

Понятия и формули:

- Биномно разпределение

$$\xi \sim Bi(n, p) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \mathbf{E}\xi = np, \mathbf{D}\xi = npq$$

- Поасоново разпределение

$$\xi \sim Po(\lambda) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{E}\xi = \lambda, \mathbf{D}\xi = \lambda$$

- Геометрично разпределение

$$\xi \sim Ge(p) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \mathbf{E}\xi = 1/p, \mathbf{D}\xi = q/p^2$$

Зад.1 Намерете средното и стандартното отклонение на биномно разпределение с параметри $n = 10$, $p = 0.5$. Намерете вероятността x да попада в интервала $\mu \pm 2\sigma$.

Отговор: $\mu = 5$, $\sigma = 1.5811$, 0.978

Зад.2 Кутия съдържа 5 топки: три червени и две бели. Две топки са избрани случайно без връщане и x е броят на червените топки. Обяснете защо x е или не е биномна сл. вел. Ако експериментът е биомнен, напишете стойностите на n и p .

Отговор: не е биомнен експеримент, опитите са зависими, p се променя

Зад.3 Ако в предишната задача извадката е с връщане и отново x е броят на червените топки, обяснете защо x е или не е биномна сл. вел. Ако експериментът е биомнен, напишете стойностите на n и p .

Отговор: биомнен експеримент, $n = 2$, $p = 3/5$

Зад.4 Изчислете следните биномни вероятности: а) $\binom{8}{2}(0.3)^2(0.7)^6$ б) $\binom{4}{0}(0.05)^0(0.95)^4$

в) $\binom{10}{3}(0.5)^3(0.5)^7$ г) $\binom{7}{1}(0.2)^1(0.8)^6$

Отговор: а) 0.2965 б) 0.8145 в) 0.1172 г) 0.3670

Зад.5 Използвайки формулата за биномно разпределение, пресметнете $p(x)$ и постройте хистограма за:

а) $n = 7$, $p = 0.2$ б) $n = 7$, $p = 0.5$ в) $n = 7$, $p = 0.8$

Зад.6 Използвайки условието от предишната задача, за всяка от подточките пресметнете: а) $\mathbf{P}(x = 1)$ б) $\mathbf{P}(x \geq 1)$ в) $\mathbf{P}(x > 1)$ г) $\mathbf{P}(x \leq 1)$ д) $\mu = np$ е) $\sigma = \sqrt{npq}$

Отговор: а) 0.3670, 0.0547, 0.0004 б) 0.7903, 0.9922, 1.0000 в) 0.4233, 0.9357, 0.9996 г) 0.5767, 0.0625, 0.0004 д) 1.4, 3.5, 5.6 е) 1.0583, 1.3229, 1.0583

Зад.7 Ако x е биномно разпределена случайна величина, намерете $\mathbf{P}(x \leq a) = ?$ като използвате таблиците за биномно разпределение, ако: а) $n = 10$, $p = 0.1$, $a = 3$ б) $n = 15$, $p = 0.6$, $a = 7$ в) $n = 25$, $p = 0.5$, $a = 14$

Отговор: а) 0.987 б) 0.213 в) 0.788

Зад.8 Като използвате таблиците за биномно разпределение, пресметнете следните вероятности за $n = 7$, $p = 0.8$:

а) $\mathbf{P}(x \geq 4)$ б) $\mathbf{P}(x = 2)$ в) $\mathbf{P}(x < 2)$ г) $\mathbf{P}(x > 1)$. Проверете отговорите с тези, получени в Зад.5 подточка в).

Отговор: а) 0.967 б) 0.005 в) 0.000 г) 1.000

Зад.9 Намерете $\sum_{x=0}^a p(x)$ за: а) $n = 20$, $p = 0.05$, $a = 2$ б) $n = 15$, $p = 0.7$, $a = 8$ в) $n = 10$, $p = 0.9$, $a = 9$

Отговор: а) 0.925 б) 0.131 в) 0.651

Зад.10 Като използвате таблиците за биномно разпределение, пресметнете следните вероятности:

а) $P(x < 12)$ за $n = 20$, $p = 0.5$ б) $P(x \leq 6)$ за $n = 15$, $p = 0.4$ в) $P(x > 4)$ за $n = 10$, $p = 0.4$
г) $P(x \geq 6)$ за $n = 15$, $p = 0.6$ д) $P(3 < x < 7)$ за $n = 10$, $p = 0.5$
Отговор: а) 0.748 б) 0.610 в) 0.367 г) 0.966 д) 0.656

Зад.11 Намерете средното и стандартното отклонение на биомно разпределение с: а) $n = 1000$, $p = 0.3$
б) $n = 400$, $p = 0.01$ в) $n = 500$, $p = 0.5$ г) $n = 1600$, $p = 0.8$
Отговор: а) $\mu = 300$, $\sigma = 14.49$ б) $\mu = 4$, $\sigma = 1.99$ в) $\mu = 250$, $\sigma = 11.18$ г) $\mu = 1280$, $\sigma = 16$

Зад.12 Намерете средното и стандартното отклонение на биомно разпределение с $n = 100$ и:
а) $p = 0.01$ б) $p = 0.9$ в) $p = 0.3$ г) $p = 0.7$ д) $p = 0.5$
Отговор: а) 1, 0.99 б) 90, 3 в) 30, 4.58 г) 70, 4.58 д) 50, 5

Зад.13 Нека $x \sim Bi(20, 0.1)$
а) пресметнете $P(x \leq 4)$, използвайки биомната формула
б) пресметнете $P(x \leq 4)$, използвайки таблиците за биомно разпределение
в) намерете средното и стандартното отклонение на x
г) Намерете интервалите $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$, и пресметнете вероятността x да попадне във всеки един от тях.
д) резултатите от подточка г) съвпадат ли с Теоремата на Чебишев? с емпиричното правило?
Отговор: а) 0.9568 б) 0.967 в) 2, 1.342 г) 0.7455, 0.9569, 0.9977 д) да

Зад.14 Нова операционна процедура е успешна в 80% от случаите. Предполагаме, че операцията е направена 5 пъти и изходът на всяка е независим от изхода на всяка друга. Каква е вероятността, че:
а) всички 5 операции ще са успешни?
б) ще има точно 4 успешни?
в) по-малко от 2 ще са успешни.
Отговор: а) 0.3277 б) 0.4096 в) 0.0067

Зад.15 Архивите показват, че 30% от всички пациенти на дадена клиника не плащат техните сметки и това евентуално се дължи на това, че са забравени. Предполагаме, че $n = 4$ нови пациента представляват случайна извадка от голямо множество на очаквани пациенти на дадената клиника. Каква е вероятността, че:
а) всички сметки на пациентите ще бъдат забравени
б) една ще бъде забравена
в) никоя от сметките няма да бъде забравена.
Отговор: а) 0.081 б) 0.4116 в) 0.2401

Зад.16 Даден метаболитен дефект се случва на приблизително 1 от всеки 100 раждания. Ако има 4 новородени в дадена болница в даден ден, каква е вероятността, че:
а) никое няма да има този дефект?
б) не повече от едно ще има този дефект.
Отговор: а) 0.9606 б) 0.9994

Зад.17 Средният брой на пътните инциденти на централно кръстовище е 2 на седмица. Предполагаме, че броят на катастрофите е Поасоново разпределен с параметър $\mu = 2$.
а) намерете вероятността да няма инцидент на това кръстовище през едноседмичен период
б) намерете вероятността за най-много 3 катастрофи на това кръстовище през двуседмичен период.
Отговор: а) 0.135335 б) 0.433

Зад.18 Нека $x \sim Po(\mu = 2)$. Пресметнете следните вероятности: а) $P(x = 0)$ б) $P(x = 1)$ в) $P(x > 1)$
г) $P(x = 5)$
Отговор: а) 0.135335 б) 0.270671 в) 0.593994 г) 0.036089

Зад.19 Нека $x \sim Po(\mu = 2.5)$. Намерете: а) $P(x \geq 5)$ б) $P(x < 6)$ в) $P(x = 2)$ г) $P(1 \leq x \leq 4)$
Отговор: а) 0.109 б) 0.958 в) 0.257 г) 0.809

Зад.20 Нека $x \sim Bi(n = 20, p = 0.1)$. Пресметнете $P(x \leq 2)$, използвайки:
а) таблиците за биомно разпределение;
б) Поасоново приближение. Сравнете с резултата от подточка а).

Отговор: а) 0.677 б) 0.6767

Зад.21 За да покажем колко добре Поасоновото разпределение приближава биномното разпределение, пресметнете Поасоново приближение за $p(0)$ и $p(1)$, където $x \sim Bi(n = 25, p = 0.05)$. Сравнете резултата с точните стойности от таблиците за биномно разпределение.

Отговор: $p(0) \approx 0.2865, p(1) \approx 0.3581$, от таблиците: $p(0) = 0.277, p(1) = 0.365$

Зад.22 Броят на хората x , посещаващи спешното отделение на дадена болница всеки ден следва Поасоново разпределение със средно 5 души на ден.

а) Каква е вероятността, че броят на хората, влизащи в спешното отделение в даден ден, ще е две? по-малък или равен на две?

б) Вероятно ли е x да надхвърли 10? Обяснете.

Отговор: а) 0.08422, 0.12465 б) не, $x = 10$ лежи 2.236 стандартни отклонения над средното

Зад.23 Нека $x \sim Po(\mu)$. Пресметнете следните вероятности: а) $P(x \leq 2), \mu = 1$ б) $P(x \leq 2), \mu = 2$ в) $P(x \leq 2), \mu = 3$ г) какво се случва с вероятността за събитието $x \leq 2$, когато μ нараства от 1 до 3.

Зад.24 Нека $x \sim Po(\mu = 1.5)$. Пресметнете следните вероятности: а) $P(x \leq 3)$ б) $P(x \geq 3)$ в) $P(x = 3)$ г) $P(x = 0)$ д) $P(x > 0)$ е) $P(x > 6)$

Зад.25 Средният брой на пациентите, приети в спешното отделение на малка болница за ден е 2.5. Ако за даден ден има само 4 свободни легла за нови пациенти, каква е вероятността, че болницата няма да има достатъчно легла за новоприети пациенти?

Отговор: 0.109

Зад.26 На определена автоматична автомивка й трябва точно 5 минути, за да измие една кола. В средно на автомивката пристигат 10 коли на час. Предполагаме, че 30 минути преди затварянето 5 коли са на линията на автомивката. Ако тя работи непрекъснато до времето за затваряне, каква е вероятността, че никоя кола няма да е на линията по времето, по което ще спре автомивката?

Отговор: 0.040

Зад.27 Приблизително 40 процента от населението на САЩ имат А кръвна група.

а) ако редът на донори на кръв, посещаващи коя да е кръвна банка в кой да е ден, е случаен, намерете вероятностното разпределение на x , броят на донорите на кръв на даден ден, докато се появи първият донор с кръвна група А.

б) намерете средното и стандартното отклонение на x .

Отговор: а) $p(x) = (0.6)^{x-1}(0.4)$, $x = 1, 2, \dots$ б) $\mu = 2.5, \sigma = 1.9$

Зад.28 Честна монета се хвърля до първо падане на тура. Нека x е броят на хвърлянията.

а) какво е вероятностното разпределение на x ?

б) начертайте вероятностното разпределение на x .

в) намерете средното и дисперсията на x . В какви граници очаквате да попада x в 8/9 от случаите?

Отговор: а) геометрично, $p = 1/2$ в) $\mu = 2, \sigma^2 = 2; [0, 6]$

Зад.29 Вероятността да се установи успешно връзка със сървър в определен момент е $p = 0.7$. Нека с ξ означим броя на опитите, необходими за установяване на връзка. Намерете очакването на ξ .

Отговор: $1/p = 10/7$

Зад.30 В Калифорния годишно се усещат около 500 земетресения. Такива с разрушителна сила обаче, има средно веднъж годишно. Каква е вероятността да има такова земетресение в рамките на 6 месеца? Неочаквано ли е да има 3 или повече такива земетресения за 6 месеца?

Зад.31 В компютърна игра играчът трябва да открие съкровище, което се намира с равна вероятност зад една от пет затворени врати. Ако играчът познае вратата, съкровището е негово и играта завършва, ако не познае, се връща в началото на лабиринта, който води до петте врати и започва играта отначало. Нека X е броят опити, необходими за да се познае вярната врата. Какъв е средният брой опити за намиране на съкровището? Колко е $P(X > 3)$?

Отговор: 5, 64/125