

Понятия и формули:

- Нормално разпределение

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2), x \in \mathbb{R}, \mathbf{E}\xi = \mu, \mathbf{D}\xi = \sigma^2$$

$$\text{Ако } \eta = (\xi - \mu)/\sigma \Rightarrow \eta \sim N(0, 1)$$

- Нормално приближение на биномно разпределение

Ако $\xi \sim Bi(n, p)$, то $\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) \approx \mathbf{P}(a - 0.5 \leq \xi^* \leq b + 0.5)$, където $\xi^* \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$. Ако $(\mu \pm 2\sigma) \subset [0, n]$, приближението е добро, а ако $(\mu \pm 3\sigma) \subset [0, n]$, приближението е много добро.

Навсякъде, където не е уточнено допълнително, ще предполагаме, че $z \sim N(0, 1)$

Зад.1 Намерете $P(0 \leq z \leq 1.63)$.

Отговор: 0.4484

Зад.2 Намерете $P(-0.5 \leq z \leq 1.0)$.

Отговор: 0.5328

Зад.3 Намерете стойност z_0 , такава че 0.95 от площта лежи в границите $\pm z_0$ стандартни отклонения от средното.

Отговор: $z_0 = 1.96$

Зад.4 $\xi \in N(10, 4)$. Намерете $P(11 \leq \xi \leq 13.6) = ?$.

Отговор: 0.2726

Зад.5 Изследванията показват, че употребата на бензин при колите малък клас в САЩ, е нормално разпределена със средно 25.5 мили за галон и стандартно отклонение 4.5 мили за галон. Какъв процент от колите малък клас изминават 30 или повече мили за галон?

Отговор: 15.87%

Зад.6 Нека $x \in N(25.5, (4.5)^2)$. Намерете x_0 , такава че $P(x \leq x_0) = 0.95$.

Отговор: 32.9

Зад.7 Използвайки таблиците за нормално разпределение, намерете лицето под нормалната крива между точките:

а) $z = 0$ и $z = 1.6$ б) $z = 0$ и $z = 1.83$ в) $z = 0$ и $z = 0.90$ г) $z = 0$ и $z = -0.90$

Отговор: а) 0.4452 б) 0.4664 в) 0.3159 г) 0.3159

Зад.8 Използвайки таблиците за нормално разпределение, намерете лицето под нормалната крива между точките:

а) $z = -1.4$ и $z = 1.4$ б) $z = -2.0$ и $z = 2.0$ в) $z = -3.0$ и $z = 3.0$

Отговор: а) 0.8384 б) 0.9544 в) 0.9974

Зад.9 Използвайки таблиците за нормално разпределение, намерете лицето под нормалната крива между точките:

а) $z = -1.43$ и $z = 0.68$ б) $z = 0.58$ и $z = 1.74$ в) $z = -1.55$ и $z = -0.44$

Отговор: а) 0.6753 б) 0.2401 в) 0.2694

Зад.10 Намерете z_0 , такава че: а) $P(z > z_0) = 0.025$ б) $P(z < z_0) = 0.9251$

Отговор: а) 1.96 б) 1.44

Зад.11 Намерете z_0 , такава че: а) $P(z > z_0) = 0.9750$ б) $P(z > z_0) = 0.3594$

Отговор: а) -1.96 б) 0.36

Зад.12 Намерете z_0 , такава че $P(-z_0 < z < z_0) = 0.8262$

Отговор: 1.36

Зад.13 Намерете z_0 , такава че: а) $P(z < z_0) = 0.9505$ б) $P(z < z_0) = 0.05$

Отговор: а) 1.65 б) -1.645

Зад.14 Намерете z_0 , такова че: а) $P(-z_0 < z < z_0) = 0.90$ б) $P(-z_0 < z < z_0) = 0.99$

Отговор: а) 1.645 б) 2.575

Зад.15 Сл. вел. x е нормално разпределена със средно $\mu = 10$ и стандартно отклонение $\sigma = 2$. Намерете вероятността, че: а) $x > 13.5$ б) $x < 8.2$ в) $9.4 < x < 10.6$

Отговор: а) 0.0401 б) 0.1841 в) 0.2358

Зад.16 Сл. вел. x е нормално разпределена със средно $\mu = 1.2$ и стандартно отклонение $\sigma = 0.15$. Намерете вероятността, че: а) $1.00 < x < 1.10$ б) $x > 1.38$ в) $1.35 < x < 1.50$

Отговор: а) 0.1596 б) 0.1151 в) 0.1359

Зад.17 Случайна величина x е нормално разпределена с неизвестно средно μ и стандартно отклонение $\sigma = 2$. Ако вероятността x да надхвърля 7.5 е 0.8023, намерете средното μ .

Отговор: $\mu = 9.2$

Зад.18 Случайна величина x е нормално разпределена с неизвестно средно μ и стандартно отклонение $\sigma = 1.8$. Ако вероятността x да надхвърля 14.4 е 0.3015, намерете средното μ .

Отговор: $\mu = 13.464$

Зад.19 Случайна величина е нормално разпределена с неизвестни средно и стандартно отклонение. Знае се, че вероятността x да надхвърля 4 е 0.9772 и вероятността x да надхвърля 5 е 0.9332. Намерете μ и σ .

Отговор: $\mu = 8, \sigma = 2$

Зад.20 Разстоянието, необходимо на спирачките за спиране на кола, пътуваща с 30 мили в час, е нормално разпределено със средно 50 фута и стандартно отклонение 8 фута. Предполагаме, че пътувате с 30 мили в час в населена местност и внезапно излиза кола срещу Вас на разстояние 60 фута.

а) ако натиснете спирачките, каква е вероятността, че ще спрете в рамките на 40 или по-малко фута? а в рамките на 50 фута?

б) ако единственият начин да избегнете сблъсък е да спрете, каква е вероятността, че няма да се сблъскате?

Отговор: а) 0.1056, 0.5 б) 0.8944

Зад.21 Броят на вдишванията за минута на възрастен в покой (сл. вел. x) зависи от възрастта и варира от човек до човек. Предполагаме, че вероятностното разпределение на x е приблизително нормално със средно 16 и стандартно отклонение 4. Ако случайно е избран човек и е записан броят на вдишванията за минута при покой x , каква е вероятността, че x ще надминава 22?

Отговор: 0.0668

Зад.22 Резултатите на националния тест са приблизително нормално разпределени със средно 540 и стандартно отклонение 110.

а) ако сте постигнали резултат 680, колко далеч е, в стандартни отклонения, Вашият резултат от средното ?

б) колко процента от тези, които са издържали изпита, имат резултат по-висок от Вашия?

Отговор: а) 1.27 б) 0.1020

Зад.23 Предполагаме, че броят на даден тип бактерия в 1 мл. питейна вода е приблизително нормално разпределен със средно 85 и стандартно отклонение 9. Каква е вероятността, че извадка от 1 мл. ще съдържа повече от 100 бактерии?

Отговор: 0.0475

Зад.24 Издател открил, че броят на думите, които съдържа нов ръкопис е нормално разпределен със средно 20 000 в повече от това, което е отбелязано в договора и стандартно отклонение 10 000 думи. Ако издателят иска да е почти сигурен (да кажем с вероятност 0.95), че ръкописът ще бъде по-малко от 100 000 думи, какъв е броят думи, записан в договора?

Отговор: 63 550

Зад.25 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 25$, $p = 0.3$

а) използвайте таблиците за биомно разпределение, за да намерите $P(8 \leq x \leq 10)$

б) намерете μ и σ за биомното разпределение и използвайте нормално приближение, за да намерите $P(8 \leq x \leq 10)$. Сравнете резултата с този от подточка а).

Отговор: а) 0.390 б) 0.4049

Зад.26 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 10$, $p = 0.5$. Намерете нормално приближение на $P(x \geq 6)$.

Отговор: 0.3745

Зад.27 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 10$, $p = 0.5$. Намерете нормално приближение на $P(x > 6)$.

Отговор: 0.1711

Зад.28 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 100$, $p = 0.2$. Намерете нормално приближение на $P(x > 22)$.

Отговор: 0.2643

Зад.29 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 100$, $p = 0.2$. Намерете нормално приближение на $P(x \geq 22)$.

Отговор: 0.3520

Зад.30 Нека x е биомна сл. вел. с $n = 25$, $p = 0.2$

а) използвайте таблиците за биомно разпределение, за да намерите $P(4 \leq x \leq 6)$

б) намерете μ и σ за биомното разпределение и използвайте нормално приближение, за да намерите $P(4 \leq x \leq 6)$. Сравнете резултата с този от подточка а). Забележете, че тази стойност е добро приближение на истинската.

Отговор: а) 0.546 б) 0.5468

Зад.31 Разглеждаме биомен експеримент с $n = 20$, $p = 0.4$. Пресметнете $P(x \geq 10)$, използвайки:

а) таблиците за биомно разпределение;

б) нормално приближение за биомно вероятностно разпределение.

Отговор: а) 0.245 б) 0.2483

Зад.32 Намерете нормална апроксимация на $P(355 \leq x \leq 360)$, където $x \in Bi(n = 400, p = 0.9)$.

Отговор: 0.3531

Зад.33 Данни, събирани през дълъг период от време показват, че даден генетичен дефект се случва на 1 от всеки 1000 деца. Архивите на клиника показват $x = 60$ деца с този дефект от общо 50 000 изследвани. Ако тези 50 000 деца са случайна извадка от популацията от деца, представена чрез минали архиви, каква е вероятността да наблюдаваме стойност на x равна на 60 или по-голяма? Можете ли да кажете, че наблюдаването на $x = 60$ деца е необичайно събитие?

Отговор: 0.0901, не

Зад.34 Авиолиниите и хотелите често правят резервации, надхвърлящи капацитетите им. Данните на даден мотел показват, че в средно 10% от гостите не идват, въпреки че са направили резервация. Ако мотелът прави 215 резервации, а има само 200 стаи, каква е вероятността да има свободна стая за всеки клиент, дошъл да наеме стая?

Отговор: 0.9441

Зад.35 Средното време, необходимо за приключване на тест, е намерено, че е 70 минути със стандартно отклонение 12 минути. Кога трябва да бъде приключен тестът, ако искаме да оставим достатъчно време, така че 90% от студентите да приключат с работата? (Предполагаме, че времето, необходимо за теста, е нормално разпределено)

Отговор: 85.36