

17.04.2013г.

срда

Упражнение

заг. $S_3 \cong D_3$ $D_3 = \{ \underline{A}, \underline{A^2}, \underline{B}, AB, A^2B, E \}$

$$B^{-1}AB = A^{-1}$$

$$BAB = A^2$$

$$\Omega_3 = \{ 1, 2, 3 \}$$

$S_1 \cong C_1$
$S_2 \cong C_2$
$A_1 \cong C_1$
$A_2 \cong C_2$

$$S_3 = \{ \text{id}, \underline{(12)}, (13), (23), \underline{(123)}, (132) \}$$

$$\begin{array}{l} 123 \\ (123) \ 231 \\ (123) \ 312 \\ (123) \ 123 \end{array} \Bigg] = (132) = (321)$$

$$\begin{array}{l} \text{[scribble]} \ (12) \\ \text{[scribble]} \ (123) \end{array} \Bigg] (13) = (123)(12)$$

$$(123) \ 132 \cdot (23) = (123)^2(12)$$

$$S_3 = \langle (12), (123) \rangle$$

$$\varphi: S_3 \rightarrow D_3$$

$$\varphi(12) = B$$

$$\varphi(123) = A$$

? хомоморфизм
ga

$$\left[\begin{array}{l} 123 \\ (12) \ 213 \\ (123) \ 321 \\ (12) \ 312 \end{array} \right] = (132) = A^2$$

$$S_3 \cong D_3$$

3 ag.

$$S_n \ (n \geq 2)$$

$\sigma \in \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle = S_n$
 $\delta \in \langle (12), (12 \dots n) \rangle = S_n$

$$(ij)$$

a)

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ i \ \dots \ j \ \dots \ n$$

$$(1j) \ j \ 2 \ 3 \ \dots \ i \ \dots \ 1 \ \dots \ n$$

$$(1i) \ j \ 2 \ 3 \ \dots \ 1 \ \dots \ i \ \dots \ n$$

$$(1j) \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ j \ \dots \ i \ \dots \ n$$

$$= (ij)$$

$$(1j)(1i)(1j) = (ij)$$

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$$

$$g \sigma g^{-1} = (g(i_1), \dots, g(i_k))$$

$$(1i)(ij)(1j) = (1i)$$

$$\delta) \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n \quad (1 \ 2 \dots n)(12)(12 \dots n)$$

$$(1 \ 2 \dots n)^{-1}$$

$$(1 \ 2 \dots n)^{-1} (1 \ 2 \dots n) = id$$

$$1 \ 2 \dots n$$

$$(1 \ 2 \dots n) \ 2 \ 3 \dots n \ 1$$

$$(n \ n-1 \dots 2 \ 1) \ 1 \ 2 \dots n-1 \ n$$

$$(1 \ 2 \dots n)^{-1} = (n \ n-1 \dots 2 \ 1)$$

$$(23)$$

$$(12) \ (n \ 2 \ 1 \dots n-1)$$

$$(1 \ 2 \dots n) \ 1 \ 3 \ 2 \dots n$$

$$\sigma = (12)$$

$$g = (12 \dots n)$$

$$g \sigma g^{-1} = (g(1) \ g(2)) = (23)$$

$$(1 \ 2 \dots n)^2 (12) (12 \dots n)^{-2}$$

$$(1 \ 2 \dots n)(23)(1 \ 2 \dots n)^{-1} = (34)$$

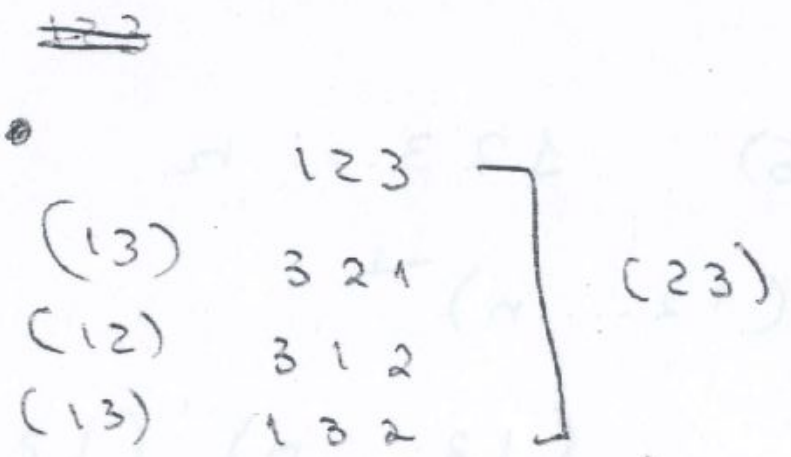
$$(1 \ 2 \dots n)(i \ i+1)(12 \dots n)^{-1} = (i+1, i+2)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

$$g^i (i \ i+1) g^{-i} \quad g = (12 \dots n)$$

$$(13)(12)(13) = (12(1)12(3))$$

$(13)(12)(13)$



$(13)(12)(13) = ((13)\{1\}(13)\{2\}) = (32)$

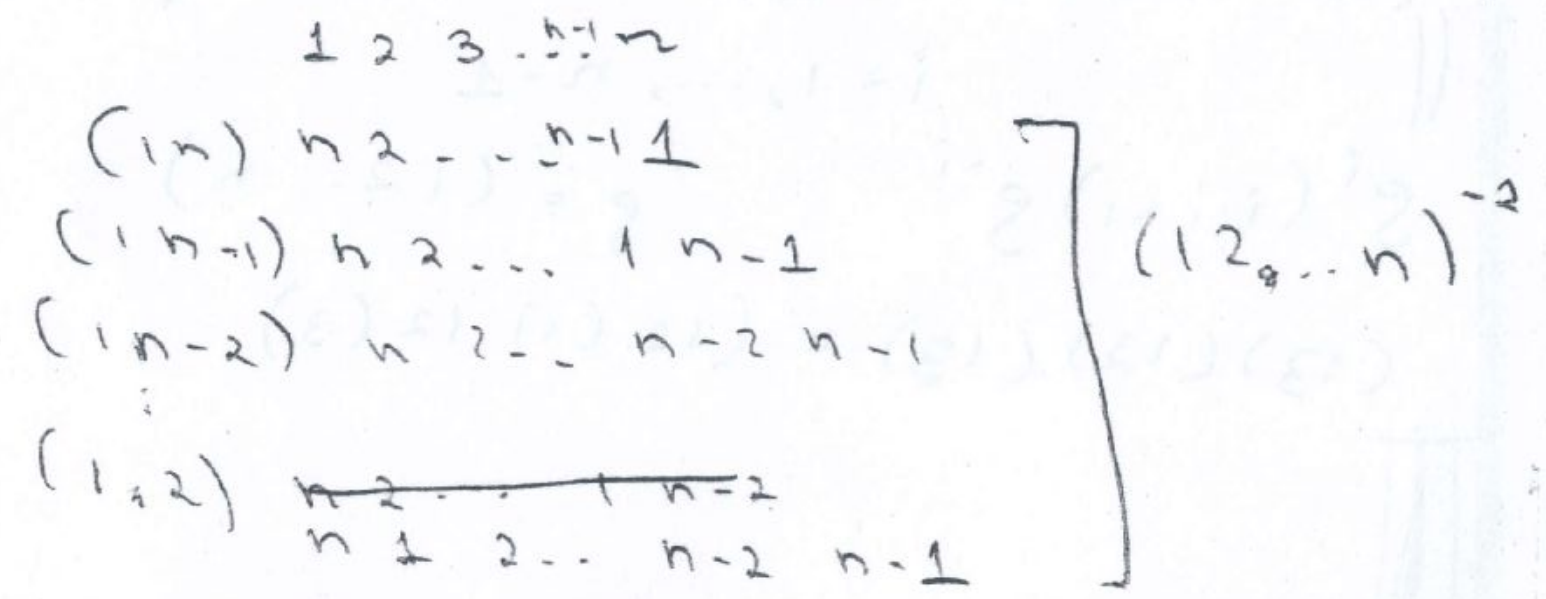
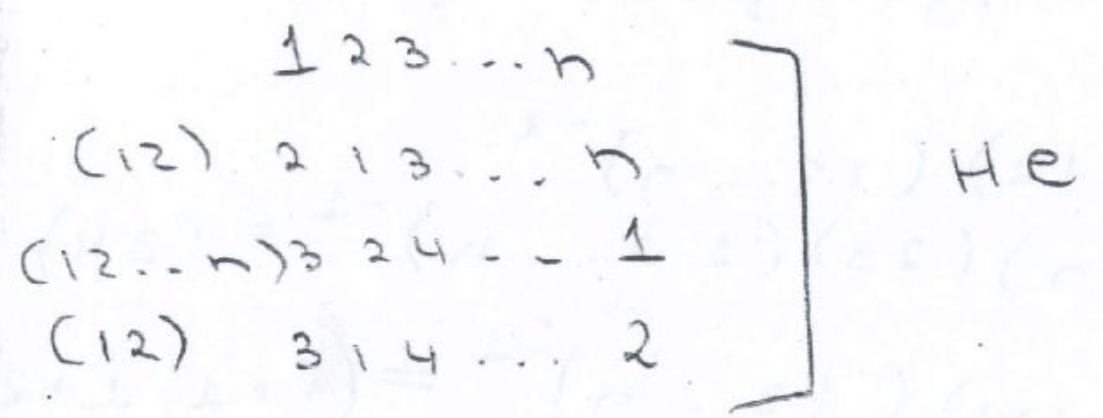
$(14)(13)(14) = (34)$

$(1j)(1i)(1j) = (ij)$

$(1i+1)(1i)(1i+1) = (i i+1)$

$(1i) = (1i+1)(i i+1)(1i+1)$

$(12 \dots n)(13)(12 \dots n)^{-1} = (24)$



1 2 ... n

(12)

(13)

⋮

(1n) 2 3 4 ... n 1

$(12)(23)(12) = (13)$

заг. A_n ($n \geq 3$) се порамса от
 а) \forall тройни цикли - (четни пермутации)
 б) $\langle (123)(124) \dots (12n) \rangle$

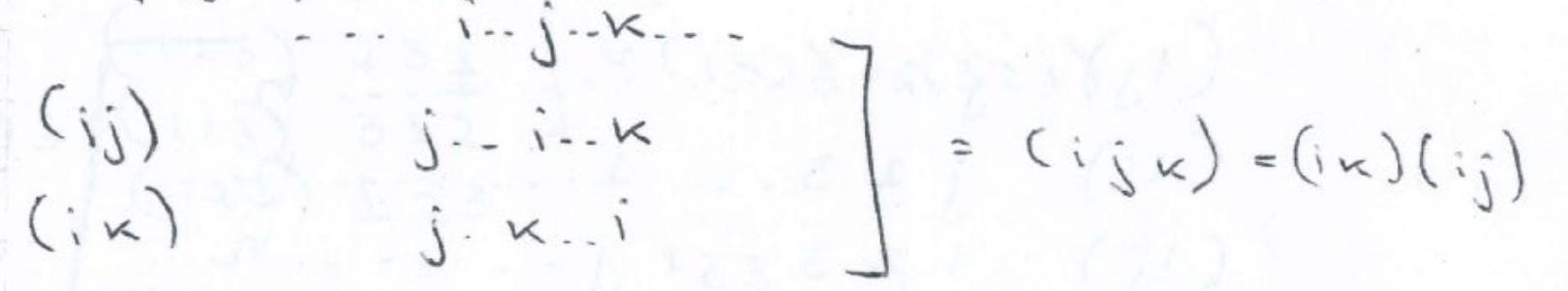
$(ijk)(k\ell m)$

$H = \langle ijk \rangle,$

$H \leq A_n$

? на 2 дава транспозиции
 ? на 2 дава троен цикл

(ijk)



$ijk\ell$

? $jk i \ell$

$(ij)(k\ell)$

$(ik)(j\ell)$

$$(ij)(kl) = (ij)()^{-1}(kl)$$

$$(ij)(kl) = (jki)(ielj)$$

$$(ij)(jl)$$

произв. на четен бр. тройни
цикли дава една
пермутация

$$\delta) H = \langle (12i) \rangle$$

$$(12i)(12j)$$

$$\left. \begin{array}{l} (12j) \\ (12i) \end{array} \right\} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & i & j \\ 2 & j & i & 1 \\ i & j & 1 & 2 \end{array} \right] (ii)(ij)$$

$$(j21) = (12j)^{-1} = \begin{array}{cccc} i & 2 & j & 1 \end{array}$$

$$(1ij)$$

$$(12j)^{-1}(12i)(12j)$$

$$1 \ 2 \ i \ j \ k$$

$$(1ij)$$

$$(12k)(1ij)(12k)^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} (k21) \\ (12k)(1ij)(12k)^{-1} \end{array} \right\} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & i & j & k \\ k & 1 & i & j & 2 \\ 1 & i & j & 2 & k \end{array} \right] (2ij)$$

$$(k21) - (12k)$$

$$\left. \begin{array}{l} (12k) \\ (1ij) \\ (k21) \end{array} \right\} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & i & j & k \\ 2 & k & i & j & 1 \\ 2 & k & j & 1 & i \\ 1 & 2 & j & k & i \end{array} \right] = (ijk)$$

Th на Лагранж.
Съседни класове.

$$G, H \leq G, g \in G$$

gH - ляв съседен клас

Hg - десен съседен клас

Св-ва:

① \forall ел. попада в някой съседен клас
 $eH = H = He$

② $g \in H \Leftrightarrow gH = H = Hg$

③ $g_1, g_2 \in G : g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$

$Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow g_2g_1^{-1} \in H$

④ $g_1H = g_2H$ или съвпадат или
 $g_1H \cap g_2H = \emptyset$

⑤ бр. леви \equiv бр. десни крайна група

* ⑥ $|H| < \infty$ $|gH| = |H| = |Hg|$

бр. елементи

G-крайна $H \leq G$

$|G:H|$ -индекс

брой ~~на леви~~
съседни класове

Th Лагранж

$$|G| = |H| \cdot |G:H|$$



$$g \in G \quad |g| = e$$

заг.

$|G:H| = ?$

a) $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k + n\mathbb{Z}\}$$

$$k_1 + n\mathbb{Z} = k_2 + n\mathbb{Z} \\ k_1 - k_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$|G:H| = |\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}| = n$$

$$n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \dots, (n-1)+n\mathbb{Z}$$

b) $G = m\mathbb{Z}$ $H = n\mathbb{Z}$ ($n, m \in \mathbb{N}, m|n$)

$$\exists \ell \in \mathbb{Z}: n = m\ell$$

$$G = \bigcup_{k \in m\mathbb{Z}} \{k + m\ell\mathbb{Z}\}$$

12

$$k_1 + m\ell\mathbb{Z} = k_2 + m\ell\mathbb{Z}$$

$$k_1 - k_2 \in m\ell\mathbb{Z}$$

$i=1,2$

$$m\ell | (k_1 - k_2)$$

$$k_i = m\ell t_i$$

$$\frac{m\ell | (t_1 - t_2)}{m\ell | (t_1 - t_2)}$$

$$\ell = \frac{n}{m}$$

\Rightarrow бр. класове ℓ

$$|G:H| = |m\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}| = \ell = \frac{n}{m}$$

заг.

$G = S_n$ - \forall пермутации

$H = A_n$ - четни перм.

$\sigma \in A_n$

$(ij)\sigma \in S_n \setminus A_n$

$$|G:H| = |S_n:A_n| = 2$$

четни или
нечетни

заг.

$G = GL_n(F)$

$H = SL_n(F)$

$$g_1, g_2 \in G$$

$$g_1 H = g_2 H$$

$$g_1^{-1} g_2 \in H$$

$$1 = \det(g_1^{-1} g_2) = \det g_1^{-1} \cdot \det g_2$$

$$1 = \det(g_1^{-1} g_1) = \det g_1^{-1} \det g_1$$

$$\det g_1^{-1} = \frac{1}{\det g_1}$$

$$\frac{\det g_2}{\det g_1} = 1 \Rightarrow \text{в едн и}$$

свѝзана (=)

$$|G:H| = |GL_n(F) : SL_n(F)| = \det \text{свѝтагат} = |F^*|$$

Дом: $G = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+$

Заг. G -крайна $K \leq H \leq G$

$$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$$

$$|G| = |H| \cdot |G:H|$$

$$|H| = |K| \cdot |H:K|$$

$$|G| = |K| \cdot |G:K|$$

Заг. G -крайна $K \leq G$ и $|G:K| = p$ просто число

$K \leq G$
max подгрупа $K \neq G$
нига подгр. на G
не свѝз. K
 $K \leq \text{кум } G$

$\exists H \leq G$
 $K \leq H$

$$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$$

$$p = |G:H| \text{ или } |H:K| = 1$$

:))

$\forall g \in G: g^p = e$
 $d^p = e$
 $\Rightarrow \forall \text{не свѝз.}$
е от ред p
 \Rightarrow изо-морфизм
редот на \forall ел. e, p
реда на гр

Заг. $|G| = p$ -просто
 $G \cong C_p$ G няма нетривиални подгрупи

Доп. $\exists H < G$ $H \neq \{E\}$

$$|G| = |H| \cdot |G:H|$$

Заг. $G \neq \{E\}$ няма нетривиални подгрупи

$\Rightarrow G \cong C_p$, p -просто
крайна безкр. циклична
безкрайна $\cong \mathbb{Z}$ -има нетривиални $n=p$:))

$G = C_n$ или $G = \mathbb{Z}$

Заг. Подгрупите на Q_8 кватерниони

$$Q_8 = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

- $\{E\}, Q_8$
- $\{1, -1\}$ - ред 2
- $\{1, i, -1, -i\}$ - циклична

$\{<i>\}, \{<j>\}, \{<k>\}$ - циклични от ред 4

1, i, -1, -i

заг. S_3 подгрупи

$$S_3 = \{ (1), (12), (13), (23), (123), (132) \}$$

- $\{E\}, S_3$

- $\{<12>\}, \{<13>\}, \{<23>\}$ -

циклични групи от ред 2

- $\{<123>\},$ ~~циклични групи от ред 3~~ - циклична от ред 3

? $D_4 \rightarrow |D_4| = 8$

D_n - ред $2n$

заг. A_4

$$a) K_4 = \{ (1), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$$

абелева подгрупа (Клейн)
само K_4

б) няма подгрупа от ред 6 в A_4
(въпреки че $6/A_4$)

$$K_4 \subset A_4$$

$$a = a^{-1} = (12)(34)$$

$$b = b^{-1}$$

$$c = c^{-1} \quad ;)$$

$$ab = \begin{matrix} & & & c \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \left[\begin{matrix} 1234 \\ (13)(24) & 3412 \\ a & (12)(34) & 4321 \end{matrix} \right] (14)(23)$$

$$c = ab$$

$$ac$$

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (14)(23) & 4 & 3 & 2 & 1 \\ (12)(34) & 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \quad (13)(24) = b$$

$$ac = b$$

$$bc = a$$

$$K_4 \subset A_4$$

? абелева

$$\begin{matrix} ba & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 2 & 1 & 4 & 3 \\ (12)(34) & 4 & 3 & 2 & 1 \\ (13)(24) & & & & \end{matrix} \quad (14)(23)$$

$$ab = ba$$

б) $\exists H \subset A_4 \cdot |H| = 6 \Rightarrow |G:H| = \frac{12}{6} = 2$ (Лангрантс)

$$\sigma = (ijk) \in G$$

$$\sigma \neq \sigma^2$$

$H, \sigma H, \sigma^2 H$ - съседни класове леви

3, но

трябва да са 2

\Rightarrow някои съвпадат

$$H = \sigma H \Rightarrow \sigma \in H$$

$$H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$$

$$\sigma H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^{-1} \sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$$

произволен цикъл

$\Rightarrow \forall$ тронен цикъл $\in H$

$$H = \left\{ (1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243) \right\}$$

Елементта =>

$$|H| = 9 \quad \times$$

$$|H| = 6$$

заг. $|G| \leq 7$

Да се док., че $G \cong$ този от групите

$$\underline{C}_2, \underline{C}_3, \underline{C}_4, \underline{K}_4, \underline{C}_5, \underline{C}_6, \underline{S}_3, \underline{C}_7$$

Ако редът на $|G| = 2, 3, 4, 7$

$$\Rightarrow G \cong \underline{C}_2, \underline{C}_3, \underline{C}_5, \underline{C}_7$$

C_1 - тривиалната.

Нека $|G| = 4$

$$\exists g \in G: |g| = 4 \Rightarrow \blacksquare G = \langle g \rangle \cong \underline{C}_4$$

$$\nexists g \in G: |g| = 4$$

$$\forall a \in G: |a| = 2 \rightarrow \exists b \in G:$$

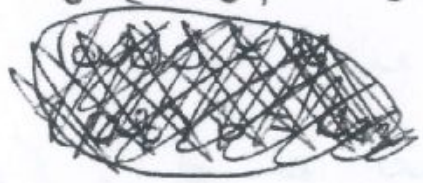
$$\begin{array}{l} a \neq e \\ b \neq e \\ |a| = 2 \\ |b| = 2 \\ |ab| = 2 \\ abab = 1 \\ ab a^{-1} b^{-1} = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = a^{-1} \\ b = b^{-1} \\ \boxed{ab = ba} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |b| = 2 \\ ab \neq 1 \Rightarrow a \neq b \\ |ab| = 4 \text{ не} \\ |ab| = 2 \quad \times \end{array}$$

G-абелева

$$G = \{1, a, b, ab\}$$

$$\begin{array}{l} a(ab) = a^2 b = b \\ b(ab) = b^2 a = a \end{array}$$



изоморфизъм

$$a = (12)(34)$$

$$1 = (1)$$

$$b = (13)(24)$$

$$ab = (14)(23)$$

$$G \cong K_4$$

за 6 ...

$$\nexists G \cong \underline{C}_6$$

$$\begin{array}{l} \nexists g \quad |g| = 6 \\ |g| = 2 \text{ или} \\ |g| = 3 \end{array}$$

$$\exists a \in G: |a| = 2$$

Ако $\forall g \neq 1: |g| = 2 \Rightarrow \blacksquare$ G-абелева

$$\{1, a, b, ab, c, ac, bc, abc\}$$

не може абелева (повеќе съвпадат x^0)

$$a = bc \Rightarrow abc = 1$$

$$a = ac \quad \times^0$$

$$a = abc \quad \times^0 \Rightarrow bc = 1$$

$$ab = ac \Rightarrow b = c \quad \times^0$$

$$ab = bc \Rightarrow a = c \quad \times^0$$

$$ab = abc \Rightarrow c = 1$$

$$|K_4| = 4$$

$$K_4 \subset G$$

$$\times^0$$

\forall
 \Rightarrow не ~~не~~ неединичен ел. е от ред 2

$$\exists v \in G : |v| = 3$$

$$\neq 1$$

$$|G : \langle v \rangle| = 2$$

$\langle v \rangle, a \langle v \rangle$ - левы соседни класове

$$! \quad \boxed{v^{-1}av = a^{-1}}$$

$$\underline{a^{-1}va = v^{-1}}$$

$$? \quad va \in \langle v \rangle \Rightarrow a \in \langle v \rangle \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow va \in a \langle v \rangle$$

$$a^{-1}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$va = av^k$$

$$a^{-1}va \in \langle v \rangle$$

$$k=0 \quad a^{-1}va = 1$$

$$va = a \Rightarrow v = 1 \quad \checkmark$$

$$k=1$$

$$a^{-1}va = v$$

$$va = av$$

абелева не

G не е абелева

$$(ab)^2 = (a^2b^2) = a^2b^2$$

$$\parallel b^2$$

~~$\langle v \rangle = \{1, v, v^2\}$~~

$$G = \{1, a, v, \text{[scribble]}, av, v^2, a^{-1}v^2\}$$

$$k=2 \quad a^{-1}va = v^2$$

хомоморф. и о.к.

$$\varphi : G \rightarrow D_3$$

$$v \rightarrow A$$

$$a \rightarrow B$$

$$a^{-1}va = v^2 = v^{-1} \quad \therefore))$$

Зам.

Зам. \forall неабелева G от ред 8

$$G \cong Q_8, D_4$$

22.04.2013г.

понеделник

Лекция

Аритметика в пръстен а
 на полиномите над
 поле

F -поле $F[x]$

Отпр. $g \mid f \Leftrightarrow f = gq$, ако

$$\exists q \in F[x] : f = gq$$

$$g \mid f, a \in F, a \neq 0 \Rightarrow ag \mid f$$

$$f = gq$$

$$f = (ag)\left(\frac{1}{a}q\right)$$