата

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{-\int_{x_0}^{s} p(\tau)d\tau} ds \right).$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $y' + 2xy = (2x + 1)e^x$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x + 1$.
3. $y' + y \sin x = e^{\cos x}$.
4. $(e^x + x)y' - (e^x + 1)y = (e^x + x)^3$.
5. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \arctan x$.

1.5 Уравнения на Бернули

Уравнение от вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

където функциите $p(x)$ и $q(x)$ са непрекъснати в интервала (a, b), а n е реално число, се нарича уравнение на Бернули.

Метод за решаване на уравнението на Бернули.

1.) Разделяме двете страни на уравнението на y^n

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

2.) Полагаме $z(x) = y^{1-n}(x)$.

3.) Диференцираме двете страни на полагането

$$z'(x) = (1-n)y^{-n}y'$$

и като заместим в даденото диференциално уравнение, получаваме

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Това е линейно диференциално уравнение, което знаем как се решава.

В следващите примери да се намери общото решение на уравненията.

Пример 1. $y' - \frac{y}{2x} = -y^3x^5, \ \ x > 0.$

Даденото диференциално уравнение е уравнение на Бернули, където $n = 3$. Веднага се вижда, че $y = 0$ е решение. Ние търсим нетривиални решения. Разделяме двете страни на y^3

$$y^{-3}y' - \frac{y^{-2}}{2x} = -x^5.$$

Полагаме $z(x) = y^{-2}(x)$. Диференцираме двете страни в полагането по x, $z' = -2y^{-3}y'$ и като заместим в даденото диференциално уравнение, получаваме следното уравнение

$$z' + \frac{z}{x} = 2x^5,$$

което е линейно диференциално уравнение с общо решение

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C_1 + \int 2x^5 e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) \\ &= \tfrac{1}{x}\left(C_1 + \tfrac{2}{7}x^7\right). \end{aligned}$$

Заместваме z с y^{-2},

$$\frac{x}{y^2} = \frac{2}{7}x^7 + C_1.$$

Пример 2. $2y' = \frac{yx}{x^2-1} + \frac{x}{y}.$

В случая умножаваме двете страни по y, което трябва да е различно от нула. Получаваме

$$2yy' = \frac{x}{x^2-1}y^2 + x.$$

Полагаме $z = y^2$. Уравнението за z е

$$z' - \frac{x}{x^2-1}z = x.$$

Решавайки това линейно уравнение, получаваме

$$z = \sqrt{x^2-1}(C + \sqrt{x^2-1}).$$

Връщаме се в полагането и намираме y

$$y = \pm\sqrt{\sqrt{x^2-1}(C+\sqrt{x^2-1})}$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $(x^2+1)y' + xy = x^3y^3$.
2. $xy' + y = y^2 \ln x$.
3. $(x^2 - y^3)dx + 3xy^2dy = 0$.
4. $x^2y' - xy + y^2 = 0$.

1.6 Уравнения на Рикати

Уравнение от вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

където $a(x), b(x)$ и $c(x)$ са функции на x се нарича уравнение на Рикати.

Уравненията на Рикати са клас уравнения, които в общият случай не се решават в квадратури. Например Лиувил е показал, че уравнението

$$y' = y^2 - x$$

не се решава явно. Забележете, не съществува решение изразено чрез интеграли от елементарните функции или комбинации от тях, получени с основните алгебрични операции. Има обаче решение, което се представя с безкраен ред.

За да можем да решим едно уравнение на Рикати, ни трябва поне едно частно решение. Бедата е, че за намиране на частни решения няма алгоритъм.

I. Случай на едно частно решение.

Нека знаем едно частно решение $y_1(x)$ на уравнението на Рикати. След полагането $z(x) = \frac{1}{y(x)-y_1(x)}$, даденото диференциално уравнение се свежда до линейно диференциално уравнение относно новата независима променлива z,

$$z'(x) + p(x)z = q(x).$$

Пример. Да разгледаме уравнението $y' = \frac{1}{x}y^2 - \frac{2x+1}{x}y + x + 2$. Лесно се проверява, че функцията $y_1(x) = x$ е частно решение на даденото диференциално уравнение. Полагаме $z(x) = \frac{1}{y(x)-2}$ или $y = x + \frac{1}{z}$. Диференцираме двете страни на последното уравнение $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ и като заместим в даденото диференциално уравнение получаваме,

$$xz' = z - 1,$$

което е уравнение с отделящи се променливи с общо решение

$$z(x) = 1 + cx.$$

Като се върнем към полагането получаваме общото решение на даденото диференциално уравнение

$$y(x) = x + \frac{1}{1+cx}.$$

II. Случай на две частни решения

Нека са известни две частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на даденото диференциално уравнение на Рикати. В този случай е удобно да направим следното полагане

$$z(x) = \frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)}.$$

Новото уравнение относно новата променлива в този случай е

$$z' = (y_2 - y_1)a(x)z,$$

което е уравнение с отделящи се променливи.

Пример. Да разгледаме уравнението $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$. Търсим частно решение от вида $y = \frac{a}{x}$. Замествайки този израз в диференциалното уравнение, получаваме, че a трябва да удовлетворява $2a^2 - a - 6 = 0$, т.е. имаме две частни решения $y_1(x) = \frac{2}{x}$ и $y_2(x) = -\frac{3}{2x}$. Полагаме, както е указано по-горе

$$z = \frac{y + \frac{3}{2x}}{y - \frac{2}{x}},$$

откъдето получаваме уравнението за z

$$z' = \frac{7}{x}z$$

с общо решение $z = Cx^7$. Сега се връщаме в полагането и намираме y

$$y = \frac{\frac{3}{2x} + \frac{2C}{x^6}}{Cx^7 - 1}.$$

Има формула за общото решение на уравнението на Рикати, която използва три известни частни решения.

1.7 Точни диференциални уравнения

Дефиниция 1. Диференциалното уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.8}$$

се нарича *точно* в областта $U \subset \mathbb{R}^2$, ако съществува функция $F(x,y)$, такава, че

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = P(x,y), \;\; \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = Q(x,y). \tag{1.9}$$

Теорема 1.1. *Нека частните производни от първи ред на функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснати в областта $U \subset \mathbb{R}^2$. Тогава диференциалното уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

е точно тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{1.10}$$

за всяко $(x,y) \in U$.

Доказателство. 1) Нека даденото уравнение е точно, т.е. съществува функция $F(x,y)$, такава, че

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = Q(x,y).$$

Ще покажем, че е изпълнено (1.10). Тъй като смесените производни от втори ред $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ са непрекъснати, то от теоремата за равенство на смесените производни следва, че те са равни,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2) Нека е изпълнено (1.10). Ще трябва да построим функция $F(x,y)$, за която $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = P(x,y)$ и $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = Q(x,y)$. За всяка функция $g(y)$, функцията

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y)$$

удовлетворява условието $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$. Целта е да определим $g(y)$, така че да е изпълнено равенството

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx + g'(y),$$

което е еквивалентно на това да покажем, че дясната страна на равенството

$$g'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx$$

е функция само на y, т.е. не зависи от x. За целта диференцираме дясната страна на горното равенство относно x и като използваме (1.10), получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

■

Метод за решаване на точни диференциални уравнения:

1) ако уравнението е точно, то $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$. След интегриране на последното уравнение по x получаваме

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y);$$

2) за да определим $g(y)$, диференцираме горното уравнение относно y и заместваме $\frac{\partial F}{\partial y}$ с $Q(x,y)$;

3) за да определим $g(y)$, полученото уравнение интегрираме по y;

4) общото решение на точното диференциално уравнение се задава чрез формулата

$$F(x, y) = C.$$

Също така може да процедираме и по следния начин:

1') имаме $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. След интегриране на последното уравнение получаваме

$$F(x, y) = \int Q(x, y)dy + h(x);$$

2') за да определим $h(x)$, диференцираме горното уравнение относно x и заместваме $\frac{\partial F}{\partial x}$ с $P(x, y)$;

3') за да определим $h(x)$, полученото уравнение интегрираме по x.

В следващите примери да се намерят общите решения на диференциалните уравнения.

Пример 1. $(6x - 3x^2y)dx - (x^3 + 2y)dy = 0$.

Нека $P(x, y) = 6x - 3x^2y$ и $Q(x, y) = -x^3 - 2y$. Даденото диференциално уравнение е точно, тъй като

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнението $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ интегрираме относно x и получаваме

$$F(x, y) = \int (6x - 3x^2y)dx = 3x^2 - x^3y + g(y).$$

Диференцираме горното уравнение по y и като използваме, че $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = -x^3 - 2y$, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x^3 - 2y = -x^3 + g'(y),$$

откъдето $g'(y) = -2y$. Следователно (след интегриране) $g(y) = -y^2$. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$3x^2 - x^3y - y^2 = C.$$

Пример 2. $(1 + ye^x + yxe^x)dx + (xe^x + 2)dy = 0$.

В този случай $P(x, y) = 1 + ye^x + yxe^x$ и $Q(x, y) = xe^x + 2$. Тогава $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + xe^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. даденото диференциално уравнение е точно. След интегриране на $Q(x, y)$ относно y, получаваме

$$F(x, y) = \int (xe^x + 2)dy = xye^x + 2y + h(x).$$

Диференцираме последното уравнение относно x и използвайки, че $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$, получаваме

$$1 + ye^x + yxe^x = ye^x + yxe^x + h'(x).$$

Откъдето получаваме, че $h'(x) = 1$ и след интегриране $h(x) = x$. Следователно $F(x, y) = xye^x + 2y + x$ и решението на даденото диференциално уравнение е $xye^x + 2y + x = C$. След като решим относно y, получаваме $y = \frac{C-x}{2+xe^x}$.

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $\arctan y^2 dx + \frac{2xy}{1+y^4} dy = 0$.
2. $(y + ye^{xy})dx + (x + xe^{xy})dy = 0$.

1.8 Уравнения, свеждащи се към точни

В тази част ще се занимаваме с уравнения от вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.11}$$

при условие, че

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

т.е когато уравнението не е точно диференциално уравнение.

Функцията $\mu(x,y)$ ще наричаме интегриращ множител, ако след като умножим двете страни на (1.11) с μ, уравнението се превръща в точно диференциално уравнение.

Въпросът сега е как да намерим интегриращия множител (ако съществува)? Да си припомним, че новото уравнение (след като умножим двете страни)

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{1.12}$$

е точно диференциално уравнение, ако

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}(x,y), \tag{1.13}$$

т.е. ако

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu, \tag{1.14}$$

което е частно диференциално уравнение. За да избегнем тази трудност, първо да предположим, че интегриращият множител μ е функция само на независимата променлива x. Имаме $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Тогава (1.13) се свежда до уравнението

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\right)\mu. \tag{1.15}$$

1. Следователно, ако изразът $\left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\right)$ е функция само на независимата променлива x, то (1.15) е уравнение с отделящи се променливи и така получаваме следната формула:

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\right)dx\right\}. \tag{1.16}$$

Аналогично, ако интегриращият множител μ е функция само на y, то $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$. Тогава (1.14) се свежда до уравнението

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right) \mu. \tag{1.17}$$

2. Следователно, ако изразът $\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right)$ *е функция само на независимата променлива* y*, то (1.15) е уравнение с отделящи се променливи и така получаваме следната формула:*

$$\mu(y) = \exp \left\{ \int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{P} \right) dy \right\}. \tag{1.18}$$

В следващите примери да се намерят общите решения на диференциалните уравнения.

Пример 1. $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$.
Нека $P(x, y) = 3xy + y^2$, $Q(x, y) = x^2 + xy$. Тогава

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y.$$

Следователно уравнението не е точно. Тъй като

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x},$$

то търсим интегриращ множител като функция само на x. Съгласно формула (1.16)

$$\mu(x) = \exp \left\{ \int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx \right\} = \exp \left(\int \frac{1}{x} dx \right) = x.$$

Като умножим двете страни на даденото уравнение с $\mu(x)$, полученото уравнение е точно

$$(3x^2 y + xy^2)dx + (x^3 + x^2 y)dy = 0,$$

тъй като $\frac{\partial(3x^2y + xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + x^2 y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} = C.$$

Пример 2. $ydx + (y - x)dy = 0$.
Нека $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = y - x$. Тогава

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Следователно уравнението не е точно. Тъй като

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{Q} = -\frac{2}{y},$$

то търсим интегриращ множител като функция само на y. Съгласно формула (1.18)

$$\mu(y) = \exp\left\{\int \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{P}\right) dy\right\} = \exp\left(-\int \frac{2}{y} dy\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Като умножим двете страни на даденото уравнение с $\mu(y)$, полученото уравнение е точно

$$\frac{1}{y} dx + \frac{y-x}{y^2} dy = 0,$$

тъй като $\frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{y-x}{y^2})}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$.

Интегрираме функцията $\frac{1}{y}$ по x,

$$F(x,y) = \int \frac{1}{y} dx = \frac{x}{y} + g(y).$$

Диференцираме горното уравнение по y и като използваме, че $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y-x}{y^2}$, получаваме

$$\frac{y-x}{y^2} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y).$$

Откъдето получаваме, че $g'(y) = \frac{1}{y}$. След интегриране на последното равенство

$$g(y) = \ln|y|.$$

В крайна сметка за общото решение на даденото диференциално уравнение получаваме

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = C.$$

Глава 2

ОДУ от по-висок ред. Понижаване на реда

В тази глава ще разгледаме някои от най-простите класове уравнения от по-висок от първи ред, при които след смяна на променливите редът се понижава. Други по-сложни класове уравнения, при които редът се понижава, могат да се видят например в [6].

2.1 Уравнения от вида $y^{(n)} = f(x)$

При тези уравнения просто интегрираме няколко пъти дясната страна по x, което намалява реда и добавя по една константа при всяко интегриране. След n-кратно интегриране получаваме общото решение.

Пример 1. Да решим уравнението $y'' = xe^x$.
Интегрираме веднъж и получаваме

$$y' = \int xe^x dx + C.$$

Интегралът се пресмята лесно по части, което дава

$$y' = (x-1)e^x + C.$$

Сега интегрираме двете страни още веднъж:

$$y = \int (x-1)e^x dx + Cx + D.$$

Използвайки горното интегриране по части, получаваме общото решение

$$y = (x-2)e^x + Cx + D.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $y'' = \sin x$

2. $y'' = x \ln x$.

2.2 Уравнения от вида $F(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}(x)) = 0$

Този клас уравнения не съдържа неизвестната функция $y(x)$ и производните ѝ до ред $k-1$.

Понижаваме реда на уравнението с k единици, като положим най-ниската производна като нова зависима променлива

$$z(x) = y^{(k)}(x), \tag{2.1}$$

Последователно изразяваме другите производни

$$z'(x) = y^{(k)}(x), ..., z^{(n-k)}(x) = y^{(n)}(x).$$

Уравнението за z е вече уравнение от ред $n-k$

$$F(x, z(x), \ldots, z^{(n-k)}(x)) = 0.$$

Ако успеем да решим това уравнение относно z, то връщаме се в полагането (2.1) и решаваме уравнение, което е от тип, описан в предната секция относно y.

Пример 1. Уравнението $x^2y'' = y'^2$ не съдържа функцията y. Полагаме $z = y', z' = y''$ и като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$x^2 z' = z^2,$$

което е уравнение с отделящи се променливи

$$\frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{x^2}dx.$$

След интегриране на полученото уравнение достигаме до

$$\int \frac{1}{z^2}dz = \int \frac{1}{x^2}dx,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C,$$

$$z = \frac{x}{1+Cx}.$$

Заместваме така намереното z с y' (т.е. връщаме се в полагането)

$$y' = \frac{x}{1+Cx},$$

което уравнение е от тип, разгледан в предната секция. След интегриране получаваме последователно при $C \neq 0$

$$y = \frac{1}{C}\int \frac{Cx + 1 - 1}{1 + Cx}dx,$$
$$y = \frac{1}{C}\left(\int 1dx - \int \frac{1}{1 + Cx}dx\right)$$
$$y(x) = \frac{1}{C}\left(x - \frac{1}{C}\ln(1 + Cx) + D\right),$$

което е общото решениие на резглежданото уравнение. При $C = 0$ имаме тривиално $y = x^2/2$, но това е частно решение.

Пример 2. $y''' = -\frac{1}{2}(y'')^2$.

Това е уравнение от трети ред. То не съдържа неизвестната функция y и нейната първа производна y'. Полагаме $y'' = z(x)$. Очевидно $y''' = z'$. Получаваме следното уравнение за z

$$z' = -\frac{1}{2}z^2.$$

Това е уравнение с отделящи се променливи. Неговото решение е

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}x - \frac{C}{2},$$

което записваме като

$$z(x) = \frac{2}{x + C}.$$

Сега се връщаме в полагането

$$y'' = z(x) = \frac{2}{x + C}$$

и трябва да интегрираме това уравнение два пъти по x. След еднократно интегриране получаваме

$$y' = 2\ln(x + C) + D.$$

Интегрираме още веднъж

$$y(x) = 2\int \ln(x + C)dx + Dx + E.$$

Интегралът се пресмята по части и общото решение има вида

$$y(x) = 2x\ln(x + C) - 2x - 2C\ln(x + C) + Dx + E.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения.

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 6x^2 + 2$.

2. $xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}$.

3. $y'' + (y')^2 = (x + \frac{1}{2x})y'$.

2.3 Автономни уравнения

Ако уравнението не съдържа независимата променлива x, т.е. уравнението има вида

$$F(y(x), y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

то може да понижим реда му с единица, полагайки

$$y' = p(y). \tag{2.2}$$

По този начин за независима променлива имаме y, а за неизвестна функция $p(y)$. Ако успеем да решим полученото уравнение спрямо $p(y)$

$$F(y, p'(y), \dots, p^{(n-1)}(y)) = 0,$$

то връщаме се в полагането (2.2) и решаваме уравнение с отделящи се променливи относно y.

Пример 1. Да разгледаме уравнението $yy'' = y^2y' + y'^2$. Полагаме $y' = p$, което, като диференцираме по x, имаме $y'' = pp'$. Като заместим в даденото уравнение и разделим двете страни на yp, получаваме уравнението $p' = y + py^{-1}$, което е линейно уравнение. Неговото решение е

$$p(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy}\left(C_1 + \int ye^{-\int \frac{1}{y}dy}dy\right) = y(C_1 + y).$$

Сега се връщаме в полагането. Полученото уравнение е с отделящи се променливи

$$\frac{dy}{dx} = y(y + C_1).$$

След интегриране имаме последователно

$$\int \frac{1}{y(C_1 + y)}dy = \int 1dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + C_1}\right)dy = x + C_2,$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{y}{y + C_1}\right) = x + C_2,$$

$$\frac{y}{y + C_1} = Ce^{C_1x}.$$

Пример 2. Да разгледаме уравнението $y^3y'' = -1$. Полагаме $y' = p(y)$. Изразяваме втората производна $y'' = pp'$ и заместваме в уравнението

$$pp' = -\frac{1}{y^3}.$$

Интегрираме това уравнение с отделящи се променливи

$$\int pdp = -\int \frac{dy}{y^3} + \frac{C}{2}.$$

Получаваме за p след коренуване

$$p = \pm\frac{\sqrt{1+Cy^2}}{y}.$$

Разглеждаме само случая със знак $+$, другият е подобен. Връщаме се в полагането, като за y имаме уравнението

$$y' = \frac{\sqrt{1+Cy^2}}{y}.$$

Разделяме променливите в последното уравнение

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+Cy^2}} = dx.$$

Интегрираме при $C \neq 0$ и получаваме общото решение

$$\frac{1}{C}\sqrt{1+Cy^2} = x + D.$$

При $C = 0$ интегралът е тривиален – получаваме

$$y^2/2 = x + D,$$

но това е частно решение.

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения:

1. $y'' - 2yy' = 0$.

2. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0.$

3. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$

2.4 Хомогенно уравнение относно y и нейните производните

Ако даденото уравнение е хомогенно относно неизвестната функция y и производните ѝ, т.е. ако не се променя при замяната на $y, y', y'', \ldots$ с $ky, ky', ky'', \ldots$, то редът на даденото уравнение може да се понижи с единица със смяната

$$y' = yz, \tag{2.3}$$

където z е новата неизвестна функция. Можем да изразим втората и следващите производни чрез по-ниски производни на z. Например

$$y'' = y'z + z'y = y(z^2 + z').$$

Получаваме следното уравнение за z

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Ако успеем да решим това уравнение спрямо z, то връщаме се в полагането (2.3) и решаваме уравнение с отделящи се променливи, за да определим y.

Пример 1. Разглеждаме уравнението $y'^2 + 2yy'' = 0$. Лесно се вижда, че ако заменим y с ky, y' с ky' и y'' с ky'', то уравнението не се променя. Полагаме $y' = yz$, диференцираме го по x, $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$ и като заместим в даденото диференциално уравнение, получаваме диференциалното уравнение

$$z' = -\frac{3}{2}z^2,$$

което е уравнение с отделящи се променливи. След интегриране получаваме

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{3}{2}dx,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{3}{2}x + C_1.$$

От полагането $z = \frac{y'}{y}$, като го заместим в горното уравнение отново получаваме уравнение с отделящи се променливи

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{\frac{3}{2}x - C_1}dx.$$

Интегрираме полученото уравнение

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{\frac{3}{2}x - C_1}dx,$$

$$\ln|y| = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{3}{2}x - C_1\right| + C_2,$$

$$y(x) = C\left(\frac{3}{2}x - C_1\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Пример 2. Разглеждаме уравнението $xyy'' - x(y')^2 = yy'$. Проверява се веднага, че то е хомогенно. Тъй като уравнението винаги има нулево решение, то търсим нетривиални решения. Полагаме $y' = yz$. Вече пресметнахме $y'' = y(z' + z^2)$. Заместваме тези производни в уравнението и след съкращаване на y^2 достигаме до

$$xz' = z.$$

Това е уравнение с отделящи се променливи и неговото решение се намира лесно – $z = Cx$. Връщаме се в полагането

$$y' = Cxy.$$

Отново решаваме уравнение с отделящи се променливи и намираме общото решение

$$\ln y = Cx^2/2 + D.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения:

1. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2. $yy'' = (y')^2$.

3. $xyy'' - x(y')^2 = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.5 Уравнения, които са пълни производни

Понякога се оказва, че някое диференциално уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

може да се преобразува до следното

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}G(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

т.е. лявата страна може да се запише като пълна производна. Тогава редът на уравнението се понижава веднага

$$G(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = C = const.$$

Пример 1. Да разгледаме уравнението $yy'' - (y')^2 = y^2y''$. Веднага се вижда, че $y \equiv 0$ е решение. Ясно е също така, че $y = const$ е също решение. Нека да потърсим нетривиални решения. Делим двете страни на y^2.

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = y''.$$

Лявата страна е производна на частно, а дясната е ясна:

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{y} = (y')',$$

или

$$\frac{d}{dx}(\frac{y'}{y} - y') = 0.$$

Получаваме

$$\frac{y'}{y} - y' = C.$$

Това уравнение записваме като

$$y' = \frac{Cy}{1-y}.$$

Това е уравнение с отделящи се променливи. При $C \neq 0$ ($C = 0$ отговаря на $y = const$) имаме

$$\frac{1}{C}\frac{(1-y)dy}{y} = dx.$$

Интегрирайки, получаваме общото решение

$$\frac{1}{C}(\ln y - y) = x + D.$$

Пример 2. Да разгледаме уравнението $yy'' + (y')^2 = 2x$. Лявата страна може да се запише като $(yy')'$, а дясната е очевидно равна на $(x^2)'$, или

$$(yy' - x^2)' = 0.$$

Оттук следва, че $yy' = x^2 + C$. Но това е уравнение с отделящи се променливи

$$ydy = (x^2 + C)dx.$$

Интегрираме веднъж и получаваме общото решение

$$y^2/2 = x^3/3 + Cx + D.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения:

1. $yy'' = y'^2$.

2. $yy'' = y'(y' + 1)$.

3. $yy''' + 3y'y'' = 0$.

4. $y'y''' - y''^2 = y'^2 y''$.

Глава 3

Основни теореми

В тази глава ще изложим някои основни резултати, свързани със задачата на Коши

$$\left|\begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}} = v(t,\mathbf{x}), & (t,\mathbf{x}) \in W \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, & (t_0,\mathbf{x}_0) \in W \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Тук W е област в разширеното фазово пространство $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ реалнозначно изображение, t е независимата променлива, а $\mathbf{x}(t)$ са търсените величини.

Теоремата за съществуване и единственост е формулирана и доказана в секция 3.1. Теоремата за съществуване е дело на Коши и Пеано, а съществуването и единствеността – на Пикар и Линдельоф. Има няколко различни начина да се докаже тази теорема и всички те изискват дясната страна $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ да удовлетворява условието на Липшиц по $\mathbf{x}$. Основните средства при доказателството са последователни приближения (приближения на Пикар) и неравенството на Гронуол (Лема 3.2). По-нататък в секции 3.2 и 3.3 се разглеждат резултати за непрекъснатата и диференцируемата зависимост на решението на задачата на Коши (3.1) относно началните условия и параметри. Продължаването на локалните решения в по-голям интервал се разглежда в секция 3.4.

3.1 Теорема за съществуване и единственост

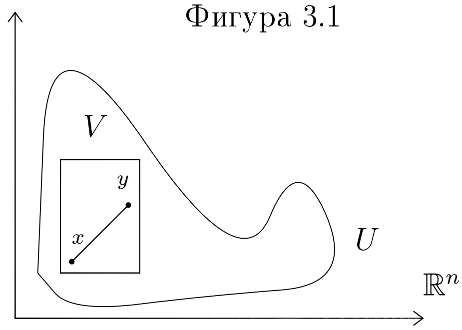
Да започнем с пример. Да разгледаме задачата на Коши

$$\dot{x} = x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Очевидно $x \equiv 0$ е едно решение. Да потърсим ненулево решение. Уравнението е от тип разделящи се променливи – $\frac{dx}{x^{2/3}} = dt$. След интегриране и елементарни трансформации получаваме $x = \frac{(t+C)^3}{27}$. Тъй като $x(0) = 0$, то константата C е равна на нула или $x = \frac{t^3}{27}$. Получихме, че през точката $(0,0)$ минават две решения – $x \equiv 0$ и $x = \frac{t^3}{27}$.

Разгледаният пример показва, че само непрекъснатост на дясната страна на диференциалното уравнение или система не е достатъчно условие за единственост на решението на задачата на Коши. Естественото условие е дясната стране да е диференцируема в разглежданата област. Оказва се по-удобно за доказателствата, които следват, да поискаме дясната страна да е Липшицова по $\mathbf{x}$.

Фигура 3.1



Дефиниция 3.1. *Изображението $f : U \to \mathbb{R}^n$ се нарича Липшицово, ако*

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y|| \qquad \forall x, y \in U.$$

Понякога условието на Липшиц се проверява трудно и затова ще дадем по-лесно проверим критерий, който дава връзката между диференцируемостта и липшицовостта.

Лема 3.1. *Непрекъснато диференцируемо изображение f, дефинирано върху изпъкнало компактно подмножество V на областта U, е Липшицово като, $L = \sup_V ||f_*||$.*

Доказателство. Нека $x, y \in V$ (фиг. 3.1). Да означим

$$z(t) = x + t(y - x), \quad t \in [0, 1], \quad z(t) \in V.$$

От формулата на Нютон - Лайбниц имаме

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z(t))dt = \int_0^1 f_* \dot{z} dt = \int_0^1 f_*(y - x)dt,$$

$$||f(y) - f(x)|| = ||\int_0^1 f_*(y - x)dt|| \leq \int_0^1 ||f_*||||(y - x)||dt \leq L||y - x||.$$

□

Нужна ни е още следната

Лема 3.2. *(Гронуол) Нека $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и неотрицателни. Нека е изпълнено за всяко $t \in [a, b]$ и $C \geq 0$ $u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Тогава*

$$u(t) \leq C \exp(\int_a^t v(s)ds).$$

Доказателство. Нека $C > 0$. Да означим $h(t) := C + \int_a^t u(s)v(s)ds$.

$$h(t) > 0 \quad (u(t) \leq h(t)).$$

$$\dot{h}(t) = u(t)v(t) \leq h(t)v(t)$$

След интегриране получаваме $h(t) \leq Ce^{\int_a^t v(s)ds}$, откъдето следва резултатът при $C > 0$.

Нека $C = 0$. Заместваме C с $\epsilon > 0$, където ϵ е произволно достатъчно малко. Прилагайки горното неравенство след $\epsilon \to 0$, получаваме $h(t) \equiv 0$ и следователно $u(t) \equiv 0$.

□

Разглеждаме задачата на Коши (3.1).

Теорема 3.1. *Нека $v(t,x) \in C(W)$ и нека компактът $K := \{(t,x) \in W : ||x - x_0|| \leq b, |t - t_0| \leq a\}$ се съдържа в W. Да предположим, че $v(t,x)$ е Липшицова по x в K с константа L, т.е. $||v(t,x) - v(t,y)|| \leq L||x - y||$ за всяко $(t,x), (t,y) \in K$. Нека $||v(t,x)|| \leq M$ в K и $h \leq min(a, \frac{b}{M})$. Тогава съществува единствено решение на (3.1), дефинирано в $(t_0 - h, t_0 + h)$ и удовлетворяващо $x(t_0) = x_0$.*

Тази теорема ще докажем с помощта на метода на последователните приближения на Пикар.

Доказателство. Ще разбием доказателството на няколко прости стъпки.

Стъпка 1. Първо ще покажем, че решаването на задачата на Коши (3.1) е еквивалентно на решаването на едно интегрално уравнение.

Тъй като $\dot{x}$ съществува, то x е непрекъснато изображение, следователно непрекъснато е и $v(t, x(t))$, откъдето $\dot{x}$ също е непрекъснато. Интегрираме от t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x} ds = \int_{t_0}^{t} v(s, x(s)) ds,$$

откъдето получаваме

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s, x(s)) ds. \tag{3.2}$$

Така показахме, че всяко решение на (3.1) е решение на интегралното уравнение. Обратно, нека $x(t)$ е непрекъснато решение на (3.2). Диференцираме (3.2) и $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$. Замествайки в (3.2) $t = t_0$, получаваме $x(t_0) = x_0$, т.е. $x(t)$ удовлетворява задачата на Коши (3.1).

Нека сега конструираме приближенията на Пикар. Дефинираме следната редица от изображения $\{x_n(t)\}$ за $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ и зададена с

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, x_n(s)) ds, \quad x_0(t) = x_0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.3}$$

Стъпка 2. Всяко изображение $x_n(t)$ е добре дефинирано и $(t, x_n(t)) \in K, n = 1, 2, \ldots$.

Доказателство. Ще използваме индукция. Твърдението е очевидно за $n = 0$. Предполагаме, че $||x_k(t) - x_0|| \leq b$ за някое $k \geq 1$. За следващото приближение имаме

$$||x_{k+1}(t) - x_0|| = ||\int_{t_0}^{t} v(s, x_k(s)) ds|| \leq \int_{t_0}^{t} ||v(s, x_k(s))|| ds \leq M|t - t_0| \leq Mh < M\frac{b}{M} = b.$$

Според принципа на математическата индукция оценката

$$||x_n(t) - x_0|| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b, \quad \text{при } |t - t_0| < h \tag{3.4}$$

е вярна за всеки елемент от редицата изображения (3.3). Изображенията $x_n(t)$ са непрекъснати, тъй като са интеграли от непрекъснати изображения.

Следващата стъпка е отново индукционна.

Стъпка 3. Последователните приближения удовлетворяват оценката

$$||x_n(t) - x_{n-1}(t)|| \leq ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Доказателство. За $n = 1$ оценката следва от (3.4). Нека допуснем, че (3.5) е изпълнено за някое $n > 1$. Използвайки условията на теоремата, установяваме, че то е изпълнено и за $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} ||x_{n+1}(t) - x_n(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} \left(v(s, x_n(s)) - v(s, x_{n-1}(s))\right) ds|| \\ &\leq ||\int_{t_0}^{t} L|x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds|| \leq ||\int_{t_0}^{t} LML^{n-1}\frac{(s - t_0)^n}{n!} ds|| \\ &= ML^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!} \leq ML^n\frac{h^{n+1}}{(n + 1)!}. \end{aligned}$$

Отново според принципа на математическата индукция следва, че (3.5) е изпълнено за всяко n.
Доказаната в Стъпка 3 оценка (3.5) ни позволява да мажорираме реда

$$S := x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \ldots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \ldots$$

със сходящ числов ред с положителни събираеми

$$||S|| \le Mh + ML\frac{h^2}{2!} + ML^2\frac{h^3}{3!} + \ldots + ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} + \ldots = \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1) < \infty.$$

Съгласно критерия на Вайерщрас (Теорема А.2) за равномерна сходимост, редът S е равномерно сходящ в интервала $[t_0 - h, t_0 + h]$, а редицата от частичните му суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони равномерно към непрекъснато изображение, което означаваме с $x(t)$:

$$S_n := x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \ldots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) = x_n(t) \rightrightarrows x(t).$$

Тъй като изображението $v(t, x)$ е непрекъснато, то можем да извършим граничен преход в рекурентната зависимост (3.3):

$$x_n(t) \rightrightarrows x(t) \qquad \int_{t_0}^{t} v(s, x_n(s))ds \rightrightarrows \int_{t_0}^{t} v(s, x(s))ds, \quad n \to \infty.$$

С това показахме, че $x(t)$ удовлетворява интегралното уравнение (3.2) и следователно е решение на задачата на Коши (3.1).

Остава да докажем единствеността на полученото решение.
Стъпка 4. $x(t)$ е единственото решение на задачата на Коши (3.1) в интервала $|t - t_0| < h$.
Доказателство. Нека $z(t)$ е друго решение на задачата на Коши (3.1), дефинирано в $|t - t_0| \le h_1 \le h$ и следователно то удовлетворява интегралното уравнение

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, z(s))ds.$$

За нормата на разликата на $x(t)$ и $z(t)$ получаваме

$$||x(t) - z(t)|| \le ||\int_{t_0}^{t}(v(s, x(s)) - v(s, z(s))ds|| \le L\int_{t_0}^{t} ||x(s) - z(t)||ds.$$

Прилагаме неравенството на Гронуол (Лема 3.2) с $C = 0$ към неравенството

$$||x(t) - z(t)|| \le L\int_{t_0}^{t} ||x(s) - z(t)||ds$$

за интервала $[t_0, t_0 + h_1]$. Получаваме $||x(t) - z(t)|| = 0$ върху $[t_0, t_0 + h_1]$. По подобен начин същият резултат се получава и върху $[t_0 - h_1, t_0]$, откъдето следва, че $x(t) \equiv z(t)$ за $t \in [t_0 - h_1, t_0 + h_1]$.
Стъпки 1 - 4 дават доказателството на Теоремата.

■

Забележки

Теоремата има локален характер, т.е. решението е дефинирано в някаква околност на t_0 (вижте Пример 2 по-долу).
Това, което е важно да се отбележи изрично, е, че две различни решения не могат да се пресичат. Ако се пресичат, то те съвпадат в общия си интервал на дефиниране.
Както споменахме по-горе, вместо условието на Липшиц можем да предполагаме $v \in C^1(W)$.

Пример 1. Да решим с метода на последователните приближения следната задача на Коши:

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = x_0.$$

Решението $x(t) = x_0e^{at}$ може лесно да бъде получено чрез разделяне на променливите. Следвайки процедурата, полагаме $x_0(t) = x_0$.

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t ax_0 ds = x_0(1 + at)$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t ax_1(s)ds = x_0 + \int_0^t ax_0(1 + as)ds = x_0(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}).$$

По индукция доказваме, че

$$x_n(t) = x_0(1 + at + \ldots + \frac{a^nt^n}{n!}),$$

откъдето

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0e^{at}.$$

Следващият пример показва, че решенията могат и да не са дефинирани за всяко t.

Пример 2. Да разгледаме задачата на Коши $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$. Решението е $x = \frac{x_0}{1-tx_0}$ и веднага се вижда, че то не може да се продължи отвъд $\bar{t} = \frac{1}{x_0}$.

Да се върнем към задачата на Коши (3.1).

За всяко x_0 съществува максимален отворен интервал (α, β), съдържащ t_0, върху който е дефинирано решение $x(t)$, удовлетворяващо $x(t_0) = x_0$.

Наистина, по Теорема 3.1 има някакъв интервал, в който съществува единствено решение. Нека сега (α, β) (възможно е $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$ или и двете) е обединение на всички отворени интервали, съдържащи t_0 и върху които съществува решение на (3.1). Върху всеки два такива интервала решенията съвпадат. Следователно съществува решение върху целия интервал (α, β).

Този интервал ще наричаме максимален интервал на продължимост на решението, а самото решение – непродължимо.

3.2 Непрекъсната зависимост на решението от начални условия и параметри

Разглеждаме отново задачата на Коши (3.1) Често в приложенията някои данни знаем само приблизително. В случая такива могат да бъдат дясната страна на системата ДУ или началните условия. Естествено е да се очаква, че при малки промени в данните решението ще се променя малко. Това искаме да покажем за задачата на Коши (3.1) при разумни предположения. Разбира се, има случаи, в които това не е така.

Теорема 3.2. *Нека $v, w \in C(W)$ и нека v е Липшицова по x с константа L. Нека $x(t)$ и $y(t)$ са съответно решения на задачите на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = v(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \dot{y}(t) = w(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

в $[t_0, t_1]$ *и* $M := \sup_{(t,x)\in W} ||v(t,x) - w(t,x)||$. *Тогава за всяко* $t \in [t_0, t_1]$

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x(t_0) - y(t_0)||e^{L(t-t_0)} + \frac{M}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1).$$

Доказателство.

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x_0 - y_0|| + \int_{t_0}^{t} ||v(s, x(s)) - w(s, y(s))||ds \leq$$

$$||x_0 - y_0|| + \int_{t_0}^{t} (||v(s, x(s)) - v(s, y(s))|| + ||v(s, y(s)) - w(s, y(s))||)ds \leq$$

$$||x_0 - y_0|| + \int_{t_0}^{t} L(||x(s) - y(s)|| + \frac{M}{L})ds.$$

$$||x(t) - y(t)|| + \frac{M}{L} \leq ||x_0 - y_0|| + \frac{M}{L} + \int_{t_0}^{t} L(||x(s) - y(s)|| + \frac{M}{L})ds.$$

Полагаме $u(t) = ||x(t) - y(t)|| + \frac{M}{L}$ и прилагаме неравенството на Гронуол за получаване на търсената оценка.

■

Следствие. Нека $v = w$. Тогава

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x_0 - y_0||e^{L(t-t_0)},$$

което показва, че решението на задачата на Коши (3.1) зависи непрекъснато от началните условия.

Би могло да се каже, че в Теорема 3.2 (или следствието) липсва прецизност относно съществуването и единствеността на решението на втората задача на Коши. Всъщност, може да се докаже следният резултат:

Теорема 3.3. *Нека* $v \in C^1(W)$ *и* $x(t, x_0)$ *е решение на задачата на Коши (3.1). Съществуват* h *и околност* V *на* x_0*, такива, че за всяко* $z_0 \in V$ *съществува единствено решение* $z(t, z_0)$ *на задачата на Коши*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v(t, x) \\ x(t_0) = z_0, \end{array} \right.$$

дефинирано в $|t - t_0| \leq h$.

Доказателството на тази теорема се прави с метода на последователните приближения и е аналогично на това в теоремата за съществуване и единственост.

Нека системата зависи от параметри

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = v(t, x, \mu) & (t, x) \in W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 & \mu \in \mathbb{R}^l \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Да разгледаме спомагателната система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v(t, x, \mu) \\ \dot{\mu} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Според горните теорема и следствие решението на (3.7) с начални условия (t_0, x_0, μ) е непрекъснато по начални условия. Следователно $x(t, x_0, \mu)$ е непрекъснато по параметрите μ.

Може да се докаже аналогична оценка на тази от Теорема 3.2.

Обратно, ако имаме теорема за непрекъсната зависимост на решението по параметри, то веднага можем да получим непрекъснатата зависимост от начални условия.

Системата (3.1) след транслация $y = x - x_0$ приема вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{y} = v(t, y + x_0) \\ y(t_0) = 0, \end{array} \right.$$

в която началното условие е параметър.

3.3 Диференцируемост на решенията

Често в приложенията ни е нужно не само да знаем,че решението на задачата на Коши е непрекъснато по отношение на началните условия и параметри, а също и да диференцираме по тях.

Ще започнем с едно наблюдение. Нека е зададена задача на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{z} = v(t, z), & z \in U \subset \mathbb{R}^n \\ z(t_0) = x, & x \in U, \end{array} \right. \tag{3.8}$$

като $v \in C^2$. Нека $g(t, x)$ е решение на горната задача, т.е. $\dot{g}(t, x) = v(t, g(t, x)), \quad g(t_0, x) = x$. Да допуснем, че можем да диференцираме решението g по x.

Нека $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots, g_n(t, x))$ и $\dot{g}_k(t, x) = v_k(t, g(t, x))$. Диференцирайки последното по x_l, получаваме

$$\left(\frac{\partial g_k(t, x)}{\partial x_l} \right)^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k(t, g(t, x))}{\partial z_j} \frac{\partial g_j(t, x)}{\partial x_l}.$$

Да означим с y_l вектора $y_l = (\frac{\partial g_1}{\partial x_l}, \frac{\partial g_2}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial g_n}{\partial x_l})^t$. Тогава горната система може да бъде записана във вида $\dot{y}_l = v_*(t, g(t, x)) y_l$.

Системата

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{z} = v(t, z), & z \in U \subset \mathbb{R}^n \\ \dot{y}_l = v_*(t, g(t, x)) y_l \end{array} \right. \tag{3.9}$$

се нарича система уравнения във вариации за системата (3.8) (или относно решението $g(t,x)$). Подреждайки y_l в матрица Y, получаваме еквивалентно определение на системата във вариации

$$\left| \begin{array}{l} \dot{z} = v(t,z), \\ \dot{Y} = v_*(t, g(t,x))Y, \end{array} \right. \tag{3.10}$$

като най-естествено е да изберем началните условия така: $g(t_0,x) = x, Y(t_0,x) = E$, където E е единичната матрица. Това Y не е нищо друго, освен производната на решението по началните условия g_*, и ако можем да диференцираме решението, то неговата производна удовлетворява системата уравнения във вариации.

Теорема 3.4. *Нека за системата (3.8) $v \in C^2$ в някаква околност на (t_0,x_0). Тогава решението $g(t,x)$ на (3.8) е непрекъснато диференцируемо по x в някаква евентуално по-малка околност на (t_0,x_0).*

$$v \in C^2 \Rightarrow g \in C^1_x.$$

Доказателство. Тъй като $v \in C^2$, то $v_* \in C^1$. Следователно системата уравнения във вариации удовлетворява условията на Теоремата за съществуване и единственост (Теорема 3.1).

Нека изберем начални условия $\varphi_0 = x$, достатъчно близко до x_0 и $\psi_0 = E$. Да означим приближенията в схемата на Пикар с φ_n (за z) и ψ_n (за Y), т.е. полагаме

$$\varphi_{n+1}(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_n(\tau,x))d\tau, \tag{3.11}$$

$$\psi_{n+1}(t,x) = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))\psi_n(\tau,x)d\tau. \tag{3.12}$$

Първо ще покажем, че $(\varphi_n)_* = \psi_n$ за всяко n.

Ясно е, че $(\varphi_0)_* = \psi_0$. Да допуснем, че за някое $n > 1$ е изпълнено $(\varphi_n)_* = \psi_n$. Ще докажем, че това е вярно и за $n+1$. Наистина

$$(\varphi_{n+1})_* = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))(\varphi_n)_* d\tau = E + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_n(\tau,x))\psi_n d\tau = \psi_{n+1},$$

откъдето по индукция следва равенството за n т.е. $\{\psi_n\}$ е редицата от производните на редицата $\{\varphi_n\}$. Двете редици са равномерно сходящи (като редици от Пикаровски приближения при $|t-t_0|$ достатъчно малки) $\varphi_n \rightrightarrows g$, $\quad \psi_n \rightrightarrows Y = g_*$ и тъй като $g_* \in C^0_x \Rightarrow g \in C^1_x$, т.е. $g(t,x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t,x)$ е непрекъснато диференцируема по x.

■

Нека $r \geq 2$ е цяло число.

Теорема 3.5. *(Теорема T_r) Нека дясната част на система (3.8) $v \in C^r$ в някаква околност на (t_0,x_0). Тогава решението на задачата на Коши (3.8) $g(t,x) \in C^{r-1}_x$, като (t,x) принадлежат на някаква евентуално по-малка околност на (t_0,x_0).*

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}_x.$$

Доказателство. $v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$. Следователно системата уравнения във вариации (3.10) удовлетворява условията на Теорема T_{r-1}. Теорема T_r, $\quad r > 2$ се получава от Теорема T_{r-1}

$$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1} \Rightarrow g_* \in C_x^{r-2} \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Но Теорема T_2 (Теорема 3.4) бе доказана по-рано.

■

Нека $r \geq 2$. Интересуват ни производните по x и t.

Лема 3.3. *Нека е зададена функция* $f : I \times G \to \mathbb{R}^n, \qquad G \subset \mathbb{R}^n, I$ *е интервал в* $\mathbb{R}^1$ *и нека*

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x) d\tau, \quad x \in G, \quad [t_0, t] \subset I.$$

Ако $f \in C_x^r$ *и* $f \in C^{r-1}$, *то* $F \in C^r$.

Доказателство. Диференцираме F последователно - $\frac{\partial F}{\partial t} = f(t,x)$ е непрекъсната, $\frac{\partial^r F}{\partial t^r} = f_t^{(r-1)}(t,x)$ е непрекъсната по условие и следователно $F \in C_t^r$. След това $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ е непрекъсната. Подобно произволна частна производна от ред r се изразява чрез производните на f, от ред по-малък от r. Следователно $F \in C^r$.

□

Теорема 3.6. *В условията на Теорема 3.5 (Теорема T_r) решението $g(t,x)$ е диференцируемо изображение от клас C^{r-1} по x, t:* $v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$.

Доказателство. Имаме

$$g(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau, x)) d\tau$$

$v \in C^r$ и $g \in C^0$ – това имаме от Теоремата за съществуване и единственост (Теорема 3.1). Освен това Теорема 3.5 показа, че $g \in C_x^{r-1}$. Прилагаме Лема 3.3 последователно
$v(t, g(t,x)) \in C^0 \cap C_x^1 \Rightarrow g \in C^1$
$v(t, g(t,x)) \in C^1 \cap C_x^2 \Rightarrow g \in C^2$
. . . .
$v(t, g(t,x)) \in C^{r-2} \cap C_x^{r-1} \Rightarrow g \in C^{r-1}$.

■

Може да се докаже

Теорема 3.7. $v \in C^r \to g \in C^r, \qquad r > 1.$

Доказателството на тази теорема може да се види в учебника на Арнолд [1]. Може също така да се докаже, че ако дясната страна на (3.8) е аналитична (представя се като сходящ ред на Тейлор в околност на всяка точка), то решението е аналитично относно x и t (виж Кодингтон и Левинсон [7] за този факт).

Диференцируемостта по параметри се разглежда по подобен начин, както непрекъснатостта по параметри.

Нека системата диференциални уравнения зависи от параметри $\alpha \in \mathbb{R}^k$

$$\dot{z} = v(t, z, \alpha), \quad z \in U, \quad t \in I \subset \mathbb{R}^1 \tag{3.13}$$

Следствие. $v \in C^r \to g(t,x,\alpha) \in C^r_{t,x,\alpha}$.

Доказателство. Разглеждаме спомагателната система

$$\left| \begin{array}{l} \dot z = v(t,z,\alpha), \\ \dot\alpha = 0, \end{array} \right. \quad \text{с начални условия} \quad \left| \begin{array}{l} z(t_0,x,\alpha) = x \\ \alpha(t_0,x,\alpha) = \alpha \end{array} \right.$$

Решението $g = (g_1, g_2) \in C^r$ по Теорема 3.7.

$$\left| \begin{array}{l} \dot g_1 = v(t, g_1(t,x,\alpha), g_2(t,x,\alpha)), \\ \dot g_2 = 0, \quad \Rightarrow g_2 = \alpha. \end{array} \right.$$

Следователно $g_1(t,x,\alpha) \in C^r$, което трябваше да се докаже.

∎

Последното следствие има важно значение за приложенията. Едно от тях се нарича метод на малкия параметър на Поанкаре.

3.4 Теорема за непродължимост

Да разгледаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot x = v(t,x) & v \in C^1(W) \\ x(t_0) = x_0 & W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Вече дефинирахме понятията максимален интервал на продължимост и непродължимо решение. Нека Γ е подмножество на W.

Дефиниция 3.2. *Решението на системата (3.14) φ се продължава напред (назад) до Γ, ако съществува решение със същото начално условие, графиката на което се пресича с Γ в точка, където $t \geq t_0 (t \leq t_0)$. Решението се продължава напред (назад) неограничено, ако съществува решение със същото начално условие, дефинирано за всяко $t \geq t_0 (t \leq t_0)$.*

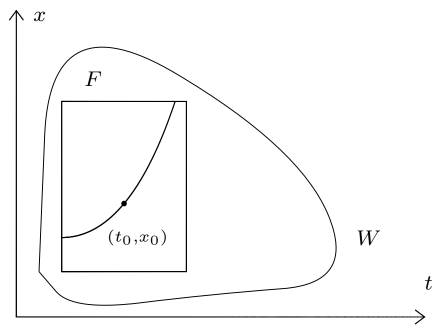
Примери:

1. Решенията на линейна системата с постоянни коефициенти $\dot x = Ax$, където $x \in \mathbb{R}^n$, а именно $x = e^{At}x_0$ се продължават неограничено.

2. Решенията на уравнението $\dot x = 1 + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ не се продължават неограничено нито напред, нито назад. Наистина, общото решение е $x = \mathrm{tg}(t-c)$, което е дефинирано в $c - \pi/2 \leq t \leq c + \pi/2$.

Теорема 3.8. *Решенията на задачата на Коши (3.14) с начални условия в компакт F в разширеното фазово пространство се продължават напред и назад до границата на компакта.*

Доказателство. За определеност ще разглеждаме продължимост напред $t \geq t_0$. Разсъжденията при продължаване назад са аналогични.
По Теоремата за съществуване и единственост за всяка точка $(t', x') \in F$ има околност, такава, че решението с начални условия в тази околност съществува и е единствено в общия за всички точки от тази околност интервал от време. Но F е компакт и има крайно покритие с такива околности. От крайния брой интервали време избираме най-малкия и го означаваме с ϵ. Точката $(t_0, x_0) \in F$ (фиг. 3.2) и следователно решението на задачата на Коши (3.14) $\varphi(t)$ с начално условие $\varphi(t_0) = x_0$ е определено за $|t - t_0| < \epsilon$. Да означим $\tilde{t} = t_0 + \frac{\epsilon}{2}$, $\tilde{x} = \varphi(\tilde{t})$.



Фигура 3.2

Точката $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in F$ и следователно е покрита от някоя от горните околности. Тогава съществува решение $\tilde{\varphi}(t)$, дефинирано в $|t - \tilde{t}| < \epsilon$, с начално условие $\tilde{\varphi}(\tilde{t}) = \varphi(\tilde{t}) = \tilde{x}$. От Теоремата за единственост имаме, че в общия си интервал $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$.

Продължавайки по същия начин, получаваме решение на задачата на Коши (3.14), дефинирано в $t_0 \leq t < \tau$ и $(t, \varphi(t)) \in F$.

Да означим $T := \sup \tau \quad (\tau : (t, \varphi(t)) \in F \quad \text{и} \quad t \in [t_0, \tau])$. Ако $T = \infty$, няма какво да доказваме.

Нека $T < \infty$. Ще покажем, че съществува решение $\psi, \psi(t_0) = x_0$ и $(T, \psi(T)) \in \partial F$. Тъй като T е горна граница, съществува $\tau : T - \epsilon < \tau < T$, такова, че решението $\varphi(t)$ на задачата на Коши (3.14) е определено в $t_0 \leq t < \tau$. Точката $(\tau, \varphi(\tau)) \in F$ е покрита с някоя от горните околности, т.е. съществува решение $\bar{\varphi}(t)$ с начално условие $\bar{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau)$, определено в $|t - \tau| < \epsilon$. Отново по теоремата за единственост $\varphi \equiv \bar{\varphi}$ в общия им интервал.

Конструираме едно решение върху обединението на двата интервала

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \leq t \leq \tau \\ \bar{\varphi}(t), & \tau \leq t \leq \tau + \epsilon. \end{cases}$$

Имаме, че $(t, \psi(t)) \in F$ за $t_0 \leq t < T$.

Трябва да покажем, че $(T, \psi(T)) \in F$. От дефиницията на T съществува редица $\{\theta_i\} \xrightarrow[i \to \infty]{} T$. Но ψ е непрекъснато, следователно $\psi(\theta_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} \psi(T)$. Тъй като F е компакт, следва, че $(T, \psi(T)) \in F$.

От друга страна, за $t > T$ $(t, \psi(t))$ не принадлежи на F, иначе T няма да е горна граница. Следователно произволна околност на точка $(T, \psi(T))$ съдържа точки както от F, така и непринадлежащи на F, откъдето $(T, \psi(T)) \in \partial F$.

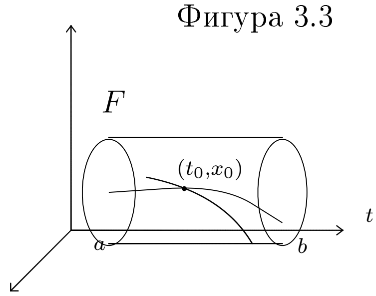
$\blacksquare$

Горната теорема обикновено се прилага така. Разглеждаме задачата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = v(t, x) \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times K \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right. \tag{3.15}$$

където $K \in \mathbb{R}^n$ е компакт. Нека $[a,b]$ е произволен затворен интервал, съдържащ t_0. Образуваме компакта $F := [a,b] \times K$. Според Теорема 3.8 решението на (3.15) се продължава до границите на компакта F. Имаме две възможности (фиг. 3.3): интегралната крива пресича страничната граница на F или интегралната крива излиза на границата $b \times K$, и тъй като b е произволно, то решението се продължава неограничено напред.

Фигура 3.3



Пример. Продължимост на решенията на $\dot{x} = A(t)x$.
Разглеждаме задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{ll} \dot{x} = A(t) & x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{3.16}$$

където $A(t)$ е непрекъсната матрица в някакъв интервал $[a,b]$. Тъй като $A(t)$ е непрекъсната, то $||A(t)||$ е също непрекъсната функция в $[a,b]$ и следователно е ограничена в $[a,b]$ $\quad ||A(t)|| \leq C$.

Лема 3.4. *Нека $\varphi(t)$ е решение на $\dot{x} = A(t)x$ с начално условие $\varphi(0) = x_0, \qquad t_0 \leq t \leq b$. Тогава в сила е оценката*

$$||\varphi(t)|| \leq e^{C(t-t_0)}||\varphi(t_0)||.$$

Доказателство. Ако $\varphi(t_0) = 0$, то $\varphi \equiv 0$. Нека $\varphi(t_0) \neq 0$. От Теоремата за единственост следва, че $\varphi(t)$ не е нула $\forall t \in [a,b]$.

Да означим $r(t) = ||\varphi(t)|| = \sqrt{<\varphi, \varphi>}$ и $L = \ln r^2$.

$$\dot{L} = 2\frac{\dot{r}}{r}$$

Ще покажем, че $\frac{\dot{r}}{r} \leq C$.

$$\dot{\varphi} = A(t)\varphi \quad \rightarrow \quad ||\dot{\varphi}|| = ||A(t)\varphi|| \leq C||\varphi||$$

$$\dot{r} = \frac{<\varphi, \dot{\varphi}>}{r} \leq \frac{||\varphi||||\dot{\varphi}||}{r} \leq ||\dot{\varphi}||$$

Комбинирайки горните неравенства, получаваме $\frac{\dot{r}}{r} \leq C$ и следователно $\dot{L} \leq 2C$.
Накрая

$$L(t) - L(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{L}(s)ds \leq 2C(t - t_0)$$

и

$$e^{L(t)-L(t_0)} \leq e^{2C(t-t_0)} \quad \text{или} \quad ||\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}||^2 \leq e^{2C(t-t_0)}$$

откъдето, коренувайки, получаваме нужното неравенство. □

Теорема 3.9. *Решението $\varphi(t, x_0)$ на задачата на Коши (3.16) се продължава в $[a,b]$.*

Доказателство. Избираме компакт $F := \{t \in [a,b], \quad ||x|| \leq 2e^{C(b-a)}||x_0||\}$. По Теорема 3.8 решението с начални условия в този компакт се продължава до неговите граници. От априорната оценка в Лема 3.4 следва, че решението може да излезе само на границите $t = a$, $t = b$.

■

Тъй като a, b са произволни, то решението се продължава неограничено.

Глава 4

Линейни уравнения и системи

В тази глава ще изучаваме линейни уравнения и линейни системи. Това е едва ли не единственият голям клас диференциални уравнения, за които има достатъчно пълна теория. Както ще видим след малко, тази теория е клон от линейната алгебра.

Линейните уравнения с променливи коефициенти (неавтономни) имат вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{4.1}$$

Тук $y = y(x)$ е функцията, която търсим, а $a_j(x), f(x)$ са известни непрекъснати функции, дефинирани в някакъв интервал (α, β). Функцията $f(x)$ обикновено се нарича дясна част. Когато $f \equiv 0$, говорим за хомогенно уравнение. Съответно, ако $f \neq 0$, казваме, че уравнението (4.1) е нехомогенно. Вече знаем, че общото решение трябва да съдържа n произволни константи. Можем да разглеждаме също така и задача на Коши за уравнението (4.1).

Линейните нехомогенни системи имат вида

$$\dot{x} = A(t)x + F(t), \tag{4.2}$$

където $x = (x_1, \ldots, x_n)^T, A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, F(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t))^T$. Матрицата $A(t)$ (или все едно нейните компоненти $a_{ij}(t)$) и $F(t)$, са непрекъснати функции в някакъв интервал Δ.

Видяхме в Увода, че има модели, които се описват с линейни диференциални уравнения. Линейните уравнения и системи възникват естествено при линеаризация на нелинейна система в околност на някое зададено нейно решение (виж Глава 5).

Всяко линейно уравнение се свежда до линейна система. За да видим това, полагаме

$$y(x) = z_1(x), \quad y' = z_2(x), \ldots, y^{(n-1)} = z_n(x).$$

Тогава лесно се вижда, че всяко решение на уравнението (4.1) дефинира по горните формули решение на системата

$$z' = A(x)z + F(x), \tag{4.3}$$

където матрицата $A(x)$ и векторът $F(x)$ са съответно

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Обратното също е очевидно вярно – всяко решение $z(x)$ на системата 4.3 задава решение на уравнението (4.1) чрез първата си компонента $z_1(x)$.

Всяка линейна система се свежда до линейно уравнение. Нека за простота да разгледаме двумерна хомогенна система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2. \end{array} \right.$$

Диференцираме по t първото уравнение. Изключваме $\dot{x}_2$ от второто уравнение, и след това x_2 от първото уравнение. В резултат получаваме

$$\ddot{x}_1 - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{\dot{a}_{12}}{a_{12}} \right) \dot{x}_1 - \left(\dot{a}_{11} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} - \frac{a_{11}\dot{a}_{12}}{a_{12}} \right) x_1 = 0. \qquad (4.4)$$

За да мотивираме по-добре класа на линейните уравнения и системи, които ще разглеждаме в следващите секции, нека да се спрем за момент върху линейните хомогенни уравнения от втори ред. След смяна на зависимата променлива винаги можем да унищожим коефициента пред първата производна и следователно да сведем уравнението до вида

$$y'' - r(x)y = 0.$$

Ясно е, че $y \equiv 0$ е винаги решение. Да потърсим ненулеви решения. Полагаме $\xi = \frac{y'}{y}$. Диференцираме по x

$$\xi' = \frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \xi^2.$$

Но от уравнението имаме $\frac{y''}{y} = r(x)$. Следователно като уравнение за ξ получаваме

$$\xi' + \xi^2 = r(x).$$

Това е уравнение на Рикати (виж Глава 1). Знаем, че за да решим едно уравнение на Рикати, ни трябва поне едно частно решение. Такова решение, изразено в квадратури, в повечето случаи не съществува. Следователно, за да решаваме линейни уравнения (или системи) с променливи коефициенти от втори или по-висок ред, са ни нужни частни решения.

Това е основната причина, поради която ще се ограничим до разглеждането на линейни уравнения с постоянни коефициенти

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (4.5)$$

където $a_j \in \mathbb{R}$, и линейни системи с постоянни коефициенти

$$\dot{x} = Ax, \tag{4.6}$$

където $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Основната ни цел е да дадем алгоритми за решаването им.

В секция 4.1 ще разгледаме линейните уравнения с постоянни коефициенти. Нужно е да се каже, че теорията и методите за решаването им са били известни на Ойлер и Лагранж.

В секция 4.2 ще намерим формула за общото решение на линейни хомогенни системи с постоянни коефициенти. Тази формула се основава на Жордановата нормална форма на матрица. След това ще дадем алгоритъм, който е подходящ за ниските размерности 2 и 3. Ще отбележим, че за решаването на системи с постоянни коефициенти може да се използва така нареченото $S-N$ разлагане на дадена матрица (виж [11] за подробности).

4.1 Линейни уравнения

Диференциални уравнения от вида

$$P_0(x)y^{(n)}(x) + P_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + P_{n-1}(x)y'(x) + P_n(x)y(x) = Q(x), \tag{4.7}$$

където $P_i(x), \quad i = 0, 1, ...n$ и $Q(x)$ са непрекъснати функции в отворения интервал I, се наричат линейни диференциални уравнения от n-ти ред. В случая, когато в дясната страна функцията $Q(x)$ е тъждествено нула в интервала I, наричаме хомогенно диференциално уравнение, в противен случай нехомогенно. Да предположим, че $P_0(x) \neq 0$ за всяко $x \in I$. Като разделим двете страни на уравнението на $P_0(x)$, уравнение (4.7) се записва във вида

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q(x). \tag{4.8}$$

4.1.1 Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред

Първо ще разгледаме уравнения от вида (4.8), при условие че дясната страна е нула ($q(x) \equiv 0$),

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1. *Нека y_1 y_2 са две решения на диференциалното уравнение (4.9) в интервала I. Тогава тяхната линейна комбинация*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

където c_1 и c_2 са реални константи, е също решение на (4.9).

Доказателство. Теоремата е директно следствие от линейността на операцията диференциране

$$y^{(k)} = c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)}$$

за всяко k естествено.

Тогава

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x)$$

$$= c_1y_1^{(n)}(x) + c_2y_2^{(n)}(x) + p_1(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)}) + ... + p_n(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1(y_1^{(n)}(x) + p_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + ...p_n(x)y_1(x))$$

$$c_2(y_2^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)y_2(x)) = 0,$$

тъй като y_1 и y_2 са решения. Следователно и $y = c_1y_1 + c_2y_2$ е решение.

■

Дефиниция 4.1. *Функциите $y_1, y_2, ..., y_n$ се наричат линейно зависими в интервала I, ако съществуват константи $c_1, c_2, ..., c_n$ ($c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 \neq 0$), за които*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) = 0$$

за всяко $x \in I$. В противен случай ще ги наричаме линейно независими.

Дефиниция 4.2. *Нека функциите $f_1, f_2, ..., f_n$ притежават производни до ред $n-1$. Функцията*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & . \; . \; . & f_n \\ f_1' & f_2' & . \; . \; . & f_n' \\ . & . & . \; . \; . & . \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & . \; . \; . & f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

се нарича Вронскиян на функциите $f_1, f_2, ..., f_n$.

Теорема 4.2. *Нека $y_1, y_2, ..., y_n$ са n решения на хомогенното диференциално уравнение*

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0$$

в отворения интервал I, където $p_i(x)$ са непрекъснати функции. Тогава $y_1, y_2, ..., y_n$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ за всяко $x \in I$.

Дефиниция 4.3. *Всяко множество $y_1, y_2, ..., y_n$ от n линейно независими решения на хомогенното диференциално уравнение (4.9) в интервала I се нарича фундаментална система от решения.*

Теорема 4.3. *Нека $y_1, y_2, ..., y_n$ са n линейно независими решения на хомогенното диференциално уравнение*

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0$$

в отворения интервал I, където $p_i(x)$ са непрекъснати функции. Ако $Y(x)$ е кое да е решение, то съществуват константи $c_1, c_2, ..., c_n$ такива, че

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$$

за всяко $x \in I$.

Теорема 4.4. *Нека $y_1, y_2, ..., y_n$ са n линейно независими решения на хомогенното диференциално уравнение*

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0,$$

дефинирани в отворения интервал I, и $y_p(x)$ е частно решение на нехомогенното диференциално уравнение

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q(x).$$

Всяко решение $z(x)$ на нехомогенното уравнение може да се запише във вида

$$z(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) + y_p(x),$$

където $c_1, c_2, ..., c_n$ са реални константи.

4.1.2 Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти

В тази част ще се занимаваме с уравнения от вида

$$a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + ... + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0, \tag{4.10}$$

където $a_1, a_2, ..., a_n$ са реални константи.

Да отбележим, че коя да е производна на функцията e^{rx} е умножение с константа на самата функция ($\frac{d^k}{dx^k}e^{rx} = r^ke^{rx}$). Ако заместим в уравнение (4.10) $y(x)$ с e^{rx}, ще получим

$$a_nr^ne^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + ... + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0,$$

т.е.

$$(a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1re^{rx} + a_0)e^{rx} = 0.$$

Тъй като $e^{rx} \neq 0$, то $y(x) = e^{rx}$ е решение на уравнение (4.10) тогава и само тогава, когато

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1re^{rx} + a_0 = 0.$$

Това уравнение се нарича характеристичен полином на диференциалното уравнение (4.10).

В следващия параграф ще се спрем по-подробно на въпроса за намиране на фундаментална система от решения на хомогенно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти.

Хомогенни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти

В тази част ще разгледаме как се намират общи решения на линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.11}$$

където a, b, c са реални константи. Както вече знаем, ако y_1 и y_2 са две линейно независими решения на диференциалното уравнение (4.11), то общото решение е от вида

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

където c_1 и c_2 са реални константи, т.е. за да намерим общото решение, е достатачно да намерим y_1 и y_2. Функцията $y(x) = e^{rx}$ е решение на (4.11), ако r е корен на характеристичния полином

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.12}$$

I. (**В случая на два реални различни корена**). Нека сега характеристичното уравнение да има два различни реални корена r_1 и r_2 и да разгледаме функциите $y_1 = e^{r_1x}$ и $y_2 = e^{r_2x}$. Тъй като Вронскияна на e^{r_1x} и e^{r_2x} за $x = 0$ е $r_1 - r_2$, то $y_1 = e^{r_1x}$ и $y_2 = e^{r_2x}$ са линейно независими решения.

Ако характеристичното уравнение има два различни реални корена r_1 и r_2, то общото решение на (4.11) е

$$y(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x},$$

където c_1 и c_2 са произволни реални константи.

Пример. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Характеристичното уравнение е

$$r^2 + 4r + 3 = 0,$$

корените на което са $r_1 = -3$ и $r_2 = -1$. Следователно $y_1(x) = e^{-3x}$ и $y_2(x) = e^{-x}$ са фундаментална система от решения на даденото диференциално уравнение и общото решение е

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

II. (**В случая на двоен корен**).

Нека характеристичното уравнение да има двоен реален корен $r_1 = r_2 = r$. Тогава функциите $y_1 = e^{rx}$ и $y_2(x) = xe^{rx}$ са фундаментална система от решения и общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx},$$

където c_1 и c_2 са произволни реални константи.

Пример. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристичното уравнение е

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

което има двоен реален $r_1 = r_2 = 2$. Следователно $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = xe^{2x}$ са фундаментална система от решения на даденото диференциално уравнение и общото решение е

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

III. (**В случая на комплексни корени**).

Когато $b^2 - 4ac < 0$, корените на характеристичното уравнение са спрегнати комплексни числа $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. От формулата на Ойлер $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, имаме (за $\theta = \beta x$) $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$ и $\frac{d}{dx}e^{(\alpha+i\beta)x} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$. Комплекснозначната функция $z(x)$ на реалната променлива x може да запишем във вида

$$z(x) = u(x) + iv(x),$$

където $u(x)$ и $v(x)$ са реално значни функции. Производните на функцията $z(x)$ са

$$z'(x) = u'(x) + iv'(x), \;\; z''(x) = u''(x) + iv''(x).$$

Лема 4.1. *Нека $z(x) = u(x) + iv(x)$ е решение на диференциалното уравнение (4.11). Тогава реалната част и имагинерната част $u(x)$ и $v(x)$ са също решения на (4.11).*

Доказателство. Имаме, че $az''(x) + bz'(x) + cz(x) = 0$, т.е.

$$a(u''(x) + iv''(x)) + b(u'(x) + iv'(x)) + c(u(x) + iv(x)) = 0.$$

Като отделим реалната и имагинерната част, получаваме

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0,$$

$$av''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0.$$

□

Нека $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ са корените на характеристичното уравнение. Тогава функциите $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ са фундаментална система от решения на (4.11). Общото решение е

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

където c_1 и c_2 са произволни реални числа.

Пример. Да се намери общото решение на диференциалното уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Характеристичното уравнение в този случай е

$$r^2 - 4r + 5 = 0,$$

корените на което са $r_1 = 2 + i2, \;\; r_2 = 2 - i2$, т.е. $\alpha = 2, \;\; \beta = 2$. Общото решение

$$y(x) = e^{2x}(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)).$$

Линейни диференциални уравнения от втори ред със специална дясна част

Нека $g_1(x)$ и $g_2(x)$ са две решения на диференциалното уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x).$$

Тогава за $g_1(x) - g_2(x)$ имаме

$$(g_1(x) - g_2(x))'' + p(x)(g_1(x) - g_2(x))' + q(x)(g_1(x) - g_2(x)) = 0,$$

т.е. $g_1(x) - g_2(x)$ е решение на съответното хомогенно диференциално уравнение.

Теорема 4.5. *Нека $y_p(x)$ е частно решение на диференциалното уравнение*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{4.13}$$

в интервала (a, b) и y_1, y_2 са линейно независими решения на съответното хомогенно диференциално уравнение. Тогава общото решение на (4.13) е

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).$$

Доказателство. Нека $\phi(x)$ е произволно решение на $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ и $y_p(x)$ е едно частно решение. Тогава $\phi(x) - y_p(x)$ е решение на хомогенното уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Следователно

$$\phi(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

с което теоремата е доказана.

∎

Горепоказаното може да обобщим в следната схема за намиране на общо решение на нехомогенно диференциално уравнение от втори ред.

1. Намираме общото решение $c_1y_1 + c_2y_2$ на съответното хомогенно диференциално уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

2. Намираме едно частно решение на нехомогенното диференциално уравнение $y_p(x)$.

3. Общото решение на нехомогенното уравнение е сумата от 1. и 2.

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).$$

В общия случай е трудно да се намери частно решение на нехомогенно диференциално уравнение, затова сега ще представим метод за намиране на частно решение на нехомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти и със специална дясна част

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

$g(x)$	$y_p(x)$
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$	$x^sP_n(x) = x^s(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)$
$p_n(x)e^{\alpha x}$	$x^sP_n(x)e^{\alpha x}$
$p_n(x)\cos(\beta x) + q_n(x)\sin(\beta x)$	$x^s(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))$, $N = \max\{n, m\}$

където s е най-малкото цяло неотрицателно число, за което $y_p(x)$ не съдържа събираеми, които са решения на съответното хомогенно диференциално уравнение.

В следващите примери да се намери общото решение на диференциалните уравнения.

Пример 1. $y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$.

Първо ще намерим общото решение на съответното хомогенно диференциално уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$. Характеристичното му уравнение е $r^2 + 3r + 2 = 0$, а корените му са $r_1 = -2,\ r_1 = -1$. Функциите $y_1(x) = e^{-2x}$ и $y_2(x) = e^{-x}$ образуват линейно независима система от решения. Общото решение на хомогенното уравнение е $y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_1e^{-x}$, където c_1 и c_2 са произволни реални константи. Дясната страна на даденото уравнение е полином от първа степен, затова търсим частно решение от вида $y_p(x) = x^s(Ax + B)$. Тъй като константите и функцията $f(x) = x$ не са решения на хомогенното диферереренциално уравненеие, то вземаме $s = 0$. Константите A и B определяме по метода на неопределениете коефициенти. Производните на $y_p(x)$ са $y_p'(x) = A,\ \ y_p''(x) = 0$. Заместваме в даденото диференциално уравнение

$$3A + 2Ax + 2B = 3x + 1.$$

Два полинома са равни тогава и само тогава, когато съответните коефициенти са равни, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 2A = 3 \\ 3A + 2B = 1. \end{array}\right.$$

Решенията на системата са $A = \frac{3}{2},\quad B = -\frac{7}{4}$. Следователно частното решение на даденото диференциално уравнение е $y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$. Общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) = c_1e^{-2x} + c_1e^{-x} + \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}.$$

Пример 2. $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$.

Хомогенното уравнение е

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

а корените на характеристичното уравнение $r^2+2r-3 = 0$ са $r_1 = 1,\ \ r_2 = -3$. Функциите $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{-3x}$ са линейно независима система от решения на хомогенното уравнение и $y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x}$ е общото му решение. В този случай частното решение търсим във вида $y_p(x) = x^sAe^{-3x}$. Очевидно s не може да е нула, тъй като $y_p(x) = e^{-3x}$ е решение на хомогенното уравнение. Нека сега $s = 1$. Тогава $y_p(x) = Axe^{-3x}$ не е решение на хомогенното уравнение (тъй като функцията xe^{-3x} не е измежду функциите y_1 и y_2). Пресмятаме производните на $y_p(x)$, $y_p' = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$, $y_p'' = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x}$. Като заместим в даденото диференциално уравнение, намираме

$$-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} + 2Ae^{-3x} - 6Axe^{-3x} - 3Axe^{-3x} = 4e^{-3x},$$

откъдето получаваме, че $A = -1$ и $y_p(x) = -xe^{-3x}$. Окончателно, общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - xe^{-3x}.$$

Пример 3. $y'' + 4y' + 5y = -\sin x$

Корените на характеристичното уравнение $r^2 + 4r + 5 = 0$, съответстващо на хомогенното диференциално уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$ са $r_1 = -2 + i$ и $r_2 = -2 - i$. Линейно независимите решения на съответното хомогенно диференциално уравнение са $y_1(x) = e^{-2x}\cos x$, $y_2(x) = e^{-2x}\sin x$. Общото решение на хомогенното уравнение е $y_h(x) = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$. Частно решение търсим във вида $y_p(x) = x^s(A\cos x + B\sin x)$. Тъй като функциите $\cos x$ и $\sin x$ не са решения на хомогенното диференциално уравнение, то $s = 0$ и $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Пресмятаме производните на $y_p(x)$, $y_p' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$. Като заместим в даденото диференциално уравнение, получаваме

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = -\sin x.$$

Константите A и B определяме от системата

$$\left|\begin{array}{l} 4A + 4B = 0 \\ 4B - 4A = -1. \end{array}\right.$$

Откъдето $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$. Така частното решение е $y_p(x) = \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x$, а общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{8}\sin x.$$

Задачи за самостоятелна работа. Да се намерят общите решения на дадените диференциални уравнения:

1. $y'' - 4y' = 6x^2 - 2$.
2. $y'' - 4y = (3x + 5)e^{2x}$.
3. $y'' + 4y' + 5y = -e^{-2x}\sin x$.

4.1.3 Вариране на коефициентите

Сега ще разгледаме метод за намиране на общо решение на нехомогенно диференциално уравнение от втори ред, който е приложим и когато коефициентите на уравнението са функции на независимата променлива x,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{4.14}$$

Нека $y_1(x), \quad y_2(x)$ е фундаментална система от решения на съответното хомогенно диференциално уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Знаем, че общото решение на хомогенното уравнение се задава чрез равенството

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{4.15}$$

където c_1 и c_2 са произволни реални константи. Търсим частно решение $y_p(x)$ във вида

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{4.16}$$

За да намерим функциите $u_1(x)$ и $u_2(x)$, е необходимо да намерим две уравнения за тези функции. За целта първо ще пресметнем производните от първи и втори ред на частното решение. За първата производна получаваме

$$y_p(x) = (u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)) + (u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)). \tag{4.17}$$

За да опростим сметките и да избегнем пресмятането на вторите производни на функциите $u_1(x)$ и $u_2(x)$, да предположим, че

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{4.18}$$

Тогава

$$y_p(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{4.19}$$

и

$$y_p(x)'' = (u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)) + (u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)). \tag{4.20}$$

Като заместим изразите за y_p, y_p', y_p'', зададени чрез (4.16), (4.19) и (4.20) в уравнение (4.14), получаваме

$$u_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + u_1'y_1' + u_2' + y_2' = g(x). \tag{4.21}$$

Тъй като y_1 и y_2 са решения на хомогенното уравнение, то (4.21) се свежда до следното уравнение

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \tag{4.22}$$

Така функциите $u_1(x)$ и $u_2(x)$ се определят от системата

$$\left| \begin{array}{l} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{array} \right. \tag{4.23}$$

Тъй като y_1 и y_2 са фундаментална система от решения на хомогенното уравнение, то Вронскияна $W(y_1, y_2)$ е различен от нула за всяко $x \in (a, b)$. От формулите на Крамер получаваме

$$u_1'(x) = \frac{-g(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad u_2'(x) = \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

В крайна сметка

$$u_1(x) = \int \frac{-g(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx, \quad u_2(x) = \int \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx. \tag{4.24}$$

Пример 1. $4y'' - 4y + y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+x^2}$.
Характеристичното уравнение, съответстващо на хомогенното диференциално уравнение $4y'' - 4y + y = 0$, е $4r^2 - 4r + 1 = 0$, което има двоен корен $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Функциите $y_1(x) = e^{\frac{x}{2}}$ и $y_2(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ образуват фундаментална система от решения на хомогенното диференциално уравнение. Частно решение търсим във вида $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$. Вронскияна на y_1 и y_2 е $W(y_1,y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^x$. От (4.24) получаваме

$$u_1(x) = -\int \frac{xe^x}{(1+x^2)e^x}dx = -\int \frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

$$u_2(x) = \int \frac{e^x}{(1+x^2)e^x}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x.$$

Частното решение е

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).e^{\frac{x}{2}} + \arctan x.xe^{\frac{x}{2}}.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2xe^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).e^{\frac{x}{2}} + \arctan x.xe^{\frac{x}{2}}$$

Пример 2. $y'' + y = \tan^2 x$.
Характеристичното уравнение, съответстващо на хомогенното диференциално уравнение $y'' + y = 0$, е $r^2 + 1 = 0$, корените на което са $r_1 = i$ и $r_2 = -i$. Функциите $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ образуват фундаментална система от решения на хомогенното диференциално уравнение. Частно решение търсим във вида $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$. Вронскияна на y_1 и y_2 е $W(y_1,y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1$. От (4.24) получаваме

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \tan^2 x.\sin x dx = -\int \tfrac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \tfrac{\sin^2 x}{\cos x}d\cos x \\ &= \int \tfrac{1-\cos^2 x}{\cos x}d\cos x = \ln|\cos x| - \tfrac{1}{2}\cos^2 x. \end{aligned}$$

$$u_2(x) = \int \tan^x .\cos x dx = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Частното решение е

$$y_p(x) = (\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x)\cos x - \cos x.\sin x.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + (\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x)\cos x - \cos x.\sin x.$$

4.2 Линейни системи

Разглеждаме линейната система с постоянни коефициенти

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{4.25}$$

Искаме да намерим формула за общото решение на тази система. Нека действаме отново по аналогия. Уравнението

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

е едномерна версия на (4.25). Това е уравнение с разделящи се променливи и неговото решение се намира лесно – $x = e^{at}c$, където c е произволна константа. По аналогия с този едномерен случай предполагаме и след това ще докажем, че

$$x(t) = e^{At}C \tag{4.26}$$

е решение на (4.25). Тук C е постоянен вектор в $\mathbb{R}^n$, който се определя от началните условия. Ще покажем, че формулата (4.26) дава решение на системата (4.25) посредством няколко последователни стъпки.

Първо ще дефинираме експонента на матрица. Това може да стане чрез ред или редица. Ние ще предпочетем дефиницията чрез ред.

Дефиниция 4.4. *Експонента на матрица наричаме формалния ред*

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots. \tag{4.27}$$

Преди да докажем сходимостта на реда (4.27), нека да дадем два примера, с които ще покажем, че можем да намираме e^A с помощта на (4.27).

Пример 1. Да пресметнем e^Λ, където Λ е диагонална матрица $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

За да използваме (4.27), ни е нужно да знаем Λ^k за всяко k. Пресмятаме (или се досещаме)

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \quad \ldots \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

които отново са диагонални матрици. Тогава дефиницията (4.27) дава:

$$e^\Lambda = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda_2^k}{k!} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Редовете по диагонала на последната матрица са сходящи – $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Следователно

$$e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Редът (4.27) се пресмята и за матрици, за които някоя цяла степен, например $A^s = 0$. Такива матрици се наричат нилпотентни. Тогава (4.27) се превръща в крайна сума

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Пример 2. Да пресметнем e^N, където $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Веднага се вижда, че

$$N^2 = N.N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$e^N = E + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ще използваме тези примери по нататък.

Нека сега да обосновем сходимостта на реда (4.27). Ще ни трябва понятието норма на матрица.

Дефиниция 4.5. *Норма на матрица наричаме числото*

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||. \tag{4.28}$$

Тази норма е добре дефинирана, защото се дава от екстремум на непрекъснатата функция върху компактно множество. По Теоремата на Вайерщрас (Теорема А.1) такъв супремум съществува и се достига за някой вектор x_0. Най-важното е, че $0 \le ||A|| < \infty$.

Матричната норма има следните свойства

(1) $||A|| = 0 \longleftrightarrow A = 0$ (2) $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$

(3) $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$ (4) $||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x||$

(5) $||A \cdot B|| \le ||A|| \cdot ||B||$.

Използваме свойство (3) и свойство (5), от което следва неравенството $||A^k|| \le ||A||^k$, за да мажорираме реда (4.27) със сходящ числов ред. На реда (4.27) гледаме като на функционален ред, зависещ от n^2 променливи – елементите на квадратната матрица A.

$$||e^A|| = ||E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots|| \le 1 + \frac{||A||}{1!} + \dots + \frac{||A||^k}{k!} + \dots < \infty$$

По критерия на Вайерщрас (Теорема А.2) за равномерна сходимост на функционални редове, e^A е равномерно сходящ върху всяко множество $\{A|||A|| \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Следващата ни стъпка е разглеждането на реда

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^k}{k!} + \ldots. \tag{4.29}$$

Лема 4.2. *Редът (4.29) е равномерно сходящ във всеки интервал* $[-T, T]$.

Тази Лема се доказва със същия аргумент, използван в горната стъпка

$$||e^{At}|| \leq 1 + \frac{||A||T}{1!} + \ldots + \frac{||A||^kT^k}{k!} + \ldots = e^{||A||T} < \infty.$$

Според критерия на Вайерщрас редът e^{At} е равномерно сходящ в указания интервал и може да се диференцира почленно. И накрая:

Теорема 4.6. *Общото решение на линейната система (4.25)* $\dot{x} = Ax$ *се дава с формулата* $x(t) = e^{At}C$.

Доказателство. Диференцираме почленно реда в дясната страна на формула (4.26)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}e^{At}C = \frac{d}{dt}(E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^k}{k!} + \ldots)C =$$

$$(A + \frac{A^2t}{1!} + + \ldots + \frac{A^kt^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots)C =$$

$$A(E + \frac{At}{1!} + \ldots + \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots)C = Ae^{At}C = Ax(t).$$

∎

Векторът C се определя от n произволни константи и следователно (4.26) дава общото решение на системата (4.25). Ако имаме задача на Коши и са зададени начални условия $x(0) = x_0$, то $C = x_0$ и $x(t) = e^{At}x_0$ е решение на съответната задача на Коши.

И така, получихме формула за общото решение на линейната система (4.25). Не помалко важен е въпросът за алгоритъм за пресмятането на решенията на конкретни системи с тази формула.

Да предположим първо, че матрицата A е подобна на диагонална матрица. Това означава, че съществува неособена матрица S, $\det S \neq 0$, такава, че $A = S\Lambda S^{-1}$ и Λ е диагоналната матрица от Пример 1. Имаме

$$x = e^{At}C = e^{S\Lambda S^{-1}t}C = (E + \frac{S\Lambda S^{-1}t}{1!} + \ldots + \frac{(S\Lambda S^{-1})^kt^k}{k!} + \ldots)C.$$

Използвайки факта, че $(S\Lambda S^{-1})^k = S\Lambda^kS^{-1}$ за всяко k и $E = SS^{-1}$, вадим S пред скобите отляво и S^{-1} зад скобите отдясно:

$$x = S(E + \frac{\Lambda t}{1!} + \ldots + \frac{\Lambda^kt^k}{k!} + \ldots)S^{-1}C = Se^{\Lambda t}S^{-1}C.$$

За простота означаваме $S^{-1}C$ отново с C и получаваме формулата

$$x(t) = Se^{\Lambda t}C. \tag{4.30}$$

Да припомним, че матрицата A е подобна на диагонална, например ако собствените ѝ числа са различни. Как намираме собствените числа на A и самата матрица S, е известно от линейната алгебра (вж. Приложение Б). Ние ще припомним това върху конкретни примери след малко.

Сега ще разгледаме общия случай, когато между собствените числа на матрицата A може да има съвпадащи. За тази цел ни трябват няколко понятия.

Дефиниция 4.6. *Жорданова клетка (или жорданов блок) с размерност s наричаме матрица от вида*

$$J^{(s)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{s \times s}. \tag{4.31}$$

Пример 3.

а) λ е очевидно жорданова клетка с размерност 1;

б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ е двумерна жорданова клетка;

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ е пример на тримерна жорданова клетка.

Дефиниция 4.7. *Жорданова нормална форма на матрица наричаме*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

където по диагонала имаме жорданови клетки. Тази жорданова нормална форма е единствена с точност разместване на блоковете.

Ще формулираме следната

Теорема 4.7. *Всяка матрица A е подобна на жордановата си нормална форма, т.е. за всяка матрица съществуват $J, S, \det S \neq 0$, такива, че*

$$A = SJS^{-1}.$$

Следователно за произволна матрица A имаме формула за решението на системата $\dot{x} = Ax$, аналогична на формулата (4.30)

$$x(t) = Se^{Jt}C. \tag{4.33}$$

По същество формула (4.33) ни казва, че задачата за намиране на общото решение на линейна система ОДУ с постоянни коефициенти се свежда до алгебрична задача – по дадена реална матрица A трябва да намерим J, e^{Jt} и S. Намирането на J и S е задача, описана в учебниците по линейна алгебра. Да се заемем с намирането на e^{Jt} по дадено J. Тъй като J е блочно-диагонална матрица, то от Пример 1 следва, че e^{Jt} е също блочно-диагонална

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{J_p t} \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Следователно достатъчно е да намерим експонентата на една жорданова клетка $J^{(s)}$. Ще забележим, че

$$J^{(s)} = \Lambda + N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $J^{(s)}$ е сума на диагонална и нилпотентна матрица, чиито експоненти ние знаем от Примери 1 и 2. Тогава имаме

$$e^{J^{(s)}t} = e^{\Lambda t + Nt}.$$

Ще формулираме следния резултат

Лема 4.3.

$$e^{A+B} = e^A.e^B \longleftrightarrow AB = BA.$$

За доказателството на този резултат е по-удобно да се използва дефиницията на експонента на матрица чрез редица (вижте например Арнолд [1] за доказателството).

Веднага се проверява, че $\Lambda N = N\Lambda$ и следователно

$$e^{J^{(s)}t} = e^{\Lambda t}.e^{Nt}.$$

Пример 4. Нека $J^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Да пресметнем $e^{J^{(2)}t}$.

Имаме

$$J^{(2)} = \Lambda + N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

От горните разсъждения

$$e^{J^{(2)}t} = e^{\Lambda t}.e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} . (E + Nt) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След цялото това теоретично разглеждане ще дадем алгоритъм, който ще ни позволи да решаваме двумерни системи. С малки модификации алгоритъмът може да се прилага и за тримерни системи. За системи с по-големи размерности е нужна допълнителна формула за определяне броя на жордановите клетки с фиксирана размерност, а освен това обемът на пресмятанията нараства значително.

Да припомним, общото решение на системата (4.25) е $x(t) = Se^{Jt}C$ и задачата се сведе до намирането на J, e^{Jt}, S по дадена матрица A.

Стъпка 1. Намираме собствените числа на матрицата A и определяне на жордановата нормална форма J.

Собствените числа удовлетворяват характеристичното уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Първи случай. Собствените числа са реални и различни $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Тогава жордановата нормална форма J е диагонална

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Втори случай. Собствените числа са реални и съвпадат $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
Трябва да установим колко жорданови клетки съответстват на съвпадащите собствени числа. Получаваме матрицата $B = A - \lambda E$. Пресмятаме ранга на B, който означаваме с $r(B)$. Той може да бъде 0 или 1. Да означим с l броя на жордановите клетки, отговарящи на кратното собствено число.

$$l = n - r(B) = 2 - r(B). \tag{4.35}$$

Ако $r(B) = 0$, то $l = 2$, т.е имаме две едномерни жорданови клетки. Това означава, че матрицата B е нулевата, а A е диагонална – това ние можем да го видим от условието на задачата. И така, в повечето случаи $r(B) = 1$ и $l = 1$. Имаме една жорданова клетка и тя е двумерна $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. От Пример 4 имаме

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стъпка 2. Намираме матрицата S.

В първия случай матрицата S се състои от собствените вектори на A. Забележете, че редът има значение.

$$S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Да припомним, че собствените вектори v_j са ненулеви вектори, удовлетворяващи системите $Av_j = \lambda_j v_j$, $j = 1, 2$.

Във втория случай имаме само един собствен вектор. Трябва да добавим още един линейно независим вектор и той обикновено се нарича присъединен вектор. Имайки матрицата B, намираме собствения и присъединения вектор по следния начин:

Решаваме системата

$Bv_1 = 0, \quad v_1 \in KerB \quad v_1$ собствен вектор.

Решаваме системата

$Bv_2 = v_1, \quad v_2 \in KerB^2 \quad v_2$ присъединен вектор.

Тогава

$$S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Стъпка 3. Накрая записваме решението

$$x(t) = Se^{Jt}C,$$

където е двумерен произволен вектор $C = (c_1, c_2)^T$.

Както може да се забележи, остана още един случай, когато собствените числа на матрицата A са комплексно-спрегнати. Тогава получаваме, че жордановата нормална форма и матрицата S са комплексни. Ние искаме да получим реални решения и затова избираме векторът C с комплексно-спрегнати компоненти. Тъй като до голяма степен този случай прилича на диагоналния, ние ще го разгледаме в пример.

Пример 5. Да намерим решението на системата $\dot{x} = Ax$, където

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме характеристичното уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0.$$

Това е квадратно уравнение, чийто корени са ± 3 – това са собствените числа на матрицата A. Тъй като те са реални и различни, то жордановата нормална форма е диагонална

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

За да намерим матрицата S, пресмятаме собствените вектори. Собственият вектор на $\lambda_1 = 3$ е решение на системата $Av_1 = 3v_1$ и е $v_1 = (2,1)^T$.

Собственият вектор на $\lambda_2 = -3$ се намира от $Av_2 = -3v_2$ и е $v_2 = (-4,1)^T$.

Следователно

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а самото решение е

$$x(t) = Se^{Jt}C = S = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Да намерим решението на системата $\dot{x} = Ax$, където

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Пресмятаме характеристичното уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Собствените числа на A съвпадат – $\lambda_{1,2} = 1$.

За да определим структурата на жордановата матрица, записваме матрицата B

$$B = A - 1E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Редовете на B са линейно зависими и рангът на B е 1 – $r(B) = 1$. Броят на жордановите клетки според формула (4.35) е $l = 2 - r(B) = 1$. Имаме една двумерна жорданова клетка

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

От Пример 4 при $\lambda = 1$ получаваме

$$e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Смятаме последователно собствения и присъединения вектори.

$Bv_1 = 0$ дава собствения вектор $v_1 = (1,2)^T$.

Решаването на системата $Bv_2 = v_1$ дава присъединен вектор $v_2 = (0,-1)^T$. Следователно матрицата S е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Окончателно общото решение на системата е

$$x(t) = Se^{Jt}C = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Да намерим решението на системата $\dot{x} = Ax$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

След пресмятане собствените числа на матрицата A са $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Това се вижда и директно от представянето на комплексните числа с двумерни матрици.

Както вече споменахме, този случай прилича на диагоналния. Тъй като собствените числа са различни, то жордановата нормална форма е диагонална матрица

$$J = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}.$$

Сега пресмятаме собствените вектори. Тъй като матрицата A е реална, ако v_1 е собствен вектор на λ_1, то комплексно-спрегнатият $\bar{v}_1$ е собствен вектор на $\bar{\lambda}_1$.

След пресмятане намираме собствения вектор на $\lambda_1 = 1 + 2i$ да е $v_1 = (i, 1)^T$. Оттук $v_2 = \bar{v}_1 = (-i, 1)^T$. За S получаваме

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Както вече споменахме, за да получим реални решения, избираме компонентите на произволния вектор да са комплексно-спрегнати $C = (c_1, \bar{c}_1)^T$. Решението е

$$x(t) = Se^{Jt}C = S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

След извършване на съответните пресмятания, използвайки формулата на Ойлер $e^{\pm ix} = \cos x \pm \sin x$, получаваме реално решение (убедете се сами!).

Задачи за самостоятелна работа. Решете следните системи $\dot{x} = Ax$, където A е:

1) $A = \begin{pmatrix} -31 & 24 \\ -48 & 37 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ -25 & -6 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Глава 5

Качествени методи

В тази глава ще разгледаме няколко свойства на решенията на системи от уравнения, без да решаваме уравненията явно. Методите, позволяващи такива разглеждания, се наричат качествени или геометрични методи за изследване на ОДУ. Особено нагледно е изучаването на решенията на системи ОДУ в равнината. Въпреки че ние ще формулираме (и докажем) някои свойства за призволна размерност, примерите ни ще са двумерни.

Да започнем с няколко понятия. Нека е зададена автономна система ОДУ

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad v \in C^r(U), r \geq 1. \tag{5.1}$$

Предположението $r \geq 1$ е, за да се удовлетворят условията на Теоремата за съществуване и единственост. Покоординатно системата (5.1) се записва като

$$\left| \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & v_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdots & & \cdots\cdots \\ \dot{x}_n & = & v_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array} \right. \tag{5.2}$$

В произволна точка $\bar{x} \in U$ дясната страна на системата (5.2) задава n-мерен вектор, допирателен към траекторията през $\bar{x}$. Да припомним, че това е задачата в ОДУ: по зададен допирателен вектор във всяка точка към траекторията да определим самата траектория.

Нека x се мени в областта U. Тъй като $v \in C^r(U)$, то векторът $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ се мени гладко при промяна на x, т.е. във всяка точка $x \in U$ имаме зададен вектор $v(x)$, допирателен към траекторията в тази точка.

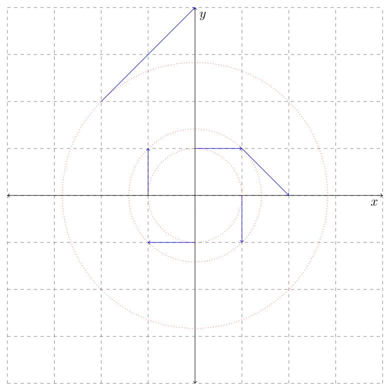
Дефиниция 1. Казваме, че дясната страна на система (5.2) (или (5.1)) задава гладко векторно поле.

Ясно е, че всяка система ОДУ задава векторно поле, и обратно.

Пример 1. Да разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{lcr} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1. \end{array} \right.$$

За тази система $v_1 = x_2, v_2 = -x_1$. Избираме няколко произволни точки в равнината, например $(1,0), (0,1), (1,1)$ и т.н, и във всяка от тях пресмятаме дясната страна на системата $v = (v_1, v_2)^T$. Получаваме серия от вектори, прикрепени в съответните точки, например $v_{(1,0)} = (0, -1)^T, v_{(0,1)} = (1, 0)^T, v_{(1,1)} = (1, -1)^T$ и т.н. Част от тези вектори са изобразени на Фигура 1. Имайки предвид, че тези вектори са допирателни към траекториите в съответните точки, то, рисувайки векторното поле (или част от него), получаваме представа за траекториите на съответната система.



Фигура 5.1: Пример за векторно поле

Дефиниция 2. Особена точка за системата (5.1) наричаме такава точка

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

в която векторното поле се анулира $v(x^0) = 0$. С други думи, особените точки са решения на системата

$$\left| \begin{array}{lcl} 0 & = & v_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \dots & & \dots\dots \\ 0 & = & v_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Особените точки (когато ги има) дават примери за най-прости решения на системата (5.1). Наистина, замествайки x^0 в (5.1), получаваме тъждество

$$0 = \dot{x}^0 = v(x^0) = 0.$$

Тъй като тези решения не зависят от t, особените точки се наричат още стационарни решения или положения на равновесие.

Пример 2. Да намерим особените точки на системата

$$\left| \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x^2 + y^2 + 1 \\ \dot{y} & = & x(x - y) \end{array} \right.$$

Такива точки няма, тъй като $x^2 + y^2 + 1$ никога не се анулира.

Пример 3. Да намерим особените точки на системата

$$\left| \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y - y^3 \\ \dot{y} & = & x - y \end{array} \right.$$

Приравняваме на нула десните страни на системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 0 &=& y - y^3 \\ 0 &=& x - y \end{array} \right.$$

Второто уравнение ни дава, че $x = y$, а първото уравнение, че $y = 0, \pm 1$. Следователно особените точки са $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

Следващата ни цел е да изучим поведението на решенията, които са близки до стационарните решения. Нека x^0 е произволна особена точка (стационарно решение, положение на равновесие) на системата (5.1). Да означим

$$y = x - x^0. \tag{5.4}$$

Тъй като се интересуваме от близки до x^0 решения, то y е малка величина. Заместваме (5.4) в системата (5.1) и получаваме

$$\dot{y} = v(y + x^0). \tag{5.5}$$

Веднага се вижда, че за системата (5.5) $y = 0$ е особена точка. Развиваме дясната страна на системата (5.5) по формулата на Тейлър в околност на $y = 0$. Получаваме

$$\dot{y} = D_y v(x^0) y + \mathrm{O}(||y||^2), \tag{5.6}$$

където с $\mathrm{O}(||y||^2)$ сме означили нелинейните членове в развитието. Можем да пренебрегнем тези нелинейни членове, тъй като те са по-малки от y. В резултат получаваме една линейна система с постоянни коефициенти

$$\dot{y} = D_y v(x^0) y. \tag{5.7}$$

Записана покоординатно, система (5.7) има вида

$$\left| \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& \frac{\partial v_1}{\partial y_1}(x^0) y_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_2}(x^0) y_2 + \ldots + \frac{\partial v_1}{\partial y_n}(x^0) y_n \\ \cdots & & \cdots\cdots \\ \dot{y}_n &=& \frac{\partial v_n}{\partial y_1}(x^0) y_1 + \frac{\partial v_n}{\partial y_2}(x^0) y_2 + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial y_n}(x^0) y_n \end{array} \right. \tag{5.8}$$

Ще означим с A матрицата от първите частни производни на функциите v_j, пресметнати в x^0

$$A := D_y v(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial y_1} & \frac{\partial v_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Тогава линейната система (5.7) се записва като

$$\dot{y} = Ay. \tag{5.10}$$

Това е линейна система с постоянни коефициенти, която ние принципно можем да решаваме (ефективно в ниските размерности 2 и 3). Линейната система (5.10) се нарича система (уравнение) във вариации за стационарното решение x^0, или още линеаризирана система в околност на положението на равновесие.

Ние искаме с помощта на информацията, получена от линеаризираната система (5.10), да изучим поведението на близките до x^0 решения на нелинейната система (5.1).

Забележка. Можем да извършим същата процедура на линеаризация в околност на кое да е решение $\varphi(t)$ на нелинейната система (5.1). Като резултат обаче ще получим линейна неавтономна система

$$\dot{y} = A(\varphi(t))y,$$

която е много по-трудна за изследване. Това е основната причина, поради която се ограничаваме с разглеждането само на стационарни решения.

Нека да дефинираме още едно понятие, което ще използваме в доказателствата.

Нека f е гладка функция, дефинирана в $U \subset \mathbb{R}^n \quad f : U \to \mathbb{R}$. Нека $v = (v_1, \dots, v_n)$ е гладко векторно поле.

Дефиниция 5.1. *Производна на Ли (или производна по направление на векторно поле) се нарича функцията $L_v f$, дефинирана с*

$$L_v f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i(x).$$

Тази производна е геометричен обект и ние ще използваме едно от нейните свойства

$$L_{v_1+v_2} f = L_{v_1} f + L_{v_2} f.$$

Другите свойства и приложения на производната на Ли могат да се видят например в Арнолд [1].

В секция 5.1 разглеждаме класификацията на особената точка $(0,0)$ на линейни системи в $\mathbb{R}^2$. Разглеждаме само случаите, които са в общо положение, т.е. остават в себе си при малки смущения в коефициентите на матрицата. Класификацията на особените точки и рисуването на фазовите портрети в равнината може да се счита за първа стъпка в изследването на една нелинейна система в $\mathbb{R}^2$. Ще отбележим, че пълно такова изследване дори за полиномиални системи все още не е направено.

Качественото или геометрично изследване на поведението на решенията на системи диференциални уравнения е започнато от Поанкаре. На него дължим много от идеите и методите, с които се изучават системите обикновени дифренциални уравнения, но за съжаление не можем да изложим по-голямата част от тях.

В секция 5.2 разглеждаме поведението на близките до равновесни положения решения на безкраен интервал от време. Въвежда се понятието устойчивост по Ляпунов, съответно асимптотическа устойчивост и неустойчивост. Трябва да се каже, че и други класици (Лагранж, Поасон, Поанкаре и др.) са се занимавали с устойчивост, но Ляпунов е поставил строго математически задачата. Доказват се теоремите на Ляпунов за устойчивост и неустойчивост по първо приближение. Тези доказателства могат да се пропуснат при първо четене.

5.1 Фазови портрети на линейни системи в $\mathbb{R}^2$

Да разгледаме линейната хомогенна система с постоянни коефициенти

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^2,\ a_{ij} \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{5.11}$$

Искаме да класифицираме различните типове особени точки на системата (5.11) и да нарисуваме съответните фазови портрети. Тук фазовото пространство е двумерно – фазова равнина $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Фазовият портрет на системата (5.11) се състои от проекции на решенията на системата в околност на началото и стрелки върху тези проекции, които указват посоката на движение на точката $x(t), y(t))$ при нарастване на t.

Класификацията е естествено да я направим, използвайки инвариантите на матрицата A – собствените ѝ числа λ_1, λ_2.

Ще предполагаме, че детерминантата на матрицата A е различна от нула: $\det(A) \neq 0$. Това условие гарантира, че $(0, 0)$ е единствена особена точка. Ще изследваме случаите, които са в общо положение, т.е. случаи, които се запазват при малка промяна на коефициентите на матрицата. Тези случаи се наричат "груби" и изключват λ_1, или λ_2 е равно на нула или и двете са нули, а също така $\lambda_1 = \lambda_2$ и $Re\lambda = 0$. Последните случаи могат да се изследват лесно (виж например Живков [8]).

Първо да видим как изглеждат проекциите на решенията във фазовата равнина.

Нека собствените числа са комплексно спрегнати $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$. Знаем от предната глава, че решенията са линейна комбинация на $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$. Фазовите криви са свиващи се спирали при $\alpha < 0$, развиващи се спирали при $\alpha > 0$ и затворени криви при $\alpha = 0$.

Нека сега $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогава матрицата A на системата (5.11) се диагонализира, а в съответния базис самата система приема вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \lambda_1\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2\xi_2. \end{array} \right. \tag{5.12}$$

Тъй като искаме да намерим проекциите (т.е. да изключим t), делим почленно двете уравнения на системата (5.12)

$$\frac{\frac{d\xi_1}{dt}}{\frac{d\xi_2}{dt}} = \frac{\lambda_1\xi_1}{\lambda_2\xi_2}.$$

След делене на dt получаваме уравнение с разделящи се променливи

$$\frac{d\xi_1}{\xi_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\xi_2}{\xi_2},$$

чието решение е

$$|\xi_1| = C|\xi_2|^{\lambda_1/\lambda_2}. \tag{5.13}$$

Следователно нашите проекции са криви от вида

$$y = Cx^k, \tag{5.14}$$

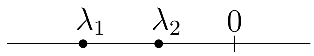
където $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, а C е произволна константа. Забележете, че $x > 0$, но модулът и константата C разнасят тези криви в различните квадранти. Кривите (5.14) са части от параболи при $k > 1, k \in (0, 1)$, части от хиперболи при $k < 0$ и прави през началото при $k = 1$.

Забележка. Тъй като линейната система (5.11) удовлетворява Теоремата за съществуване и единственост, то през всяка точка на равнината минава единствена крива, иначе казано, фазовите криви не могат да се пресичат, освен евентуално в началото.

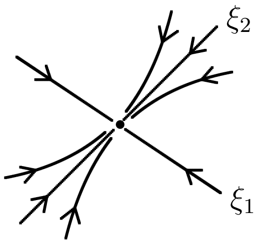
Имайки предвид тези факти, преминаваме към класификацията и фазовите портрети.

А) Нека собствените числа на матрицата A на системата $\lambda_1 \neq \lambda_2$ са реални:

1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

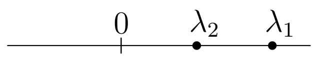


$(0, 0)$ се нарича *устойчив възел*

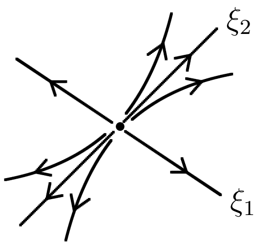


Фиг. 5.2

2) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

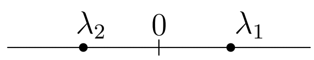


$(0, 0)$ се нарича *неустойчив възел*

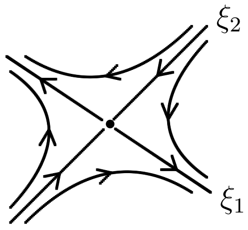


Фиг. 5.3

3) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

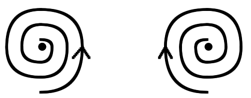


$(0, 0)$ се нарича *седло*



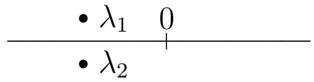
Фиг. 5.4

Б) Нека собствените числа на матрицата A са комплексно спрегнати $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$:

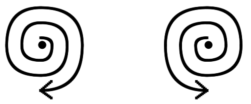


Фиг. 5.5

4) $Re\lambda_{1,2} = \alpha < 0$

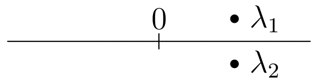


$(0,0)$ се нарича *устойчив фокус*

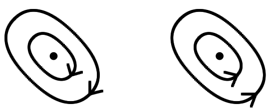


Фиг. 5.6

5) $Re\lambda_{1,2} = \alpha > 0$

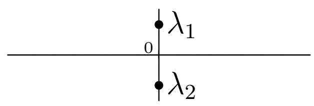


$(0,0)$ се нарича *неустойчив фокус*



Фиг. 5.7

6) $Re\lambda_{1,2} = 0$



$(0,0)$ се нарича *център*

В последните три случая, за да определим посоката на завъртане, ни е нужен допирателен вектор към траекторията в произволна точка, различна от $(0,0)$. Координатите на този вектор $v = (v_1, v_2)^T$ се определят чрез пресмятане на десните страни на системата (5.11) в избраната точка.

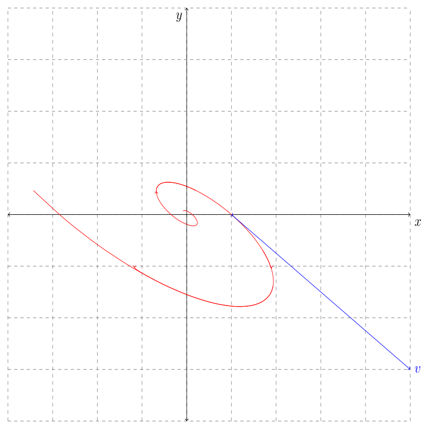
Последният случай 6) не е в общо положение и се превръща в случай 4) или 5) при малко смущение на коефициентите на матрицата A. Разглеждаме го, защото се появява в следващата ни тема.

В следващите примери ще нарисуваме няколко фазови портрета на линейни системи в равнината.

Пример 1.

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 4x + 6y \\ \dot{y} &= -3x - 2y. \end{aligned} \right.$$

Собствените числа на матрицата на системата $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ се определят от характеристичният полином $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ и са $\lambda_{1,2} = 1 \pm i3$. Тъй като $Re\lambda = 1 > 0$ според направената класификация особената точка $(0,0)$ е неустойчив фокус. За да определим посоката на завъртане, избираме точка $(1,0)$ и пресмятаме дясната страна на системата в тази точка. Получаваме вектора $v = (4,-3)^T$, допирателен до траекторията в тази точка. Тогава фазовият портрет е даден на фигура 5.8.



Фигура 5.8: Неустойчив фокус

Пример 2.

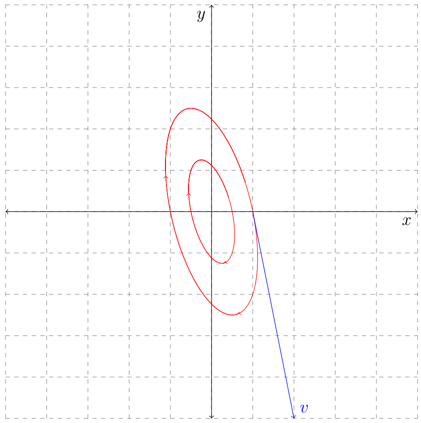
$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= -5x - y. \end{aligned} \right.$$

Собствените числа на матрицата на системата $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ са $\lambda_{1,2} = 0 \pm i2$. Тъй като $Re\lambda = 0$, според направената класификация особената точка $(0,0)$ е център. За да определим посоката на завъртане, избираме точка $(1,0)$ и пресмятаме дясната страна на системата в тази точка. Получаваме вектора $v = (1,-5)^T$, допирателен до траекторията в тази точка. Тогава фазовият портрет е даден на фигура 5.9.

Пример 3.

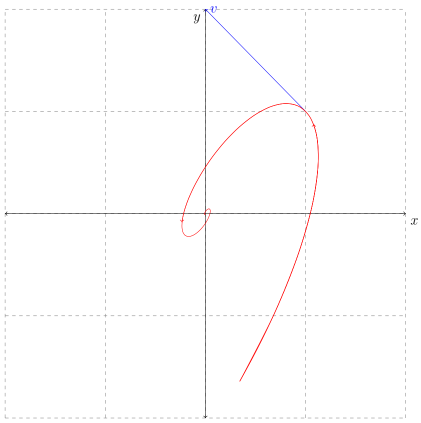
$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 4x - 3y. \end{aligned} \right.$$

Собствените числа на матрицата на системата $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ са $\lambda_{1,2} = -1 \pm i2$. Тъй като $Re\lambda = -1 < 0$, според направената класификация особената точка $(0,0)$ е устойчив



Фигура 5.9: Център

фокус. За да определим посоката на завъртане, избираме точка $(1,1)$ и пресмятаме дясната страна на системата в тази точка. Получаваме вектора $v = (-1,1)^T$, допирателен до траекторията в тази точка. Тогава фазовият портрет е даден на фигура 5.10.

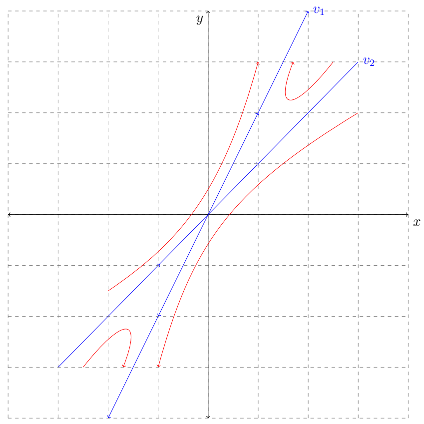


Фигура 5.10: Устойчив фокус

Пример 4.

$$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= -4x + 3y \\ \dot{y} &= -6x + 5y. \end{aligned} \right.$$

Собствените числа на матрицата на системата $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ са $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Те са реални и различни по знак и според направената класификация особената точка $(0,0)$ е седло. Пресмятаме собствените вектори. Собственият вектор на $\lambda_1 = 2$ е $v_1 = (1,2)^T$, а собственият вектор на $\lambda_2 = -1$ е $v_2 = (1,1)^T$ Тогава фазовият портрет е даден на фигура 5.11.

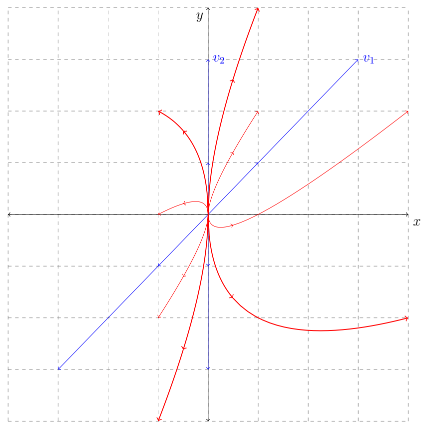


Фигура 5.11: Седло

Пример 5.

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x + y. \end{array} \right.$$

Собствените числа на матрицата на системата $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ са $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Те са реални и положителни и според направената класификация особената точка $(0,0)$ е неустойчив възел. Пресмятаме собствените вектори. Собственият вектор на $\lambda_1 = 2$ е $v_1 = (1,1)^T$, а собственият вектор на $\lambda_2 = 1$ е $v_2 = (0,1)^T$. Тогава фазовият портрет е даден на фигура 5.12.



Фигура 5.12: Неустойчив възел

Задачи за самостоятелна работа. В следващите задачи нарисувайте фазовите портрети на системите $\dot{x} = Ax$:

$$1)\, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad 2)\, A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3)\, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4)\, A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad 5)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Устойчивост по Ляпунов

Както вече споменахме в Глава 3, в реалните модели, описвани с ДУ, данните са зададени с някаква точност. Там доказахме, че решенията зависят непрекъснато, даже диференцируемо от началните условия. Това означава, че локално решения с малко различаващи се начални условия стоят близко.

Искаме да разпространим тази близост глобално – на голям или даже безкраен интервал от време. Подобно поведение в околност на някое специфично решение води до понятието устойчивост на това решение.

В тази секция ще формализираме математически понятията устойчивост и неустойчивост. Ще отбележим, че физическите процеси, които наблюдаваме в по-дълъг период от време, са устойчиви.

Тук отново за простота ще разгледаме само автономни нелинейни системи

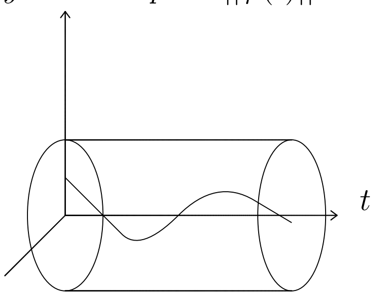
$$\dot{z} = v(z), \quad z \in V \subset \mathbb{R}^n, v \in C^r(V) \quad r \geq 1 \tag{5.15}$$

и ще разглеждаме устойчивостта на стационарни решения (равновесни положения) $z = a$ – $v(a) = 0$. С транслация свеждаме разглеждането до случая $a = 0$. Следователно системата (5.15) има нулево решение $\varphi(t) \equiv 0$:

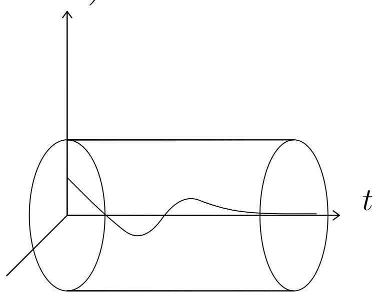
$$0 = \dot{\varphi} = v(\varphi) = v(0) = 0.$$

Интересува ни поведението на решенията с близки до нулата начални условия.

Дефиниция 5.2. *Казваме, че стационарното решение $z = 0$ на системата (5.15) е устойчиво (или устойчиво по Ляпунов), ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon)$, такова, че ако $||z_0|| < \delta$, решението $\varphi(t)$ с начално условие $\varphi(0) = z_0$ се продължава за $t \geq 0$ и удовлетворява $||\varphi(t)|| < \epsilon$ за всяко $t > 0$ (фиг. 5.13.).*



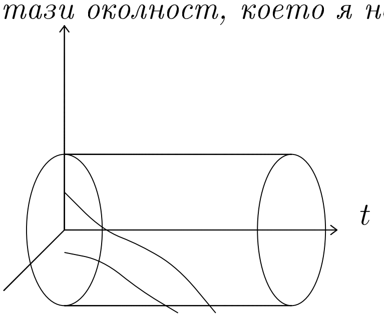
Фигура 5.13. Устойчивост



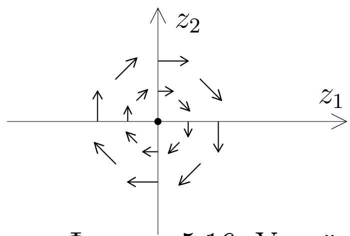
Фигура 5.14. Асимптотическа устойчивост

Дефиниция 5.3. *Казваме, че стационарното решение $z = 0$ на системата (5.15) е асимптотически устойчиво, ако то е устойчиво и $\lim_{t\to\infty} ||\varphi(t)|| = 0$ (Фиг. 5.14.).*

Дефиниция 5.4. *Казваме, че стационарното решение е неустойчиво, ако то не е устойчиво, т.е. за всяка околност на $z = 0$ съществува решение с начално условие в тази околност, което я напуска за някое $t > 0$ (Фиг. 5.15).*



Фигура 5.15. Неустойчивост



Фигура 5.16. Устойчивост, но не асимптотическа устойчивост

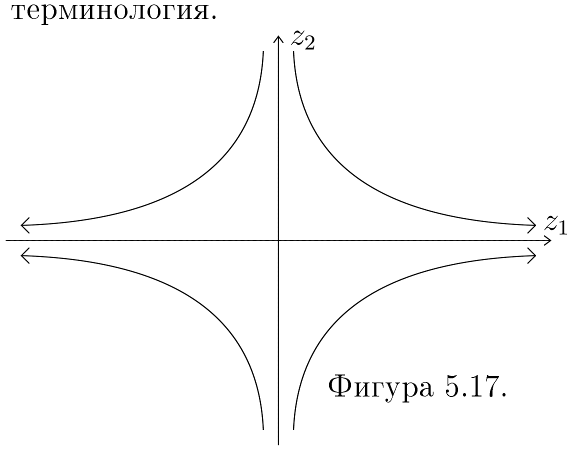
Примери:

1. Положението на равновесие $z = 0$ на системата $\dot{z} = Az$, където $z \in \mathbb{R}^n$ и собствените числа на матрицата A имат отрицателни реални части, е асимптотически устойчиво. Това се установява лесно от вида на общото решение $z = e^{At}z_0$.

2. Положението на равновесие $z = 0$ на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 \end{array}\right.$$

е устойчиво, но не асимптотически устойчиво (фиг. 5.16) – това е център в нашата терминология.



Фигура 5.17.

3. Положението на равновесие $z = 0$ на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_1 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{array}\right.$$

е неустойчиво (фиг. 5.17) – това е седло в нашата терминология.

Изследването на устойчивостта с помощта на дефинициите изисква познаването на общото решение. В горните примери системите са линейни и общото решение се намира лесно. За произволна система експлицитно решение се намира рядко, затова ни е нужно лесно проверимо достатъчно условие, базиращо се само върху дясната част на системата диференциални уравнения.

Векторното поле $v \in C^r$ в околност на точката 0 може да се представи във вида (от формулата на Тейлър)

$$v(z) = Az + v_2(z),$$

където $A = v_*(z) = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(0))_{i,j=1,n}$ и $v_2(z) = O(||z||^2)$.

Да припомним, че системата

$$\dot{z} = Az \tag{5.16}$$

се нарича линеаризация (или първо приближение) на (5.15) в околност на $z = 0$.

Теорема 5.1. *(Ляпунов) Нека собствените числа на матрицата A са с отрицателни реални части. Тогава нулевото решение на системата (5.15) е асимптотически устойчиво.*

Доказателство. Трябва да покажем, че съществува околност на $z = 0$, такава, че ако изберем произволно $z_0 = 0$ за начално условие за системата (5.15), то съответното решение $\varphi(t)$ е:

а) определено за $t \geq 0$ б) $\varphi(t)$ е устойчиво в) $\lim_{t\to\infty} ||\varphi(t)|| = 0$.

Доказателството се основава на построяване на функция на Ляпунов, която служи за мерене на разстоянието до положението на равновесие $z = 0$, намалява върху траекториите и произлиза от линейната система (5.16).

Дефиниция 5.5. *Казваме, че $r(z), z \in U, 0 \in U$ е функция на Ляпунов за (5.15), ако*
1) $r(z) > 0, \quad z \in U, \quad r(0)) = 0$
2) $L_{Az}r(z) \leq -\gamma r(z), \quad \gamma > 0$.

Обикновено за функция на Ляпунов се избира квадратична форма. Нека

$$r(z) = \int_0^\infty ||e^{As}z||^2 ds.$$

Ясно е, че $r(z)$ е положително определена и $r(0) = 0$. Интегралът е сходящ поради това, че A има собствени числа с отрицателни реални части.

Наистина, произволен елемент на матрицата e^{As} има вида $f_{pq} = e^{\lambda_j s}P_k(s)$, където $P_k(s)$ е полином от степен k по-малка или равна на кратността на λ_j минус 1. Нека $\max_j Re\lambda_j < \alpha < 0$. Тогава

$$|\frac{f_{pq}}{e^{\alpha s}}| \leq |P_k(s)e^{(Re\lambda_j-\alpha)s}| \leq M_{pq},$$

т.е. $|f_{pq}| \leq e^{\alpha s}M_{pq}$, като тук сме означили с $M = (M_{pq})$ константна матрица.

$$r(z) = \int_0^\infty ||e^{As}z||^2 ds \leq \int_0^\infty ||Mz||^2 e^{2\alpha s} ds \leq ||Mz||^2 \leq \beta_2||z||^2 < \infty.$$

Тук използвахме, че за всяка положително определена квадратична форма

$$\beta_1||z||^2 \leq r(z) \leq \beta_2||z||^2, \qquad \beta_1, \beta_2 > 0.$$

Остава да проверим 2). По дефиниция

$$L_{Az}r(z) = \frac{d}{dt}\int_0^\infty ||e^{As}e^{At}z_0||^2 ds = \frac{d}{dt}\int_0^\infty ||e^{A(s+t)}z_0||^2 ds$$

$$\overset{\sigma=t+s}{=} \frac{d}{dt}\int_t^\infty ||e^{A\sigma}z_0||^2 d\sigma = -||e^{At}z_0||^2 = -||z||^2 \leq -\frac{1}{\beta_2}r(z).$$

Означавайки $\gamma := \frac{1}{\beta_2}$, получаваме нужния резултат.

След като построихме функция на Ляпунов за линейната система, ще покажем, че тази функция върши работа и за нелинейната система.

Лема 5.1. *Нека $||z|| < \tau$, и τ е достатъчно малко. Тогава $L_{v(z)}r(z) \le -\frac{\gamma}{2}r(z)$.*

Доказателство. От свойствата на производната на Ли знаем, че

$$L_{v(z)}r(z) = L_{Az}r(z) + L_{v_2(z)}r(z).$$

Вече имаме $L_{Az}r(z) \le -\gamma r(z)$.

$$v_2(z) \le k||z||^2 \le \frac{k}{\beta_1}r(z)$$

$$L_{v_2(z)}r(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_i} v_{2i}(z) \le cr^{3/2}(z)$$

за някакво положително c. Нека сега изберем $||z|| \le \tau := \sqrt{\frac{b}{\beta_1}}$, така че $r(z) \le b$, като b е такова, че $cb^{1/2} \le \frac{\gamma}{2}$.

$$L_{v(z)}r(z) = L_{Az}r(z) + L_{v_2(z)}r(z) \le -\gamma r(z) + \frac{\gamma}{2}r(z) = -\frac{\gamma}{2}r(z).$$

□

Нека сега $\varphi(t)$ е решение на (5.15) с начални условия, близки до началото и различни от нула. Полагаме $\varrho(t) := \ln r(\varphi(t))$.

$$\dot{\varrho}(t) = \frac{\frac{d}{dt}r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} = \frac{L_v r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} \le -\frac{\gamma}{2}\frac{r(\varphi(t))}{r(\varphi(t))} = -\frac{\gamma}{2}.$$

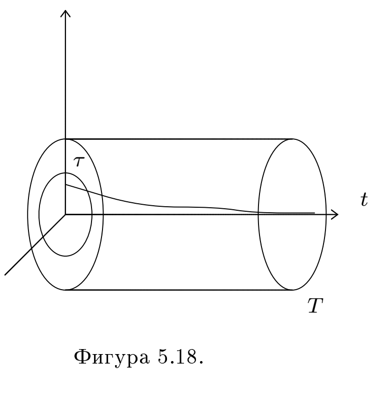
След интегриране получаваме

$$\varrho(t) \le \varrho(0) - \frac{\gamma}{2}t \qquad \text{или} \qquad r(\varphi(t)) \le e^{\frac{\gamma}{2}t}r(\varphi(0)),$$

откъдето получаваме оценката

$$||\varphi(t)|| \le \frac{1}{\beta_2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}r(\varphi(0)). \tag{5.17}$$

От тази оценка се вижда, че $\varphi(t)$ намалява експоненциално и клони към нула при t клонящо към безкрайност.



Фигура 5.18.

Остава да се докаже, че решението се продължава за всяко $t \ge 0$. Избираме компакт

$$K := \{(z,t)\,|\,0 \le t \le T, \quad r(z) \le b\}.$$

При $||\varphi(0)|| < \tau, r(\varphi(0)) \le b$ от оценката (5.17) следва, че когато t расте, нормата на решението намалява, и следователно решението не може да излезе на страничните граници на компакта (фиг. 5.18). Тъй като T е произволно, решението се продължава неограничено.

■

Теорема 5.2. *Нека матрицата A на линеаризираната система (5.16) има собствено число с положителна реална част. Тогава нулевото решение на системата (5.15) е неустойчиво.*

Доказателство. Нека имаме поне едно собствено число на матрицата A с положителна реална част. Пространството $\mathbb{R}^n$ може да се представи като директна сума на две инвариантни подпространства $\mathbb{R}^n = E_1 \bigoplus E_2$ като

$A_1 = A_{|E_1}$ има само собствени числа с положителни реални части

$A_2 = A_{|E_2}$ има само собствени числа с отрицателни или нулеви реални части.

Нека означим $z = (x, y)$, $x \in E_1$, $y \in E_2$ и нека $a > 0$ е такова число, че $Re\lambda_j > a > 0$ (λ_j са собствените числа на A_1). Върху E_1 има евклидова норма, такава, че

$$(A_1 x, x) \geq a||x||^2, \quad x \in E_1. \tag{5.18}$$

Аналогично върху E_2 има евклидова норма, такава, че за всяко $b > 0$ е изпълнено

$$(A_2 y, y) < b||y||^2, \quad y \in E_2. \tag{5.19}$$

Нека считаме, че $0 < b < a$.

$$v(z) = (v_1(z), v_2(z)) = (A_1 x + F_1(x, y), A_2 y + F_2(x, y)),$$

като $F(z) = (F_1(z), f_2(z))$ са нелинейните членове. За произволно $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, такова, че ако $||z|| < \delta$, тук $(||z|| = (||x|| + ||y||)^{1/2})$

$$||F(z)|| \leq \epsilon ||z||^2. \tag{5.20}$$

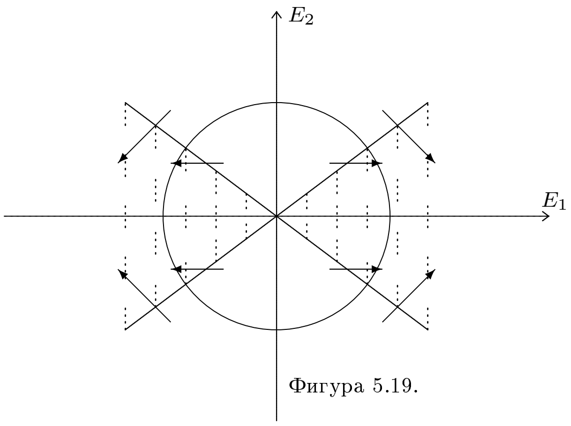
Дефинираме конуса $C =: \{(x, y) \in E_1 \bigoplus E_2 \,|\, ||x|| > ||y||\}$.

Лема 5.2. *Съществува $\delta > 0$ такова, че ако $\overline{U} = \{||z|| < \delta\}$, то за всяко $z = (x, y) \in C \bigcap \overline{U}$*

(а) $(x, v_1(x, y)) - (y, v_2(x, y)) > 0$ при $x \neq 0$,

(б) съществува $\mu > 0$, такова, че $(v(z), z) \geq \mu ||z||^2$.

Доказателство. Да започнем с (б).



Фигура 5.19.

$$(v(z), z) = (A_1 x, x) + (A_2 y, y) + (F(z), z)$$

От (5.18), (5.19) и (5.20) следва

$$(v(z), z) \geq a||x||^2 - b||y||^2 - \epsilon ||z||^2$$

В C имаме $||x|| > ||y||$ и $||x||^2 \geq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2) \geq \frac{1}{2}||z||^2$, откъдето

$$(v(z), z) \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon)||z||^2.$$

Избираме $\epsilon > 0$ и с това δ, така че $\mu = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon > 0$.

Коментар. Геометрично условието б) означава, че векторът $v(z), z \in C$ сочи навън от сферата с начало в O и минаваща през z (Фиг. 5.19).

Да докажем сега (а).

$$(x, v_1(x, y)) - (y, v_2(x, y)) = (A_1 x, x) + (x, F_1(x, y)) - (A_2 y, y) - (y, F_2(x, y)) >$$

$$a||x||^2 - b||y||^2 + (x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y)).$$

Но $|(x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y))| \leq 2(z, F(z))$. Както по-горе в б)

$$a||x||^2 - b||y||^2 + (x, F_1(x, y)) - (y, F_2(x, y)) \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\epsilon)||z||^2.$$

Избираме $\epsilon > 0$ и с това δ, така че $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\epsilon > 0$, откъдето следва твърдението.

Коментар. Нека интерпретираме условие а). Да дефинираме функция

$$g : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}; \quad g(x, y) = \frac{1}{2}(||x||^2 - ||y||^2),$$

$$g \in C^1, \quad g^{-1}([0, \infty)) = C, \quad g^{-1}(0) = \partial C.$$

Нека $z = (x, y) \in \overline{U}$.

$$\frac{d}{dt}g(z(t)) = \frac{\partial g}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial x}v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}v_2 = (x, v_1) - (y, v_2) > 0$$

за $z \in \partial C$, т.е. върху границата на C g расте и следователно няма решение с начално условие в C, което да напусне C, преди да е напуснало $\overline{U}$.

□

Продължаваме с доказателството на Теоремата. Нека $z(t)$ е решение в $C \bigcap \overline{U}$.

$$(v(z), z) = (\dot{z}, z) = \frac{1}{2}||z||^2 \geq^{\text{Л2(б)}} \mu||z||^2$$

$$\frac{\frac{d}{dt}||z||^2}{||z||^2} \geq 2\mu$$

Интегрирайки, получаваме $\ln ||z(t)||^2 \geq 2\mu t + \ln ||z(0)||^2$ или

$$||z(t)|| \geq e^{\mu t}||z(0)||.$$

И така, всяко решение с начално условие в $C \bigcap \overline{U}$ се отдалечава от началото. Ако решението не е дефинирано за всяко t, то се продължава поне до границите на компакта $C \bigcap \overline{U}$ и от споменатото по-горе напуска $\overline{U}$. Следователно $z = 0$ е неустойчиво.

■

Забележка. Във връзка с доказаните по-горе Теореми се поставя следната задача (задача на Раут - Хурвиц) – по даден полином да се установи дали неговите корени лежат в лявата полуравнина. Разработени са няколко алгоритъма, които обикновено се описват в курсовете по алгебра.

Случаят, когато линеаризираната система (3.15) има собствени числа върху имагинерната ос, е сложен. Да разгледаме системите

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \pm x^3 \\ \dot{y} = -x \end{array} \right. , \quad \text{с линеаризация в околност на } (0,0) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{array} \right.$$

За линеаризираната система равновесието $(0, 0)$ е от тип център (със собствени числа $\pm i$), докато за нелинейната система имаме съответно неустойчив (устойчив) фокус. Това се проверява лесно, като се премине например в полярни координати. Следователно изследването на устойчивостта в случая, когато собствените числа на линеаризираната система лежат върху имагинерната ос изисква разглеждането на нелинейните членове.

Да разгледаме един специален клас нелинейни системи, а именно консервативните $\ddot{x} = -gradU$, където $x \in V \subset \mathbb{R}^n, U \in C^2(V)$. Еквивалентно записваме

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -gradU. \end{array} \right.$$

Нека $(x_0, 0)$ е положение на равновесие, като $(x_0 : gradU(x_0) = 0)$ е критична точка за U. Това равновесие не може да бъде асимптотически устойчиво поради наличието на съотношение, което се запазва с времето, а именно интегралът на енергията $E = \frac{y^2}{2} + U(x) = e = const$. В механиката това съотношение носи името закон за запазване на пълната енергия. Величината $T = \frac{y^2}{2}$ се нарича кинетична енергия, а величината $U(x)$ се нарича потенциална енергия.

Теорема 5.3. *(Лагранж – Дирихле) Нека потенциалната енергия $U \in C^2(V)$ има строг минимум в x_0. Тогава положението на равновесие $(x_0, 0)$ е устойчиво.*

Доказателство. Тъй като не е ясно предварително какъв е знакът на константата e в интеграла $E = e$, го модифицираме по следния начин:

$$\overline{E}(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x) - U(x_0) = \overline{e}$$

Очевидно $\overline{E}(x_0, 0) = 0$ и тъй като x_0 е строг минимум, $\overline{E}(x, y) = \overline{e} > 0$ в някаква околност W на $(x_0, 0)$.

Да положим $z = (x, y), \quad z_0 = (x_0, 0)$. Нека $B_\epsilon(z_0) =: \{z \in W \quad | \quad ||z - z_0|| < \epsilon\}$ и $\alpha = \min_{z \in \partial B_\epsilon(z_0)} \overline{E}(z) > 0$.

Да означим с $W_1 =: \{z \in B_\epsilon(z_0) \quad | \quad \overline{E} < \alpha\}$. Тогава за решение $z(t, \overline{z})$ с начално условие $\overline{z} \in W_1$ е изпълнено $\overline{E}(z(t, \overline{z})) = \overline{E}(\overline{z}) < \alpha$. Следователно това решение не напуска $B_\epsilon(z_0)$ за $t \geq 0$ и $z_0 = (x_0, 0)$ е устойчиво.

■

Пример 1. Нека да изследваме устойчивостта на нулевото решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = 2x + 8\sin y \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{array} \right.$$

Веднага се вижда, че $(0, 0)$ наистина е особена точка (стационарно решение, положение на равновесие). Да означим с v_1 дясната страна на първото уравнение, а с v_2 дясната страна на второто уравнение.

Пример 2. Нека да изследваме устойчивостта на нулевото решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -2x - 3y + x^5 \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{array} \right.$$

В този случай, тъй като системата е полиномиална и се интересуваме само от нулевото решение, за да линеаризираме, просто трябва да махнем нелинейните членове. Тогава матрицата на линеаризираната система е

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собствените числа на тази матрица се определят от уравнението $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$. Отново формулите на Виет помагат да определим знаците на собствените числа – $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$, $\lambda_1 \lambda_2 = 3$. Собствените числа имат еднакви знаци и сумата им е отрицателна. Оттук следва, че те имат отрицателни реални части. Следователно от Теоремата на Ляпунов следва, че $(0, 0)$ е асимптотически устойчиво положение на равновесие.

Пример 3. Нека да изследваме в зависимост от $a \in \mathbb{R}$ устойчивостта на положенията на равновесие на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x + ay. \end{array}\right.$$

Да намерим първо особените точки.

$$\left|\begin{array}{l} y = 0 \\ x^3 - x + ay = 0. \end{array}\right.$$

Лесно се вижда, че решенията на горната система са $(0,0), (\pm 1, 0)$. Линеаризираме в околност на $(\pm 1, 0)$. Да означим $X = x \mp 1, Y = y$. Линеаризираната система приема вида

$$\left|\begin{array}{l} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = 2X + aY \end{array}\right. , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

Независимо от знака на a, едното собствено число има положителна реална част, следователно $(\pm 1, 0)$ е неустойчиво положение на равновесие за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Линеаризираме в околност на $(0,0)$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + ay \end{array}\right. , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином на матрицата A е $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, откъдето следва, че при $a > 0$ положението на равновесие $(0,0)$ е неустойчиво, при $a < 0$ положението на равновесие $(0,0)$ е асимптотически устойчиво, а при $a = 0$ собствените числа са с нулеви реални части и нищо не можем да кажем за устойчивостта на базата на теоремите на Ляпунов.

За щастие, при $a = 0$ системата е консервативна

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x \end{array}\right.$$

с потенциална енергия $U = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$. Веднага се вижда, че $x = 0$ е строг минимум за U и следователно по Теоремата на Лагранж – Дирихле положението на равновесие $(0,0)$ е устойчиво.

Задачи за самостоятелна работа

1) Изследвайте устойчивостта на решението $(0,0)$ на системата

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & 2xy - x + y \\ \dot{y} & = & 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{array}\right.$$

2) Изследвайте устойчивостта на решението $(0,0)$ на системата

$$\left|\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & e^{x+2y} - \cos(3x) \\ \dot{y} & = & \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{array}\right.$$

3) Изследвайте устойчивостта на решението $(0,0)$ на системата в зависимост от $a \in \mathbb{R}$

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} & = & x + y + xy. \end{array}\right.$$

4) Изследвайте устойчивостта на решението $(0,0)$ на системата в зависимост от $a \in \mathbb{R}$

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -4x + 5x^3 - x^5 + ay. \end{array}\right.$$

5) За кои стойности на a и b решението $(0,0)$ на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & \ln(e + ax) - e^{y} \\ \dot{y} & = & bx + \tan(y) \end{array}\right.$$

е асимптотически устойчиво?
6) За кои стойности на a и b решението $(0,0)$ на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & x + ay + y^2 \\ \dot{y} & = & bx - 3y - x^2 \end{array}\right.$$

е асимптотически устойчиво?
7) За кои стойности на a и b решението $(0,0)$ на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & y + \sin(x) \\ \dot{y} & = & ax + by \end{array}\right.$$

е асимптотически устойчиво?
8) Определете устойчиви ли са стационарните решения на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & y - x^2 - x \\ \dot{y} & = & 3x - x^2 - y. \end{array}\right.$$

9) Определете устойчиви ли са стационарните решения на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & \ln(1 - x + y^2) \\ \dot{y} & = & x - y - 2. \end{array}\right.$$

10) Определете устойчиви ли са стационарните решения на

$$\left|\begin{array}{lcc} \dot{x} & = & \tan(z - y) - 2x \\ \dot{y} & = & \sqrt{9 + 12x} - 3e^{y} \\ \dot{z} & = & -3y. \end{array}\right.$$

Приложение A

Сведения от Математическия анализ

В това приложение ще припомним някои понятия и факти от анализа, които използваме. Ще работим предимно в $\mathbb{R}^n$. Понякога, когато дефинициите изискват допълнителни понятия и конструкции, ние ще използваме съответните твърдения и теореми вместо дефинициите.

За всяко положително цяло n означаваме с $\mathbb{R}^n$ множеството от всички набори от n реални числа

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Наборът $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се нарича координати на елемента x. Елементите на $\mathbb{R}^n$ ще наричаме още вектори или точки.

Дефинираме събиране на вектори $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ и умножение на вектор с число $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Тези две операции превръщат $\mathbb{R}^n$ във векторно (линейно) пространство.

Ще определим още *скаларно произведение* с

$$x.y =< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Дефинираме *норма на вектор* $||x||$ със следните свойства:

1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \longleftrightarrow x = 0$;

2) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Има няколко начина, по които можем да определим норма в $\mathbb{R}^n$. Например

а) $||x|| = \sqrt{\sum x_i^2}$ – евклидова норма;

б) $||x||_1 = \max_i |x_i|$;

в) $||x||_2 = \sum |x_i|$.

Дефиниция А.1. *Две норми наричаме еквивалентни, ако съществува число $M > 0$, такова, че*

$$M^{-1}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1.$$

В $\mathbb{R}^n$ всички норми са еквивалентни (това е следствие от обща теорема за произволно крайно-мерно пространство). Следователно можем да използваме коя да е от горните норми.

Дефинираме още *разстояние* $\rho(x, y)$ между два вектора със следните свойства:

1) $\rho(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Например в $\mathbb{R}^n$ задаваме разстояние с

$$\rho(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2}.$$

Нека a е фиксиран вектор от $\mathbb{R}^n$. *Отворено кълбо* с радиус $r > 0$ и център a наричаме множеството

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \rho(x, a) < r\}$$

(съответно $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \rho(x, a) \leq r\}$ е затворено кълбо).

Примери. $(a - r, a + r)$ е отворено кълбо в $\mathbb{R}^1$, а $[a - r, a + r]$ е затворено.

Дефиниция А.2. *Едно множество $U \in \mathbb{R}^n$ е отворено, ако за всеки негов елемент x съществува $r > 0$ и кълбо $B(x, r) \subset U$.*

Примери. Отворените кълба са отворени множества. $\mathbb{R}^n$ е също отворено множество.

Отворена околност на едно непразно множество A се нарича всяко отворено множество U, съдържащо A.

По дефиниция *затворено множество* е допълнение на отворено множество.

Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме *свързано*, ако всеки две точки от него могат да се свържат с начупена линия, съдържаща се в самото множество.

Едно множество $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме *изпъкнало*, ако заедно с всеки две точки съдържа и съединяващата ги отсечка.

Ограничено множество $A \subset \mathbb{R}^n$ наричаме такова множество, което се съдържа в някое крайно кълбо $A \subset B(a, r), r < \infty$.

Едно множество $K \subset \mathbb{R}^n$ наричаме *компактно*, ако е ограничено и затворено.

В сила е следната

Теорема А.1. *(Вайерщрас) Ако функцията f е определена и непрекъсната върху компактно множество K, то тя достига върху K своя максимум M и своя минимум m, с други думи, за всяко $x \in K$ е изпълнено*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Освен функции, дефинирани върху множества в $\mathbb{R}^n$ $f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, ще разглеждаме още *вектор-функции* или *изображения* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Дефиниция A.3. *Казваме, че $f \in C^r(U), r \geq 1, u \subset \mathbb{R}^n$, ако съществуват всички производни до r-ти ред включително и тези производни са непрекъснати.*

Нека е зададено изображението $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Със символа f_* означаваме

$$f_*(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|x} .$$

Казва се, че f_* задава линейната част на изображението f. Матрицата от първите частни производни на компонентите на f носи името матрица на Якоби.

Намираме производните на вектори или матрици, чиито елементи са функции, като диференцираме всяка една от компонентите. Аналогично постъпваме при намиране на интеграл от вектор или матрица.

Накрая нека припомним някои факти, свързани с редици и редове от финкции и тяхната сходимост. Ще разгледаме нещата за редици и редове от функции. Твърденията без труд се пренасят за изображения.

Дефиниция A.4. *Нека $\{f_n\}, n = 1, 2, \dots$ е редица от функции, определени върху множеството $U \subset \mathbb{R}^n$, и редицата от числа $\{f_n(x)\}$ е сходяща за всяко $x \in U$. Тогава определяме функцията*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

В този случай казваме, че $\{f_n\}$ клони към граничната функция f поточково.

Аналогично, ако редът

$$\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

е сходящ при всяко $x \in U$, то определяме

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

и f се нарича сума на реда $\sum f_n(x)$.

Интересуваме се главно от въпроса, ако f_n са непрекъснати или диференцируеми, или интегруеми, то вярно ли е същото за граничната функция?

Известни са примери, в които това не е така. За да получим положителен резултат, ни е нужна нов вид сходимост.

Дефиниция А.5. *Казваме, че редицата от функции* $\{f_n\}, n = 1, 2, \dots$ *е равномерно сходяща върху множеството* U *към функцията* f, *ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува цяло* N, *че при* $n \geq N$ *имаме*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за всички $x \in U$.

Разбира се, ако една редица от функции клони равномерно върху U към f, то тя клони и поточково.

Казваме, че един ред $\sum f_n(x)$ е равномерно сходящ върху множеството U, ако редицата от частичните му суми $\{S_n(x)\}$, определена с

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),$$

е равномерно сходяща върху U. Следващият удобен признак за равномерна сходимост на редове принадлежи на Вайерщрас.

Теорема А.2. *Ако редът от функции* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *се мажорира със сходящ числов ред:*

$$|f_n(x)| < M_n,\ n = 1, 2, \dots, \quad x \in U, \quad \sum M_n < \infty,$$

то той е равномерно сходящ.

Едно от свойствата на равномерно сходящите редове, които използваме, се дава със следната

Теорема А.3. *Ако редът* $\sum f_i, f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *е сходящ и редът от производните* $\sum \frac{df_i}{dt}$ *е равномерно сходящ, то той клони към производната* $\frac{d}{dt} \sum f_i$.

Приложение Б

Сведения от Линейната алгебра

В това приложение ще припомним някои факти от линейната алгебра, които използваме в изложението.

1. Полиноми с реални коефициенти

Стандартно полиномите се записват като

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{2.1}$$

тук λ е променлива, $a_j \in \mathbb{R}$. Част от нашата дейност в основните глави на учебника е свързана с намирането на корените на полиноми или намирането на решенията на уравнението

$$f(\lambda) = 0. \tag{2.2}$$

Едно следствие от основната теорема на алгебрата е, че всеки полином с реални коефициенти има поне един комплексен корен. В частност, всеки полином с реални коефициенти от нечетна степен има поне един реален корен.

Казваме, че едно число λ_0 е прост (еднократен) корен на $f(\lambda) = 0$, ако

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda) \quad \text{и} \quad g(\lambda_0) \neq 0.$$

Еквивалентно, λ_0 е прост корен на $f(\lambda) = 0$, ако

$$f(\lambda_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'(\lambda_0) \neq 0.$$

Казваме, че λ_0 е r-кратен корен на $f(\lambda) = 0$, ако

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r g(\lambda) \quad \text{и} \quad g(\lambda_0) \neq 0.$$

Еквивалентно, λ_0 е r-кратен корен на $f(\lambda) = 0$, ако

$$f(\lambda_0) = f'(\lambda_0) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda_0) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(r)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Тъй като разглежданите полиноми са с реални коефициенти, то за тях е в сила следният факт: Ако $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ е комплексен корен на $f(\lambda) = 0$, то комплексно спрегнатото му число $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ е също корен на $f(\lambda) = 0$, при това със същата кратност, както λ_0.

Нека да припомним и формулите, свързани с квадратното уравнение

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Неговите корени се задават с изразите

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

В сила са и формулите на Виет, свързващи корените и коефициентите

$$\lambda_1\lambda_2 = a_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -a_1.$$

Формулите на Виет се обобщават по естествен начин за уравнения от произволна степен. В справочниците могат да се видят формулите на италианските математици Кардано, Тарталя, Ферара и др., изразяващи корените на уравнения от трета и четвърта степен като радикали от коефициентите. За пета и по-висока степен това е невъзможно в общия случай.

2. Линейно пространство, линейна зависимост и независимост, базис

Нека F е поле от скалари и V е непразно множество, за елементите на което са дефинирани сума $a + b, a, b \in V$ и умножение с елемент от полето $\lambda a, \lambda \in F, a \in V$. Искаме $a + b \in V$ и $\lambda a \in V$.

Дефиниция Б.1. *Казваме, че множеството V е линейно пространство, ако са изпълнени следните аксиоми (тук $a, b, c \in V, \lambda, \mu \in F$):*

1) $a + b = b + a$, *2)* $(a + b) + c = a + (b + c)$

3) $\exists 0 : a + 0 = 0 + a = a$, *4)* $\exists -a : a + (-a) = (-a) + a = 0$

5) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ *6)* $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ *8)* $1.a = a$.

Примери за линейни пространства са $\mathbb{R}^n$ и пръстенът от полиномите от степен, ненадминаваща n.

Нека V е линейно пространство и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ е крайна фамилия от елементи на V.

Дефиниция Б.2. *Елементите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ наричаме линейно зависими, ако съществуват скалари $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$, поне един от тях различен от нула, че да е изпълнено равенството*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0.$$

Дефиниция Б.3. *Елементите $a_1, a_2, \ldots, a_k$ наричаме линейно независими, ако от*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$$

следва, че

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Понятията линейна зависимост и независимост могат да се разширят и за безкрайни фамилии от елементи на линейно пространство.

Дефиниция Б.4. *Едно подмножество от елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на V наричаме базис, ако*

1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са линейно независими;

2) Всеки елемент от V се представя като линейна комбинация на $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Едно линейно пространство може да има повече от един базис.

Примери. Един възможен базис в $\mathbb{R}^n$ се дава с векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0)^T \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0)^T \\ &\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1)^T. \end{aligned}$$

Един базис на линейното пространство от полиноми с реални коефициенти от степен, ненадминаваща n, се дава от елементите $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Броят на елементите, образуващи базис в едно линейно пространство, дава неговата размерност. Например размерността на $\mathbb{R}^n$ е n, а размерността на линейното пространство от полиноми с реални коефициенти от степен, ненадминаваща n, е $n + 1$.

3. Матрици

Разглеждаме предимно квадратни матрици с реални коефициенти. Матриците се задават с таблица от числа

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

С E означаваме единичната матрица. Да припомним, че линейните оператори в някакъв конкретен базис се задават със своята матрица.

Матриците могат да се събират, умножават с число и помежду си. Ще отбележим, че последното умножение не е комутативно $AB \neq BA$.

Една важна числова характеристика на матриците е тяхната детерминанта $\det A$. Тя се пресмята просто в размерности 2 и 3. Матриците с ненулева детерминанта $\det A \neq 0$ се наричат *неособени*. Тогава съществува обратна матрица A^{-1} със свойството

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Две матрици A и B се наричат *подобни*, ако съществува неособена матрица S такава, че

$$A = SBS^{-1}.$$

По същество A и B са матрици на един линеен оператор, но в различни базиси, а S е матрицата на прехода от единия базис в другия.

Друга важна числова характеристика на една матрица е нейният ранг – $r(A)$. Ранг на матрица наричаме максималния брой нейни линейно независими редове или стълбове.

Собствени числа на матрицата A наричаме корените на характеристичното уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Собствен вектор v_j, отговарящ на собственото число λ_j, наричаме един ненулев вектор, който е решение на линейната система

$$Av_j = \lambda_j v_j.$$

Еквивалентно, ако означим $B_j = A - \lambda_j E$, то собствените вектори v_j се намират от системите

$$B_j v_j = 0.$$

По дефиниция норма на матрица наричаме числото

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||. \tag{2.4}$$

Тази норма е добре дефинирана, защото се дава от екстремум на непрекъсната функция върху компактно множество. По Теоремата на Вайерщрас (Теорема А.1) такъв супремум съществува и се достига за някой вектор x_0. Най-важното е, че $0 \leq ||A|| < \infty$.

Матричната норма има следните свойства:

(1) $||A|| = 0 \longleftrightarrow A = 0$ (2) $||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$

(3) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (4) $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

(5) $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Пример. Нека $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Да намерим нормата $||A||$.

От дефиницията $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$.

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

Намираме

$$||Ax|| = \sqrt{9x_1^2 + 4x_2^2}.$$

Тъй като $||x|| = 1$, то $x_1^2 + x_2^2 = 1$, откъдето

$$||Ax|| = \sqrt{9x_1^2 + 4 - 4x_1^2} = \sqrt{4 + 5x_1^2}.$$

Максималната стойност на x_1 е 1 и оттук

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sqrt{9} = 3.$$

В общия случай нормата на матрицата се пресмята чрез въвеждането на множител на Лагранж.

Библиография

[1] Арнольд В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1984.

[2] Арнольд В. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.

[3] Арнольд В., Ю. Ильяшенко. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техники, серия "Современные проблемы математики" , т. I., Москва, 1985.

[4] Байнов Д., П. Шопов, С. Христова. Методическо ръководство по обикновени диференциални уравнения. София, Издателство Наука и Изкуство, 1980.

[5] Генчев Т. Обикновени диференциални уравнения. София, Университетско издателство Св. Климент Охридски, 1999.

[6] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, Наука, 1976.

[7] Коддингтон Э., Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ, 1958.

[8] Живков А. Ръководство по диференциални уравнения. София, Демократични традиции – Деметра, 2003.

[9] Попиванов П., П. Китанов. Обикновени диференциални уравнения. Благоевград, 2000.

[10] Хорозов Е., Н. Никифоров, К. Караджов. Ръководство за упражнения по обикновени диференциални уравнения. София, Университетско издателство Св. Климент Охридски, 1984.

[11] Po-Fang Hsieh, Ya. Sibuya. Basis Theory of Ordinary Differential Equations. New York, Springer, 1999.

[12] Кострикин А., Ю. Манин. Линейная алгебра и геометрия, Москва, Издательство Московского Университета, 1980.