24.04.2013г.

~ ВА ~ упр.

Нормална група

$H \subseteq G$ - гр., $g \in G$; $gH = Hg$ за $\forall g$

$h_1, h_2 \in H$; $\forall g \in G$: $\underbrace{g^{-1} \cdot h_1 g}_{= h_2} \in H$

$H \trianglelefteq G$ - H - нормална

$|G:H| = 2 \iff H \trianglelefteq G$

$G = S_n$ $\quad |S_n : A_n| = 2$

$H = A_n$

$G = GL_n(F)$ $\quad \Big| \; H \trianglelefteq G$?

$H = SL_n(F)$

$|G:H| = F^*$ (от мн. чет) $\quad$ det:

$g \in G$, $h \in H \Rightarrow g^{-1} \cdot hg \overset{?}{\in} H \rightarrow \underset{h=1}{g^{-1} \cdot g} = 1 \Rightarrow \in H$

Зад. 1 ДД, че $\forall$ подгр. на $Q_8 = \{\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k\}$ са нормални

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = -ji = k$

$jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

Подгрупи: $\rightarrow \{E\}, Q_8$

$\rightarrow \{\pm 1\}$

$\rightarrow \underset{H_1}{\{\pm 1, \pm i\}}, \underset{H_2}{\{\pm 1, \pm j\}}, \underset{H_3}{\{\pm 1; \pm k\}}$

$|\overset{Q_8}{\overset{\parallel}{G}} : H_i| = 2 \Rightarrow H_i \trianglelefteq Q_8$, $i = 1, 2, 3$ $\checkmark$ $\Rightarrow H_1, H_2, H_3$ са норм. подгр.

$\boxed{*\; Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}}$

$(-1)i = i(-1) = -i \Rightarrow \pm 1$ са ц-ра на Q_8

$\underbrace{g^{-1}.h.g}_{\in Z(G)\ =\ h} \in H$

Зад.) G - група, $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G$; $A \cap B = \{1\}$. ДА, че $A.B = B.A$ за $\forall\ a, b \in A$ и $b \in B$.

$\underbrace{a^{-1}}_{\in A}\underbrace{b^{-1}ab}_{\in A} \in A$

$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}ab \in A \cap B$

$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}ab = 1$

$ab = ba$ ✓

$\underbrace{a^{-1}b^{-1}a}_{\in B}\underbrace{b}_{\in B} \in B$

Зад.) G - гр. ; $A \leq G$ и $B \leq G$. Образ. $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

а). $A \subseteq AB$, $AB = A \Leftrightarrow B \leq A$

б). $|AB| = \dfrac{|A|.|B|}{|A \cap B|}$, ако $A < \infty$ и $B < \infty$

$A \cap B = C \leq A$

$|A : C| = k$

$a_1C, a_2C, \ldots, a_kC$ $\quad a_iC \neq a_jC$, $i \neq j$

a_iB ; $i = 1, \ldots, k$

Доп., че: $a_iB = a_jB$, тогава: $\underbrace{a_i^{-1}.a_j}_{\in A} \in B \Rightarrow a_i^{-1}.a_j \in A \cap B = C$, т.е. $a_iB = a_jB \Leftrightarrow a_iC = a_jC$

$g \in A.B \Rightarrow g = a.b$

$a = a_i.c$, $i = 1, \ldots, k$, $c \in A \cap B$

$g = (a_ic)b = (a_i)\underbrace{cb}_{\in B} \Rightarrow g \in a_iB$

$\Rightarrow |AB| = |a_1B| + |a_2B| + \ldots + |a_kB| = k|B|$

$k = |A:C| = \frac{|A|}{|C|} = \frac{|A|}{|A\cap B|} \Rightarrow |AB| = \frac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$ ✓

в). $AB \leq G$, точно когато $AB = BA$ } вж. в сб. !!!

г). $A \trianglelefteq G$ или $B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \leq G$

1) $a_1 b_1 a_2 b_2 \in AB$

2) $(ab)^{-1} \in AB$

$x, y \in AB \leq G$

$x = a_1 b_1$

$y = a_2 b_2$

$x^{-1} y \in AB$ $\qquad$ ~~$a_1 b_1 a_2$~~ $a_1 \underbrace{b_1 b_2^{-1}}_{\in B} a_2^{-1} \in AB$ ....

Зад. Нека G - гр. и $|G| = 2p$, където p - нечетно, просто. Да се док., че $G \cong C_{2p}$ или D_p.

1) $\exists\, g \in G : |g| = 2p \Rightarrow G \cong C_{2p}$

2) $\nexists\, g \in G : |g| = 2p$:

$\exists\, g \in G : |g| = 2$, ако $\forall\, a \in G : |a| = 2$

от $*$, че не за $\forall a$ е изп.

$*$ $H = \{1, x, y, \overset{K_4}{xy}\}$

$H \leq G$

$|H| / |G|$, т.е. $4 \,|\, \overset{\text{нечетно}}{2p}$ ↯

$\Rightarrow$ тр. да $\exists\, a \in G : |a| = p$ и $\exists\, b \in G : |b| = 2$

Нека $M = \langle a, b \rangle$. $\qquad r(ab) = ?$

$**$ $\boxed{b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \to \text{за } D}$ $\qquad$ Ако $r(ab) = 2p \Rightarrow M \cong C_{2p}$, $M \leq G$

$\Rightarrow r(ab) \neq 2p$

Ако $r(ab) = p$

Разглеждаме групата: (помощна зад.)

$|G| = p \cdot q$, p, q - прости и $q > p$

$\exists!\, H \leq G : |H| = q$.

Доп. противното: $\exists\, |A| = |B| = q$

Док.$^{\text{ме}}$, че $|AB| = \dfrac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$

$|AB| \leq |G| = p\cdot q$

$\dfrac{q^2}{|A\cap B|} \leq p\cdot q$, $|A\cap B| = \overbrace{\cancel{1}, \cancel{p}, q, \cancel{pq}}^{\text{делители на } |G|}$

ако $|A\cap B| = q \Rightarrow |AB| = q \Rightarrow A \equiv B$

$r(ab) = p$ ↯ (от ↑ зад.)

$\Rightarrow r(ab) = 2$ ($r(ab)=1$ - отпада)

$ab\cdot ab = 1$

$b\cdot ab = a^{-1}$

$b^{-1}\cdot ab = a^{-1}$ - усл. за D $\Rightarrow$ пускаме изобр., което е изоморф., хомоморф... ✓

Факторгрупа

$H \trianglelefteq G$, G/H - факторгр.

$a, b \in G$, $\overline{a} = aH$, $\overline{b} = bH$

$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$, $aH\cdot bH = abH$

$|G| = |H|\cdot|G/H|$ - от Лагранж. (Th)

Зад. 1) Да се нам. факторгр. на $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n \Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$

2)

$m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? , m/n

$|m\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = \dfrac{n}{m} \Rightarrow m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_{\frac{n}{m}}$

3) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong C_2$

$|\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^+| = 2$

4) $S_n/A_n \cong C_2$ 5) $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^*$

$\exists!$ $Q_8 / Z(Q_8) \overset{?}{\cong} K_4$

$|Q_8| = 8$
$|Z(Q_8)| = 2 \Rightarrow$ по Лагранж: $|Q_8 / Z(Q_8)| = 4$

От $\boxed{2.15.} \Rightarrow Q_8/Z(Q_8) \cong C_4$ или K_4

~~зад!~~
G - гр., $H \leq Z(G)$ (или $\overset{\text{в частност}}{H = Z(G)}$). Ако G/H - циклична, ? $\Rightarrow$ G - абелева

G/H - цикл. $\Rightarrow G/H = H \cup gH \cup g^2H \cup \dots g^kH \cup \Rightarrow x, y \in G/H$:

$x = g^k h_1$

$y = g^n . h_2$

$$\left.\begin{aligned} x.y &= g^k(h_1 . g^n)h_2 = g^{k+m} h_1 h_2 \\ yx &= g^m(h_2 g^k) h_1 = g^{m+k} h_1 h_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G\text{ - абелева}$$

от зад! $\Rightarrow Q_8$ - абелева $\lightning \Rightarrow Q_8/Z(Q_8) \cong K_4$

$\boxed{2.30.}$

$\boxed{\text{зад.}}$ $D_4 / Z(D_4) \overset{?}{\cong} K_4$

$\boxed{\text{зад.}}$ $D_4 \to A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

$\searrow$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BAB = A^{-1} = A^3 \Rightarrow AB = BA^3$

$A^i B^j A^k B^l = A^{i+k(-1)^j} . B^{j+l}$ (от предна задача)

$A, A^3 \notin Z(D_4)$

$A^2 B \stackrel{?}{=} B . A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 . B = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix}$$

$$B A^2 =$$

$A^2 B = B . A^2$

Зад. $S_4 / K_4 \stackrel{?}{\cong} S_3$

Th за хомоморфизмите

$\varphi : G \to G'$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{ a \in G \mid \varphi(a) = e \}$

$\operatorname{Ker}\varphi \leq G$

$\operatorname{Im}\varphi = \{ a' \in G' \mid \varphi(a) = a' \}$, $\operatorname{Im}\varphi \leq G'$

Th: $\varphi : G \to G'$, φ е хомом. „върху"; $H = \operatorname{Ker}\varphi$, то $G / H \cong \operatorname{Im}\varphi$. $\Rightarrow H \trianglelefteq G$

Зад. F - числово поле ; $M = \{ (a, c) \mid a, c \in F, a \neq 0 \}$
Във. е бин. опер. :
$(a_1, c_1) \cdot (a_2, c_2) = (a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1)$. ДД, че M е абелева ;
$N = \{ (1, c) \mid c \in F \} \stackrel{?}{\leq} M$; $N \stackrel{?}{\cong} F$, а $M / N \stackrel{?}{\cong} F^*$

Бин. опер. $\in M$

0 сл-во) $(a_1, c_1)(a_2, c_2) \in M$? $M \neq \{0\}$

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ $a_1 a_2 \neq 0$

1) асоциат.

$(a_1, c_1)(a_2, c_2)(a_3, c_3) = (a_1, c_1)[(a_2, c_2)(a_3, c_3)]$ ...

2) $\exists$-не на ! ел. $(x, y) \in M$: $(a,c)(x,y) = (x,y)(a,c) = (a,c)$

$(a,c)(x,y) = (ax, ay + cx) \overset{?}{=} (a,c)$

$\begin{cases} ax = a & \Rightarrow x = 1 \\ ay + cx = c & \Rightarrow ay = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (a \neq 0) \end{cases}$

$(x,y) = (1,0) \in M$ ✓ Пров. за обр. страна ...

3) $(a,c)(m,n) = (m,n)(a,c) = (1,0)$

$\begin{cases} am = 1 & \Rightarrow m = a^{-1} \\ an + cm = 0 & \Rightarrow n = -c \cdot a^{-2} \end{cases}$

$(a,c) \rightarrow (a^{-1}, -c \cdot a^{-2})$

Пров. за дясното : ...

$\Rightarrow$ М е група ✓

4) $(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_2, c_2)(a_1, c_1)$ – за да е абелева

$\quad \| $

$(a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1)$ ✓

$\Rightarrow$ М – абелева

$N \leq M$?

$\{\emptyset\} \neq N \subset M$, защ. $(1,0) \in N$

1) $(1, c_1)(1, c_2) = (1, c_1 + c_2) \in M$ ✓

2) $(1,c)^{-1} ? \in M$

$(1,c)(1,t) = (1,t)(1,c) = (1,0)$

$(1, c+t) = (1,0) \Rightarrow t = -c \in M \Rightarrow N$ е подгр.

$N < M$

$\varphi: N \to F$

$\varphi(1,c) = c$ дали е хомоморф. ?

$\varphi[(1,c_1)(1,c_2)] \overset{?}{=} \varphi(1,c_1) + \varphi(1,c_2)$

$\varphi(1, c_1+c_2) \overset{?}{=} c_1 + c_2$

$c_1+c_2 = c_1+c_2$ ✓ $\Rightarrow \varphi$ е хомом. на групи

Дали е изоморф. ?

- биекция: инекция + сюрекция – проверка!

$(1,c_1) \neq (1,c_2)$. Док, че $c_1 = c_2$?

за $\forall c \in F \; \exists (1,c) \in N$

$\Rightarrow \varphi$ е биекция

$\Rightarrow N \cong F$

$\Psi: M \longrightarrow F^*$

1. $\Psi(a,c) = a$

3. $\operatorname{Ker}\Psi = \{(a,c) \in M \mid \Psi(a,c) = 1\} = N$

2. $\Psi[(a_1,c_1)(a_2,c_2)] = \Psi(a_1,c_1)\,\Psi(a_2,c_2)$

$\Psi(a_1a_2, a_1c_2 + a_2c_1) = a_1a_2$

$a_1a_2 = a_1a_2$ ✓ $\Rightarrow \Psi$ е хмм на групи

„върху" – проверка!

4. От 1, 2, 3 $\Rightarrow$ (Тм за хмм) $M/N \cong F^*$

$N \trianglelefteq M$