17.04.2013г.

сряда

Упражнение

зад. $S_3 \cong D_3$ $\quad D_3 = \{\underline{A}, \underline{A^2}, \underline{B}, AB, A^2B, E\}$

$B^{-1}AB = A^{-1}$

$BAB = A^2$

$\Omega_3 = \{1, 2, 3\}$

$\boxed{\begin{array}{l} S_1 = A_1 \cong C_1 \\ S_2 \cong C_2 \\ A_2 \cong C_1 \\ A_3 \cong C_2 \end{array}}$

$S_3 = \{id, \underline{(12)}, (13), (23), \underline{(123)}, (132)\}$

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (123) & 231 \\ (123) & 312 \\ (123) & 123 \end{array}\right] = (132) = (321)$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (12) & 213 \\ (123) & 321 \end{array}\right] (13) = (123)(12)$$

$(123) \quad 132 \qquad (23) = (123)^2(12)$

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle$

8

$\varphi: S_3 \to D_3$

$\varphi(12) = B$? хомоморфизъм

$\varphi(123) = A$ да

$$\begin{array}{ll} & 123 \\ (12) & 213 \\ (123) & 321 \\ (12) & 312 \end{array} \Bigg] = (1\,3\,2) = A^2$$

$S_3 \cong D_3$

<u>зад.</u> $S_n \ (n \geq 2)$

а) $\langle (12), (13), \dots (1n) \rangle$ транспозиции $= S_n$

б) $\langle (12), \ (12 \dots n) \rangle = S_n$

(ij)

а) $1\,2\,3 \dots i \dots j \dots n$

$$\begin{array}{ll} (1j) & j\,2\,3 \dots i \dots 1 \dots n \\ (1i) & j\,2\,3 \dots 1 \dots i \dots n \\ (1j) & 1\,2\,3 \dots j \dots i \dots n \end{array} \Bigg] = (ij)$$

$(1j)(1i)(1j) = (ij)$

$\sigma = (i_1, i_2, \dots i_k)$

$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(i_1), \dots \rho(i_k))$

$(1i)(ij)(1j) = (1i)$

б) $1\,2\,3 \dots n$ $\quad (1\,2 \dots n)(12)(12 \dots n)^{-1}$

$(1\,2 \dots n)^{-1}$

$(12 \dots n)^{-1}(12 \dots n) = id$

$$\begin{array}{ll} & 1\,2 \dots n \\ (12 \dots n) & 2\,3 \dots n\,1 \\ (n\;n{-}1 \dots 2\,1) & 1\,2 \dots n{-}1\;n \end{array} \Bigg]$$

$$\begin{array}{ll} (1\,2 \dots n)^{-1} = & (n\;n{-}1 \dots 2\;1) \\ (12) & (n\;2\,1 \dots n{-}1 \\ (1\,2 \dots n) & 1\,3\,2 \dots n \end{array} \Bigg] \ (23)$$

$\sigma = (12)$

$\rho = (12 \dots n)$

$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1)\,\rho(2)) = (2\,3)$

$(1\,2 \dots n)^2 (12)(12 \dots n)^{-2}$

$(1\,2 \dots n)(23)(1\,2 \dots n)^{-1} = (34)$

$(1\,2 \dots n)(i\;i{+}1)(12 \dots n)^{-1} = (i+1, i+2)$

$i = 1, \dots, n-1$

$\rho^i (i\;i{+}1) \rho^{-i}$ $\quad \rho = (1\,2 \dots n)$

$(13)(12)(13) = (1\,2\,(1)\;1\,2\,(3)$

$\cancel{123}$

$(13)(12)(13)$

$$\begin{array}{ll} & 1\,2\,3 \\ (13) & 3\,2\,1 \\ (12) & 3\,1\,2 \\ (13) & 1\,3\,2 \end{array} \Bigg] (23)$$

$(13)(12)(13) = ((13)\{1\}\ (13)\{2\}) =$

$= (32)$

$(14)(13)(14) = (34)$

$(1j)(1i)(1j) = (ij)$

$(1\,i{+}1)(1\,i)(1\,i{+}1) = (i\,i{+}1)$

$(1i) = (1\,i{+}1)(i\,i{+}1)(1\,i{+}1)$

$(1\,2\ldots n)(13)(1\,2\ldots n)^{-1} =$

$= (24)$

$$\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\ldots n \\ (12) & 2\,1\,3\ldots n \\ (12\ldots n) & 3\,2\,4\ldots 1 \\ (12) & 3\,1\,4\ldots 2 \end{array} \Bigg]$$ не

$$\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\ldots n{-}1\,n \\ (1n) & n\,2\ldots n{-}1\,1 \\ (1\,n{-}1) & n\,2\ldots 1\,n{-}1 \\ (1\,n{-}2) & n\,2\ldots n{-}2\,n{-}1 \\ \vdots & \\ (1,2) & \cancel{n\,2\ldots 1\,n{-}2} \\ & n\,1\,2\ldots n{-}2\,n{-}1 \end{array} \Bigg] (12\ldots n)^{-1}$$

10

$1\ 2\ \ldots\ n$

(12)

(13)

$\vdots$

$(1n)\quad 2\,3\,4\ldots n\,1$

$(12)(23)(12) = (13)$

зад. A_n $(n \geq 3)$ се поражда от

а) $\forall$ тройни цикли - (четни пермутации)

б) $\langle (123)(124)\ldots(12n) \rangle$

$(ijk)(klm)$

$H = \langle ijk \rangle$,

$H \leq A_n$

? на 2 транспозиции дава троен цикъл

(ijk)

$$\begin{array}{ll} & \ldots i\ldots j\ldots k\ldots \\ (ij) & j\ldots i\ldots k \\ (ik) & j\ldots k\ldots i \end{array} \Bigg] = (ijk) = (ik)(ij)$$

$i\ j\ k\ l$

? $j\ k\ i\ l$

$(ij)(kl)$

$(ik)(jl)$

$(ij)(kl) = (ij)(\ )^{2}(kl)$

$\boxed{(ij)(kl) = (jkl)(ilj)}$

$(ij)(jl)$

произв. на четен бр. тройни цикли дава четна пермутация

б) $H = \langle (12i) \rangle$

$(12i)(12j)$

$$\left.\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & i & j \\ (12j) & 2 & j & i & 1 \\ (12i) & i & j & 1 & 2 \end{array}\right] (1i)(2j)$$

$(j21) = (12j)^{-1} = \begin{matrix} i & 2 \\ & & j & 1 \end{matrix}$

$(1ij)$

$(12j)^{-1}(12i)(12j)$

$$\begin{array}{lccccc} & 1 & 2 & i & j & k \\ (1ij) \end{array}$$

$(12k)(1ij)(12k)^{-1}$

$$\left.\begin{array}{lccccc} & 1 & 2 & i & j & k \\ (k21) & k & 1 & i & j & 2 \\ (12k)(1ij)(12k)^{-1} & k & i & j & 1 & 2 \\ & 1 & i & j & 2 & k \end{array}\right] (2ij)$$

$(k21) - (12k)$

$$\left.\begin{array}{lccccc} & 1 & 2 & i & j & k \\ (12k) & 2 & k & i & j & 1 \\ (1ij) & 2 & k & j & 1 & i \\ (k21) & 1 & 2 & j & k & i \end{array}\right] = (ijk)$$

Th на Лагранж.
Съседни класове.

$G,\ H \leq G,\ g \in G$

gH - ляв съседен клас

Hg - десен съседен клас

Св-ва:

① $\forall$ ел. попада в някой съседен клас

$eH = H = He$

② $g \in H \Leftrightarrow gH = H = Hg$

③ $g_1, g_2 \in G$: $g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$

$Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} \in H$

④ $g_1H = g_2H$ или съвпадат или $g_1H \cap g_2H = \emptyset$

⑤ бр. леви ≡ бр. десни крайна група

☆ ⑥ $|H| < \infty \quad |gH| = |H| = |Hg|$

бр. елементи

G-крайна $\quad H \leq G$

$|G:H|$ - индекс

брой ~~на левите~~ съседни класове

Th Лагранж $\quad |G| = |H| \cdot |G:H|$

! $\boxed{g \in G \quad g^{|G|} = e}$

Зад. $|G:H| = ?$

а) $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_n} \{k + n\mathbb{Z}\}$$

$$k_1 + n\mathbb{Z} = k_2 + n\mathbb{Z}$$
$$k_1 - k_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$|G:H| = |\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$$

$$n\mathbb{Z}, \bar{1} + n\mathbb{Z}, \dots (n-1) + n\mathbb{Z}$$

б) $G = m\mathbb{Z}$ $\quad H = n\mathbb{Z}$ $(n, m \in \mathbb{N}, m / n)$

$\exists\, l \in \mathbb{Z}: \quad n = ml$

$$G = \bigcup_{k \in m\mathbb{Z}} \{k + ml\mathbb{Z}\}$$

$$k_1 + ml\mathbb{Z} = k_2 + ml\mathbb{Z}$$
$$k_1 - k_2 \in ml\mathbb{Z} \qquad i = 1, 2$$

$ml \mid (k_1 - k_2) \qquad k_i = m t_i$

$$\cancel{m} l \mid \cancel{m} (t_1 - t_2)$$

$l =$ [redacted] $\frac{n}{m}$

$\Rightarrow$ бр. класове l

$$|G:H| = |m\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = l = \frac{m}{n}$$

Зад. $G = S_n$ - $\forall$ пермутации

$H = A_n$ - четни перм.

$$\sigma \in A_n$$

$(ij)\sigma \in S_n \setminus A_n$ $\quad$ четни или нечетни

$$|G:H| = |S_n : A_n| = 2$$

Зад. $G = GL_n(F)$

$H = SL_n(F)$

$$g_1 g_2 \in G$$
$$g_1 H = g_2 H$$
$$g_1^{-1} g_2 \in H$$
$$1 = \det(g_1^{-1} g_2) = \det g_1^{-1} \cdot \det g_2$$
$$1 = \det(g_1^{-1} g_1) = \det g_1^{-1} \det g_1$$
$$\det g_1^{-1} = \frac{1}{\det g_1}$$

$\frac{\det g_2}{\det g_1} = 1 \Rightarrow$ в един и същ клас $(\Leftarrow)$ det съвпадат

$|G:H| = |GL_n(F) : SL_n(F)| =$
$= |F^*|$

$\boxed{\text{Дом: } G = \mathbb{R}^*, \; H = \mathbb{R}^+}$

Зад. G-крайна $K \le H \le G$

$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$

$|G| = |H| \cdot |G:H|$

$|H| = |K| \cdot |H:K|$

$|G| = |K| \cdot |G:K|$

Зад. G-крайна $K < G$ и $|G:K| = p$ просто число

$K \underset{max}{<} G$

мах подгрупа $K \neq G$ нито 1 подгр. на G не съд. K

$K \le K$ или G

$\exists \; H \lneq G$

$K \le H$

$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$

$p = |G:H|$ или $|H:K| = 1$

:))

Зад. $|G| = p$-просто

$G \cong C_p$ G няма нетривиални подгрупи

Доп., че $\exists \; H < G$ $H \neq G$ $H \neq \{E\}$

$|G| = |H| \cdot |G:H|$

редът на $\forall$ ел. е / реда на гр.

$\forall g \in G : g^{|G|} = e$

$g^p = e$

$\Rightarrow \forall$ неед. е от ред p $\Rightarrow$ изоморфизъм

Зад. $G \neq \{E\}$ няма нетривиални подгрупи

$\Rightarrow G \cong C_p$, p-просто

циклична: крайна $G = C_n$ или безкр. $G = \mathbb{Z}$

безкрайна $\cong \mathbb{Z}$ - има нетривиални

$n = p$

:))

Зад. Подгрупите на Q_8 кватерниони

$Q_8 : \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = -ji = k$

$jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

- $\{E\}, Q_8$
- $\{1, -1\}$ - ред 2
- $\{\langle i \rangle\}$ циклична

$\{\langle i\rangle\}\{\langle j\rangle\}, \{\langle k\rangle\}$ - циклични от ред 4

$1, i, -1, -i$

Зад. S_3 подгрупи

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

- $\{E\}$, S_3
- $\{\langle 12\rangle\}$, $\{\langle 13\rangle\}$, $\{\langle 23\rangle\}$ - циклични групи от ред 2
- $\{\langle 123\rangle\}$, [redacted] - циклична от ред 3

? $D_4 \longrightarrow |D_4| = 8$

D_n - ред $2n$

Зад. A_4

а) $K_4 = \{(1), \overbrace{(12)(34)}^{a}, \overbrace{(13)(24)}^{b}, \overbrace{(14)(23)}^{c}\}$ - абелева подгрупа (Клайн)

само K_4

б) няма подгрупа от ред 6 в A_4 (въпреки че $6 / A_4$)

$K_4 < A_4$

$a = a^{-1} = (12)(34)$

$b = b^{-1}$

$c = c^{-1}$:)

$$ab = \left.\begin{array}{lll} & & 1\,2\,3\,4 \\ & (13)(24) & 3\,4\,1\,2 \\ a & (12)(34) & 4\,3\,2\,1 \end{array}\right] \overset{c}{(14)(23)}$$

$c = ab$

ac

$$\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\,4 \\ (14)(23) & 4\,3\,2\,1 \\ (12)(34) & 3\,4\,1\,2 \end{array} \qquad (13)(24) = b$$

$ac = b$

$bc = a$

$K_4 < A_4$

? абелева

$$\left.\begin{array}{ll} ba & 1\,2\,3\,4 \\ a & 2\,1\,4\,3 \\ (12)(34) & 4\,3\,2\,1 \\ (13)(24) & \end{array}\right] (14)(23)$$

$ab = ba$

б) $\exists\, H < A_4 : |H| = 6$ $\overset{\text{Лагранж}}{\Longrightarrow}$ $|G:H| = \frac{12}{6} = 2$

$\sigma = (ijk) \in G$ [redacted]

$\sigma \neq \sigma^2$

$H, \sigma H, \sigma^2 H$ - съседни леви класове

3, но трябва да са 2

$\Rightarrow$ някои съвпадат

$H = \sigma H \Rightarrow \sigma \in H$

$H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$

$\sigma H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^{-1}\sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$

произволен цикъл

$\Rightarrow \forall$ троен цикъл $\in H$

$H = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$

9 елемента =>

$|H| = 9$ $\overset{\circ}{\times}$

$|H| = 6$

зад. $|G| \leq 7$

Да се док., че $G \cong$ точно 1 от групите

$\underline{C_1}, \underline{C_2}, \underline{C_3}, \underline{C_4}, \underline{K_4}, \underline{C_5}, \underline{C_6}, S_3, \underline{C_7}$

Ако редът на $|G| = 2, 3, 5, 7$

$\Rightarrow G \cong C_2, C_3, C_5, C_7$

C_1 - тривиалната.

Нека $|G| = 4$

$\exists g \in G : |g| = 4 \Rightarrow$ [redacted] $G = \langle g \rangle \cong C_4$

$\nexists g \in G : |g| = 4$

$\forall a \in G, a \neq e : |a| = 2 \to \exists b \in G : |b| = 2$

$ab \neq 1 \Rightarrow a = b^{-1}$

$|ab| = 4$ не

$|ab| = 2$ $\overset{\circ}{\times}$

$a \neq e$, $b \neq e$

$|a| = 2$

$|b| = 2$ $\Rightarrow a = a^{-1}$

$|ab| = 2$ $\quad b = b^{-1}$

$ab\,ab = 1$

$ab\,a^{-1}b^{-1} = 1$ $\boxed{ab = ba}$

G - абелева

$G = \{1, a, b, ab\}$

$a(ab) = a^2 b = b$

$b(ab) = b^2 a = a$

[redacted] изоморфизъм

$a = (12)(34)$ $\quad 1 = (1)$

$b = (13)(24)$

$ab = (14)(23)$

$G \cong K_4$

за 6 ...

I. - $G \cong C_6$

II. $\nexists g$ $|g| = 6$

$|g| = 2$ или

$|g| = 3$

$\exists a \in G : |a| = 2$

Ако $\forall g \neq 1 : |g| = 2 \Rightarrow$ G-абелева

$\{1, a, b, ab, \underbrace{c, ac, bc, abc}\}$

не може абелева (поне 2 съвпадат $\overset{\circ}{\times}$)

$a = bc \Rightarrow abc = 1$

$a = ac$ $\overset{\circ}{\times}$

$a = abc$ $\overset{\circ}{\times}$ $\Rightarrow bc = 1$

$ab = ac \Rightarrow b = c$ $\overset{\circ}{\times}$

$ab = bc \Rightarrow a = c$ $\overset{\circ}{\times}$

$ab = abc \Rightarrow c = 1$

$|K_4| = 4$

$K_4 \leq G$ $\overset{\circ}{\times}$

=> не ∀ неединичен ел. е от ред 2

$\exists\ b \in G : |b| = 3$

$\neq 1$

$|G : \langle b \rangle| = 2$

$\langle b \rangle$, $a\langle b \rangle$ - леви съседни класове

! $\boxed{B^{-1}AB = A^{-1}}$

$a^{-1}ba = b^{-1}$

? $ba \in \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle$ ✗

$\Rightarrow ba \in a\langle b \rangle$

a^{-1} $k = 0, 1, 2$

$ba = ab^k$

$a^{-1}ba \in \langle b \rangle$

$k=0$ $a^{-1}ba = 1$

$ba = a \Rightarrow b = 1$ ✗

$k=1$

$a^{-1}ba = b$

$ba = ab$ абелева - не

G не е абелева

$(ab)^2 =$
$= (ab)(ab) = a^{-1}b$
$\| $
b^2

~~k=2 a^{-1}ba = b^2~~

$G = \{1, a, b, [redacted], ab\}, b^2, a^{-1}b^2\}$

$k=2$ $a^{-1}ba = b^2$

хомоморф-м о.к. $\varphi : G \to D_3$

$b \to A$

$a \to B$

$a^{-1}ba = B^2 = B^{-1}$:))

[redacted]

Зад. ∀ неабелева G от ред 8

Док:

$G \cong Q_8, D_4$

22.04.2013 г.

понеделник

Лекция

Аритметика в пръстена на полиномите над поле

F - поле $F[x]$

Опр. g дели f (g/f), ако
$\exists\ q \in F[x] : f = gq$

g/f, $a \in F$, $a \neq 0 \Rightarrow ag / f$

$f = gq$

$f = (5g)(\frac{1}{5}q) =$