Задачи за теоретичен изпит по Дискретна математика

2013/2014

Задача 1 Докажете, че множествата $\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ е крайно}\}$ и $\mathbb{N}$ са равномощни.

Задача 2 Докажете, че множествата $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ са равномощни.

Задача 3 Нека $G = (V, E)$ е ацикличен прост граф с $n > 0$ върха и нека $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Нека $d(v_i) = ||\{v_j \mid \{v_i, v_j\} \in E\}||$ за $i = 1, 2, \dots n$. Докажете, че

1. $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2||E||$,
2. $d(v_i) = d(v_j)$ за някои $1 \leq i < j \leq n$.

Задача 4 Нека $G = (V, E)$ е ацикличен прост граф с $n > 0$ върха и нека $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Нека $d(v_i) = ||\{v_j \mid \{v_i, v_j\} \in E\}||$ за $i = 1, 2, \dots n$ и нека m е най-малкото сред числата $d(v_1)$, $d(v_2)$, ..., $d(v_n)$. В случай, че $m \geq \frac{n-1}{2}$, докажете, че G е свързан.

Задача 5 Нека $G = (V, E)$ е прост ацикличен граф. Казваме, че G е двуделен, ако върховете на G могат да бъдат разделени на две непразни множества, така че между кои да е два върха, намиращи се в различни множества, да няма ребро. С други думи графът е двуделен, ако съществуват множества $V_1, V_2 \subsetneq V$, такива че $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ и за всяко $v_1 \in V_1$ и всяко $v_2 \in V_2$, $\{v_1, v_2\} \notin E$. Докажете, че ако един двуделен граф има повече от $\frac{(n-1)^2}{2}$ ребра, то той е свързан.

Задача 6 Нека $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ е булевата функция действаща по правилото

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Колко решения има уравнението $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$?

Задача 7 Да се докаже, че следните класове от булеви функции са пълни:

1. $(S \cap M) \cup (L \setminus M)$;
2. $(L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$;
3. $(M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$.

Задача 8 Да се докаже, че следните класове от булеви функции *не* са пълни:

1. $(L \cap T_1 \cap T_0) \cup (S \setminus (T_0 \cup T_1))$;
2. $(L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
3. $(M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$.

Задача 9 Нека $\mathcal{F}$ е множество от двоични функции на $n \geq 2$ аргумента, такова че $||\mathcal{F}|| > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$. Докажете, че $\mathcal{F}$ е пълно.

Задача 10 Нека $\mathcal{F}$ е множество от двоични функции на $n \geq 2$ аргумента, такова че $||\mathcal{F} \setminus (T_0 \cup T_1)|| > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}$. Докажете, че $\mathcal{F}$ е пълно.

Задача 11 Нека L е регулярен език над Σ. Вярно ли е, че езикът

$$\{w_2 w_1 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ и } w_1 w_2 \in L\}$$

е регулярен?

Задача 12 Нека L е произволен език над азбуката $\Sigma = \{1\}$. Докажете, че L^* е регулярен.

Задача 13 Нека L е език над азбуката $\Sigma = \{1\}$. Докажете, че L е регулярен тогава и само тогава, когато съществуват краен език L_0 над Σ, число $n \geq 0$ и естествени числа a_1, d_1, a_2, d_2, ..., a_n, d_n, такива че

$$L = L_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{1^{a_i + s.d_i} \mid s \geq 0\}.$$

Задача 14 Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е контекстносвободна граматика, такава че за всяко правило $A \to w \in R$, е в сила $w \in \Sigma^*(\Gamma \cup \{\varepsilon\})$. Докажете, че $L(G)$ е регулярен.

Задача 15 Нека $G = (\Gamma, \Sigma, S, R)$ е контекстносвободна граматика, такава че в Γ има k на брой букви, а M е най-голямото естествено число, за което съществува правило $A \to w \in R$, за което $|w| = M$. Докажете, че ако $\varepsilon \in L(G)$, то съществува извод на ε в G с дължина най-много $\dfrac{M^k - 1}{M - 1}$. Достига ли се тази граница?

Задача 16 Нека L е контекстносвободен език над азбуката $\Sigma = \{1\}$. Докажете, че L е регулярен.

Задача 17 Напишете алгоритъм, който по дадена контекстносвободна граматика G определя, дали:

1. $L(G) = \emptyset$;
2. $L(G)$ е безкраен.