Разгл. $\varphi : (G, *) \longrightarrow (H, *)$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = ab^2$$

Ще док., че φ е хомоморфизъм

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 c_2 + c_1 b_2 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 a_2 (b_1 b_2)^2$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \varphi\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1^2 a_2 b_2^2 = a_1 a_2 (b_1 b_2)^2$$

$\Rightarrow \varphi$ е хомоморфизъм

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : \varphi\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab^2 = 1 \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a = b^{-2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b^{-2} & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\} = H$$

$\Rightarrow$ можем да приложим теоремата за хомоморфизмите и получаваме, че

$$H \trianglelefteq G \quad \text{и} \quad G/H \cong \operatorname{Im}\varphi$$

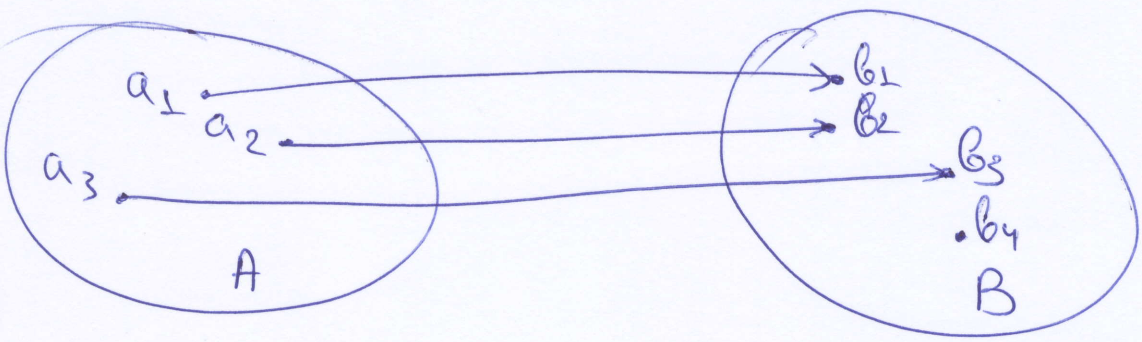
Остава да покажем, че $\mathbb{Q}^* = \operatorname{Im}\varphi$

Нека $a, b \in \mathbb{Q}^*$

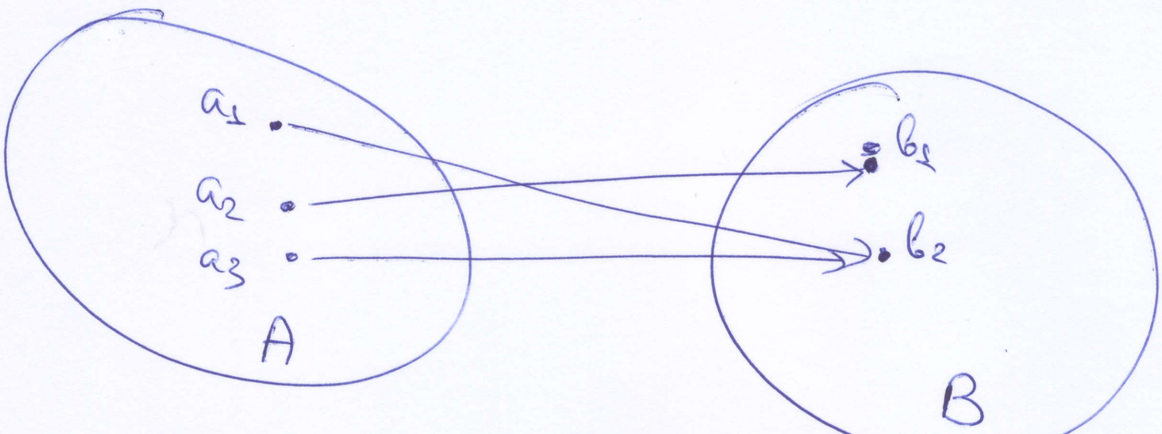
$$\varphi\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab^2 \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Q}^*$$

Инекция:

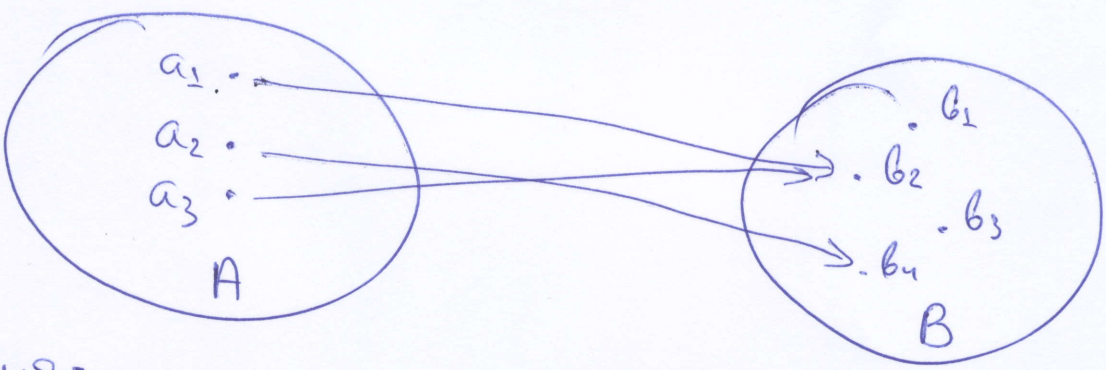
Приложение 1 към консултацията на Галя от 04.VII.2013г.



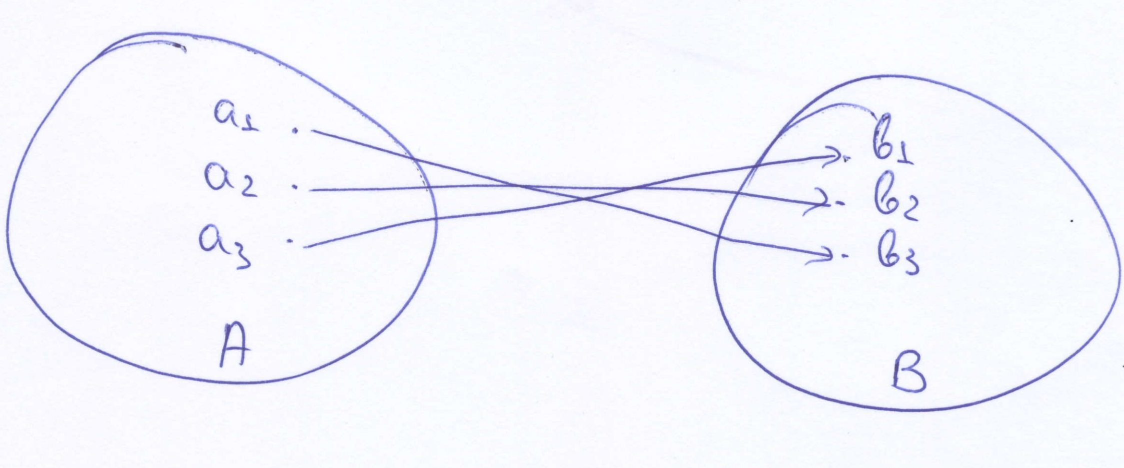
Сюрекция:



Проекция:



Биекция:



*Група – Θ с 1 операция (бинарна) $\circ$ $H = (G, \circ)$

0) $u, v \in H \quad u \circ v \in H$

1) $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) \quad u, v, w \in H$

2) $\exists\, \Theta \in H \quad u \circ \Theta = \Theta \circ u = u \quad u \in H$

3) $\exists\, (-u) \in H \quad u \circ (-u) = (-u) \circ u = \Theta \quad u \in H$

Абелева група 4) $u \circ v = v \circ u \quad \forall u, v \in H$

Подгрупа H_1

0) $u, v \in H_1 \quad u \circ v \in H_1$

1) $\Theta \in H_1 \rightarrow$ отпада

2) $-u \in H_1$

нормална – ~~g h g~~ $g^{-1} h g \in H$

$\mathbb{R}^* - \mathbb{R} \setminus \{0\}$

адитивна гр. $\rightarrow \Theta$

мултипликативна –

Алгебра

– Каспарян търси

Хомоморфизми:

φ_1 е хомоморфизъм $x_1, x_2 \in H$

$\varphi_1 : (G, \circ_1) \longrightarrow (H, \circ_2)$

$\varphi_1(x_1) \circ_2 \varphi_1(x_2) = \varphi_1(x_1 \circ_1 x_2)$

Изоморфизъм:

хомоморфизъм и биекция

Ред на елемент:

$g \rightarrow g^m = \cancel{1}$ $\quad m$ – ред на елемент

$mg = \Theta$

Нормална подгрупа: $(H \trianglelefteq G)$

Ако $H \leq G$ и $\forall g \in G, \forall h \in H \quad g^{-1} h g \in H \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Определение: $R \neq 0$ и в R има 2 бинарни операции (+ и *). Ще казваме, че R е пръстен, ако:

абелева група относно +:

0) $a+b \in R \quad \forall a,b \in R$

1) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in R$

2) $\exists\, \theta \in R: a+\theta = \theta + a = a \quad \forall a \in R$

3) $\exists\, (-a) \in R: a+(-a) = (-a)+a = \theta \quad a \in R$

4) $a+b = b+a$

5) $a.b \in R \quad \forall a,b \in R$

6) $(ab).c = (a(bc) \quad \forall a,b \in R$

дистрибутивни закони:

7) $(a+b)c = ac+bc$

8) $c(a+b) = ca+cb$

Ако имаме допълнително:

9) $\exists\, 1 \in R: a.1 = 1.a = a \quad \forall a \in R$

10) $\exists\, a \neq \theta, a^{-1} \in R: a.a^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad \forall a \in R$

11) $a.b = b.a \quad \forall a,b \in R$

Ако е изпълнено:

1)–9), то R е пръстен с единица

1)–8) + 10) => всеки ненулев елемент на R е обратим

1)–8) + 11) => R е комутативен пръстен

1)–10) и $1 \neq 0$ => R е тяло

1)–11) и $1 \neq 0$ => R е поле

Идеал: Нека R е пръстен и I е непразно подмножество на R. Ще казваме, че I е ляв (десен) идеал на R, ако

1. $a, b \in I \Rightarrow a-b \in I$
2. $a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I \ (ar \in I)$

Ако I е ляв и десен идеал $\Rightarrow I$ е двустранен идеал ($I \triangleleft R$)

Твърдение 1: R е комутативен пръстен с 1. Тогава R е по-
ле <=> R няма нетривиални идеали

Теорема за хомоморфизмите: Нека $\varphi: R \to R'$ е хомомор-
физъм на пръстени и $I = \ker\varphi$. Тогава $I \trianglelefteq R$ и $R/I \cong \mathrm{Im}$

Твърдение: Нека R е комутативен пръстен с 1. $D \subset D$,
а) M - идеал на R е максимален <=> R/M е по
б) P - идеал на R е прост <=> R/P е област

Максимален идеал: I наричаме максимален идеал, ако не $\exists$
друг собствен идеал $J: I \subset J$
Прост идеал: е собствен идеал: ако $a, b \in R$, ако $ab \in I$
следва, че поне едно от a и b принадлежи на I
Главен идеал: е идеал породен от един елемент a на ко-
мутативен пръстен с единица R, бележи се
$(a) = \{ar \mid r \in R\}$