08.V.2013г. ВА - упражнения

1 - симетричен оператор
1 - групи
1 - ~~теория~~ теория на числата
(теорема на хомоморфизмите)

Контролно от 14^{30} г.
зала 601 ФХФ

2.39 $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$

а) G - група относно умножение на матрици
$Z(G) = ?$

$\forall$ елем. и подгрупи от краен ред

$G < GL_2(\mathbb{Q})$?

$\{\emptyset\} \neq G \subset GL_2(\mathbb{Q})$

1) $A_1, A_2 \in G$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{a_1 a_2} & \overset{\in \mathbb{Q}}{a_1 b_2 + b_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 a_2 \neq 0$$

2) $A \in G$?

$$A = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{\frac{1}{a}} & \overset{\in \mathbb{Q}}{-\frac{b}{a}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$G < GL_2(\mathbb{Q})$

$\cancel{G = Gh}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall b \in \mathbb{Q}^*$
$\forall a \in \mathbb{Q}^*$

$$\begin{cases} xa = ax & \checkmark \\ bx + y = ay + b \end{cases}$$

$b(x-1) + y(1-a) = 0$

1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E \in Z(G)$

~~2) $x \neq 1$~~

2) $x \neq 1$

$b = 0 \quad y(1-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Q}^*$

$y = 0$

$b(x-1) = 0$

$\forall b \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = 1 \quad ↯ \quad \Rightarrow Z(G) = \{E\}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^n = E$

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + ab + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^n = 1 \\ nb\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$$

2

1) $a=1$

$nb=0 \Rightarrow b=0 \quad n\in\mathbb{N}$ $\qquad A=E \Rightarrow |A|=1$

2) $a=-1 \Rightarrow n$ - четно

$a^2=1$

$b\left(\frac{(-1)^2-1}{(-1)^2-1}\right)=0 \quad \forall b\in\mathbb{Q}$

$\boxed{n=2}$

$A=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad |A|=2 \qquad \forall b\in\mathbb{Q}$

Подгрупи от краен ред:

1) $\{E\}$ $\qquad \Rightarrow \exists\ A=\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$

2) $\{E\}\neq\{H\}\leq G$

$|H|<\infty$

$\begin{pmatrix}-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -c+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H \Rightarrow \exists!\ \begin{matrix}H<G\\ |H|<\infty\\ H=\{E\}\end{matrix}$

$\neq E \Leftrightarrow b=c$

$b\neq c$

б) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Q} \right\}$ $\quad H \triangleleft G, \; H \cong \mathbb{Q}$

$G/H \cong \mathbb{Q}^*$

$\{\emptyset\} \neq H \overset{?}{<} G \qquad H \subset G$

1) $\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

2) $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \qquad \Rightarrow H < G$

$\varphi : H \to \mathbb{Q}$

$\varphi \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b$

$\varphi \left[\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \varphi \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b_1 + b_2 = b_1 + b_2 \quad \checkmark \Rightarrow \varphi$ е ~~х~~омоморфизъм (ХММ) на групи

φ е биекция - очевидно

$\Rightarrow H \cong \mathbb{Q}$ (изоморфно)

адитивната

мултипликативната

$\psi : G \to \mathbb{Q}^*$

1) $\psi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to a$ $\qquad \xrightarrow[\text{на ХММ}]{\text{теорема}} G/\operatorname{Ker}\psi \cong \operatorname{Im}\psi$

2) ψ е ХММ на групи $\checkmark$

3) $H = \operatorname{Ker}\psi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, \psi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \right\} = H$

(4)

$A_1 H = A_2 H$
$A_1^{-1} A_2 \in H$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_1} & \frac{b_2}{a_1}-\frac{b_1}{a_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 1 \Leftrightarrow a_2 = a_1$$

2) ~~A~~ ХММ $\psi\left[\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{a_1 a_2}\right] = \psi\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= a_1 a_2$ $\quad b/y \; 0$

$\cancel{= a_1 a_2}$

$\psi : (G, *) \to (\mathbb{Q}^*, *)$

3) по Теорема за хомоморфизмите

$G/H \cong \mathbb{Q}^* \Rightarrow H \triangle G$

б) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q}^*, b \in \mathbb{Q} \right\}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Q} \right\}$

$\forall N < G : H \leq N \Rightarrow N \triangle G$

$X, Y \in G$

$X^{-1} Y^{-1} X Y = \frac{1}{a_1 a_2}\begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$

$= \frac{1}{a_1 a_2}\begin{pmatrix} 1 & -b_2 - b_1 a_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{a_1a_2}\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1-b_2-b_1a_2 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

$X \in N, Y \in G \quad \underbrace{X^{-1}Y^{-1}XY}_{\in N} \in H$

но $X^{-1} \in N \Rightarrow Y^{-1}XY \in N \Rightarrow N \triangleleft G$

Пръстени и полета

$R, +, *$

⊕ R е абелева група

⊛ R затворен

- асоциативност
- дистрибутивен

Абелева група $\Rightarrow$ R - пръстен

- $\exists!\, e \in R : ea = ae = a \quad \forall a \in R$

$\exists\, a^{-1} \in R : a^{-1}a = aa^{-1} = e \Rightarrow R$ е тяло

- $ab = ba \quad \forall a, b \in R \Rightarrow R$ е поле

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ - полета

$\cancel{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}$ - комутативен пръстен с 1

$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a+b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, d - фиксирано цяло число, което не е точен квадрат

$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a+b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, d - фиксирано цяло число, което не е точен квадрат

$x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$x+y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

- асоциативен √

$-x \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$x+y = y+x$

$xy = (a_1+b_1\sqrt{d})(a_2+b_2\sqrt{d}) =$

$= a_1a_2 + b_1b_2d + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

- дистрибутивен √

- асоциативен √

$\exists!\ 1 \in \mathbb{Q}\sqrt{d} \quad x.1 = 1.x = x$

$xy = yx$

$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$?

$a_2 \neq b_2\sqrt{d}$

$a_2^2 \neq b_2^2 d$

$$\frac{(a_1+a_1\sqrt{d})}{(a_2+b_2\sqrt{d})} \cdot \frac{(a_2-b_2\sqrt{d})}{(a_2-b_2\sqrt{d})} = \frac{a_1a_2 - b_1b_2d + (a_2b_1 - a_1b_2)\sqrt{d}}{a_2^2 - b_2^2 d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

$a_2 = \frac{p_1}{q_1} \qquad b_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

$p_1 < q_1,\ p_2 < q_2$

$\frac{p_1^2}{q_1^2} = \frac{p_2^2}{q_2^2} d$ $\quad \nexists$ прост делител на $Q \Rightarrow Q = 1 \Rightarrow P^2 = d$ ↯

$\Leftarrow$ Нека r е прост делител на Q

$\Rightarrow r \mid Q^2 \Rightarrow r \mid P^2 \Rightarrow r \mid P$

$p_1^2 q_2^2 = p_2^2 q_1^2 d$

$P^2 = Q^2 d$

$(P, Q) = 1$

$\mathbb{Z}[i]$ - пръстен на целите гаусови числа
$\mathbb{Q}[i]$ - поле ~~___~~

(3.14) Нека R - пръстен, с 1 $\oplus$, $\circledast$

$a \oplus b = a+b-1 \in R'$
$a \circledast b = a+b-ab$

Относно $\oplus$ и $\circledast$ да се док., че R е пръстен и е изоморфен на първоначалния.

$\varphi: R \to R'$
$\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$ $\quad\varphi$ - ХММ + биекция = изоморфизъм
$\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$

0) затворено

1) $(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$

$(a+b-1)\oplus c = a+b+c-1-1$

$a\oplus(b+c-1) = a+b+c-1-1$ ||

2) $\exists!\, \bar{0} \in R: a\oplus \bar{0} = \bar{0}\oplus a = a$

$a+\bar{0}-1 = a$

$\bar{0} = 1 \in R$

3) $\exists!\, x \in R: a\oplus x = x\oplus a = 1$

$a+x-1 = 1 \Rightarrow x = 2-a$

4) $a\oplus b = b\oplus a$ $\quad\checkmark$

5) $a\circledast b = a+b-ab \in R$

6) $(a\circledast b)\circledast c = a\circledast(b\circledast c)$

$(a+b-ab)\circledast c = a+b+c-ab-ac-bc+abc$

$a\circledast(b\ast c) = a\ast(b+c-bc) = a+b+c-bc-ab-ac+abc$

(8)

7) ~~(a*~~ $(a \oplus b) \circledast c = a \circledast c \oplus b \circledast c$

$(a+b-1) \circledast c = a+b+c-1-ac-bc+c$

$(a+c-ac) \oplus (b+c-bc) = a+b+2c-ac-bc-1$

8) $\exists!\, e \in R : a \circledast e = e \circledast a = a$

$a+e-ae=a$

$e = ae \quad \forall a$

$e=0$

$0 \div 7 \to R$ е пръстен

$8 \to R$ е пръстен с 1

$\varphi : R (\oplus, \circledast) \to R(+, *)$

$\varphi(a) = 1-a$

$0 = 1$

$e = 0$

1) $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

2) $\varphi(a \circledast b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\varphi(a+b-1) = \{1-a\} + \{1-b\}$

1) $1-(a+b-1) = 2-a-b$

$2-a-b = 2-a-b$

2) $\varphi(a+b-ab)=(1-a)(1-b)$

$1-a-b+ab=1-a-b+ab$

$\Rightarrow \varphi$ е ХММ на пръстени + биекция

$\Rightarrow R(\oplus,\circledast) \cong R(+,*)$ изоморфен