

Понятия и формули:

- Формула на Бейс (Bayes' rule): $\mathbf{P}(S_i|A) = \frac{\mathbf{P}(AS_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(S_i)\mathbf{P}(A|S_i)}{\sum_{j=1}^k \mathbf{P}(S_j)\mathbf{P}(A|S_j)}$, където сме разделили извадковото пространство на непресичащи се хипотези S_i : $S_i \cap S_j = \emptyset$; $S = \sum_{i=1}^k S_i$, а вероятността на събитието A е: $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(AS_i)$
- mn правило (mn rule): ако имаме две множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ с брой елементи съответно m и n , броят множества от два елемента, като единият е от A , а другият е от B , е mn . Обобщава се за k множества
- пермутации (permutations) $P_r^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$
- комбинации (combinations): $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$
- случайна величина (сл.в.) (random variable): функция дефинирана върху извадковото пространство, заемаща реални стойности. Случайните величина са дискретни или непрекъснати.

$$0 \leq \mathbf{P}(\xi = x) \leq 1; \sum_x \mathbf{P}(\xi = x) = 1$$

- очаквана стойност на сл.в. (expected value): $\mathbf{E}\xi = \sum_x x\mathbf{P}(\xi = x)$
- дисперсия на сл.в. (variance): $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi = \text{Var}\xi = \mathbf{E}[(\xi - \mathbf{E}\xi)^2] = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$
- стандартно отклонение на сл.в. (standard deviation): $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Зад.1 Избрана е извадка от една от две популации A_1 и A_2 с вероятности $P(A_1) = 0.7$ и $P(A_2) = 0.3$. Ако извадката е взета от A_1 , вероятността да наблюдаваме събитието B е $P(B|A_1) = 0.2$. Ако извадката е взета от A_2 , вероятността да наблюдаваме събитието B е $P(B|A_2) = 0.3$. Ако е направена извадката и сме наблюдавали събитието B , то намерете вероятността извадката да е от популацията A_1 . Също и от A_2 .

Отговор: 0.6087, 0.3913

Зад.2 Проведен е даден експеримент, при който се наблюдава едно и само едно от три събития със следните вероятности: $\mathbf{P}(A_1) = 0.2$, $\mathbf{P}(A_2) = 0.5$, $\mathbf{P}(A_3) = 0.3$. Вероятностите на дадено четвърто събитие B при дадени трите събития A_1, A_2, A_3 са: $P(B|A_1) = 0.2$, $P(B|A_2) = 0.1$, $P(B|A_3) = 0.3$. Ако е наблюдавано събитието B , намерете вероятностите: $P(A_1|B)$, $P(A_2|B)$, $\mathbf{P}(A_3|B)$.

Отговор: 0.2222, 0.2778, 0.5000

Зад.3 Криминалните архиви в даден град показват, че 20% от престъпленията са насилствени, а 80% са ненасилствени, в това число кражби, фалшификации и т.н. Деветдесет процента от насилствените престъпления се регистрират срещу седемдесет процента от ненасилствените престъпления. Ако се разследва регистрирано в полицията престъпление, каква е вероятността, че то е насилствено.

Отговор: 0.2432

Зад.4 Инспектор решава дали един артикул, който е на края на поточната линия, да продължи за пълна инспекция. Десет процента от всички артикули са дефектни. Шестдесет процента от всички дефектни минават през пълна инспекция и 20% от всички доброкачествени артикули минават през пълна инспекция. При положение, че даден артикул е напълно изследван, каква е вероятността той да е дефектен?

Отговор: 0.25

Зад.5 Имате две множества от различни елементи, 10 в първото множество и 8 във второто. Ако изберете от всяко множество по един елемент, колко различни множества от два елемента можете да образувате?

Отговор: 80

Зад.6 Ако имате 3 множества от различни елементи, 4 в първото множество, 7 във второто и 3 в третото и изберете от всяко множество по един елемент, колко различни тройки елементи можете да образувате?

Отговор: 84

Зад.7 Ако имате едно множество от 10 различни елемента и изберете 2 елемента от тях, колко различни двойки елементи можете да образувате?

Отговор: 45

Зад.8 Ако имате едно множество от 10 различни елемента и изберете 2 елемента от тях, за да попълните 2 позиции, колко различни двойки елементи можете да образувате?

Отговор: 90

Зад.9 Ако имате едно множество от 12 различни елемента и изберете 3 елемента от тях, за да попълните 3 позиции, колко различни тройки елементи можете да образувате?

Отговор: 1320

Зад.10 Ако имате 2 множества от различни елементи, 10 в първото множество и 8 във второто. Ако изберете от всяко множество по два елемента, колко различни множества от четири елемента можете да образувате?

Отговор: 1260

Зад.11 За всеки от 20 тестови въпроса студент може да избере един от 5 възможни отговора.

а) Колко напълно различни множества от отговори са възможни за този тест?

б) Ако студентът избира отговор на случаен принцип, каква е вероятността, че той ще е посочил верните отговори на всички въпроси?

Отговор: а) 5^{20} б) 5^{-20}

Зад.12 Разглеждаме експеримент, състоящ се от хвърлянето на две монети. Нека сл.в. ξ е броят на наблюдаваните “ези”. Намерете вероятностното разпределение на ξ , очакването и дисперсията.

Отговор: стойност (вероятност): 0 (1/4), 1 (1/2), 2 (1/4); 1; 1/2

Зад.13 Дадена е случайна величина ξ със следното вероятностно разпределение:

$\xi \setminus x$	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = x)$	.1	.3	.4	.1	?	.05

а) намерете $P(\xi = 4)$

б) направете графика на вероятностното разпределение на ξ .

Отговор: а) $P(\xi = 4) = 0.05$

Зад.14 Дискретна случайна величина ξ и нейното вероятностно разпределение $P(\xi)$ са следните:

$\xi \setminus x$	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = x)$	0.05	0.10	0.20	0.40	0.20	0.05

Намерете:

а) μ, σ^2, σ

б) намерете интервала $\mu \pm 2\sigma$. Каква е вероятността, че ξ ще попадне в този интервал.

Отговор: а) 2.75, 1.3875, 1.1779 б) (0.39, 5.11), 0.95

Зад.15 Дискретна случайна величина ξ и нейното вероятностно разпределение $P(\xi)$ са следните:

$\xi \setminus x$	0	2	3	4
$P(\xi = x)$	1/8	1/4	1/2	1/8

Намерете:

а) $\mu = E(\xi)$ б) $E(\xi^2)$ в) σ^2, σ

Отговор: а) 2.5 б) 7.5 в) 1.25, 1.118

Зад.16 Колко пъти трябва да бъде хвърлена една монета, за да се получи вероятност равна или по-голяма от 0.9 да наблюдаваме поне една тура?

Отговор: 4