Първо Домашно по Дискретна математика
специалност: Статистика; Приложна математика

21.10.2013

$P \Delta Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$

1. Докажете, че:

   (а) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;

   (б) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

   (в) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$;

2. Докажете, че $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ точно тогава, когато f е инекция.

3. За всяко множество A да означим с $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$ множеството на всички подмножества на A. Проверете дали съществува множество A такова, че има биекция между него и $\mathcal{P}(A)$.

4. Нека $\varphi : A \times A \to A$ е такава, че за всеки $x, y, z \in A$,

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x);$$

$$\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z);$$

$$\varphi(x, x) = x.$$

   Нека $\preceq$ е бинарна релация в A дефинирана с $x \preceq y \iff \varphi(x, y) = x$. Докажете, че

   (а) $\preceq$ е частична наредба в A;

   (б) $\varphi(x, y)$ е точната долна граница на $\{x$ ~~и~~, $y\}$ относно $\preceq$;

5. Нека $\sim$ е бинарна релация над множеството $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ на наредените двойки от положителни реални числа, дефинирана с

$$\langle x_1, y_1 \rangle \sim \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1^2 y_2 = x_2^2 y_1.$$

   Докажете, че:

   (а) $\sim$ е релация на еквивалентност;

   (б) всеки клас на еквивалентност съдържа точно един елемент от множеството $\{\langle x, y \rangle \in (\mathbb{R}^+)^2 |\ 2x^2 + y^2 = 1\}$;

z е точна долна граница на $\{x, y\}$, ако:

1. $z \preceq x$ и $z \preceq y$

2. $\forall u\, (u \preceq x$ и $u \preceq y \Rightarrow u \preceq z)$