

Понятия и формули:

- експеримент (experiment) - процес, при който се получава измерване или наблюдение
- елементарен изход (simple event) - E_i - изход от експеримента, който не може да бъде разложен на други изходи
- събитие (event) - множество от елементарни изходи
- извадково пространство (sample space) - Ω или S - множеството от всички възможни елементарни изходи
- диаграма на Вен (Venn diagram) - служи за графично представяне на извадковото пространство, елементарните изходи и събития
- вероятност на събитие - число между 0 и 1, равно на сумата от вероятностите на елементарните събития, които се съдържат в него:

Условия за вероятностите на елементарните изходи: $0 \leq \mathbf{P}(E_i) \leq 1$, за $\forall E_i$, $\sum_i \mathbf{P}(E_i) = 1$, тогава вероятността на събитието A е: $\mathbf{P}(A) = \sum_{i: E_i \in A} \mathbf{P}(E_i)$

- несъвместими събития (mutually exclusive, disjoint events): $A \cap B = \emptyset$
- сечение на събития (intersection): $A \cap B$ или AB
- обединение на събития (union): $A \cup B$
Ако $A \cap B = \emptyset \Rightarrow 1. \mathbf{P}(AB) = 0; 2. \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
- допълнение на събитие (complementation): $\bar{A} = \Omega \setminus A$, имаме, че: $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = 1$
- условна вероятност (conditional probability): условна вероятност на B при условие A : $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}$, $\mathbf{P}(A) \neq 0$, условна вероятност на A при условие B : $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$
- независими събития (independent): $A \perp B$, ако $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ или $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$
- Адитивни закони: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$. Ако $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$
- Мултипликативни закони: $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. Ако $A \perp B \Rightarrow \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

Зад.1 Пресметнете $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B)$ при провеждане на експеримент - хвърляне на зар, където събитието A е пада се нечетно число, B - пада се число, по-малко от 4.

Отговор: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$

Зад.2 Пресметнете вероятността да наблюдаваме точно една тура при хвърлянето на две монети.

Отговор: $1/2$

Зад.3 Разглеждаме следния експеримент с две урни: урна 1 съдържа 2 бели и 1 черна топки; в урна 2 има 1 бяла топка. Една топка се вади от урна 1 и се слага в урна 2. След това се вади топка от урна 2. Каква е вероятността топката, извадена от урна 2, да е бяла?

Отговор: $5/6$

Зад.4 При хвърляне на зар определете кои от събитията са елементарни изходи:

A - пада се 2

B - пада се нечетно число

C - пада се число, по-малко от 4

D - случват се A и B

E - случва се A или B или и двете

F - случват се A и C

Пресметнете вероятностите на събитията D, E, F чрез сумиране на вероятностите на елементарните събития, включени в тях.

Отговор: $\mathbf{P}(D) = 0$, $\mathbf{P}(E) = 2/3$, $\mathbf{P}(F) = 1/6$

Зад.5 Извадково пространство съдържа 5 елементарни изхода: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 . Ако $P(E_3) = 0.4, P(E_4) = 2P(E_5), P(E_1) = P(E_2) = 0.15$, то намерете $P(E_4) = ?$ и $P(E_5) = ?$

Отговор: $P(E_4) = 0.2, P(E_5) = 0.1$

Зад.6 Извадково пространство съдържа 10 елементарни изхода: $E_1, E_2, \dots, E_{10}$. Ако $P(E_1) = 3P(E_2) = 0.45$ и останалите елементарни изходи са равно вероятни, намерете техните вероятности.

Отговор: $P(E_1) = 0.45, P(E_2) = 0.15, P(E_i) = 0.05, i = 3, 4, \dots, 10$

Зад.7 Един баскетболен играч улучва коша в 70% от случаите. Когато хвърля два пъти подред, има 4 възможни елементарни изхода и 3 от техните вероятности са дадени:

Ементарен изход	Изход от първа стрелба	Изход от втора стрелба	Вероятност
1	Улучва	Улучва	0.49
2	Улучва	Пропуска	?
3	Пропуска	Улучва	0.21
4	Пропуска	Пропуска	0.09

а) намерете вероятността играчът да улучи в първия опит и да пропусне на втория

б) намерете вероятността играчът да улучи поне в един от двата изстрела.

Отговор: а) 0.21; б) 0.91

Зад.8 Играта на рулетка използва колело, съдържащо 38 джобчета. 36 джобчета са номерирани от 1, 2, ..., 36, а останалите две са отбелязани като 0 и 00. Колелото е завъртяно и има печелившо число. Предполагаме, че всяко джобче е равно вероятно.

а) напишете елементарните изходи при едно завъртане на колелото на рулетката

б) напишете вероятностите на елементарните изходи

в) нека A е събитието да наблюдавате 0 или 00. Напишете елементарните изходи, които съдържа A и намерете $P(A)$.

г) предполагаме, че сте заложили на числата от 1 до 18. Каква е вероятността, че едно от Вашите числа ще спечели.

Отговор: б) $P(E_i) = 1/38$; в) $P(A) = 1/19$; г) 9/19

Зад.9 Кутия съдържа 4 монети: от 5, 10, 25 и 50 долар - цента. Три монети от кутията са случайно избрани.

а) напишете елементарните събития в S .

б) каква е вероятността, че изборът ще съдържа половин доларовата монета

в) каква е вероятността, че стойността на трите избрани монети ще е 60 цента или повече?

Отговор: б) 3/4; в) 3/4

Зад.10 Хвърлят се два зара. Каква е вероятността, че сумата от точките на горната страна на заровете ще е 7? 11?

Отговор: а) 1/6 б) 1/18

Зад.11 Проучване определя голям брой възрастни в зависимост от това дали те имат нужда да носят очила, за да коригират зрението си при четене и дали използват очила, когато четат. Пропорциите, попадащи в 4 категории, са следните:

Имат нужда от очила	Използват очила, докато четат	
	Да	Не
Да	0.44	0.14
Не	0.02	0.40

Ако случайно е избран възрастен от тази голяма група, каква е вероятността, че:

а) той ще има нужда от очила

б) той ще има нужда от очила за четене, но не ги използва

в) той използва очила, независимо дали има нужда или не.

Отговор: а) 0.58 б) 0.14 в) 0.46

Зад.12 Пресметнете $P(A|B)$, където при хвърляне на зар събитието A е да се падне нечетно число, а събитието B е да се падне число по-малко от 4. Събитията A и B съвместими ли са? A независими ли са?

Отговор: $2/3$; да; не

Зад.13 Провеждането на експеримент може да доведе до един от следните 5 равно вероятни елементарни изхода: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 . Дефинирани са следните събития:

$$A - E_1, E_3$$

$$B - E_1, E_2, E_4, E_5$$

$$C - E_3, E_4$$

Намерете вероятностите на следните събития чрез елементарните изходи, които съдържат: а) $\bar{A}$ б) $\bar{B}$
в) AB г) AC д) BC е) $A \cup B$ ж) $A \cup C$ з) $B|C$ и) $A|B$ й) $A \cup B \cup C$ к) $\overline{AB}$ л) $\bar{A}\bar{B}$

Отговор: а) $3/5$; б) $1/5$ в) $1/5$ г) $1/5$ д) $1/5$ е) 1 ж) $3/5$ з) $1/2$ и) $1/4$ й) 1 к) $4/5$ л) 0

Зад.14 Използвайте условието на предишната задача и дефиницията на допълнително събитие, за да намерите:

$$\text{а) } P(\bar{A}) \quad \text{б) } P(\overline{AB}) \quad \text{в) } P(\bar{A}\bar{B})$$

Зад.15 Проучване сред хора в даден регион показва, че 20% са пушачи. Вероятността за смърт, причинена от рак на белите дробове, при условие, че човекът е пушач, е приблизително 10 пъти по-голяма от вероятността за смърт, причинена от рак на белите дробове, при условие, че човекът е непушач. Ако вероятността за смърт, причинена от рак на белите дробове в региона е 0.006, каква е вероятността за смърт, причинена от рак на белите дробове, при условие, че човекът е пушач.

Отговор: 0.0214

Зад.16 Система за засичане на дим използва две устройства A и B . Ако има пушек, вероятността, че той ще бъде засечен от устройство A е 0.95, от устройство B - 0.98, и от двете устройства - 0.94.

а) Ако има дим, намерете вероятността, че той ще бъде засечен или от устройство A , или от устройство B , или от двете устройства.

б) Намерете вероятността, че той няма да бъде засечен

Отговор: а) 0.99 б) 0.01

Зад.17 Оператор на машина произвежда дефектни изделия с вероятност 0.01, ако следва точно инструкциите за работа с машината и с вероятност 0.03, ако не ги следва. Ако работникът следва инструкциите 90% от времето, каква пропорция от изделията ще бъдат дефектни?

Отговор: 0.012