ДМ $\boxed{\text{Ганчев}}$

№: Множества. Основни операции в/у множества. Релации. Частични наредби. Релации на екв.

$\varphi(x)$ – свойство на x

$\{x \mid \varphi(x)\}$ пример $\{x \mid x \text{ – просто}\}$

$\{x \mid x \text{ – цяло четно}\}$

$\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ – дифер}\} = C^1(\mathbb{R})$

$R = \{x \mid x \notin x\}$

$\mathbb{Z} \in R$ $\quad \mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ множ. на целите числа не е цяло число

$\mathbb{R} \in R$ $\quad \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ множ на реал. числа не е реално число

$R \notin R \Rightarrow R \in R$ ↯ } парадокс на Ръсел

$R \in R \Rightarrow R \notin R$ ↯ } (бръснаря, лъжеца, всемогъщия господ)

$\Rightarrow R$ не е множество

$V = \{x \mid x = x\}$ – светът на всичко

... $\Rightarrow V$ не е множество

$\{x \mid \varphi(x)\}$ – клас, на обектите със свойство φ

Множествата са първични обекти (просто има някакви свойства)

Имат аксиоми

Основен предикат свързан с множества е принадлежността $\in$

Аксиоми:

0. (за съществуване) Съществува поне 1 множ.
1. (за обемност) 2 множ A и B са равни $\Leftrightarrow$ $\forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
2. (за отделянето) Ако $\varphi(x)$ е свойство на x и A е множ., то тогава $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ е множ.

Операцията сечение: $A \cap B \stackrel{def}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$

Тв: $A \cap B = B \cap A$ и $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Док: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ и $x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$

Нека F е клас от множ, т.е. $F = \{x \mid \varphi(x)\}$ за някое св-во φ. Тогава $\bigcap\limits_{A \in F} A = \left(\bigcap\limits_{\varphi(x)} A\right) =$

$= \{x \mid \forall A \in F\, (x \in A)\}$ е множ

// следваща аксиома

3. (за чифта) Ако A и B са множ, то $\{A, B\}$ е множ

Естествените числа:

$0 = \varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

$1 = \{0\} \qquad = \{\varnothing\}$

$2 = \{0, 1\} \qquad = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\} \qquad = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

$n+1 = \{0, \dots, n\}$

Наредена двойка: $(a, b) \overset{def}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$

Док. $\Leftarrow)$ очевидно

$\Rightarrow)$ Нека $(a, b) = (c, d)$ т.е.

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

Зад. $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

1 сл.) $a = b \quad (a, b) = \{\{a\}\}$ Оттук $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}\}$

$\Rightarrow \{c\} = \{c, d\}, \Rightarrow c = d$

$\Rightarrow \{\{a\}\} = (a, b) = (c, d) = \{\{c\}\} \Rightarrow a = c$

$\Rightarrow a = b = c = d$

2 сл.) $a \neq b$ Тогава $\{a\} \neq \{a, b\}$

$\Rightarrow (a, b)$ е двуелементно множ.

както и $\{a, b\}$, $(a, b) = (c, d) \Rightarrow (c, d)$ е двуел. множ.

$\Rightarrow c \neq d \Rightarrow \{c, d\}$ е двуел. мн.

и единствената ~~вез~~ възможност е $\{a\} = \{c\}$, $\{a, b\} = \{c, d\}$

$\Rightarrow a = c \Rightarrow b = d$

// следваща аксиома

4. (за обединението) Ако A е множ, то
$$\bigcup A = \left(\bigcup_{y\in A} y\right) \stackrel{def}{=} \{x \mid \exists y \in A\ (x \in y)\} \text{ е множ.}$$
$$A \cup B \stackrel{def}{=} \bigcup\{A, B\} = \{x \mid x\in A \text{ или } x \in B\}$$

Можем да въведем операция S: $S(x) = X \cup \{X\}$
Естествените числа се образуват чрез наследяване

$0 = \emptyset$

$1 = S(0) = \{0\}$

$2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

5. (за безкрайност) Съществ. множ. Y, т.че $\emptyset \in Y$ и ако $x \in Y$, то $S(x) \in Y$
6. (за множеството от подмножествата, powerset)
Ако A е множ $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ е множество

Основните операции са: $\cup$ на две множ, $\cap$ на две множ и $\setminus$ на две множ (разлика или $-$)
$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Основни св-ва:

1. $A \cup \emptyset = A$
   $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup A = A \cap A = A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A - B = A - (A \cap B)$
7. $A - \emptyset = A$
8. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
   $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
9. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Ще док.: $\boxed{5}$ $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\Rightarrow$) Нека $x \in A\cup(B\cap C)$

1. сл. $x\in A$ тогава x е елемент и на $A\cup B$ и на $A\cup C$

$\Rightarrow x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$ ✓

2 сл. $x\notin A \Rightarrow x\in B\cap C \Rightarrow x\in B, x\in C$

$\Rightarrow x\in(A\cup B), x\in(A\cup C)$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ✓ $\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (1)

$\Leftarrow$) $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

т.е. $x\in A\cup B$ ~~и~~ $A\cup C$

1. сл. $x\in A \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

2 сл. $x\notin A \Rightarrow x\in B$ и $x\in C \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C) \subseteq A\cup(B\cap C)$ (2)

(1) и (2) $\Rightarrow A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\boxed{9}$ $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow$) Нека $x\in A-(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B\cup C \Rightarrow x\notin B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in(A-B), x\in(A-C)$

$\Rightarrow A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C)$

$\Leftarrow$) Нека $x\in(A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow x\in A-B$ и $x\in A-C$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B$ и $x\in A, x\notin C \Rightarrow x\in A, x\notin B,C$

$\Rightarrow x\in A-(B\cup C) \Rightarrow A-(B\cup C)\supseteq(A-B)\cap(A-C)$

$\Rightarrow$ доказано

Декартово произведение: $A\times B \overset{def}{=} \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$ клас

$(A\times B = \{x \mid \exists a\in A, b\in B\ (x = \{\{a\}, \{a,b\}\})\}$

Да разгледаме подмножествата $P(P(A\cup B))$

За вс. $a\in A, b\in B$ $\{a\}, \{a,b\} \subseteq A\cup B$

т.е. $\{a\}, \{a,b\} \in P(A\cup B)$

вече е множ.

Тогава $\{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq P(A \cup B)$ и $\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} \in P(P(A \cup B))$

Така $A \times B = \{ x \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \in A, \exists b \in B \; (x = \{\{a\},\{a,b\}\}) \}$

Дефинираме декартово произв. на множ $A_1, A_2 \ldots A_n$ чрез $A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots \times A_n \overset{def}{=} (((A_1 \times A_2) \times A_3) \ldots) \times A_n$

Ел на $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ наричаме наредени n-орки

Отбелязваме $A_1 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i$ за $i \in \overline{1,n} \}$

В случай, че $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$

$A_1 \times \cdots \times A_n$ наричаме n-та степен на множ A ; A^n

A^n може да се дефинира и така, чрез следната индуктивна схема
$$\left| \begin{array}{l} A^1 = A \\ A^{n+1} = A^n \times A \end{array} \right.$$

Релация: Нека $A_1, \ldots, A_n$ са множ.

Всяко $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ наричаме n-нарна релация м/у $A_1, \ldots, A_n$. В случай, че $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, к. че R е n-нарна (n-мерна) релация в A (*)

Частични наредби: Нека A е множ. и R е бинарна релация в A (т.е. $R \subseteq A \times A$ или $R \subseteq A^2$)

К. че R е частична наредба ако:

1) R е рефлективна, т.е. $\forall a \in A \; ((a,a) \in R)$
2) R е антисиметрична, т.е. $\forall a, b \in A \; ((a,b) \in R$ и $(b,a) \in R \Rightarrow a = b)$
3) R е транзитивна, т.е. $\forall a, b, c \in A$ $((a,b) \in R$ и $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R)$

(*) за бинарна релация $(a,b) \in R$ пишем aRb

1. $\forall a \in A \; (aRa)$
2. $\forall a, b \in A \; (aRb \;\&\; bRa \Rightarrow a = b)$
3. $\forall a, b, c \in A \; (aRb \;\&\; bRc \Rightarrow aRc)$

Стандартно частичните наредби се пише с $\leq$

Пример 1. $(\mathbb{N}, \leq)$ $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$a \leq b \overset{def}{\iff} a \leq b$

$a \leq b \iff b = a + c$ за някое $c \in \mathbb{N}$

2. $(\mathbb{Z}, \leq)$
3. $(\mathbb{R}, \leq)$
4. $(P(A), \subseteq)$ $\quad A \subseteq A$

$A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$A \subseteq B \quad B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

В случай, че A е множ., R е релация за частична наредба в A, казваме че (A, R) е частично наредено множ. (ч.н.м.)

Частични наредби

ч.н. е бинарна релация R в A, т.че:

1) aRa, за $\forall a \in A$
2) $aRb,\ bRa \Rightarrow a = b,\ \forall a,b \in A$
3) $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc,\ \forall a,b,c \in A$

Ако R е ч.н. в A, к.че (A,R) = ч.н.м

Примери 1) $(\mathbb{N}, \leq)$; 2) $(\mathbb{Z}, \leq)$ 3) $(\mathbb{Q}, \leq)$ 4) $(\mathbb{R}, \leq)$

5) $(P(x), \subseteq)$

$A \subseteq A$ $\quad A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ $\quad A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

6) $(\mathbb{N}, /)$ - делимост, $a/b \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists q \in \mathbb{N}\ (b = aq)$

a/a $\quad a/b,\ b/a \Rightarrow |a| = |b|$ $\quad a/b,\ b/c \Rightarrow a/c$

В пример от 1) до 4) е в сила, че за всеки 2 ел. a, b $a \leq b$ или $b \leq a$. Това не е вярно категорично в 6) и в 5) при X поне двуелементно

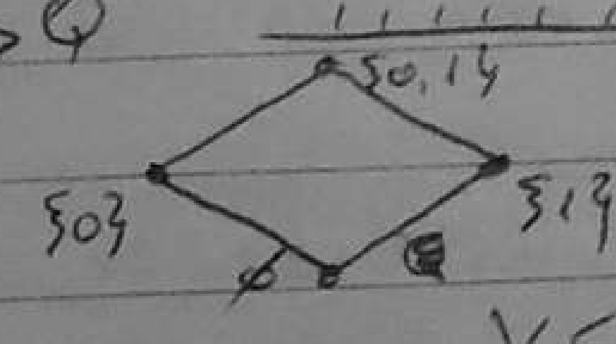
Действително 6) $3 \nmid 2$ и $2 \nmid 3$

5) Нека $u, v \in X$ и $u \neq v$

тогава $\{u\}$ и $\{v\} \subseteq P(x)$, но $\{u\} \nsubseteq \{v\}$ и $\{v\} \nsubseteq \{u\}$

Опр. Нека $(A, \leq)$ е частично наредено множество (ч.н.м), к.че е линейно (пълно) множество, ако $a \leq b$ или $b \leq a$ $\forall a, b \in A, B$

$(P(\{0,1\}), \subseteq)$



Опр. Нека $(A, \leq)$ е ч.н.м. и $X \subseteq A$. Нека $m \in X$. К.че

(1) m е най-малък ел. от X, ако за $\forall x \in X\ (m \leq x)$
(2) m е минимален ел. от X, ако за $\forall x \in X\ (x \leq m \Rightarrow x = m)$
(3) m е най-голям ел. от X, ако $\forall x \in X\ (x \leq m)$
(4) m е максимален ел. от X, ако $\forall x \in X\ (m \leq x \Rightarrow x = m)$

Пример: 1) 0 е най-малък ел. в $(\mathbb{N}, \leq)$

2) в $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ няма нито най-малък, нито НГ, нито min, max

3) в $(\mathbb{N}, /)$ 0 е НГ, $a/0$ за $\forall a \in \mathbb{N}$
1 е НМ, $1/a$

в $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, /)$ има ∞ min ел. - простите числа

Опр. К.че $(A, \leq)$ е добра наредба, ако $\leq$ е ЧН, т.че $\forall$ непразно $X \subseteq A$ има НМ ел.

Пример: $(\mathbb{N}, \leq)$

Св-во: Ако $(A, \leq)$ е добра наредба $\Rightarrow$ е лин. наредба

Док: Нека $a, b \in A$. Т.к. $(A, \leq)$ е добре наредено
множ. $\{a, b\} \neq \emptyset$ и $\{a, b\} \subseteq A$ има НМ ел.
в случай, че той е a, имаме $a \leq b$
в случай, че е b, имаме $b \leq a$

Опр. Нека $(A, \leq)$ е ч.н.м. К.че $X \subseteq A$ е верига, ако X е лин. наредено по отн. на $\leq$, т.е за $\forall a, b \in X$ $a \leq b$ или $b \leq a$ (Заб: $\emptyset$ е верига)

Лема на Цорн: ($\Leftrightarrow$ аксиомата за избора)
Нека $(A, \leq)$ е ч.н.м., такова че $\forall$ верига в A има горна граница в A (x е горна гр. на X, ако $\forall y \in X$, $y \leq x$)
Тогава в A има max ел.

Теорема Тайхмюлер-Тюки: Нека $A \subseteq P(x)$ е с краен х-р т.е. за $\forall y \in P(x)$ е в сила $y \in A \Leftrightarrow$ за $\forall$ крайно подмножество $M \subseteq y$, $M \in A$. Тогава, ако $A \neq \emptyset$, то в A има max ел. по отн. на $\subseteq$

Пример: V - крайно простр. $A = \{B \subseteq V \mid B$ е лин. незав.$\}$

Док: $U \in A$ $\quad U \subseteq V$ $\qquad U \cup \{v\} = V$
Нека $\ell(U) \neq V$ $\quad v \in V$ $v \notin \ell(U)$ $\quad \cancel{U \cup \{v\} = V}$
$\Rightarrow U \in A$ и е max $\Rightarrow \lightning \Rightarrow \ell(U) = V$

Релации на еквивалентност

Нека R е бинарна релация в A. К.че R е релация на екв ако
1) aRa за $\forall a \in A$
⚠ 2) $aRb \Rightarrow bRa$
3) aRb, $bRc \Rightarrow aRc$

Пример
1) $=$ във всяко множ.
2) за $\forall n \geq 1$ ($n \geq 2$) $\equiv \pmod{n}$ в $\mathbb{Z}$
деф с $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b)$
3) G - група, $H \leq G$, релацията $\equiv \pmod{H}$
$g_1 \equiv g_2 \pmod{H} \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$ (т.е. $g_1 H = g_2 H$)

Опр. Нека $\sim$ е релация на екв. в A и $a \in A$

Множ. $[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}$ наричаме клас на екв. (по $\sim$) породен от A

Св-ва: (1) $a \in [a]_\sim$

(2) $a \sim b \iff [a]_\sim = [b]_\sim$

(3) $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

Док: (1) Т.к. $a \sim a$ $a \in [a]_\sim$

(2) $\Rightarrow$) Нека $a \sim b$. 1) $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$ Нека $x \in [a]_\sim$

Тогава $a \sim x$. От $a \sim b$ следва, че $b \sim a$ откъдето, заради транзитивност $\Rightarrow b \sim x$ т.е. $x \in [b]_\sim$

2) аналогично на 1)

$\Leftarrow$) Нека $[a]_\sim = [b]_\sim$ Оттук и $b \in [b]_\sim$

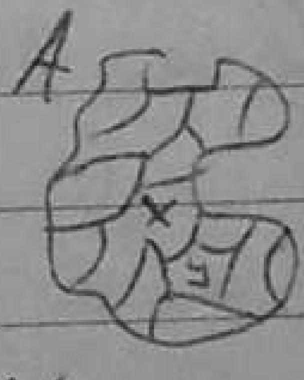
$\Rightarrow b \in [a]_\sim \Rightarrow a \sim b$

(3) Нека $x \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$ Тогава $a \sim x$ и $b \sim x$

от симетричност и транзитивност $\Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

Опр. Нека A е множ. и $V \subseteq P(A)$. К.че V е разбиване на A, ако $A = \bigcup V$ и за $\forall X, Y \in V$ е в сила $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$

Вс. рел. на екв. $\sim$ в A задава разбиване на A на класове на екв. Това разбиване наричаме <u>факторизация</u> на A по $\sim$ и бележим с $A/\sim$. По-точно $A/\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$



Обратното: вс. разбиване V на A поражда рел. на екв. $\sim_V$

чрез $a \sim_V b \iff \exists Y \in V\ (a \in Y$ и $b \in Y)$

<u>Пример:</u> 1) Класове на екв. в $\mathbb{Z}$ по рел. $\equiv (\mathrm{mod}\ n)$ се наричат класове остатъци по модул n

$\boxed{\mathbb{Z}_n}$ $\mathbb{Z}/\equiv(\mathrm{mod}\ n) = \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

$\boxed{\text{групи}}$ 2) Кл. на екв. в група G по рел. $\equiv(\mathrm{mod}\ H)$ се наричат леви съседни класове ~~се нари~~ по H

$\boxed{\nearrow}$ 3) Кл. на екв. по рел. екв. на насочени отсечки се наричат свободни вектори

$\boxed{\mathbb{Q}}$ 4) В множ. $V = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

въвеждаме рел. $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \overset{деф}{\iff} a_1 b_2 = a_2 b_1$

(1) $(a, b) \sim (a, b)$? $ab = ba$

(2) $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow (a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$: $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Rightarrow a_2 b_1 = a_1 b_2 \Rightarrow (a_2, b_2) \sim (a_1, b_1)$

$V/\sim = \mathbb{Q}$

(3) $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$, $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3) \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$: $\left.\begin{array}{l}(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \\ (a_2, b_2) \sim (a_3, b_3) \Rightarrow a_2 b_3 = a_3 b_2\end{array}\right) \Rightarrow a_1 b_3 = a_3 b_1$

№2 Функции. Равномерност на множ. Изброими и неизбр. множ

Опр. Нека f е бинарна рел. ~~на мн~~ м/у A и B т.е. $f \subseteq A \times B$. К.че f е функция ~~на~~ от A в B, ако

(1) $\forall a \in A \ \exists b \in B \ (afb)$ тоталност

(2) $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B \ (afb_1, afb_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$ еднозначност

(3) Множ на A се нарича деф. множ. на f. Бележим $A = Dom(f)$.

Ако afb, казваме, че b е образ на a, a е първообраз на b записваме $f(a) = b$

Заб: (1) и (2) можем да изкажем като: $\forall$ ел $a \in A$ съществува $b \in B$ т.г. $f(a) = b$

Ще записваме $f: A \to B$

Композиция на функции Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Тогава дефинираме $g \circ f: A \to C$ чрез $(g \circ f)(a) = g(f(a))$
(g след f)

Ако A е мн. id_A означаваме $id_A: A \to A$ деф с $id_A(a) = a$

Св-ва: Нека $f: A \to B$ $g: B \to C$ $h: C \to D$

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(2) $f \circ id_A = id_B \circ f = f$

Док. (1) Имаме, че $g \circ f: A \to C$, а $h \circ g: B \to D$ и следователно както $h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f : A \to D$

Нека $a \in A$. Имаме $h\circ(g\circ f)(a) = h \circ (g \circ f(a)) = h \circ (g(f(a)))$

$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h(g(f(a)))$

Следователно за $\forall a$ $h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) = h(g(f(a))) \Rightarrow$ функциите съвпадат

(2) Имаме $f \circ id_A : A \to B$ $id_B \circ f : A \to B$

Нека $a \in A$ Тогава $f \circ id_A(a) = f(id_A(a)) = f(a)$

$id_B \circ f(a) = id_B(f(a)) = f(a)$

Опр. Нека $f: A \to B$ и нека $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Дефинираме $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$, $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$. $f(X)$ е образът на множ. X, а $f^{-1}(Y)$ е първообразът на X. Множ. $f(A) = f(Dom f) = Range f$ наричаме област на f

Св-ва: Нека $f: A \to B$

(1) $X \subseteq Y \subseteq A \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$

(2) $X \subseteq Y \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

(3) $X \subseteq A \Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$

(4) $X \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(X)) \subseteq X$

15. 10. 2014 Инекция. Сюрекция. Биекция. Обратна фун.

(...) 15 мин

Опр. К, че $f: A \to B$ е обратимо, ако същ. $g: B \to A$ т.че $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$

Св-во: Ако $f: A \to B$ е обратимо, то f има единствен обр. фун.

Док Нека g', g'' са обратни на f

$$g' = g' \circ id_B = g' \circ (f \circ g'') = (g' \circ f) \circ g'' = id_B \circ g'' = g''$$

Единствената обратна фун. на f (ако същ. такава) ще бележим с f^{-1}. Ясно е, че f^{-1} е обратима и $(f^{-1})^{-1} = f$

Тв: Нека $f: A \to B$. Тогава f е обратима $\Leftrightarrow$ биекция

Док $\Rightarrow$) Нека f е обратимо <u>(1) f е инекция</u>:

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $(x_1, x_2 \in A)$ Тогава

$$x_1 = id_A(x_1) = f^{-1} \circ f(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = f^{-1} \circ f(x_2) = $$
$$= id_A(x_2) = x_2$$

<u>(2) сюрекция</u>: Нека $y \in B$: Нека разгл. $x = f^{-1}(y) \in A$ имаме $f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = id_B(y) = y$

$\Leftarrow$) Нека f е биекция. Да разгл. $g: B \to A$, действащо правилото $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ за вс. $y \in B$ $x \in A$

Коректност: <u>(1) g е тотално</u>: Нека $y \in B$, т.к. f е сюрекция $y = f(x)$ за някои $x \in A$. Тогава $g(y) = x$

<u>(2) g е еднозначно</u>: Нека $y \in B$, $x_1, x_2 \in A$ и $g(y) = x_1$, $g(y) = x_2$

Това означава, че $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y$ откъдето $f(x_1) = f(x_2)$

От инективността на $f \Rightarrow x_1 = x_2$

g - обратна на f: (1) Нека вземем едно $x \in A$ и нека $f(x) = y$, тогава

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x \Rightarrow g \circ f = id_A$

(2) Нека $y \in B$ и нека $g(y) = x$, (тогава $f(x) = y$)

$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ g = id_B$

Равномощни множества

Лема: Нека $B \subseteq A$ и $f: A \to B$ е инекция. Тогава $\exists$ биекция $g: A \to B$

Д-во: Да разгледаме редиците $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ и $B_0, \ldots, B_n, \ldots$ деф. чрез

$A_0 = A$, $A_{n+1} = f(A_n)$ и $B_0 = B$, $B_{n+1} = f(B_n)$

Тъй като $A \supseteq B \supseteq f(A) = A_1$, имаме $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq B_n \supseteq \ldots$

Да разгледаме $g: A \to B$, деф. с: $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_n \setminus B_n \text{, за някое } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$

g действително е изобр. от A в B, т.к. в случай, че $g(x) = x$, то $x \notin A_0 \setminus B_0$, т.е. $x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in B$.

1) **g е инекция:** Нека $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 \neq x_2$. Ще разгл. 4 случая:

а) $x_1 \in A_n \setminus B_n$, $x_2 \in A_m \setminus B_m$, за някои $m, n \in \mathbb{N}$. Тогава $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$

б) $x_1 \in A_n \setminus B_n$, за някое n, но $x_2 \notin A_m \setminus B_m$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. Тогава $g(x_1) = f(x_1)$ и $g(x_2) = x_2$.

Т.к. $x_1 \in A_n$ и $x_1 \notin B_n$, $f(x_1) \in f(A_n) = A_{n+1}$ и $f(x_1) \notin f(B_n) = B_{n+1}$:

Ако допуснем, че $f(x_1) \in f(B_n)$, то $f(x_1) = y = f(x')$, за някое $x' \in B_n$. Но f е инекция $\Rightarrow x_1 = x'$ ↯ $\Rightarrow f(x_1) \in A_{n+1} \setminus B_{n+1}$. Оттук $g(x_1) = f(x_1) \neq x_2 = g(x_2)$

в) $x_1 \notin A_n \setminus B_n$, за $\forall n \in \mathbb{N}$, но $x_2 \in A_m \setminus B_m$, за някое m: Аналогично.

г) $x_1 \notin A_n \setminus B_n$, $x_2 \in A_m \setminus B_m$, за $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Тогава $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$

$\Rightarrow g$ е инекция.

2) **g е сюрекция:** Нека $y \in B$. Ясно е, че $y \notin A_0 \setminus B_0$ ($y \in B = B_0$)

2.1.) $y \in A_{n+1} \setminus B_{n+1}$ за някое $n \in \mathbb{N}$, т.е $y \in f(A_n)$ и $y \notin f(B_n)$. Тогава $\exists x \in A_n : y = f(x)$

При това $x \notin B_n$, т.к в противен случай $y = f(x) \in B_{n+1}$. Тогава $x \in A_n \setminus B_n$ и $g(x) = f(x) = y$

2.2.) $y \notin A_n \setminus B_n$, за $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогава $g(y) = y$.

Теорема (К.Ш.-Б): Нека $B \subseteq A$ и $f: A \to C$ $g: C \to A$ са инекции. Тогава $\exists$ биекция $h: A \to C$

Д-во: Нека пол. $B = g(C)$. Тогава $B \subseteq A$ и $g: C \to B$ е биекция. Изобр. $g \circ f: A \to B$ също е инекция. Тогава съгласно лемата $\exists$ биекция $\varphi: A \to B$. Тогава $g^{-1} \circ \varphi: A \to C$ е биекция.

Т-ма: Всеки две мн. са сравними по мощност.

Д-во: Нека A и B са две мн. Нека $F = \{ f \mid \exists A' \subseteq A, B' \subseteq B$ и $f: A' \to B'$ биекция$\}$

F е с краен характер: Нека $f \in F$ и $g \subseteq f$ ($f \subseteq A \times B$) и g е крайно.

Нека $A' = \{ x \mid \exists y : \underbrace{(x,y) \in g}_{g(x)=y} \}$, $B' = \{ y \mid \exists x : \underbrace{(x,y) \in g}_{g(x)=y} \}$. Тогава $g : A' \to B'$ биекция

$\Rightarrow g \in F$.

Обратно: Нека f е т.че за $\forall$ кр. $g \subseteq f$, $g \in F$. ~~...~~
$f : A' \to B'$.

1) **f е инекция:** Нека $x_1, x_2 \in A'$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Тогава

$g = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\} \subseteq f \Rightarrow g \in F$, т.е. g е биекция. В частност $y_1 \neq y_2$

2) **f е сюрекция:** По деф. $f(A') = B'$. Тогава по ТТ в F има мах ел.

g, $g : A' \to B'$ биекция, за някое $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$

Да доп., че $A' \neq A$ и $B' \neq B$ и $x \in A \setminus A'$, $y \in B \setminus B'$. Тогава $h = g \cup \{(x,y)\} \in F$ и

$g \subsetneq h$ ↯ $\Rightarrow A' = A$, $B' = B$

Ако $A' = A$ $g : A \to B' \subseteq B$ е инекция

$B' = B$ $g^{-1} : B \to A$ инекция.

Изброими и неизброими множества

Опр. Ще казваме, че мн. A е безкрайно, ако A не е крайно.

Опр. Ще к., че A е изброимо ($\mathrm{Card}\, A = \omega$), ако $\|A\| = \|\mathbb{N}\|$. (В такъв случай A е безкр.)

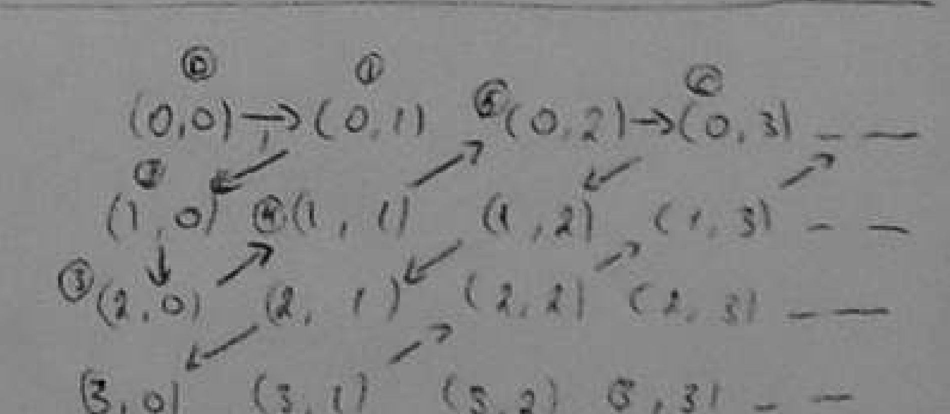
Опр. Ще к., че A е неизброимо, ако A е безкр. $\|A\| \neq \|\mathbb{N}\|$

Пр.: 1) $\mathbb{N}$; 2) $2\mathbb{N} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$: $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ деф. с $f(x) = 2x$ е биекция

3) $\mathbb{Z}$: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ деф. с $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x\text{-четно} \\ -\frac{x+1}{2}, & x\text{-нечетно} \end{cases}$

биекция

4) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ деф. с $f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$ биекция



5) $\mathbb{Q}$ (Д.Р.)

Опр. Нека A и B са мн. С A^B означаваме мн. $A^B = \{ f \mid f : B \to A \}$

Елементите на $A^{\mathbb{N}}$ наричаме безкр. редици от ел. на A.

Елементите на 2^A наричаме характеристични функции на подмн. на A.

Същ. естествено съотв. м/у 2^A и $P(A)$: Ако $B \subseteq A$ с χ_B озн. функция $\chi_B : A \to \{0,1\}$

$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$

Обратно, ако $f \in 2^A$, можем да разгл. $B_f = \{ x \in A \mid f(x) = 1 \}$
Тогава $\chi_{B_f} = f$.

Дм - 1

16.10.2014г.

Пр.: 1) $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, 1 \le i \le n\} = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid a_i \in A, 0 \le i \le n-1\}$ съответно

$A^n = A^{\{0, \ldots, n-1\}} = \{f \mid f : \{0, \ldots, n-1\} \to A\}$

2) $F^{n \times n} = \{f \mid f : n \times n \to F\}$

$n \times n = \{(0,0), (0,1), \ldots, (0, n-1),$

$\ldots\ldots\ldots$

$(n-1, 0), \ldots\ldots, (n-1, n-1)\}$

Т-ма: $2^{\mathbb{N}}$ е неизброимо.

Д-во: Т.к. $\mathbb{N} \in F(\mathbb{N})$, $2^{\mathbb{N}}$ е безкр. Да доп., че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо и $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ биекция

Имаме: $f(0) \in 2^{\mathbb{N}}$ $\quad f(0) = a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, \ldots$ $\quad$ където $a_{ij} \in \{0,1\}$ за $\forall i,j \in \mathbb{N}$

$\ldots\ldots\ldots$

$f(n) = a_{n0}, \ldots, a_{nn}, \ldots$

Да разгл. редицата $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ деф. с ~~[illegible]~~ $a_i = 1 - a_{ii}$ и да я озн. с a. Тогава $a \in 2^{\mathbb{N}} \Rightarrow a = f(k)$ за някое $k \in \mathbb{N}$ ($\exists$ сюрекция). Тогава $1 - a_k = a_k = a_{kk}$ ↯ $\Rightarrow \nexists$ биекция м/у $2^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}$.

(Диагонален метод на Кантор)

ДМ - Л

23. 10. 2014г.

Графи и дървета

Опр. Под неориентиран прост граф (или граф) ще разбираме наредена двойка $G = (V, E)$, където $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V$ и $v_1 \neq v_2\}$. Ел. на V наричаме върхове, а ел. на E - ребра на G. Ако $e = \{v_1, v_2\} \in E$ ще казваме, че v_1 и v_2 са краища (или начало и край) на e.

Пр.:

Опр. Под ориентиран граф ще разбираме нар. двойка $G = (V, E)$, където $E \subseteq V \times V$. Ел. на V нар. върхове, а ел. на E - ребра на G. Ако $e = (v_1, v_2) \in E$ и., че v_1 е начало на e, v_2 - край на e.

Пр.: 1) $G = (\{1\}, \emptyset)$ •1 2)  $G = (\{1,2,3\}, \{(1,2),(2,1),(2,3),(2,2)\})$

Опр. Под мултиграф ще разбираме наредена четворка $G = (V, E, \pi_1, \pi_2)$, където $\pi_1, \pi_2 : E \to V$. Ел. на V - върхове, ел. на E - ребра на G.

Ако $e \in E$, $\pi_1(e)$ - начало, $\pi_2(e)$ - край на реброто e.

Пр.: 1)  $G = (\{1,2\}, \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}, \pi_1, \pi_2)$, където $\pi_1, \pi_2 : E \to V$

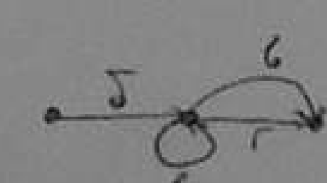
$\pi_1(\varepsilon_1) = 2$ $\quad \pi_2(\varepsilon_1) = 1$

$\pi_1(\varepsilon_2) = 1$ $\quad \pi_2(\varepsilon_2) = 2$

$\pi_1(\varepsilon_3) = 1$ $\quad \pi_2(\varepsilon_3) = 2$

Опр. Под етикетиран мултиграф (с етикети от A) разбираме наредена петорка $(V, E, \pi_1, \pi_2, \alpha)$, където (V, E, π_1, π_2) е мултиграф, а $\alpha : E \to A$.

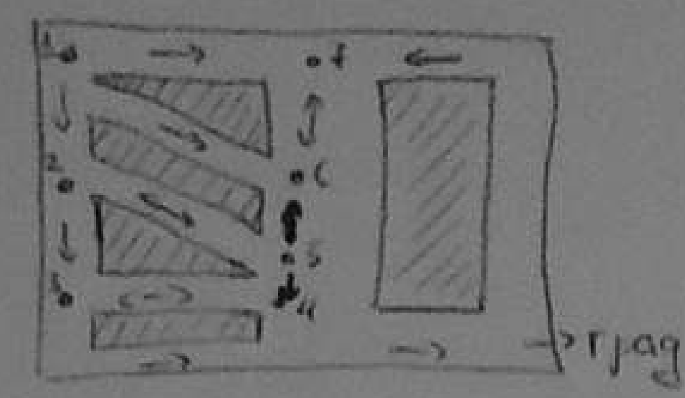
Ако $e \in E$, $\alpha(e)$ наричаме етикет на e.

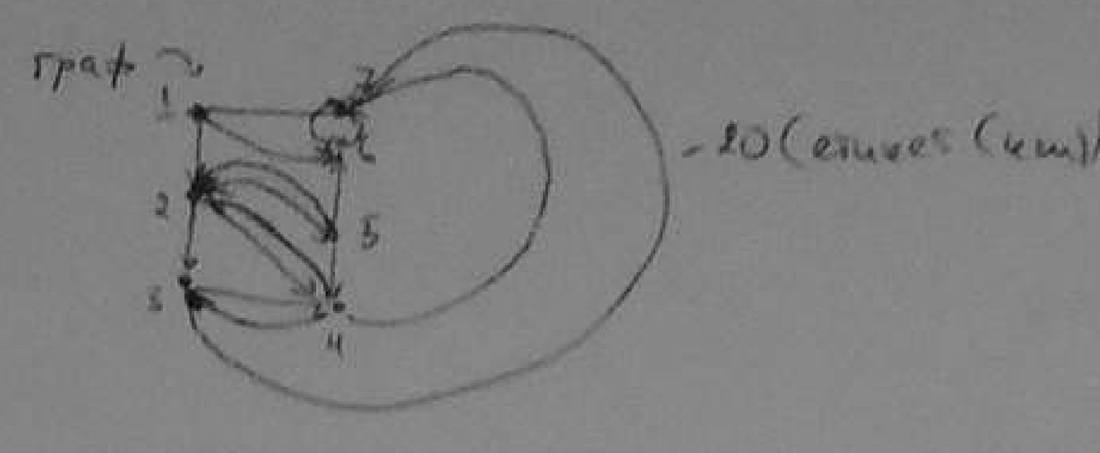
 

В случай, че етикетиращата функция α е такава, че за $\forall e_1, e_2$, ако $\pi_1(e_1) = \pi_1(e_2)$ (имат общо начало) и $\pi_2(e_1) = \pi_2(e_2)$ (общ край) и $e_1 \neq e_2 \Rightarrow \alpha(e_1) \neq \alpha(e_2)$, можем да опишем графа използвайки само неговите върхове и множ. $\Delta = \{(v_1, a, v_2)\}$, където $\pi_1(e) = v_1$, $\pi_2(e) = v_2$, $\alpha(e) = a$, за някое $e \in E$

Двойките $G = (V, \Delta)$, където $\Delta \subseteq V \times A \times V$ за някое мн. A ще наричаме отново етикетирани мултиграфи.

Пр.:





Опр. Редица от вида $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ $(n \geq 0)$, където $v_0, \dots, v_n$ - върхове, $e_1, \dots, e_n$ - ребра в граф, такива че за $1 \leq i \leq n$, v_{i-1} - начало, v_i - край на e_i, ще наричаме път с начало v_0, край - v_n и дължина n.

Вариации: 1) За неориент. и ориент. граф: $v_0, \dots, v_n$, такива че за $0 \leq i \leq n-1$ има ребро с начало v_i и край v_{i+1}

2) За ориент. граф и мултиграф (за път с дължина $n \geq 1$): $e_1, \dots, e_n$, т.че за $1 \leq i \leq n-1$ краят на e_i е начало на e_{i+1}

3) За графи от вида $G = (V, \Delta)$: $v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n$, т.че за $0 \leq i \leq n-1$, $(v_i, a_{i-1}, v_{i+1}) \in \Delta$

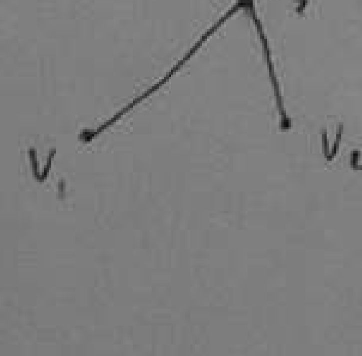
Св-ва: Пътищата ~~от~~ ~~тоz~~ с начало връх v_0, можем да опишем чрез следното индуктивно описание:
1) v_0 е път с начало v_0, край v_0 и дължина 0.
2) Ако Π е път с нач. v_0, край v', дълж. n и e е ребро с нач. v' и край v'', то Π, e, v'' е път с нач. v_0, край v'' и дълж. $n+1$

3) Ако $v_0, e, v_1, \dots, e_n, v_n$ е път, то $v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j$ е път за $\forall i, j \in [0, n]$

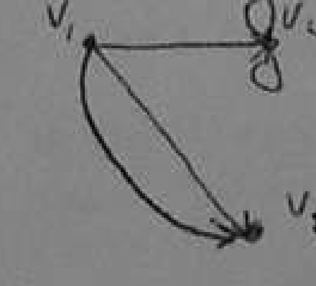
4) Ако ! е път, $v_i', e_{i+1}', v_{i+1}', \dots, e_j', v_j'$ е път и $v_n = v_0'$, то $v_i, e_{i+1}, \dots, v_i', e_{i+1}', \dots, e_j', v_j'$ е път.

Опр. Нека G е граф с n върха: $v_1, \dots, v_n$. Матрица на инцидентност на G, ще наричаме $A = (a_{ij}) \in M_n$, където a_{ij} е бр. на ребрата в G с нач. v_i и край v_j

Заб. Ако G е неориент., то A е с коеф. 0 и 1 и A е симетр.



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Теорема: Нека G е граф с върхове $v_1, \dots, v_n$ и матрица на инцидентност A. Тогава за $\forall k \geq 0$, ij-тият ел. на A^k е равен на броя на разл. пътища с нач. v_i и край v_j и дълж. k.

Д-во: Индукция по k: 1) За $k \leq 1$ твърдението е очевидно.

2) Нека сега тв. е вярно за k, т.е. нека $k > 1$ е т.ч., че ij-тият ел. на A^k е равен на бр. на пътищата с нач. v_i, край v_j и дълж. k. Нека $A^k = (b_{ij})$ и $A^{k+1} = (c_{ij})$. Тогава $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} b_{is} a_{sj} = b_{i1} a_{1j} + \dots + b_{in} a_{nj}$

Пътищата с нач. v_i, край v_j и дълж. $k+1$ можем да разделим на n непресичащи се групи $P_1, \dots, P_n$, където P_i са $\forall$ пътища с нач. v_i, край v_j и дължина $k+1$ и предпоследен връх v_s. Да разгледаме P_s за някое $1 \leq s \leq n$.
Вс. път от P_s е еднозначно образуван от път с нач. v_i, край v_s и дълж. k и ребро с нач. v_s и край v_j. Съгласно индукц. предпол. вс. пътища с нач. v_i и край v_s и дълж. k са b_{is}. Оттук и деф. $A \Rightarrow P_s$ има $b_{is} a_{sj}$
$\Rightarrow$ бр. на пътищата с начало v_i, край v_j и дълж. $k+1$ е точно $b_{i1} a_{1j} + \dots + b_{in} a_{nj}$

Опр. Ще к. че път $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ е прост, ако $v_i \neq v_j$ за $\forall i, j \in [1, n]$, $i < j$

Лема: Нека v' и v'' са разл. върхове. Тогава, ако $\exists$ път с нач. v' и край v'', то $\exists$ прост път с нач. v' и край v''.

Д-во. Нека $L = \{n \mid \exists$ път с дълж. n, нач. v', кр. $v''\}$. Съгласно усл. на лемата $L \neq \emptyset$.

(1) $v' = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v''$ е път. Твърдим, че (1) е прост път. Да доп., че (1) не е прост. Тогава $v_i = v_j$ за някое $0 \leq i < j \leq n$. Тогава $v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i$ е път с нач. $v_0 = v'$, кр. $v_n = v''$ и дълж. $n - (j - i) < n$ ↯

Опр. К., че един граф е свързан, ако за $\forall$ два негови върха v' и v'' $\exists$ път с нач. v', кр. v''.

Теорема: Нека G е граф с върхове $v_1, \dots, v_n$ и матр. на инц. A. Тогава

G е свързан $\Leftrightarrow$ в матр. $A^0 + A^1 + \dots + A^{n-1}$ няма нулеви ел.

Д-во: Нека $B = A^0 + \dots + A^{n-1}$. Тогава b_{ij} елем. за B е равен на бр. на разл. пътища с нач. v_i и кр. v_j и дължина най-много $n-1$.

$\Leftarrow$) очевидна

$\Rightarrow$) Нека G е свързан и нека разгледаме два върха на G, да речем v_i и v_j. Нека $v_i = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = v_j$ е прост път с нач. v_i и кр. v_j (такъв има съгласно лемата). Тогава върховете $v_0, \dots, v_k$ са разл. и $k \le n-1 \Rightarrow b_{ij} \neq 0$.

Дървета: Оттук до края на темата граф ще озн. неор. прост граф.

Опр. Нека G е граф и v е връх в G. С $deg(v)$ (степен на v) ще бележим бр. на ребрата инцидентни с v.

Теорема (ф-ла на Ойлер): Нека G е граф с n върха и m ребра и нека върховете му са $v_1, \dots, v_n$. Тогава $2m = \sum_{i=1}^{n} deg(v_i)$

Д-во: Да разгл. мн. $I = \{(v, e) \mid v \in V, e \in E$ и v е кр. на $e\}$ $(G = (V, E))$

Вс. ребро на G участва в точно 2 ел. на I, защото вс. ребро има 2 разл. края. $\Rightarrow$ в I има $2m$ ел. Всеки връх v на G участва в точно $deg(v)$ ел. на I $\Rightarrow$ в I има $deg(v_1) + \dots + deg(v_n)$ ел.

Теорема: Нека G е свързан граф с n върха. Тогава в G има поне $n-1$ ребра.

Д-во: С индукция по n: За $n = 1; 2$ тв. е очевидно.

Нека сега $n \ge 3$ и да предположим, че вс. свързан граф с $n-1$ върха има поне $n-2$ ребра. Нека G е граф с n върха и m ребра, $(G = (V, E))$ и нека $V = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, $E = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m\}$

1сл.) $deg(v_i) \ge 2$ за $\forall i \in [1, n]$. Тогава съгласно ф-лата на Ойлер

$$2m = \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) \ge 2n \Rightarrow m \ge n > n-1 \Rightarrow m > n-1$$

2сл.) $deg(v_i) < 2$ за някое $1 \le i \le n$. Б.о.о. $deg(v_n) < 2$. Т.к. $n > 1$ и G - свързан, $deg(v_n) \ge 1 \Rightarrow deg(v_n) = 1$. Б.о.о. единственото ребро с което v_n е инц. е ε_m. (В частност, за $1 \le j \le m-1$, ако $\varepsilon_j = \{v_s, v_k\}$, то $s, k < n$). Тогава $G' = (V \setminus \{v_n\}, E \setminus \{\varepsilon_m\})$ е граф.

Нека $1 \le i \le j \le n-1$. Нека $v_i = v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t = v_j$ е прост път в G (такъв има т.к. G е свързан). Тогава $e_1, \dots, e_t$ са разл. $\Rightarrow$ ε_m не е сред тях. $\Rightarrow$ $v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t$ е път в G'

$\Rightarrow$ G' е свързан с $n-1$ върха и $m-1$ ребра. Оттук и инд. предпол. $m-1 \ge (n-1)-1$, т.е. $m \ge n-1$

Опр. Ще к., че пътят $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ е цикъл, ако $v_0 = v_n$. При това ще к., че цикълът е прост, ако за $\forall\ 0 < i < j \le n$ е в сила $v_i \neq v_j$

Опр. К., че графът G е ацикличен, ако в G няма прост цикъл с дълж. по-голяма от 2.

ДМ-1

30.10.2014г.

Теорема: Нека G ацикличен граф с n върха и m ребра. Тогава $m \leq n-1$.

Д-во: Индукция по n.

За $n=1,2$ е очевидно. Нека сега n е т.че всеки ацикл. граф G' с $n-1$ върха има най-много $n-2$ ребра и нека G е граф с n върха и m ребра. $v_1, \dots, v_n$ – върхове, $e_1, \dots, e_m$ – ребра. Тогава $deg(v_i) \leq 1$ за някое $1 \leq i \leq n$. Да доп., че за $\forall i \in [1,n]$, $deg(v_i) \geq 2$. Образуваме път в G, $v_1 = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ с дължина n и такъв, че за $\forall j \in [0, n-2]$, $v_j \neq v_{j+2}$.

Т.к. този съдържа $n+1$ върха, а G има n върха, поне два от върховете съвпадат. Нека $0 \leq k < s \leq n$ са т.че $v_s, e_{s+1}, v_{s+1}, \dots, e_k, v_k = v_s$ е прост път (цикъл). Т.к. $v_s \neq v_{s+1}$ (G е неор. прост граф) и $v_s \neq v_{s+2}$ (предположението за пътя), в сила е $k \geq s+3$, т.е. $k-s \geq 3$ и значи $v_s, e_{s+1}, v_{s+1}, \dots, e_k, v_k$ е прост цикъл в G с дължина поне 3 $\lightning$

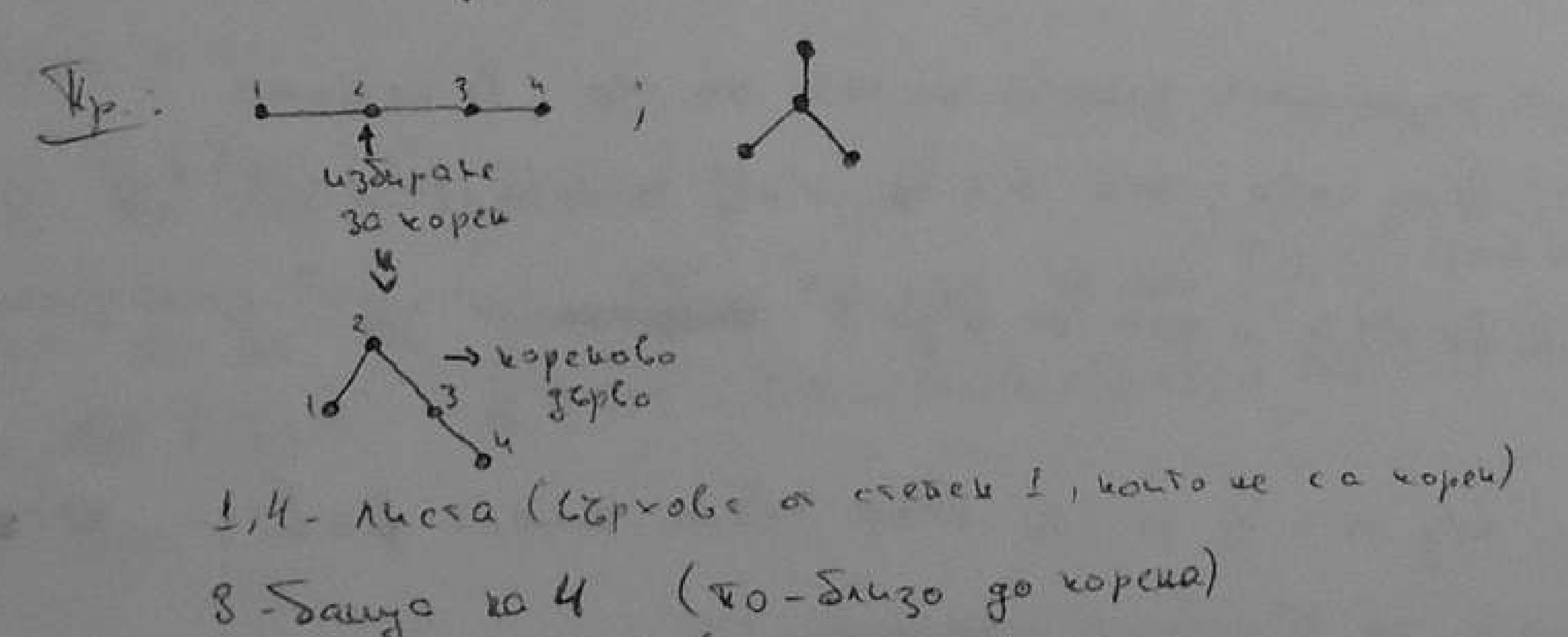
Ако $deg(v_i) < 1$, т.е. $deg(v_i) = 0$, то тогава $m = 0 \leq n-1$. За това нека предположим, че $deg(v_n) = 1$ и единств. ребро инцидентно с v_n е e_m. Да разгледаме графа $G' = (\{v_1, \dots, v_{n-1}\}, \{e_1, \dots, e_{m-1}\})$. Ясно е, че G е граф. При това т.к. всеки път в G' е път в G, G е ацикличен. Оттук $m-1 \leq n-2$, т.е. $m \leq n-1$.

Теорема: Нека G е ацикличен свързан граф с n върха. Тогава в G има точно $n-1$ ребра.

Д-во: Директно от предното твърдение.

Ацикл. св. графи наричаме <u>дървета</u>. Така, ако едно дърво има n върха то в него има точно $n-1$ ребра.

Пр.:



1,4 – листа (върхове от степен 1, които не са корен)

3 – баща на 4 (по-близо до корена)

4 – наследник на 3 (по-далече)

Опр. Нека $G=(V,E)$, $G'=(V',E')$ са графи. К., че G' е подграф на G, ако $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Така, ако $G=(V,E)$ е граф и $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, то $G'=(V',E')$ е подграф на $G \Leftrightarrow$ за $\forall e \in E$, в сила е $e \subseteq V'$.

Опр. Нека $G=(V,E)$ е граф. и $G'=(V',E')$ е подграф на G. К., че G' е покриващо дърво на G, ако G' е дърво и $V'=V$.

Пр: 

Лема: Нека $G=(V,E)$ е свързан граф и нека $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ е прост цикъл в G с $k \geq 3$.
Тогава $G' = (V, E \setminus \{e_1\})$ е свързан подграф на G.

Д-во: Нека са изпълнени условията на лемата и нека $v', v'' \in V$.
Нека $(*)$ $v' = v_0', e_1', v_1', \dots, e_s', v_s' = v''$ е път в G. Да разгл. редицата $(**)$ $v_0'', e_1'', v_1'', \dots, e_t'', v_t'' = v''$, която се получава от $(*)$, заменяйки всяка тройка v_i', e_i', v_{i+1}' с $v_k, e_k, v_{k-1}, e_{k-1}, \dots, e_2, v_1$, ако $e_i' = e_1$, $v_i' = v_0 = v_k$, $v_{i+1}' = v_1$ и с $v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, ако $e_i' = e_1$, $v_i' = v_1$, $v_{i+1}' = v_0 = v_k$.
$(**)$ отново е път в G, като при това $(**)$ не използва реброто e_1. Оттук $(**)$ е път в G'.

Тв.: Нека G е свързан граф с краен брой върхове. Тогава G има покриващо дърво.

Д-во: Нека $G=(V,E)$ е свързан граф с n върха и m ребра. Предвид предната лема можем да образуваме редица $G = G_0 = (V_0, E_0)$, $G_1 = (V_1, E_1)$, $\dots$, $G_k = (V_k, E_k)$, т.че G_{i+1} е свързан подграф на G_i и $V_{i+1} = V_i$, а E_{i+1} съдържа точно 1 ел. по-малко от E_i.
Тогава в G_i има точно $m-i$ ребра и n върха за $0 \leq i$. Оттук, т.к. $m - i \geq n-1$, $i \leq m-n+1$
$\Rightarrow$ редицата не съдържа повече от $m-n+2$ члена. Да разгл. последния член на редицата, G_k.
G_k е свързан подграф на G, $V_k = V$ и при това G_k е ацикличен, тъй като в противен случай, ще можем да увеличим редицата с още 1 член. $\Rightarrow$ G_k е покриващо дърво на G.

Нека G е граф. Деф. рел. $\sim_G$ м/у върховете на G чрез $v' \sim_G v'' \Leftrightarrow \exists$ път в G с нач. v' и край v''.

Ясно е, че
1) $v \sim_G v$
2) Ако $v' \sim_G v''$, то $v'' \sim_G v'$
3) Ако $v' \sim_G v''$ и $v'' \sim_G v'''$, то $v' \sim_G v'''$

$\Rightarrow$ $\sim_G$ е рел. на екв.

Нека $G=(V,E)$ и нека $V_1, \dots, V_s$ са различните класове на екв. по $\sim_G$. В частност $V_i \cap V_j = \emptyset$ за $i \neq j$ и $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V$. При това, ако $v' \in V_i$, $v'' \in V_j$ и $i \neq j$, то $\{v', v''\} \notin E$
(наистина, в случай, че $\{v', v''\} \in E$, $v', \{v', v''\}, v''$ е път от v' до v'' $\Rightarrow$ v' и v'' принадлежат на един и същи клас на екв.)

Нека $E_i = \{e \in E \mid e \subseteq V_i\}$. Тогава, т.к. м/у V_i и V_j за $i \neq j$ няма ребра, имаме $E = E_1 \cup \dots \cup E_s$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Така G се разлага на s на брой подграфи.

$G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_s = (V_s, E_s)$. Т.к. м/у вс. 2 върха на V_i има път в G и значи в G_i, G_i са свързани графи за $i = 1, 2, \dots, s$.

Графите $G_1, \dots, G_s$ наричаме компоненти на свързаност на G.

ДМ - Л)

30.10.2014г.

Теорема: Нека G е граф с n върха и s на брой компоненти на свързаност. Тогава в G има поне $n-s$ ребра.

Д-во: Нека комп. на св. на G са $G_1, \ldots, G_s$ като G_i има n_i върха и m_i ребра.
Т.к. G_i е свързан, $m_i \geq n_i - 1$, за $1 \leq i \leq s$. Нека G е с n върха и m ребра. Тогава
$m = m_1 + \ldots + m_s \geq n_1 - 1 + \ldots + n_s - 1 = (n_1 + \ldots + n_s) - s = n - s$.

Теорема: Нека G е ацикл. граф с n върха и s на брой комп. на св. Тогава всяка комп. на св. на G е дърво и в G има точно $n-s$ ребра.

Д-во: Аналогично.

Ацикл. графи с повече от 1 комп. на св. наричаме гори.

№4 Булеви функции. Теорема на Бул

Опр. Булева функция на n аргумента ще наричаме всяка функция $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
Съвкупността на вс. булеви ф-ции на n аргумента означаваме с $\mathbb{B}_n$

Лема: Нека A е n-елементно мн. Тогава $P(A)$ е с 2^n елемента.
Нека A_k означава мн. от вс. k-елем. подмнож. на A, за $0 \leq k \leq n$
Д-во: Нека A е n-елем. и нека A_k означава мн. от вс. k-елем. подмнож. на A, за $0 \leq k \leq n$. $A_0, \ldots, A_n$ е разбиване на $P(A)$.
(да отбележим, че $A_0 = \{\emptyset\}$ и $A_n = \{A\}$). Тогава $A_0, \ldots, A_n$ е разбиване на $P(A)$. Тогава в $P(A)$ има $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$
Да забележим, че в A_k има $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ на брой елем.

Тв.: В $\mathbb{B}_n$ има 2^{2^n} елемента.
Д-во: Ел. на $\mathbb{B}_n$ са характ. ф-ции на мн. $\{0,1\}^n \Rightarrow$ бр. на ел. на $\mathbb{B}_n$ съвпада с този на ел. на $P(\{0,1\}^n)$. В $\{0,1\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0,1\}, \text{ за } i \in [1,n]\}$ има 2^n елем. Оттук и горната лема в $\mathbb{B}_n$ има 2^{2^n} елем.

$\mathbb{B}_0$: В $\mathbb{B}_0$ има $2^{2^0} = 2$ елем. Това са конст. 0 и 1.
$\mathbb{B}_1$: има $2^{2^1} = 4$ елем., които означаваме с $\mathbb{0}, \mathbb{1}, x, \bar{x}$. Тези ф-ции връщат следните стойности в зависимост от стойностите на аргумента x:

x	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$\mathbb{B}_2 : 2^{2^2} = 16$ елем. По-забележителните от тях са $x \vee y$ (или), xy $(x \wedge y)$, $x \to y$ (импликация) (ако, то), $x \equiv y$ $(x \leftrightarrow y)$, $x + y$, $x|y$ (черта на Шефер), $x \downarrow y$ (стрелка на Пирс)

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

$$\boxed{\begin{array}{c} x \mid y = \overline{xy} \\ \hline x \downarrow y = \overline{x \vee y} \end{array}}$$

---

1) $x \vee 1 = 1$, $x . 0 = 0$
2) $x \vee 0 = x . 1 = x$
3) $x \vee x = x . x = x$
4) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x(yz) = (xy)z$
5) $x \vee y = y \vee x$, $xy = yx$
6) $x(y \vee z) = (xy) \vee (xz)$
7) $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$
8) $\overline{\overline{x}} = x$
9) $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ (правило на де Морган)
10) $x \to y = \overline{x} \vee y$
11) $x \equiv y = (x \to y)(y \to x)$
12) $\overline{x \equiv y} = x + y$
13) $\overline{x} = x + 1$

Ако B е мн. с ~~два~~ конст. 0 и 1, едноместна операция "‾" и двуместни "∨", "·", удовлетворяващи 1) – 9), B се нарича булева алгебра.

С $\mathbb{B}$ ще озн. мн. на вс. булеви ф-ции на поне един аргумент, т.е. $\mathbb{B} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{B}_n$.
За $n>0$ и $1 \leq k \leq n$ с I_n^k ще озн. проектиращата функция на n аргумента, действаща чрез $I_n^k(x_1, \dots, x_n) = x_k$. Ако $f \in \mathbb{B}_k$, $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{B}_n$ под композицията на f с $g_1, \dots, g_k$ ще разбираме функцията, да речем h, която действа по правилото
$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$.

Опр. Нека $C \subseteq \mathbb{B}$. Ще к., че C е затворен клас, ако C съдържа вс. проект. ф-ции и е зат. относно композиция.

Опр. Нека $F \subseteq \mathbb{B}$. С $[F]$ ще озн. мн. $[F] = \bigcap \{C \subseteq \mathbb{B} \mid F \subseteq C$ и C е зат. клас$\}$

Тв. Нека $F \subseteq \mathbb{B}$. Тогава: 1) $F \subseteq [F]$; 2) $[F]$ е зат. клас, 3) $[[F]] = [F]$

Д-во: Нека с $\mathcal{C}_F$ озн. мн. $\mathcal{C}_F = \{C \subseteq \mathbb{B} \mid F \subseteq C$ и C - зат. клас$\}$. В записост $[F] = \bigcap \mathcal{C}_F$

1) Нека $C \in \mathcal{C}_F$. Тогава $F \subseteq C \Rightarrow F$ е подмн. на вс. елем. на $\mathcal{C}_F$ и значи $F \subseteq \bigcap \mathcal{C}_F = [F]$

2) а) Нека $n>0$ и $1 \leq k \leq n$, и да разгл. проект. ф-ция I_n^k. Тогава $I_n^k \in C$ за вс. $C \in \mathcal{C}_F$ (C - зат.)
$\Rightarrow I_n^k \in [F] \Rightarrow [F]$ съдържа вс. проект. ф-ции.

б) Нека сега $f \in [F]$ е k-местна, а $g_1, \dots, g_k \in [F]$ са n-местни и нека $C \in \mathcal{C}_F$.
Тогава $f, g_1, \dots, g_k \in C$ и т.к. C е зат., композицията на f с $g_1, \dots, g_k$ принадлежи на C.
Оттук комп. на f с $g_1, \dots, g_k$ принадлежи на вс. ел. на $\mathcal{C}_F \Rightarrow$ принадлежи и на $[F]$

От (а) и (б) $\Rightarrow [F]$ е зат.

3) От (1) $[F] \subseteq [[F]]$. С друга страна $[F] \subseteq [F]$ и съгласно (2), $[F]$ е зат. и значи $[F] \in \mathcal{C}_{[F]}$. Оттук $[[F]] = \bigcap \mathcal{C}_{[F]} \subseteq [F]$

Съгласно доказаното тв., $[F]$ е най-малкият зат. клас, съдържащ F. Ще к., че $[F]$ е ~~зат.~~ затварянето на F. Ще к., че мн. $F \subseteq \mathbb{B}$ е пълно, ако $[F] = \mathbb{B}$.

Пр.: $F = \{\bar{x}, x \vee y\}$ $\quad x, \bar{x}, \bar{\bar{x}}, \bar{x} \vee \bar{y}, \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee x} \vee \bar{x} \vee \bar{z} \in [F]$.

$F = \{xy, +, 1\}$ $\quad x, x+y, x+1, xy+1, xz+yz+x+y \in [F]$

Означение: Нека $a \in \{0,1\}$. Тогава с x^a ще бележим ф-цията $x^a = \begin{cases} x, & a=1 \\ \bar{x}, & a=0 \end{cases}$

Да забележим, че $x^a = 1 \Leftrightarrow x = a$. Оттук: $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} = 1 \Leftrightarrow x_1^{a_1} = \dots = x_n^{a_n} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$

Теорема: Нека $f \in B_n$ и f приема стойност 1 за поне един избор на аргументите си. Тогава $f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee\limits_{f(a_1,\dots,a_n)=1}^{\text{дизюнкция}} x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$. Ще к., че f е представена в съвършената дизюнктивна нормална форма.

Д-во: Нека с h озн. n-местната ф-ция $h(x_1,\dots,x_n) = \bigvee\limits_{f(a_1,\dots,a_n)=1} x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$. Нека $b_1,\dots,b_n \in \{0,1\}$. Тогава $h(b_1,\dots,b_n) = 1 \Leftrightarrow b_1^{a_1}\dots b_n^{a_n} = 1$ за някои $a_1,\dots,a_n \in \{0,1\}$, т.ч. $f(a_1,\dots,a_n) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(b_1,\dots,b_n) = 1$

Пр.: Нека $f(x,y) = x|y$. Тогава $f(x,y) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$

Теорема на Бул: Мн. $\{\bar{x}, x \vee y\}$ е пълно.

Д-во: Първо ще док., че мн. $\{\bar{x}, x\vee y, xy\}$ е пълно. Нека $f \in B_n$ за $n \geq 1$. Ако f приема стойност 1 за поне един от аргументите си, то f може да се изрази чрез проектиращите ф-ции, отрицанието, $\vee$, $\wedge$. $\Rightarrow f \in [\bar{x}, x\vee y, xy]$. От друга страна, ако f е тъждествено 0, то $g = \bar{f}$ е тъждествено 1, следователно $g \in [\bar{x}, x\vee y, xy] \Rightarrow f = \bar{g} \in [\bar{x}, x\vee y, xy]$
$\Rightarrow \{\bar{x}, x\vee y, xy\}$ е пълно. От друга страна $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$, следователно $xy \in [\bar{x}, x\vee y]$
$\Rightarrow \{\bar{x}, x\vee y\}$ е пълно.

№5 Класовете T_0, T_1 и S

Опр. Ще к., че $f \in B_n$ запазва 0 (запазва 1), ако $f(0,\dots,0) = 0$ $(f(1,\dots,1) = 1)$.
С T_0 (съответно T_1) озн. мн. на вс. ф-ции запазващи 0 (1).

Тв. T_0 и T_1 са затв., но не са пълни.

Д-во: а) Нека $n > 0$ и $1 \leq k \leq n$. Тогава $I_n^k(i,\dots,i) = i$ за $i = 0;1 \Rightarrow I_n^k \in T_0$ и $I_n^k \in T_1$

б) Нека $i \in \{0,1\}$ и нека $f \in T_i$ е k-местна, $g_1,\dots,g_k \in T_i$ са n-местни ф-ции. Нека h е композ. на f с $g_1,\dots,g_k$. Тогава $h(i,\dots,i) = f(g_1(i,\dots,i),\dots,g_k(i,\dots,i)) = f(i,\dots,i) = i$, следователно $h \in T_i$.

От а) и б) $\Rightarrow T_0$ и T_1 са затв.

За да се убедим, че не са пълни е достатъчно да забележим, че $\bar{x} \notin T_0$, $\bar{x} \notin T_1$

Следствие: Ако $F \subseteq B$ е пълно, то $F \not\subseteq T_0$ и $F \not\subseteq T_1$

Тв. Нека $F \subseteq B$ и $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$. Тогава $\bar{x} \in [F]$ или $\{0,1\} \subseteq [F]$

Д-во: Нека $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$ и да предположим, че $\bar{x} \notin [F]$. Нека $f_0 \in F \setminus T_0$ и $f_1 \in F \setminus T_1$. Нека g_1, g_0 са едноместни функции деф. чрез правилото
Нека f_0 и f_1 са съответно m и n-местни.
$g_1(x) = f_0(\underbrace{x,\dots,x}_{m})$ и $g_0(x) = f_1(\underbrace{x,\dots,x}_{n})$. Тогава $g_0, g_1 \in [F]$. Да разгл. първо g_1. Имаме
$g_1(0) = \underset{f_0 \notin T_0}{f_0(0,\dots,0) = 1} \Rightarrow g_1$ е или 1 или отрицанието, но отр. $\notin [F]$ и $\Rightarrow g_1 = 1$
Аналог. $g_0 = 0 \Rightarrow \{0,1\} \subseteq [F]$

20.11.2014г.

Опр. Нека $w_1, w_2 \in \Sigma^*$. Конкатенация на w_1, w_2 (w_2, w_1) наричаме думата w_1w_2 (w_2w_1), т.е. ако $w_1 = a_{11} \dots a_{1n}$, $w_2 = a_{21} \dots a_{2m}$, $m, n \geq 0$, $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2m} \in \Sigma$, то $w_1w_2 = a_{11} \dots a_{1n} a_{21} \dots a_{2m}$

Св-ва:
1) $w\varepsilon = \varepsilon w = w$
2) $w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)w_3$
3) $|w_1w_2| = |w_1| + |w_2|$
4) $|w_1w_2| \geq max(|w_1|, |w_2|)$
5) В общия случай, $w_1w_2 \neq w_2w_1$

Конкатенацията на дума w_1 с дума w_2 изпълнява следната индуктивна схема:

i) $w_1w_2 = w_1$, ако $w_2 = \varepsilon$

ii) $w_1w_2 = (w_1w_2')a$, ако $w_2 = w_2'a$ за някои $w_2' \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$

Операцията конкатенация ни позволява да деф. опер. степенуване на дума с ест. число по следната схема:

i) $w^0 = \varepsilon$

ii) $w^{n+1} = w^n . w$

Конкатенация б/у езици:

Опр. Нека L_1, L_2 са езици над Σ. Деф. $L_1L_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ и } w_2 \in L_2\}$ $(L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*)$

Св-ва:
$L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$
$L\phi = \phi.L = \phi$
$L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$

Опр. Деф. опер. степенуване на $L \subseteq \Sigma^*$, чрез:

i) $L^0 = \{\varepsilon\}$

ii) $L^{i+1} = L^i . L$

Заб. В общия случай $L^n \neq \{w^n \mid w \in L\}$ Пр.: $L = \{01, 10\} \Rightarrow L^2 = \{0101, 0110, 1001, 1010\}$
$\{w^2 \mid w \in L\} = \{0101, 1010\}$

Тв. Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава за вс. $w \in \Sigma^*$, $w \in L^n \Leftrightarrow w = w_1 \dots w_n$ за някои $w_1, \dots, w_n \in L$

Д-во:
i) $n = 0 \Rightarrow w \in L^0 \Leftrightarrow w = \varepsilon \Leftrightarrow w = w_1 \dots w_n$, за някои $w_1, \dots, w_n \in L$

ii) Нека $w' \in L^n \Leftrightarrow w' = w_1 \dots w_n$. Тогава $w \in L^{n+1} \underset{def}{\Leftrightarrow} w \in L^n . L \underset{def}{\Leftrightarrow} w = w'w_{n+1} \Leftrightarrow w = (w_1 \dots w_n)w_{n+1} = w_1 \dots w_n w_{n+1}$

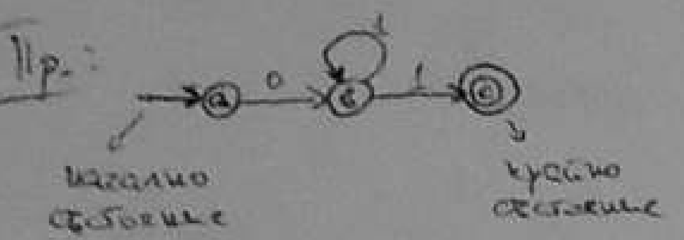
Тв. $\varepsilon \in L^*$; $\phi^* = \{\varepsilon\}$; $L \subseteq L^*$;

Б°8 Крайни автомати. Автоматни езици. Детерминирани автомати

Отсега нататък ще разглеждаме само крайни азбуки.

<u>Опр</u> Нека Σ е азбука. Автомат над Σ ще нар. вс. наредена четворка $A = (Q, q_0, \Delta, F)$, където Q е кр. мн. (елем. на което нар. състояния), $q_0 \in Q$ (начално сост.), $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ (рел. на преходите), $F \subseteq Q$ (може $F = \emptyset$ или $F = Q$) – мн. на заключителните (финални) състояния.

Да забележим, че ако A е краен автомат, то $G = (Q, \Delta)$ е мултиграф с етикети на ребрата от Σ.

<u>Пр.</u>: 

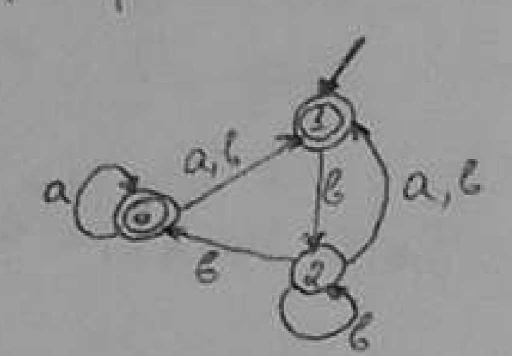
$A = (\{a, b, c\}, a, \{(a,0,b), (b,1,b), (b,1,c)\}, \{c\})$ е кр. автомат над $\Sigma = \{0, 1\}$

Табличен вид на A:

A	0	1
$\to a$	b	–
b	–	b, c
$^*c$	–	–

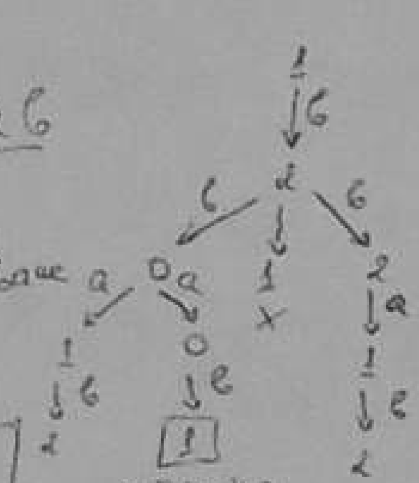
<u>Пр.</u>: $\Sigma = \{a, b\}$,

A	a	b
^{*0}	0,1	1
$\to ^*1$	–	2
2	1	0,1,2



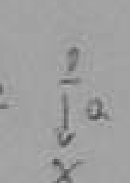
<u>bbab</u>

автомат с алгоритъм за разпознаване на дума



алгоритъма трябва да приключи във финално сост.

<u>ab</u>



т.е. не разпознава такава дума

<u>детерминиран автомат</u> – за който се знае на къде да се тръгне, без разклонения

<u>Опр.</u> Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е кр. авт. над Σ. Конфигурация (на A) ще наричаме вс. наредена двойка (q, w), където $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$. ~~В мн. от вс. конфиг. на A въвеждаме рел. $\vdash_A$ чрез следната инд. по дължината на коорд. на конф.:~~

~~i) $(q,\varepsilon) \vdash_A (q_1, w) \overset{\text{def}}{\iff} (q_1, w) = (q, \varepsilon)$ (т.е. $(q,\varepsilon) \vdash_A (q,\varepsilon)$ и $(q,\varepsilon) \not\vdash_A (q_1, w)$ за вс. $q_1 \neq q$ и $w \neq \varepsilon$)~~

~~ii) за $a \in \Sigma$, $(q, wa) \vdash_A (q_1, w_1) \iff$~~

Ще пишем, за $a \in \Sigma$, $(q, a) \vdash_A (q_1, \varepsilon) \iff (q, a, q_1) \in \Delta$. ← $\boxed{(q, \varepsilon) = q}$

<u>Деф.</u> (рефл. и тран. затв. на $\vdash_A$) $\vdash_{A^*}$ по следния начин:

i) $(q, \varepsilon) \vdash_{A^*} (q, \varepsilon)$

ii) $(q, wa) \vdash_{A^*} (q_1, \varepsilon) \iff (q, w) \vdash_{A^*} (q_2, \varepsilon)$ и $(q_2, a) \vdash_A (q_1, \varepsilon)$ за някое $q_2 \in Q$

<u>Заб.</u> За $\forall q \in Q$ и $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, $n \geq 0$, $(q, w) \vdash_{A^*} (q_1, \varepsilon) \iff \exists$ път $q = v_0 a_1 v_1, \ldots, a_n v_n = q_1$ в графа $G = (Q, \Delta)$

Опр. Нека $A=(Q,q_0,\Delta,F)$. Под език на A ще разбираме езика $L(A)=\{w\in\Sigma^* \mid (q_0,w)\vdash_{A^*} q,\ q\in F\}$

Опр. Ще к., че $L\subseteq\Sigma^*$ е автоматен, ако $\exists$ краен автомат A, т.че $L=L(A)$

Заб. $w\notin L(A) \iff \forall q\in Q\ ((q_0,w)\vdash_{A^*} q \Rightarrow q\notin F)$

Опр. Ще к., че авт. $A=(Q,q_0,\Delta,F)$ е детерминиран, ако за вс. $q\in Q$ и вс. $a\in\Sigma$ $\exists$ най-много едно $q'\in Q$, т.че $(q,a,q')\in\Delta$

Тв. Нека $A=(Q,q_0,\Delta,F)$ е кр. дет. авт. над Σ. Тогава за вс. $q\in Q$ и вс. $w\in\Sigma^*$ $\exists$ най-много едно състояние $q'\in Q$, т.че $(q,w)\vdash_{A^*} q'$. При това, ако такова q' съществува, пътят в (Q,Δ) от q до q' през w е еднозначно определен.

Д-во: Инд. по w:

i) $w=\varepsilon$. Тогава $(q,w)\vdash_{A^*} q' \iff q'=q$

ii) $w=w'a$, където $w'\in\Sigma^*, a\in\Sigma$ и за w' е в сила инд. предп. Нека $q'\in Q$ е т.че $(q,w'a)\vdash_{A^*} q'$ и нека $(q,w'a)\vdash_{A^*} q''$, $q''\in Q$. Тогава, съгласно деф. за някои $q_1', q_1''\in Q$, $(q,w')\vdash_{A^*} q_1'$, $(q_1',a)\vdash_A q'$ и $(q,w')\vdash_{A^*} q_1''$ и $(q_1'',a)\vdash_A q''$

От инд. предп. $q_1'=q_1''$. От друга страна, тъй като A е детерминиран и $q_1'=q_1''$, от $(q_1',a)\vdash_A q'$ и $(q_1'',a)\vdash_A q'' \Rightarrow q'=q''$.

Дм-Л

27.11.2014г.

Опр. Ще к., че авт. $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е __тотален__, ако за вс. $q \in Q$ и $a \in \Sigma$, $\exists\, q' \in Q$, т.че $(q, a, q') \in \Delta$

Тв. Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е тотален авт. над Σ. Тогава за вс. $w \in \Sigma^*$ и вс. $q \in Q$,

$\exists\, q' \in Q$, т.че $(q, w) \vdash_{A}^{*} q'$

Д-во: Да забележим, че тъй като A е тотален, за $\forall q \in Q, a \in \Sigma$ $\exists\, q' \in Q : (q, a) \vdash_{A} q'$

Ще док. тв. чрез инд. по w:

1) $w = \varepsilon$. Тогава $(q, w) \vdash_{A^*} q$ $(\Rightarrow \exists\, q' \in Q : (q, w) \vdash_{A^*} q')$

2) $w = w'a$, за някое $a \in \Sigma^*$ и $w' \in \Sigma^*$, изпълняващи инд. предп. (т.е. $\exists\, q'' \in Q : (q, w') \vdash_{A^*} q''$

Нека $q'' \in Q$ е т.че $(q, w') \vdash_{A^*} q''$. Тъй като A е тотален, $(q'', a) \vdash_{A} q'$, за някое $q' \in Q$

Тогава $(q, w'a) \vdash_{A^*} q'$, т.е. $(q, w) \vdash_{A^*} q'$

Следствие: Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е тотален и дет. авт. над Σ. Тогава за $\forall q \in Q, w \in \Sigma^*$

$\exists!\, q' \in Q : (q, w) \vdash_{A^*} q'$

Теорема. Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е авт. над Σ и нека $A_D = (Q_D, q_D, \Delta_D, F_D)$, където

$Q_D = \overset{\text{вс. подмн-ва на } Q}{P(Q)}$, $q_D = \{q_0\}$, $\Delta_D = \{(X, a, Y) \mid a \in \Sigma, X, Y \in Q_D \wedge Y = \{q_2 \in Q \mid \exists q_1 \in X : (q_1, a, q_2) \in \Delta\}\}$,

$F_D = \{X \in Q_D \mid X \cap F \neq \emptyset\}$. Тогава A_D е тотален дет. авт. над Σ и $L(A_D) = L(A)$.

Д-во: Ясно е, че A_D е краен авт. над Σ. При това за вс. $X \in Q_D$ и $a \in \Sigma$,

мн. $Y = \{q_2 \in Q \mid \exists q_1 \in X : (q_1, a, q_2) \in \Delta\} = \{q_2 \in Q \mid \exists q_1 \in X : (q_1, a) \vdash_{A} q_2\}$ е еднозначно опр.

$\Rightarrow A_D$ е тотален и дет. Твърдим, че за вс. $w \in \Sigma^*$, $(q_D, w) \vdash_{A_D^*} Z \Longleftrightarrow \underline{Z = \{q' \in Q \mid (q_0, w) \vdash_{A^*} q'\}}$

д-во с инд. по w

1) $w = \varepsilon$. Имаме $(q_D, w) \vdash_{A_D^*} Z \Leftrightarrow Z = q_D = \{q_0\} \Leftrightarrow Z = \{q' \in Q \mid (q_0, w) \vdash_{A^*} q'\}$

2) $w = w'a$, за някое $a \in \Sigma$ и $w' \in \Sigma^*$. Нека $(q_D, w') \vdash_{A_D^*} Z'$. Z' същ. и е еднозн. опр., т.к. A_D е тотален и дет. Съгласно инд. предп. $Z' = \{q'' \in Q \mid (q_0, w') \vdash_{A^*} q''\}$. Тогава $(q_D, w) \vdash_{A^*} Z$, където Z е единственото сост., т.че $(Z', a) \vdash_{A_D} Z$ и е опр. чрез $Z = \{q' \in Q \mid \exists q'' \in Z' : (q'', a, q') \in \Delta\}$

$Z = \{q' \in Q \mid \exists q'' \in Z' : (q'', a) \vdash_{A} q'\} = \{q' \in Q \mid (q_0, w) \vdash_{A^*} q'\}$

Нека $w \in \Sigma^*$ и $Z \in Q_D$ е единственото, за което $(q_D, w) \vdash_{A_D^*} Z$. Тогава $w \in L(A_D) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Z \in F_D \Leftrightarrow Z \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \{q' \in Q \mid (q_0, w) \vdash_{A^*} q'\} \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(A)$

Спасимире, ти си отвратителен
Все едно съм ти казала нещо..

2.2) $q_{02} \in F$. Тогава [illegible] $w \in L(A) \Leftrightarrow (q_{01}, w) \vdash_{A^*} q' \in F_1$ или $(q_{01}, w) \vdash_{A^*} q'' \in F_2 \Leftrightarrow (q_{01}, w) \vdash_{A_1^*} q' \in F_1$ или $((q_{01}, w_1) \vdash_{A_1^*} q''' \in F_1$ и $(q_{02}, w_2) \vdash_{A_2^*} q'' \in F_2$ за някои $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, т.че $w = w_1 w_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow w \in L_1$ или $w = w_1 w_2$ за някои $w_1 \in L_1$ и $w_2 \in L_2 \Leftrightarrow w \in L_1 L_2$
$\Rightarrow L(A) = L_1 L_2$, където $L_1 = L(A_1)$, а $L_2 = L(A_2)$

Тв. Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \Delta_1, F_1)$ е авт. над Σ. Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$, където $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$, $q_0 \notin Q_1$, $\Delta = \Delta_1 \cup \{(q, a, q') \mid q \in F_1, a \in \Sigma, (q_0, a, q') \in \Delta_1\} \cup \{(q_0, a, q') \mid (q_{01}, a, q') \in \Delta_1\}$, $F = F_1 \cup \{q_0\}$. Тогава A е краен авт. над Σ и $L(A) = L(A_1)^*$.

Д-во: 1) Нека $w \in L(A)$. Ако $w = \varepsilon$, то $w \in L(A)^*$ за това нека $w = a_1 \ldots a_n$ за $n > 0$ и $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
Нека $q_0, a_1, q_1, \ldots, a_n q_n$ е път в A, т.че $q_n \in F$. Нека $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$ са вс. числа м/у 1 и n, т.че $(q_i, a_{i+1}, q_{i+1}) \notin \Delta_1$. Тъй като в Δ няма преходи към q_0, $q_1 \neq q_0, \ldots, q_n \neq q_0$ и значи $(q_{01}, a_{i_m+1}, q_{i_m+1}) \in \Delta_1$ и $q_{i_m} \in F_1$. Оттук и факта, че $(q_{01}, a_1, q_1) \in \Delta_1$ имаме $(q_{01}, a_1 \ldots a_{i_1}) \vdash_{A_1^*} q_{i_1} \in F_1$, $(q_{01}, a_{i_1+1} \ldots a_{i_2}) \vdash_{A_1^*} q_{i_2} \in F_1$, ..., $(q_{01}, a_{i_s+1} \ldots a_n) \vdash_{A_1^*} q_n \in F_1$. Тогава $w_1, \ldots, w_{s+1} \in L(A_1)$ като при това $w = w_1 \ldots w_{s+1}$. Оттук $w \in L(A_1)^*$

2) Нека сега $w \in L(A_1)^*$. Ако $w = \varepsilon$, $w \in L(A)$. ($q_0 \in F$) и за това нека $w \neq \varepsilon$. Тогава
Празна ще
$w = w_1 \ldots w_n$ за някое $n \geq 1$ и $w_1, \ldots, w_n \in L(A_1)$. Оттук $(q_{01}, w_1) \vdash_{A_1^*} q_1 \in F_1, \ldots, (q_{01}, w_n) \vdash_{A_1^*} q_n \in F_1$.
Т.к. за $1 \leq i \leq n-1$ и вс. $a \in \Sigma$, $(q_{01}, a, q') \in \Delta_1 \Rightarrow (q_i, a, q') \in \Delta$ ($q_i \in F_1$), имаме $(q_{01}, w_1) \vdash_{A^*} q_1 \in F_1$, $(q_1, w_2) \vdash_{A^*} q_2 \in F_1, \ldots, (q_{n-1}, w_n) \vdash_{A^*} q_n \in F_1$. От друга страна $(q_{01}, a, q') \in \Delta_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (q_0, a, q') \in \Delta$ за вс. $a \in \Sigma$ и $q' \in Q_1$. Оттук $(q_0, w_1) \vdash_{A^*} q_1 \in F_1 \Rightarrow (q_0, w_1 \ldots w_n) \vdash_{A^*} q_n \in F_1 \subseteq F$
$\Rightarrow w \in L(A)$.

Тв. Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е тот. дет. авт. над Σ. Тогава $A' = (Q, q_0, \Delta, Q \setminus F)$ е краен авт. над Σ, т.че $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$ ($= \overline{L(A)}$)

Д-во: Т.к. A е тот. дет., за вс. $w \in \Sigma^*$ $\exists! q \in Q : (q_0, w) \vdash_{A^*} q$. От друга страна $(q_0, w) \vdash_{A^*} q \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash_{A'} q$. Оттук за вс. $w \in \Sigma^*$, $w \in \Sigma^* \setminus L(A) \Leftrightarrow w \notin L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash_{A^*} q \notin F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (q_0, w) \vdash_{A'^*} q \in Q \setminus F \Leftrightarrow w \in L(A')$

Следствие: За вс. авт. A_1 и A_2 над Σ $\exists$ авт. A над Σ, т.че $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

Д-во. $L(A_1) \cap L(A_2) = \overline{\overline{L(A_1) \cap L(A_2)}} = \overline{\overline{L(A_1)} \cup \overline{L(A_2)}}$

Тl Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \Delta_1, F_1)$, $A_2 = (Q_2, q_{02}, \Delta_2, F_2)$ са авт. над Σ.
Нека $A = (Q, q_0, \Delta, F)$, където $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_{01}, q_{02})$, $\Delta = \{((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \mid (q_1, a, q_1') \in \Delta_1$ и $(q_2, a, q_2') \in \Delta_2\}$.
$F = F_1 \times F_2$.
Тогава A е кр. авт. над Σ и $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

$(1,1) \xrightarrow{a} (2,2) \xrightarrow{\varepsilon} (3,1)$

Д-во: 1) Нека $w \in L(A)$. Тогава $(q_{01}, q_{02}), a_1, (q_1^1, q_2^1), a_2, \dots, a_n, (q_1^n, q_2^n)$ е път в A, където $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, т.че $w = a_1 \dots a_n$. Т.к. $((q_1^i, q_2^i), a_{i+1}, (q_1^{i+1}, q_2^{i+1})) \in \Delta \iff$
$\iff (q_1^i, a_{i+1}, q_1^{i+1}) \in \Delta_1$ и $(q_2^i, a_{i+1}, q_2^{i+1}) \in \Delta_2$, имаме $q_{01}, a_1, q_1^1, \dots, a_n, q_1^n$ е път в A_1
$q_{02}, a_1, q_2^1, \dots, a_n, q_2^n$ е път в A_2. При това, т.к. $w \in L(A)$, $(q_1^n, q_2^n) \in F$
и значи $q_1^n \in F_1$, $q_2^n \in F_2$. Оттук $w \in L(A_1)$ и $w \in L(A_2)$

2) Нека $w = a_1 \dots a_n \in L(A_1) \cap L(A_2)$, където $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$. Тогава $\exists$ пътища
$q_{01}, a_1, q_1^1, \dots, a_n, q_1^n \in F_1$ в A_1 и $q_{02}, a_1, q_2^1, \dots, a_n, q_2^n \in F_2$ в A_2
$\Rightarrow (q_{01}, q_{02}), a_1, (q_1^1, q_2^1), \dots, a_n, (q_1^n, q_2^n) \in F$ е път в $A \Rightarrow w \in L(A)$.

№10. Регулярни езици. Теорема на Клини.

Опр. Класът на рег. езици над Σ е най-малкият клас, съдържащ $\emptyset$, $\{a\}$ за $a \in \Sigma$ и затворен относно $\cup$, $\circ$ и $*$. Ел. на този клас нар. рег. език.

Рег. езици се получават по сл. инд. схема:
1) $\emptyset$, $\{a\}$ за $a \in \Sigma$ са рег.
2) Ако L_1 и L_2 са рег. над Σ, то $L_1 \cup L_2$ и $L_1 L_2$ са рег.
3) Ако L е рег., то L^* е рег.

$L(A_\emptyset) = \emptyset$ за $A_\emptyset = (\{q_0\}, q, \emptyset, \emptyset)$ и $L(A_a) = \{a\}$, за $A_a = (\{q_0, q_1\}, q_0, \{(q_0, a, q_1)\}, \{q_1\})$
$q_0 \neq q_1$ и $a \in \Sigma$. $\Rightarrow \emptyset$ и $\{a\}$ за $a \in \Sigma$ са автоматни. Оттук вс. рег. език е автоматен.

Теорема (Клини): Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава L е авт. $\iff$ L е рег.

Д-во: $\Leftarrow$) Вече доказано
$\Rightarrow$) Нека $L = L(A)$, където $A = (Q, q_0, \Delta, F)$. Нека Q е n-елем. мн. и $Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$. Нека за $k \in [0, n]$ с R_{ij}^k озн. мн. $R_{ij}^k = \{w \in \Sigma^* \mid (q_i, w) \vdash_A q_j$ преминавайки само през сост. с индекс $< k\}$
т.е. $w = a_1 \dots a_n \in R_{ij}^k \iff q_i = p_0, a_1, p_1, \dots, a_n, p_n = q_j$ е път в A и за $s \in [1, n-1]$, $p_s \notin \{q_k, q_{k+1}, \dots, q_{n-1}\}$. Тогава $R_{ii}^0 = \{\varepsilon\}$
$R_{ij}^0 = \{a \in \Sigma \mid (q_i, a, q_j) \in \Delta\}$ за $i \neq j$, $R_{ij}^n = \{w \in \Sigma^* \mid (q_i, w) \vdash_A q_j\}$

Твърдим, че $R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{ik}^k (R_{kk}^k)^* R_{kj}^k$:

$\subseteq$: Нека $w \in R_{ij}^{k+1}$ и $w \notin R_{ij}^k$ и $q_i = p_0, a_1, \dots, a_n, p_n = q_j$ е път в A, т.че $w = a_1 \dots a_n$ за вс. $s \in [1, n-1]$, $p_s \in \{q_0, \dots, q_k\}$. Нека $i_1 < \dots < i_m$ са вс. числа $\in [1, n-1]$ за които $p_{i_t} = q_k$, за $t \in [1, m]$. Тогава $a_1 \dots a_{i_1} \in R_{ik}^k$, $a_{i_1+1} \dots a_{i_2} \in R_{kk}^k$, $a_{i_2+1} \dots a_{i_3} \in R_{kk}^k, \dots, a_{i_{m-1}+1} \dots a_{i_m} \in R_{kk}^k$ и $a_{i_m+1} \dots a_n \in R_{kj}^k$. Оттук $w \in R_{ik}^k (R_{kk}^k)^* R_{kj}^k$

11.12.2014г.

Тв 3 Нека A е тот. и дет. авт. над Σ с n състояния. Тогава в $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}}$ (факторизирано по рел.) има най-много n елем. При това, ако в $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}}$ има точно n елем., то $w \sim_{L(A)} w' \iff w \sim_A w'$ за вс. $w, w' \in \Sigma^*$.

Д-во: $w \sim_A w' \Rightarrow w \sim_{L(A)} w'$ за вс. $w, w' \in \Sigma^*$. Оттук $[w]_{\sim_A} \subseteq [w]_{\sim_{L(A)}}$ $\Rightarrow$ бр. на ел. $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}}$ не надминава бр. на ел. на $\Sigma^*/_{\sim_A}$, който от своя страна е равен на бр. на достижимите със. в A (Тв 1). Оттук бр. на ел. $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}}$ е най-много n.

Нека сега в $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}}$ има точно n ел. Нека $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}} = \{[w_1]_{\sim_{L(A)}}, \dots, [w_n]_{\sim_{L(A)}}\}$. Имаме $[w_1]_{\sim_A} \subseteq [w_1]_{\sim_{L(A)}}, \dots, [w_n]_{\sim_A} \subseteq [w_n]_{\sim_{L(A)}}$. Тъй като $[w_i]_{\sim_{L(A)}} \neq [w_j]_{\sim_{L(A)}}$ за $i \neq j$, имаме $[w_i]_{\sim_{L(A)}} \cap [w_j]_{\sim_{L(A)}} = \emptyset$ за $i \neq j$ $\Rightarrow [w_i]_{\sim_A} \neq [w_j]_{\sim_A}$ за $i \neq j$. От друга страна $\Sigma^*/_{\sim_A}$ има най-много n ел. $\Rightarrow \Sigma^*/_{\sim_A} = \{[w_1]_{\sim_A}, \dots, [w_n]_{\sim_A}\}$. Но $\bigcup_{1 \le i \le n} [w_i]_{\sim_{L(A)}} = \bigcup_{1 \le i \le n} [w_i]_{\sim_A} = \Sigma^*$ $\Rightarrow [w_i]_{\sim_A} = [w_i]_{\sim_{L(A)}}$. Оттук $w \sim_A w' \iff w \sim_{L(A)} w'$ за вс. $w, w' \in \Sigma^*$.

Нека $L \subseteq \Sigma^*$, т.че $\sim_L$ има краен индекс, т.е. $\Sigma^*/_{\sim_L}$ е крайно. Да разгл. $A_L = (Q_L, q_{0L}, \Delta_L, F_L)$, където $Q_L = \Sigma^*/_{\sim_L}$, $q_{0L} = [\varepsilon]_{\sim_L}$, $\Delta_L = \{([w]_{\sim_L}, a, [wa]_{\sim_L}) \mid w \in \Sigma^* \text{ и } a \in \Sigma\}$ и $F_L = \{[w]_{\sim_L} \mid w \in L\}$. Ясно е, че A_L е тот. авт. над Σ. Твърдим, че A_L е дет. Нека $([w]_{\sim_L}, a, [wa]_{\sim_L}), ([w']_{\sim_L}, a, [w'a]_{\sim_L}) \in \Delta_L$ и $[w]_{\sim_L} = [w']_{\sim_L}$. Тогава $w \sim_L w'$, т.е. за вс. $u \in \Sigma^*$, $wu \in L \iff w'u \in L$ $\Rightarrow$ $(wa)u \in L \iff w(au) \in L \iff w'(au) \in L \iff (w'a)u \in L$. Оттук $wa \sim_L w'a$ и значи $[wa]_{\sim_L} = [w'a]_{\sim_L} \Rightarrow A_L$ е дет.

Тв. 4 Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е т.че $\sim_L$ има краен индекс. Тогава за вс. $w \in \Sigma^*$, $(q_{0L}, w) \vdash^*_{A_L} [w]_{\sim_L}$. В частност $L(A_L) = L$.

Следствие (Теорема на Майхил-Нероуд): Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Тогава L е автоматен (регулярен) $\iff \sim_L$ има краен индекс.

Опр Нека A е краен дет. и тот. авт. за $L \subseteq \Sigma^*$. Ще казваме, че A е минимален за L, ако за вс. тот. и дет. A' с $L(A') = L$, бр. на със. на A е $\le$ на бр. на със. на A'.

Опр Нека $A_1 = (Q_1, q_{01}, \Delta_1, F_1)$ и $A_2 = (Q_2, q_{02}, \Delta_2, F_2)$ са крайни авт. и нека $h: Q_1 \to Q_2$. Ще казваме, че h е изоморфизъм, ако:

1) h е биекция
2) $h(q_{01}) = q_{02}$
3) $(q, a, q') \in \Delta_1 \iff (h(q), a, h(q')) \in \Delta_2$ за вс. $q, q' \in Q_1$ и $a \in \Sigma$
4) $h(F_1) = F_2$

Теорема: Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е автоматен. Тогава A_L е единственият, с точност до изоморфизъм, минимален (тот. и дет.) авт. за L.

Д-во: Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е автоматен. Тогава $\sim_L$ има краен индекс и $\Rightarrow A_L$ е тот. и дет. кр. авт. с $L(A_L) = L$. При това A_L е минимален за L. (Тв.3)
Нека сега $A = (Q, q_0, \Delta, F)$ е тот. и дет. авт. с $L(A) = L$, който има точно толкова съст., колкото и A_L, т.е. A е също мин. авт. за L. Тогава съгласно Тв.3, за вс. $w, w' \in \Sigma^*$, $w \sim_L w' \iff w \sim_A w'$.
Да разгледаме изобр. $h : Q_L \to Q$ деф. с $h([w]_{\sim_L}) = q$, където $R_A(w) = q$, за $w \in \Sigma^*$

Коректност: Нека $[w]_{\sim_L} = [w']_{\sim_L}$. Тогава $w \sim_L w'$ и значи $w \sim_A w'$. Оттук
$R_A(w) = R_A(w') \Rightarrow h([w]_{\sim_L}) = h([w']_{\sim_L})$

1) h е биекция: 1.1) h е инекция: Нека $h([w]_{\sim_L}) = h([w']_{\sim_L})$. Тогава $R_A(w) = R_A(w')$, откъдето $w \sim_A w' \Rightarrow w \sim_L w'$. Оттук $[w]_{\sim_L} = [w']_{\sim_L} \Rightarrow h$ е инекция.

1.2) h е сюрекция: Нека $q \in Q$. Т.к. бр. на ел. на Q съвпада с бр. на ел. на $\Sigma^*/_{\sim_{L(A)}} \Rightarrow$ и с бр. на ел. на $\Sigma^*/_{\sim_A}$, q е достижимо съст. Оттук $(q_0, w) \vdash_A^* q$ за някое $w \in \Sigma^*$, т.е. $R_A(w) = q$. Оттук $h([w]_{\sim_L}) = q \Rightarrow h$ е сюрекция.

2) $\underline{h(q_{0L}) = q_0}$: $h(q_{0L}) = h([\varepsilon]_{\sim_L}) = q_0$

3) $\underline{(q, a, q') \in \Delta_L \iff (h(q), a, h(q')) \in \Delta}$:

$(q, a, q') \in \Delta_L \iff q = [w]_{\sim_L}, q' = [wa]_{\sim_L}$ за някое $w \in \Sigma^* \iff h(q) = q_1$,
$h(q') = q_1'$, където $\{q_1\} = R_A(w)$ и $\{q_1'\} = R_A(wa)$ за някое $w \in \Sigma^*$
$\Rightarrow (h(q), a, h(q')) \in \Delta$
Обратно, нека $(h(q), a, h(q')) \in \Delta$ и нека $q = [w]_{\sim_L}$ и $q' = [w']_{\sim_L}$. Тогава
$R_A(w) = \{h(q)\}$ и $R_A(w') = \{h(q')\}$. Тогава $(q_0, w) \vdash_{A}^{*} h(q) \Rightarrow (q_0, wa) \vdash_{A}^{*} h(q')$.
Оттук $R_A(wa) = \{h(q')\} \Rightarrow wa \sim_A w' \Rightarrow wa \sim_L w'$.
$\Rightarrow (h(q), a, h(q')) \in \Delta \Rightarrow h(q) = q_1, h(q') = q_1'$, където $R_A(w) = \{q_1\}$, $\{q_1'\} = R_A(wa)$
за някое $w \in \Sigma^*$.

4) $\underline{h(F_L) = F}$: $q_1 \in h(F_L) \iff q_1 = h(q)$ за някое $q \in F_L \iff q_1 = h([w]_{\sim_L})$ за някое $w \in L$
$\iff$ $(q_0, w) \vdash_A^* q_1$ за някое $w \in L \iff q_1 \in F$

От 1), 2), 3), 4) $\Rightarrow h$ е изоморфизъм.

ДМ-1

8.3.2015г.

Тв. Нека $A=(Q,q_0,\Delta,F)$ е кр. авт. над Σ. Нека $G=(\Gamma,\Sigma,q_0,R)$ е к.с.г., където $(\Sigma\cap Q=\emptyset)$ $\Gamma=Q\cup\Sigma$, а $R=\{q\to aq' \mid (q,a,q')\in\Delta\}\cup\{q\to\varepsilon \mid q\in F\}$. Тогава $L(A)=L(G)$.

Д-во: 1) Ще док., че ако $q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}w$, то $w=w'q$, където $w'\in\Sigma^*$ и $q\in Q$ или $w\in\Sigma^*$

Инд. по дължината на извода на w:

а) дължина на извода 0. Тогава $w=q_0=\varepsilon.q_0$ и $\varepsilon\in\Sigma^*$

б) дължина $n+1$ $\Rightarrow$ $q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}w_1$ за n стъпки и $w_1\underset{G}{\Rightarrow}w$. Съгласно инд. предп. $w_1=w_1'q_1$, където $w_1'\in\Sigma^*$ и $q_1\in Q$ или $w_1'\in\Sigma^*$. Т.к. $w_1\underset{G}{\Rightarrow}w$, $w_1\notin\Sigma^*\Rightarrow w_1=w_1'q_1$

Оттук, т.к. q_1 е единств. нетерминален символ на w_1, $w=\underbrace{w_1'}_{\in\Sigma^*}a\underbrace{q'}_{\in Q}$, за някои $a\in\Sigma$, $q\in Q$ т.че $(q_1,a,q')\in\Delta$ или $w=w_1'\in\Sigma^*$

2) За $\forall w\in\Sigma^*\ \forall q\in Q$, $q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}wq\Leftrightarrow(q_0,w)\vdash_{A^*}q$

Инд. по w: а) $w=\varepsilon$. Имаме $q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}wq\Leftrightarrow q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}q\Leftrightarrow q=q_0\Leftrightarrow(q_0,\varepsilon)\vdash_{A^*}q$

б) $w=w'a$, за някое $a\in\Sigma$ и $w'\in\Sigma^*$, за което w' е в сила инд. предп.

Тогава $q_0\underset{G}{\Rightarrow}wq\Leftrightarrow q_0\underset{G}{\Rightarrow}w'aq\Leftrightarrow q_0\underset{G}{\Rightarrow}w'q'$, за някое $q'\in Q$, т.че $q'\to aq\in R\Leftrightarrow$ $(q_0,w')\vdash_{A^*}q'$ за някое $q'\in Q$, т.че $(q',a,q)\in\Delta\Leftrightarrow(q_0,w'a)\vdash_{A^*}q$

3) $\underline{L(G)=L(A)}$: Нека $w\in\Sigma^*$. Тогава $w\in L(G)\Leftrightarrow q_0\underset{G^*}{\Rightarrow}w\underset{(1)}{\Leftrightarrow}q_0\Rightarrow wq$, за някое $q\in Q$, т.че $q\to\varepsilon\in R\underset{(2)}{\Leftrightarrow}(q_0,w)\vdash_{A^*}q$ и $q\in F\Leftrightarrow w\in L(A)$.

Сл. $\forall$ авт. (рег.) език е контекстносвободен. $(\{a^nb^n \mid n\geq 0\}$ не е рег., но е к.с.$)$

Тв. Вс. краен език е к.с.

Д-во: Нека $L\subseteq\Sigma^*$ и $L=\{w_1,\dots,w_n\}$, $n\geq 0$. Нека $G=(\{S\}\cup\Sigma,\Sigma,S,R)$, където $R=\{S\to w_i \mid 1\leq i\leq n\}$. Тогава $S\underset{G^*}{\Rightarrow}w\Leftrightarrow w=w_i$, за някое $1\leq i\leq n\Rightarrow L(G)=L$

Тв Нека $G_i=(\Gamma_i,\Sigma,S_i,R_i)$, $i=1,2$ са к.с.г., т.че $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\Sigma$.

Нека G е к.с.г. $G=(\Gamma,\Sigma,S,R)$, където $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{S\}$, $S\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$, а $R=R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1|S_2\}$

Тогава $L(G)=L(G_1)\cup L(G_2)$

Д-во. $\Rightarrow$) $\underline{L(G_1)\cup L(G_2)\subseteq L(G)}$: Т.к. $R_i\subseteq R$, за $i=1,2$, ако $w\underset{G_i^*}{\Rightarrow}w'$, то $w\underset{G^*}{\Rightarrow}w'$, за $i=1,2$.

Нека $1\leq i\leq 2$ и $w\in L(G_i)$. Тогава $S_i\underset{G_i^*}{\Rightarrow}w$ и значи $S_i\underset{G^*}{\Rightarrow}w$. От др. страна $S\underset{G}{\Rightarrow}S_i$

$\Rightarrow S\underset{G^*}{\Rightarrow}w$, т.е. $w\in L(G)$.

$\Leftarrow$) Т.к. $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\Sigma$, т.е. G_1,G_2 нямат общи нетерминални символи, ако $w\in\Gamma_i^*$ и $w\underset{G}{\Rightarrow}w'$, то тогава $w'\in\Gamma_i^*$ и $w\underset{G_i}{\Rightarrow}w'\Rightarrow$ ако $w\in\Gamma_i^*$ и $w\underset{G^*}{\Rightarrow}w'$, то $w'\in\Gamma_i^*$ и $w\underset{G_i^*}{\Rightarrow}w'$. Нека $w\in L(G)$. Тогава $S\underset{G^*}{\Rightarrow}w$. От вида R следва, че $S\underset{G}{\Rightarrow}S_i$ и $S_i\underset{G^*}{\Rightarrow}w$ за някое $1\leq i\leq 2$. Но $S_i\in\Gamma_i^*\Rightarrow w\in\Gamma_i^*$ и $S_i\underset{G_i^*}{\Rightarrow}w$. Но $w\in\Sigma^*\Rightarrow w\in L(G_i)$

Тв: Нека $G_1=(\Gamma_1,\Sigma,S_1,R_1)$ и $G_2=(\Gamma_2,\Sigma,S_2,R_2)$, като $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\Sigma$. Нека G е к.с.г. $G=(\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{S\},\Sigma,S,R)$, където $R=R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1S_2\}$ и $S\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Тогава $L(G)=L(G_1)L(G_2)$

Д-во: $\underline{L(G_1)\cup L(G_2)\subseteq L(G)}$: Както в предното тв., ако $S_i\underset{G_i^*}{\Rightarrow}w$, то $S_i\underset{G^*}{\Rightarrow}w$ $(R_1,R_2\subseteq R)$.

Нека $w\in L(G_1)L(G_2)$. Тогава $w=w_1w_2$ за някои $w_1\in L(G_1)$ и $w_2\in L(G_2)\Rightarrow S_1\underset{G_1^*}{\Rightarrow}w_1$ и $S_2\underset{G_2^*}{\Rightarrow}w_2$. Оттук $S_1\underset{G^*}{\Rightarrow}w_1$ и $S_2\underset{G^*}{\Rightarrow}w_2$. От др. страна $S\underset{G}{\Rightarrow}S_1S_2\Rightarrow S\underset{G^*}{\Rightarrow}w_1w_2$. Оттук $w=w_1w_2\in L(G)$

Благодаря ти :D

(2) $L(G) \subseteq L(G_1)L(G_2)$. Както в предното твърдение, ако $w' \in \Gamma_1^*$ и $w' \underset{G^*}{\Rightarrow} w$, то $w \in \Gamma_1^*$ и $w' \underset{G_1^*}{\Rightarrow} w$. Нека $w \in L(G)$, т.е. $S \underset{G^*}{\Rightarrow} w$ и $w \in \Sigma^*$. Тогава $S \underset{G}{\Rightarrow} S_1S_2$ и $S_1S_2 \Rightarrow w$. Оттук $w = w_1w_2$ за някои w_1, w_2, такива че $S_1 \underset{G^*}{\Rightarrow} w_1$ и $S_2 \underset{G^*}{\Rightarrow} w_2$. Но $S_1 \in \Gamma_1^*$, $S_2 \in \Gamma_2^*$ и значи $S_1 \underset{G_1^*}{\Rightarrow} w_1$ и $S_2 \underset{G_2^*}{\Rightarrow} w_2$. Сл. $w_1 \in L(G_1)$ и $w_2 \in L(G_2)$.

Пр. Нека G_1, G_2 са граматики над $\Sigma = \{a, b\}$ и R_1: $S_1 \to \varepsilon \mid aS_1b$, R_2: $S_2 \to aA \mid bB$, $A \to a \mid bB$, $B \to A \mid abB$
и начални символи S_1, S_2.

Гр. G' с $L(G') = L(G_1) \cup L(G_2)$ е гр. над Σ с правила: R: $S' \to S_1 \mid S_2$
R_1 [$S_1 \to \varepsilon \mid aS_1b$
R_2 { $S_2 \to aA \mid bB$, $A \to a \mid bB$, $B \to A \mid abB$

Начален символ S'.

Пример за извод в G': $S' \underset{G'}{\Rightarrow} \underbrace{S_2 \underset{G'}{\Rightarrow} bB \Rightarrow bA \underset{G'}{\Rightarrow} bbB \underset{G'}{\Rightarrow} bbA \underset{G'}{\Rightarrow} bba}_{G_2}$

Гр. G'' с $L(G'') = L(G_1)L(G_2)$ е гр. над Σ с правила: R'': $S'' \to S_1S_2$, $S_1 \to \varepsilon \mid aS_1b$, $S_2 \to aA \mid bB$, $A \to a \mid bB$, $B \to A \mid abB$

Начален символ е S''.

извод в G'': $S'' \underset{G''}{\Rightarrow} S_1S_2 \underset{G''}{\Rightarrow} S_1bB \underset{G''}{\Rightarrow} aS_1bbB \underset{G''}{\Rightarrow} aS_1bbA \underset{G''}{\Rightarrow} aS_1bba \underset{G''}{\Rightarrow} abba$

Тв. Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е к.с.г. Нека G' е к.с. граматика $G' = (\Gamma', \Sigma, S', R')$, където $\Gamma' = \Gamma \cup \{S'\}$, $S' \notin \Gamma$, $R' = R \cup \{S' \to \varepsilon \mid SS'\}$. Тогава $L(G') = L(G)^*$.

Д-во: $L(G)^* \subseteq L(G')$: Т.к. $R \subseteq R'$, ако $S \underset{G^*}{\Rightarrow} w$, то $S \underset{G'^*}{\Rightarrow} w$. Нека фикс. $w \in L(G)^*$.

1 сл.) $w = \varepsilon$. Тогава $S' \underset{G'}{\Rightarrow} \varepsilon = w \Rightarrow w \in L(G')$

2 сл.) $w \neq \varepsilon$. Тогава $w = w_1 \dots w_n$ за някое $n \geq 1$ и $w_1, \dots, w_n \in L(G)$. Оттук $S \underset{G}{\Rightarrow} w_i$ за $1 \leq i \leq n$ и значи $S \underset{G'^*}{\Rightarrow} w_i$ за $1 \leq i \leq n$. При това $S' \underset{G'}{\Rightarrow} SS' \underset{G'}{\Rightarrow} SSS' \Rightarrow \dots \underset{G'}{\Rightarrow} S^nS' \underset{G'}{\Rightarrow} S^n = \underbrace{SS\dots S}_{n}$

Оттук $S' \underset{G'^*}{\Rightarrow} \underbrace{SS\dots S}_{n} \underset{G'^*}{\Rightarrow} w_1\underbrace{S\dots S}_{n-1} \underset{G'^*}{\Rightarrow} w_1w_2\underbrace{S\dots S}_{n-2} \Rightarrow \dots \underset{G'^*}{\Rightarrow} w_1 \dots w_n = w \Rightarrow w \in L(G')$

Пр. Нека G е гр. с нач. символ S и правила $S \to \varepsilon \mid aSb$ (a, b са терминали).
Гр. G' с $L(G') = L(G)^*$ е гр. с нач. символ S' и правила R': $S' \to \varepsilon \mid SS'$, $S \to \varepsilon \mid aSb$

извод в G': $S' \underset{G'}{\Rightarrow} SS' \underset{G'}{\Rightarrow} SSS' \Rightarrow aSbS' \Rightarrow aSbaSbS' \Rightarrow$
$\Rightarrow aSbaSbSS' \Rightarrow aaSbbaSbSS' \Rightarrow aaaSbbbaSbSS' \Rightarrow aaaSbbbaSbaSbS' \Rightarrow$
$\Rightarrow aaabbbabaSbS' \Rightarrow aaabbbababS' \Rightarrow \underbrace{aaabbb}_{\in L(G)}\underbrace{ab}_{\in L(G)}\underbrace{ab}_{\in L(G)}$

Сл. Вс. рег. език е к.с.

№14 Лема за разрастването на КСЕ.

Теорема (лема за разрастването): Нека L е КСЕ. Тогава $\exists n (n>0)$, т.че за вс. $w \in L$ с $|w|>n$ можем да намерим думи x, y, z, u и v, т.че $w = xyzuv$, $|yzu| \leq n$, $|yu|>0$ и за вс. $i \geq 0$, $xy^i z u^i v \in L$.

Д-во. Нека $G=(\Gamma, \Sigma, S, R)$ е КСГ, т.че $L(G)=L$. Нека m е т.че за вс. $A \to w \in R$ $|w| \leq m$ и нека h е равно на бр. на нетерм. символи на G (т.е. $h = |\Gamma \setminus \Sigma|$).
Да разгл. числото $n = m^h$. Нека сега $w \in L$ и $|w|>n$. От $w \in L \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$. Тогава $\exists$ думи $w_0, \dots, w_k \in \Gamma^*$, т.че $S = w_0 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \dots \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_k = w$ и за вс. $i<k$, w_{i+1} се получава от w_i, заменяйки (едновременно) вс. нетерм. символи на w_i съгласно правилата R. Можем да считаме, че вс. дума w_i, за $i<k$ съдържа нетерм. символ. Нека A_{k-1} е нетерм. символ от w_{k-1}. Нека той се получава от нетерм. символ A_{k-2} от w_{k-2} съгласно някое правило на R. Продължавайки така, получаваме редица от символи $A_0 = S, A_1, \dots, A_{k-1}$, т.че за $0 \leq i \leq k-1$, A_i е от w_i и A_{i+1} се получава от A_i чрез някое правило на R. Да забележим, че
$|w_i| \leq m^i$: инд. по i: $i=0$, $|w_i| = |w_0| = |S| = 1 = m^0 = m^i$. Нека сега е в сила инд. предп. за i, т.е. $|w_i| \leq m^i$. Т.к. w_{i+1} се получава от w_i, заменяйки вс. нетерм. символи на w_i съгласно правилата на R. В най-лошия случай вс. нетерм. символ на w_i е бил заменен с правило с дясна част с дължина $m \Rightarrow |w_{i+1}| \leq \underbrace{m+m+\dots+m}_{|w_i|} = m|w_i| \leq m^{i+1}$.
Т.к. $n = m^h < |w| = |w_k| \leq m^k$, $h<k$. Оттук поне два от символите $A_0, \dots, A_{k-1}$ съвпадат.
Нека $0 \leq i_1 < i_2 \leq k-1$ са т.че $A_{i_1} = A_{i_2}$ и за вс. $i_1 \leq j_1 < j_2 < i_2$, $A_{j_1} \neq A_{j_2}$, т.е. символите $A_{i_1}, A_{i_1+1}, \dots, A_{i_2-1}$ са два по два различни. Б.О.О. можем да считаме, че i_1, i_2 са най-големите числа с това св-во. Оттук $k - i_1 \leq h$. Нека $S_i^{(j)}$ и $P_i^{(j)}$, за $j \geq i$ са думи, т.че $w_q = P_1^{(q)} P_2^{(q)} \dots P_q^{(q)} A_q S_q^{(q)} \dots S_2^{(q)} S_1^{(q)}$ и за вс. i, j $P_i^{(j+1)}$ се получава от $P_i^{(j)}$ заменяйки нетерм. символи, $S_i^{(j+1)}$ се получава от $S_i^{(j)}$, заменяйки едновр. вс. нетерм. символи $(j>i)$ и $A_i \to P_{i+1} A_{i+1} S_{i+1}$ е правило на R.
Имаме, че за вс. i, $P_i^{(j)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P_i^{(j+1)}$ и $S_i^{(j)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} S_i^{(j+1)}$. Оттук за $1 \leq j \leq j'$, $S_i^{(j)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} S_i^{(j')}$, $P_i^{(j)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P_i^{(j')}$.
Нека $x = P_1^{(k)} \dots P_{i_1}^{(k)}$, $y = P_{i_1+1}^{(k)} \dots P_{i_2}^{(k)}$, $z = P_{i_2+1}^{(k)} \dots P_k^{(k)} S_k^{(k)} \dots S_{i_2+1}^{(k)}$, $u = S_{i_2}^{(k)} \dots S_{i_1+1}^{(k)}$ и $v = S_{i_1}^{(k)} \dots S_2^{(k)} S_1^{(k)}$.

Имаме $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_{i_1} = P_1^{(i_1)} P_2^{(i_1)} \dots P_{i_1}^{(i_1)} A_{i_1} S_{i_1}^{(i_1)} \dots S_2^{(i_1)} S_1^{(i_1)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P_1^{(k)} P_2^{(k)} \dots P_{i_1}^{(k)} A_{i_1} S_{i_1}^{(k)} \dots S_2^{(k)} S_1^{(k)} = \underline{x A_{i_1} v}$

$$A_{i_1} \underset{G}{\Rightarrow} P_{i_1+1}^{(i_1+1)} A_{i_1+1} S_{i_1+1}^{(i_1+1)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P_{i_1+1}^{(k)} P_{i_1+2}^{(i_1+2)} A_{i_1+2} S_{i_1+2}^{(i_1+2)} S_{i_1+1}^{(k)} \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{P_{i_1+1}^{(k)} P_{i_1+2}^{(k)} \dots P_{i_2}^{(k)}}_{y} A_{i_2} \underbrace{S_{i_2}^{(k)} \dots S_{i_1+2}^{(k)} S_{i_1+1}^{(k)}}_{u} = \underline{y A_{i_2} u}$$

$$A_{i_2} \underset{G}{\Rightarrow} P_{i_2+1}^{(i_2+1)} A_{i_2+1} S_{i_2+1}^{(i_2+1)} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} P_{i_2+1}^{(k)} P_{i_2+2}^{(i_2+2)} A_{i_2+2} S_{i_2+2}^{(i_2+2)} S_{i_2+1}^{(k)} \Rightarrow \dots \Rightarrow P_{i_2+1}^{(k)} P_{i_2+2}^{(k)} \dots P_k^{(k)} S_k^{(k)} \dots S_{i_2+2}^{(k)} S_{i_2+1}^{(k)} = \underline{z}$$

$$\Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x A_{i_1} v \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} xy A_{i_2} uv = xy A_{i_1} uv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} xyy A_{i_2} uuv = xy^2 A_{i_1} u^2 v \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \dots \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} xy^i A_{i_2} u^i v \Rightarrow xy^i z u^i v.$$

Следствие. $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не е КС.

Д-во: Нека $n \in \mathbb{N}$ и да разгл. $w = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}$. Имаме $w \in L$ и $|w|>n$. Нека $w = xyzuv$, където x, y, z, u, v са думи и $|yzu| \leq n$. Тогава yzu или не съдържа a или не съдържа b ($|yu| \geq 1$). Нека например yzu не съдържа c. Тогава $yzu = a^k b^s$, където $k+s \leq n$. Т.к. $|yu| \geq 1$, $z = a^{k'} b^{s'}$ за някои $k' \leq k$, $s' \leq s$, т.че $k'+s' < k+s$. Оттук $xzv = xy^0 z u^0 v = a^{n+1-(k-k')} b^{n+1-(s-s')} c^{n+1}$.
Т.к. $k'+s' < k+s$ и $k' \leq k$, $s' \leq s$, имаме $n+1-(k-k') < n+1$ или $n+1-(s-s') < n+1 \Rightarrow \underline{xzv \notin L}$.
Оттук и лемата за разрастването L не е КСЕ.

Тв. КСЕ не са затворени относно операцията сечение.

Д-во: Нека $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 0\}$ и $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$. Имаме $L_1 = L_{11}L_{12}$ и $L_2 = L_{21}L_{22}$, където $L_{11} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_{12} = \{c^m \mid m \geq 0\}$, $L_{21} = \{a^n \mid n \geq 0\}$, $L_{22} = \{b^m c^m \mid m \geq 0\}$. Езиците $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ са КС $\Rightarrow L_1, L_2$ са КС. От друга страна $L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не е КС.

Сл. КСЕ не са затворени относно операцията допълнение, т.е. ако $L \subseteq \Sigma^*$ е КС, не е задължително езикът $\Sigma^* \setminus L$ да бъде КС.

Д-во: Нека Σ е азбука и нека за $L \subseteq \Sigma^*$ с $\overline{L}$ означим езика $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$.
Тогава $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$. Т.к. $\cup$ запазва КС на езиците, не е задължително, ако L е КС, $\overline{L}$ също да е КС (в противен случай сечение на два КС езика също е КС)

Нормална форма на Чомски

Опр. Нека $G=(\Gamma,\Sigma,S,R)$ е КСГ. Ще казваме G е в норм. форма на Чомски, ако за вс. правило $A\to w$ в R е в сила $|w|=2$.

Свойства: Нека $G=(\Gamma,\Sigma,S,R)$ е КСГ в н.ф.ч.

1) $\varepsilon\notin L(G)$; 2) $\forall a\in\Sigma$, $a\notin L(G)$; 3) $\forall w\in\Gamma^*$, $\forall a\in\Sigma$ имаме $w \underset{G^*}{\Rightarrow} a \Leftrightarrow w=a$

4) $\forall w,w'\in\Gamma^*$, ако $w\underset{G^*}{\Rightarrow} w'$, то $|w'|>|w|$.

Алгоритъм за разпознаване на $w\in L(G)$:

Нека $G=(\Gamma,\Sigma,S,R)$ е КСГ в н.ф.ч. Нека $w\in\Sigma^*$. Ако $|w|<2$, то $w\notin L(G)$. За това нека $|w|=n\geq 2$ и нека $w=a_1\ldots a_n$ $(a_1,\ldots,a_n\in\Sigma)$. За вс. $1\leq i\leq j\leq n$ опр. мн. $N[i,j]\subseteq\Gamma$ чрез следната индукция (по $j-i$): (i) $N[i,i]=\{a_i\}$; (ii) $N[i,j]=\{A\in\Gamma \mid \exists i\leq k<j$ и $A_1\in N[i,k]$ и $A_2\in N[k+1,j]$, т.че $A\to A_1A_2\in R\}$

не е задължително A_1, A_2 да са нетерминали

Теорема: За вс. $1\leq i\leq j\leq n$ е в сила $N[i,j]=\{A\in\Gamma \mid A\underset{G^*}{\Rightarrow} a_i a_{i+1}\ldots a_j\}$.
В частност $w\in L(G) \Leftrightarrow S\in N[1,n]$.

Д-во: инд. по $j-i$: (i) $j-i=0$, т.е. $j=i$. Тогава $A\in N[i,i]\Leftrightarrow A=a_i \Leftrightarrow A\underset{G^*}{\Rightarrow} a_i$

(ii) Нека сега т.е. е вярно за вс. $1\leq i'\leq j'\leq n$ с $j'-i'<j-i$. Тогава за вс. $A\in\Gamma$

$A\underset{G^*}{\Rightarrow} a_i a_{i+1}\ldots a_j \Leftrightarrow A\underset{G}{\Rightarrow} A_1A_2$ и $A_1\underset{G^*}{\Rightarrow} w_1$, $A_2\underset{G^*}{\Rightarrow} w_2$ за някои w_1,w_2, т.че $w_1w_2=a_ia_{i+1}\ldots a_j \Leftrightarrow$ $\exists k\in[i,j)$ и $A_1,A_2\in\Gamma$, т.че $A\to A_1A_2\in R$ и $A_1\underset{G^*}{\Rightarrow} a_ia_{i+1}\ldots a_k$, $A_2\underset{G^*}{\Rightarrow} a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_j \Leftrightarrow \exists k\in[i,j]$ и $A_1,A_2\in\Gamma$, т.че $A\to A_1A_2\in R$ и $A_1\in N[i,k]$ и $A_2\in N[k+1,j] \Leftrightarrow A\in N[i,j]$

Пр. Нека G е КСГ с нач. символ S, терминали $($, $)$ и правила R: $S\to ()\mid (A\mid SS$
$A\to S)$

$w=()(()())$

							)	8
						)	∅	7
					(	S	A	6
				)	∅	∅	∅	5
			(	S	∅	S	$\boxed{A}$	4
		(	∅	∅	∅	∅	S	3
	)	∅	∅	∅	∅	∅	∅	2
(	S	∅	∅	∅	∅	∅	S	1
1	2	3	4	5	6	7	8	

$A\underset{G^*}{\Rightarrow} ()())$

$N[1,8] \ni S \Rightarrow w\in L(G)$

$N[3,5]$

Сложност: Нека $|w| = n \geq 2$

$$n\cdot 1 + (n-1)\cdot 1 + (n-2)\cdot 2 + (n-3)\cdot 3 + \dots + 1\cdot(n-1) = n(1 + \dots + n-1) + n\cdot 1 - (1^2 + \dots + (n-1)^2)$$

$$\approx n^3$$

Алгоритъм за привеждане на КСГ G в НФЧ.

Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е КСГ.

I. Премахване на дългите правила: Обр. граматика $G' = (\Gamma', \Sigma, S, R')$, като R' се получава от R, заменяйки вс. правило $\underbrace{A \to X_1X_2\dots X_k}_{\in R}$, $k \geq 3$, $X_1, \dots, X_k \in \Gamma$ със серия от правила

$A \to X_1A_1$, $A_1 \to X_2A_2, \dots, A_{k-2} \to X_{k-1}X_k$, $A_1, \dots, A_{k-2}$ са нови нетерминални символи.

Пр. G: нач. S,
R: $S \to \varepsilon \mid SASA$
$A \to aB \mid cA \mid SS$
$B \to c \mid AB$

G': R': $S \to \varepsilon \mid SS_1$
$S_1 \to AS_2$
$S_2 \to SA$
$A \to \dots$
$B \to \dots$

Лема 1: 1) $L(G) = L(G')$. 2) за вс. $A \to w \in R'$, $|w| \leq 2$

II. Премахване на ε-правилата:

Нека $E = \{A \in \Gamma' \mid A \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} \varepsilon\}$. Обр. граматика $G'' = (\Gamma', \Sigma, S, R'')$,

където $R'' = (R' \setminus \{A \to \varepsilon \mid A \in \Gamma'\}) \cup \{A \to B \mid \exists C \in E, \text{ т.че } A \to BC \in R' \text{ или } A \to CB \in R'\}$

Лема 2: $L(G'') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Заб.: мн. E можем да получим чрез следния алгоритъм:

1) $E_0 = \emptyset$

2) $E_{i+1} = \{A \in \Gamma \mid \exists w \in E_i^*: A \to w \in R'\}$ $(\cup E_i)$

Нека m е най-малкото, за което $E_{m+1} = E_m$. Тогава $E = E_m$

E: $E_0 = \emptyset$, $E_0^* = \{\varepsilon\}$
$E_1 = \{S\}$, $E_1^* = \{\varepsilon, S, SS, \dots\}$
$E_2 = \{S, A\}$, $E_2^* = \{\varepsilon, A, S, SS, AS, \dots\}$
$E_3 = \{S, A, S_2\}$, $E_3^* = \{\varepsilon, A, S, S_2, SS, \dots\}$
$E_4 = \{S, A, S_2, S_1\}$
$E_5 = \{S, S_1, S_2, A\} = E_4 = E$

$E = \{S, S_1, S_2, A\}$
R'': $S \to SS_1 \mid S_1 \mid S$
$S_1 \to AS_2 \mid A \mid S_2$
$S_2 \to SA \mid A \mid S$
$A \to aB \mid cA \mid c \mid SS \mid S$
$B \to c \mid AB \mid B$

III. Премахване на правилата с дължина 1.

За вс. символ (независимо дали терм. или нетерм.) $X \in \Gamma$ образуваме

$D(X) = \{Y \in \Gamma \mid X \overset{*}{\underset{G''}{\Rightarrow}} Y\}$. Обр. $G''' = (\Gamma', S, \Sigma, R''')$, където $R''' = \{A \to X'Y' \mid \exists X, Y \in \Gamma', \text{ т.че } A \to XY \in R'' \text{ и } X' \in D(X),$ а $Y' \in D(Y)\} \cup \{S \to XY \mid \exists A \in D(S), \text{ т.че } A \to XY \in R''\}$

Лема 3: $L(G''') = L(G) \setminus (\{\varepsilon\} \cup \Sigma)$

Заб. $D(X)$ можем да сметнем чрез следния алгоритъм:
1) $D_0(X) = \{X\}$, 2) $D_{i+1}(X) = \{Y \in \Gamma' \mid \exists Z \in D_i(X): Z \to Y \in R''\}$

$D(a) = \{a\}$, $D(c) = \{c\}$
$D(S) = \{S, S_1, S_2, A, c\}$
$D(S_1) = \{S_1, S_2, A, S, c\}$
$D(S_2) = \{S_2, A, S, S_1, c\}$
$D(A) = \{A, c, S, S_1, S_2\}$
$D(B) = \{B, c\}$

R''': $S \to D(S)\cdot D(S_1)$
$S_1 \to AS_2 \to D(A)\cdot D(S_2)$
$S_2 \to D(S)\cdot D(A)$
$B \to AB \to B \to D(A)\cdot D(B)$
$A \to aB \mid ac$
$A \to cA \mid cc \mid cS \mid cS_1 \mid cS_2$
$A \to SS \dots$