$p_1 = a_1 q_1, \ldots, p_k = a_k q_k \quad (a_i \in F)$

Д-во: <u>1) ∃-ие.</u> $n = \deg f > 0$. Индукция по n. $n = 1$ $(f = f)$

$n > 1$. Ако f е неразложим над F, то $f = f$. Нека е разложим: $f = f_1 f_2$; разлагането е истинско

$\deg f_1 < n, \deg f_2 < n$

Инду.предп.: $f_1 = \ldots$

$f_2 = \ldots$

2) Единственост

$$p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_s$$

от $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_s$

<u>Т8'</u> $\Rightarrow$ (напр) $p_1 / q_1 \Rightarrow q_1 \ldots$

$p_1 = a_1 q_1$

$a_1 \cancel{q_1} p_2 \ldots p_k = \cancel{q_1} q_2 \ldots q_s$

$a_1 p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_s$ и т.н.

24.04.2013г.

сряда

Упражнение

Нормални групи

$H \leq G$, $Hg \in G$ $\quad G / H$

$gH = Hg$ $\quad H \trianglelefteq G$ — нормална

$h_1, h_2 \in H$

$\underbrace{g^{-1} h_1 g}_{= h_2} \in H$

$|G : H| = 2 \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$

$G = S_n$

$H = A_n$ $\quad |S_n : A_n| = 2$

$G = GL_n(F)$ $\quad H = SL_n(F)$

$H \trianglelefteq G$?

$|G : H| = F^*$ $\quad g \in G, h \in H$

$g^{-1} h g \in H$? — $\det = 1$

$Q_8 = \{\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ $\quad - \{E\}, Q_8$

$ij = -ji = k$ $\quad - \{\pm 1; \pm i\}$ H_1

$jk = -kj = i$ $\quad \{\pm 1; \pm j\}$ H_2

$ki = -ik = j$ $\quad \{\pm 1; \pm k\}$ H_3

$|Q_8 : H_i| = 2$

$Z(G) = \{ z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G \}$

$(-1)i = i(-1) = -i$

j^k

$\{\pm 1\} = Z(Q_8)$

$g^{-1} h g \in H$, $h \in Z(G)$

$H_i \trianglelefteq Q_8$

$\forall$ подгрупа на Q_8 е нормална

зад G-група, $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$

$A \cap B = \{1\}$

$ab = ba \quad \forall a, b$

$a \in A$

$\forall b \in B$

$A \cap B$ - подгрупа

2

A - подгрупа

$\underbrace{a^{-1}}_{\in A} \underbrace{b^{-1} a b}_{\in A}$ комутатор $\in A$

$\underbrace{a^{-1} b^{-1} a}_{\in B} \underbrace{b}_{\in B}$ спрегнат $\in B$

$\Rightarrow a^{-1} b^{-1} a b \in A \cap B$

$\Rightarrow a^{-1} b^{-1} a b = 1$

$ab = ba$:))

зад G-група

$A \leq G, \quad B \leq G$

$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$

а) $A \leq AB$, $AB = A \Leftrightarrow B \leq A$

б) $\boxed{! \ |AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}}$

$\begin{pmatrix} A < \infty \\ B < \infty \end{pmatrix}$

Нека $A \cap B = C$

$C \leq A$

$|A : C| = k$ съседни класове

$a_1 C, a_2 C, \dots, a_k C$

$a_i C \neq a_j C$
$i \neq j$

$a_i B \quad i = 1, \dots, k$

$a_i B = a_j B$

$a_i^{-1} a_j \in B$

2 съседни класа съвпадат

$\underset{\overset{\cap}{A}}{a_i^{-1} a_j} \in B \Rightarrow a_i^{-1} a_j \in A \cap B = C$

$\Leftarrow$ $a_i C = a_j C$

$g \in AB \Rightarrow g = ab$

$a = a_i c, \ i = 1, \dots, k$

$g = (a_i c) b = a_i \underset{\overset{\cap}{B}}{(cb)} \in a_i B$

$c \in A \cap B$

$|AB| = |a_1 B| + |a_2 B| + \dots + |a_k B| =$
$= k|B|$

$|A:C| = k = \frac{|A|}{|C|} = \frac{|A|}{|A \cap B|}$

$k \cdot |B| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$

---

8) $AB \le G$, точно когато $AB = BA$

$A \le G$
$B \le G$

2) $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \le G$ подгрупа

в) 1) $a_1 b_1 a_2 b_2 \in AB$ def

2) $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

$x, y \in H$
$xy \in H$
$x^{-1} \in H$
$xy^{-1} \in H$

$A \trianglelefteq G$
$B \trianglelefteq G$

$A \cap B = \{1\}$

[redacted] $ab = ba$

---

1) $a_1 b_1 a_2 b_2 \in AB$
$(ab)^{-1} \in AB$

$x, y \in AB$

$x = a_1 b_1$

$y = a_2 b_2$

т.к. $AB \leq G \Rightarrow xy^{-1} \in AB$

$\Rightarrow a_1 \underbrace{b_1 b_2^{-1}}_{\in B} a_2^{-1} \in AB$

$\Rightarrow$ трябва да комутират

2) $? \; xy^{-1} \in AB$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} =$

$\in A$

$\cancel{a_1 b_1 a_2^{-1}}$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = \underbrace{\underbrace{a_1 a_2^{-1}}_{\in A} \underbrace{a_2 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1}}_{\in B}}_{\in AB}$

$B \trianglelefteq G$

$\in B$

$\underline{A \trianglelefteq G}$

$? \; xy^{-1} \in AB$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} =$

$x^{-1} y \in AB$

$b_1^{-1} a_1^{-1} a_2 b_2 \in AB?$

$b_1^{-1} b_2^{-1} b_2 \underbrace{a_1^{-1} a_2 b_2}$

$\in A$ (A е нормална)

$b_1^{-1} a_1^{-1} a_2 b_1 b_1^{-1} b_2$

$\in A$ $\quad \in B$

:))

$\underline{\text{O.K.}}$

$A \trianglelefteq G$

зад. $|G| = 2p \quad$ p - нечетно просто

$G \cong C_{2p}$ или D_p диэдрална

$\exists g \in G : |g| = 2p \Rightarrow G \cong C_{2p}$

Нека $\nexists g$

$\exists g \in G : |g| = 2$

$\forall a \in G : |a| = 2 \Rightarrow$

$H = \{1, x, y, xy\} \cong K_4$

$\underline{H < G}$

със сигурност има такава подгрупа

$|H| = 4$

$|H| / |G|$ ẋ

$\exists\ a \in G : |a| = p$!

$\exists\ b \in G : |b| = 2$.

$\underline{M = \langle a, b \rangle}$

$\boxed{b^{-1} a b = a^{-1}}$ диадрална

$\tau(ab) = ?$

ако $\tau(ab) = 2p \Rightarrow M \cong C_{2p}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad G$

$\tau(ab) \neq 2p$

? $\tau(ab) = p$

$|G| = pq$ p, q - прости $\underline{\underline{\text{ТВ:}}}$

$q > p$

? $\exists!\ H \leq G : |H| = q$

Доп. противното

$\exists\ |A| = |B| = q$ $\quad A \neq B$

$$|AB| = \frac{|A|\,|B|}{|A \cap B|}$$

$|AB| \leq |G| = pq$

$$\frac{q^2}{|A \cap B|} \leq p\cancel{q}$$

не $p > q$

$|A \cap B| = \cancel{1}, \cancel{p}, q, \cancel{pq}$

$|A \cap B| = q$

$|AB| = q$

$\Rightarrow A \equiv B$

$\tau(ab) = p$ не

$\Rightarrow \tau(ab) = 2$

$abab = 1$

$bab = a^{-1}$:))

$b^{-1} a b = a^{-1}$ $\quad |b| = 2$

$H \trianglelefteq G$

G/H - факторгрупа

$a, b \in G$

$\bar{a} = aH$

$\bar{b} = bH$

$\bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}$

$aH \cdot bH = abH$

$$|G| = |H| \cdot |G:H|$$

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}_n$$

$$|\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}| = n$$

$$m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}_{\frac{n}{m}}$$

$m | n$ $\quad |m\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}| = \frac{n}{m}$

$$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}_2$$

$$|\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^+| = 2$$

$$S_n/A_n \cong \mathbb{C}_2$$

ДСД $\quad GL_n(F)/S.L_n(F) \cong F^*$

Зад. $Q_8/Z(Q_8) \cong K_4$

$$|Q_8| = 8$$

$$|Z(Q_8)| = 2$$

$$|Q_8/Z(Q_8)| = 4$$

Зад. 2.15 $\Rightarrow$ $Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{C}_4$ или K_4

помощна зад. $H \leq Z(G)$

$(H = Z(G))$

Ако G/H циклична

$\Rightarrow G$ е абелева

G - гр

$H \leq Z(G)$

$$G/H = H \cup gH \cup g^2H \cup \ldots \cup g^kH$$

$x, y \in G/H \quad x = g^k h_1$

$y = g^m h_2$

$$xy = g^k (h_1 g^m) h_2 =$$

$$= g^{k+m} h_1 h_2$$

$$yx = g^m (h_2 g^k) h_1 =$$

$$= g^{m+k} h_1 h_2$$

K_4

Аналог.

Зад. $D_4/Z(D_4) \cong K_4$

D - диадрална

$$D_4 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BAB = A^{-1} = A^3 \qquad |A| = 4$$

$$AB = BA^3$$

$$A^i B^j A^k B^l =$$

$$= A^{i+k(-1)^j} B^{j+l}$$

$A, A^3 \notin Z(D_4)$

център

$A^2 B = B A^2$?

$-$ ~~...~~

$BAB = A^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix}$$

$$B A^2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ -\sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad :))$$

$$S_4 / K_4 \cong S_3$$

нормална подгрупа на S_4

$|S_4| = 4! = 24$

$|K_4| = 4$

$|S_4 / K_4| = 6$

$\cong C_6$ или S_3

защо не е C_6 ← Дом

Теорема за хомоморфизми

$\varphi: G \to G'$

$Ker\,\varphi = \{ a \in G \mid \varphi(a) = e \}$

$Ker\,\varphi \trianglelefteq G$

нормална

$Im\,\varphi = \{ a' \in G' \mid \varphi(a) = a' \}$

$Im\,\varphi \leq G'$

$\varphi: G \to G'$

φ - хмм в/у сюрекция

$H = Ker\,\varphi \quad G'$

$\Rightarrow G/H \cong Im\,\varphi$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$ от Th

!

Зад. F - числово поле

$M = \{ (a, c) \mid a, c \in F, a \neq 0 \}$

$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1)$

$\in M$!

ДСД М-абелева гр.?

$N = \{(1,c) \mid c \in F\} \overset{?}{\leq} M;$

$N \cong F, \quad M/N \cong F^*$

0) $(a_1, c_1)(a_2, c_2) \in M$?

$M \neq \{0\}$

$a_1 \neq 0$

$a_2 \neq 0$

$a_1 a_2 \neq 0$

1) асоциативност $\underline{\text{3 нар. двойки}}$

$((a_1, c_1)(a_2, c_2))(a_3, c_3) = (a_1, c_1)$

$[(a_2, c_2)(a_3, c_3)]$

2) $\exists ! (x, y) \in M:$

$\forall (a,c)(x,y) = (x,y)(a,c) =$

$= (a,c)$

$(a,c)(x,y) = (ax, ay + cx) =$

$= (a,c)$

$\left| \begin{array}{l} ax = a \quad \Rightarrow x = 1 \\ ay + cx = c \quad \Rightarrow ay = 0 \\ \qquad \Rightarrow y = 0 \ (a \neq 0) \end{array} \right.$

$(x,y) = (1,0) \in M$:))

търсим (m,n)

3) $(a,c)(m,n) = (m,n)(a,c) = 1$

$\left| \begin{array}{l} am = 1 \\ an + cm = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow m = a^{-1}$

$\Rightarrow n = -ca^{-2}$ ✓

$(a,c) \to (a^{-1}, -ca^{-2})$

$\Rightarrow$ М-група

4) ?абелева $(a_2, c_2)(a_1, c_1) \overset{?}{=} (a_1, c_1)(a_2, c_2)$

$(a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1)$:))

$\overline{0)}, \ldots, \overline{4)} \Rightarrow$ М-абелева група

$N \leq M$? $\{0\} \neq N \subset M$

$(1,0) \in N$

1) $(1,c)(1,c_2) = (1, c_1 + c_2) \in M$

2) $(1,c)^{-1} \in N$?

$(1,c)(1,t) = (1,t)(1,c) =$

$= (1,0)$

$(1, c+t) = (1,0)$

$\underline{t = -c}$:))

$\Rightarrow N \leq M$

$\varphi: N \to F$

$\varphi: \dot{U} \to \overset{+}{F}$

$\varphi(1, c) = c$

? хомоморфизъм

$\varphi[(1, c_1)(1, c_2)] \overset{?}{=} \varphi(1, c_1) + \varphi(1, c_2)$

$\varphi(1, c_1 + c_2) = c_1 + c_2$

$c_1 + c_2 = c_1 + c_2$:))

$\Rightarrow \varphi$ - хмм на групи

$(1, c_1) \neq (1, c_2)$ инекция

$c_1 = c_2$ $\overset{\circ}{x}$

сюрекция $\forall_{c \in F} \exists (1, c) \in N$

$\Rightarrow$ биекция φ е

$\Rightarrow$ изоморфизъм $N \cong F$

$M / N \cong F^*$? F^* - мултипликативна

$\psi: M \to F^*$

проверяват се съседни класове

1) $\psi(a, c) = a$

3) $\operatorname{Ker}\psi$ $\{ (a, c) \in M \mid \psi(a, c) = 1 \} = N$

2) $\psi(a, c)$? хомоморф. в/у

$\psi[(a_1, c_1)(a_2, c_2)] = \psi(a_1, c_1) \psi(a_2, c_2)$

$\psi(a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1) = a_1 a_2$

$a_1 a_2 = a_1 a_2$ V :))

$\Rightarrow \psi$ е хмм на групи

очевидно е в/у

Th за хмм

1, 2, 3 $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}\psi$

$M / N \cong F^*$

$\Rightarrow N \triangleleft M$

Зад. F - числово поле

$G = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in F, a \neq 0, b \neq 0 \}$

$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)$

Да се направи!

а) G - неабелева (1, 1, 0)

б) $H = \{ (1, b, c) \mid b, c \in F, b \neq 0 \}$ -

неабелева нормална подгрупа на G

$G/H \cong F^*$ Th за хомоморф.

$\varphi: G \to F^*$

$Ker\varphi = \{(a,b,c) \in G \mid \varphi(a,b,c) = 1\} = H$

a

$\varphi(a,b,c) = a$

в) $K = \{(a,a,c) \mid a, c \in F, a \neq 0\} \trianglelefteq G$

$K \cong M$ от предната зад.

$G/K \cong F^*$

подгрупа стандартно

$\psi: K \to M$

$\psi(a,a;c) = (a,c)$

ψ - хмм + биекция

$\Rightarrow$ изоморф. $K \cong M$

$\pi: G \to F^*$

$\pi(a,a,c) = a$:)) π - хмм б/у

$Ker\,\pi = \ldots$

Th хмм

$\Rightarrow \ldots$ $G/K \cong F^*$

$K \trianglelefteq G$

29.04.2013 г.

понеделник

Лекция

Корени на полиномите

F - поле $f(x) \in F[x]$, $\deg f > 0$

$x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ няма рац. корени

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ поле на разлагане

$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ н.р.к.

Тв. $I = (f) \trianglelefteq F[x]$ главен идеал

$F[x]/I$ е поле

$\Leftrightarrow$ f е неразложим над F.

Д-во: $\Rightarrow$ $F[x]/I$ е поле.

$(\bar{g} = g + I)$

$\bar{g} = 0 \Leftrightarrow g \in I)$

Доп., че $f = gh \Rightarrow \bar{f} = \bar{g}\cdot\bar{h}$

$\bar{f} = 0$