Глава 4

Действие на група върху множество.

4.1 Основни дефиниции и твърдения.

Дефиниция 4.1.1 *Казваме, че групата G* ***действа върху множеството*** *Ω, ако е зададено изображение*

$$\left| \begin{array}{lcl} G \times \Omega & \to & \Omega \\ (g, x) & \to & gx \quad (\textit{ползват се и означенията } g(x) \ \textit{ или } \ x^g) \end{array} \right.$$

със свойствата (изпълняващо условията):

(i) $ex = x$ *за всяко* $x \in \Omega$, *където* e *означава единицата на* G.

(ii) $(hg)x = h(gx)$ *за всяко* $x \in \Omega$ *и всяко* $g, h \in \Omega$.

Използва се и терминът "Ω ***е G-множество****".*

Пример 4.1.1 Нека $\Omega = L$ - линейно пространство над F, а G - групата от линейни оператори в L. Обичайното действие на линейните оператори удовлетворява дадената дефиниция.

Пример 4.1.2 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $G = S_n$, или подгрупа на S_n

Пример 4.1.3 Нека G е група и $\Omega = G$. Действието се задава с

$$\left| \begin{array}{lcl} G \times \Omega & \to & \Omega \\ (g, x) & \to & g.x \end{array} \right.$$

(Изображението L_g от Теоремата на Кейли.)

Пример 4.1.4 Нека F е поле, $\Omega = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и $G = S_n$ (или подгрупа на S_n). За всяко $\sigma \in S_n$ изображението

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \sigma f = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

е действие на групата S_n върху пръстена от полиномите на n променливи.

Пример 4.1.5 Нека G - група, H - нейна подгрупа и $\Omega = \{gH \mid g \in G\}$ е съвкупността от левите съседни класове по H. Действието определяме с

$$\left| \begin{array}{ccc} G \times \Omega & \rightarrow & \Omega \\ (g, xH) & \rightarrow & (gx)H \end{array} \right.$$

Нека групата G действа върху множеството Ω. Равенствата (i) и (ii) показват, че изображението Φ_g дефинирано с

$$\Phi_g : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \Omega \\ x & \rightarrow & gx \end{array} \right.$$

е биекция, т.е. $\Phi_g \in S_\Omega$ за всяко g. Наистина,за всяко $y \in \Omega$ елементът $x = g^{-1}y$ е първообраз на y и от $gx = gy$ следва, че $x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)y = ey = y$.
Пример за такова изображение е $L_g : \ x \rightarrow g.x$ използвано в теоремата на Кейли. Идеята от нейното доказателство се обобщава в следното:

Да разгледаме изображението на G в S_Ω зададено с

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & S_\Omega \\ g & \rightarrow & \Phi_g \end{array} \right.$$

То очевидно е хомоморфизъм (проверява се както при доказателството на теоремата на Кейли). Оттук можем да заключим, че ***действието на групата G върху Ω всъщност представлява хомоморфизъм на G в S_Ω***. Друг често използван термин за Φ е ***представяне на групата G*** (като подгрупа от субституции).

Нека Ω е G-множество. Да отбележим, че действието на G индуцира ***действие на G върху*** $\Omega^k = \Omega \times \ldots \times \Omega$ по правилото

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (gx_1, gx_2, \ldots, gx_k),$$

както и ***действие на G върху съвкупността $\mathcal{P}_\Omega$ от подмножества на*** Ω по правилото

$$T \quad \rightarrow \quad gT = \{gt \mid t \in T\} \in \mathcal{P}_\Omega,$$

за всяко $T \in \mathcal{P}_\Omega$ (т.е. $T \subset \Omega$). Проверката предоставяме на читателя.

Дефиниция 4.1.2 *Два елемента x и $y \in \Omega$ наричаме **G-еквивалентни** (или просто еквивалентни), ако съществува $g \in G$, такова че $y = gx$. Бележим с $x \sim y$.*

Релацията "G-еквивалентни" е релация на еквивалентност, т. е. в сила са:
- рефлективност: $x \sim x$, тъй като $x = ex$.
- симетричност: $x \sim y$ влече $y = gx \Rightarrow x = g^{-1}y$, т. е. $y \sim x$.
- транзитивност: от $x \sim y$ и $y \sim z$ следва $x \sim z$ (провери!).

Следователно Ω се разбива на непресичащи се класове, т. е. всеки елемент попада в някой клас и два класа, които имат общ елемент съвпадат. Тези класове наричаме орбити на G върху Ω, т. е. имаме:

Дефиниция 4.1.3 ***Орбита на елемента*** $x_0 \in \Omega$ ***при действие на*** G *наричаме множеството*

$$O(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \Omega \ \mid \ y = gx_0, \ \textit{за някое } g \in G\} \equiv \{gx_0 \mid g \in G\}$$

Твърдение 4.1.4 *Два елемента* $x, y \in \Omega$ *са от една и съща орбита, ако съществува* $g \in G$*, такова че* $y = gx$*. Множеството* Ω *се разбива на непресичащи се орбити, т. е.*

$$\Omega = O(x_1) \cup O(x_2) \cup \ldots \cup O(x_k)$$

Доказателство. Както отбелязахме орбитите са всъщност класовете на еквивалентност, откъдето следва твърдението.

Дефиниция 4.1.5 *Нека* Ω *е* G*-множество.* ***Стабилизатор*** *на елемента* $x_0 \in \Omega$ *наричаме подмножеството* $\mathrm{St}(x_0)$ *на* G *дефинирано с*

$$\mathrm{St}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}.$$

Теорема 4.1.6 *Нека* Ω *е* G*-множество. Стабилизаторът* $\mathrm{St}(x)$ *е подгрупа на* G*. Ако* $y \in O(x)$ *и* $y = gx$*, то* $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$*. Когато групата* G *е крайна са в сила и*

$$|O(x)| = (G : \mathrm{St}(x)) \ \textit{ и } \ |\Omega| = \sum_{i=1}^{k} (G : \mathrm{St}(x_i)) \, ,$$

където $x_1, \ldots, x_k$ *са представителите на всички орбити, т. е.* $\Omega = O(x_1) \cup \ldots \cup O(x_k)$*.*

Доказателство. $g \in \mathrm{St}(x)$ влече $gx = x$, което дава $x = g^{-1}x$, т. е. $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$. Веднага се вижда, че $uv \in \mathrm{St}(x)$, щом $u, v \in \mathrm{St}(x)$. Следователно $\mathrm{St}(x)$ е подгрупа на G. Ако $u \in \mathrm{St}(y)$, то $gx = y = uy = ugx$, т. е. $x = (g^{-1}ug)x$. Следователно $g^{-1}ug \in \mathrm{St}(x)$ или с други думи $\mathrm{St}(y) \subset g\mathrm{St}(x)g^{-1}$. Аналогично се доказва и обратното включване. Следователно $\mathrm{St}(y) = g\mathrm{St}(x)g^{-1}$.
Лесно се проверява, че $h \in g\mathrm{St}(x)$ тогава и само тогава, когато $hx = gx$. Следователно броят на различните елементи в $O(x)$ съвпада с този на различните съседни класове, т. е. $|O(x)| = (G : \mathrm{St}(x))$. Сега последното равенство следва от

$$|\Omega| = |O(x_1)| + \ldots + |O(x_k)|.$$

Пример 4.1.6 Нека $\Omega = \mathbb{R}^2(O)$ е линейното пространство от точките в равнината с фиксиран нулев вектор точката O и G е групата от ротации с център O. Орбитите $O(x)$ представляват концетрични окръжности с център O и минаващи през точката x.

Да отбележим, че множеството от полиномите в Пример 4.1.4, които имат едноелементна орбита (т. е. стабилизаторът им е цялата група) съвпада с множеството от симетричните полиноми.

Дефиниция 4.1.7 *Казваме, че групата* G *действа* ***транзитивно*** *върху* Ω*, когата* Ω *се състой от една единствена орбита.*

Пример 4.1.7 Нека $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ и $G = S_n$. За всеки два елемента k и l на Ω транспозицията (kl) ги изпраща един в друг. Следователно $O(x) \equiv \Omega$, т. е. G е транзитивна. Същото остава в сила и ако $G = A_n$. Тогава $\sigma = (klm)$, за някое $m \neq k, l$ върши същата работа.

Пример 4.1.8 Нека G е група и $\Omega \equiv G$. Разглеждаме действието на G върху Ω чрез спрягане, т. е.

$$\left| \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g, x) & \to & g.x.g^{-1} \end{array} \right.$$

Проверката, че горното изображение е действие на група е тривиална. Стабилизаторът на елемента $x \in G$ се състои от всички $g \in G$, които оставят x неподвижно при спрягане, т.е. $gxg^{-1} = x$.

Пример 4.1.9 Нека G е групата от въртения на правилния тетраедър. Действието на G върху върховете е транзитивно, тъй като за кои да е два върха x и y на тетраедъра въртене на 120° или 240° с ос височината през някой от другите два върха довежда x в y. Следователно всички върхове принадлежат на една единствена орбита от 4 елемента. От друга страна, стабилизаторът на $x \in G$ се състои от всички въртения около височината през x, а те образуват циклична подгрупа от ред 3, т.е. $|\mathrm{St}(x)| = 3$. Следователно групата от въртения на правилния тетраедър се състои от $|G| = 4.3 = 12$ елемента.

Дефиниция 4.1.8 *Съвкупността*

$$C_G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} \equiv \{g \in G \mid gx = xg\}$$

се нарича ***централизатор*** *на x, а орбитата на x се нарича* ***клас спрегнати елементи*** *$C_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$.*

Дефиниция 4.1.9 *Множеството*

$$C(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = xg, \ \forall x \in G\}$$

се нарича ***център на групата*** *G.*

Очевидно, $C(G) \equiv \{g \in G \mid gxg^{-1} \ \forall x \in G\}$ и орбитата на всяко $g \in C(G)$ при спрягане е едноелементна, т. е. $|O(g)| = 1$ за всяко $g \in C(G)$. Тогава Теорема 4.1.6 ни дава

$$|G| = |C(G)| + |C_{x_1}| + \dots + |C_{x_k}|, \tag{4.1}$$

където C_{x_i} са всички класове спрегнати елементи, съдържащи повече от един елемент. Равенство (4.1) се нарича **формула за класовете (class equation)**. Може да се запише и във вида

$$|G| = |C(G)| + \sum (G : C(x_i)) \tag{4.2}$$

Пример 4.1.10 Нека $\pi \in S_n$ е пермутация, която е произведение от a_1 цикъла с дължина 1, a_2 цикъла с дължина 2, и т.н., a_n цикъла с дължина n. Да намерим мощността на централизатора на π.
Търсената мощност се определя от $|C(\pi)| = |S_n|/|C_\pi| = n!/|C_\pi|$. Тъй като две пермутации са спрегнати тогава и само тогава, когато са с една и съща циклова структура, то дължината на орбитата C_π е равна на броя на всички пермутации с цикловата структура на π. Както знаем този брой е

$$|C_\pi| = \frac{n!}{1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}a_1!a_2!\dots a_n!}.$$

Следователно

$$|C(\pi)| = 1^{a_1}2^{a_2}\dots n^{a_n}a_1!a_2!\dots a_n!.$$

Упражнение 4.1.1 *Колко пермутации на S_n комутират с $\pi = (135)(24)(67)$?*

Упражнение 4.1.2 *Покожете, че редът на централизатора на $\pi = (123)(45)$ в S_7 е 12 и $C(\pi) \cong C_6 \times C_2$, където $C_6 =< \pi >$, а C_2 се поражда от пермутация σ с ред 2. Намерете σ.*

Теорема 4.1.10 *Всяка крайна p-група има нетривиален център.*

> ***Доказателство.*** Нека $|G| = p^n$. Тъй като $(G : C(x_i))$ дели $|G|$, то $(G : C(x_i)) = p^{e_i},\ e_i \geq 1$ и от (4.2) получаваме
>
> $$p^n = |C(G)| + p^{e_1} + \dots + p^{e_k}.$$
>
> Следователно p дели $|C(G)|$, т. е. $|C(G)| = p^k,\ k \geq 1$.

Пример 4.1.11 Нека G е група, която действа върху съкупността $\Omega = \mathcal{P}(G)$ от подгрупи на G чрез спрягане, т. е.

$$\left|\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{P}(G) & \to & \mathcal{P}(G) \\ (g, H) & \to & gHg^{-1}. \end{array}\right.$$

Дефиниция 4.1.11 ***Нормализатор*** *(в G) на подмножеството S на G наричаме*

$$N(S) \stackrel{\text{def}}{=} St_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\} = \{g \in G \mid gS = Sg\}$$

Орбитата $O(S)$ представлява съвкупността от спрегнати с S подмножества.

Пример 4.1.12 Нека H е подгрупа на G. Да разгледаме действието на групата G върху съвкупността от съседните класове по H, т. е.

$$\left|\begin{array}{ccc} G \times G/H & \to & G/H \\ (g, xH) & \to & (gx)H. \end{array}\right.$$

Стабилизаторът на xH (съгласно Дефиниция 4.1.5) е

$$\mathrm{St}(xH) = \{g \in G | (gx)H \equiv xH\} \equiv \{g \in G | x^{-1}gx \in H\} \equiv xHx^{-1}.$$

Теорема 4.1.12 (Пуанкаре) *Ако H е подгрупа на G с индекс m, то съществува нормална подгрупа на G, която се съдържа в H и има в G индекс кратен на m и делящ $m!$.*

Доказателство. Да разгледаме

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} G & \to & S_m \\ g & \to & \Phi_g \end{array} \right. ,$$

където

$$\Phi_g : \left| \begin{array}{ccc} G/H & \to & G/H \\ xH & \to & (gx)H \end{array} \right.$$

е биекция (виж по-горе). Тогава

$$\ker\Phi = \bigcap_{x\in G} \mathrm{St}(xH) = \bigcap_{x\in G} xHx^{-1},$$

т. е. $N = \ker\Phi$ е максималната нормална подгрупа съдържаща се в H:

$$\ker\Phi \subset H \subset G.$$

Следователно $m = (G : H)$ дели $(G : \ker\Phi)$. От друга страна $|S_m| = m!$ и $\Phi(G)$ е подгрупа на S_m. Следователно $(G : \ker\Phi) = |\Phi(G)|$ дели $m!$.

Теорема 4.1.13 *Нека Ω е G-множество и $F(g) = \{x \in \Omega \mid gx = x\}$ (съвкупността от елементите оставяни неподвижни от g). Тогава броят t на орбитите в Ω се дава с:*

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |F(g)|$$

Доказателство. Да разгледаме множеството $E = \{(g, x) \mid gx = x\}$. Ще преброим елементите на E по два начина: по редове и по стълбове, ако си представим елементите на E подредени в правоъгълна таблица.

1. За всяко $g \in G$ (всеки ред) има точно $|F(g)|$ двойки (g, x), т. е.

$$|E| = \sum_{g\in G} |F(g)|.$$

2. За всяко $x \in \Omega$ има точно $|\mathrm{St}(x)|$ елемента g на G, които фиксират x. Следователно

$$\sum_{g\in G} |F(g)| = \sum_{x\in\Omega} |\mathrm{St}(x)|. \tag{4.3}$$

От друга страна, съгласно Теорема 4.1.6, за всяко $y \in O(x)$ е изпълнено $O(x) = O(y)$ и $|\mathrm{St}(y)| = |\mathrm{St}(x)|$. Следователно, ако $x_1, \ldots, x_t$ са представителите на всички различни орбити в Ω, то

$$\sum_{x\in\Omega} |\mathrm{St}(x)| = \sum_{i=1}^{t} |\mathrm{St}(x_i)||O(x_i)| = \sum_{i=1}^{t} |\mathrm{St}(x_i)|(G : \mathrm{St}(x_i)) = \sum_{i=1}^{t} |G| = t|G|.$$

От горното равенство и (4.3) получаваме твърдението.

4.2 Приложение към комбинаторни проблеми

Да разгледаме приложението на Теорема 4.1.13 за решаване на някои комбинаторни проблеми. Изложените по-долу проблеми изглеждат твърде встрани от науката, но всъщност са преформулирани (в такава забавна форма) проблеми възникващи в кристалографията и класификацията на химически изомери.

Проблем 1. *Като идентификационни карти се ползват квадратни карти разделени на* $n \times n$ *квадратчета, от които две се перфорирани. Двете страни на картите са неразличими и при поставяне в карт-четеца четирите ръба са равноправни (т.е. неразличими). Колко различни карти могат да се направят?*

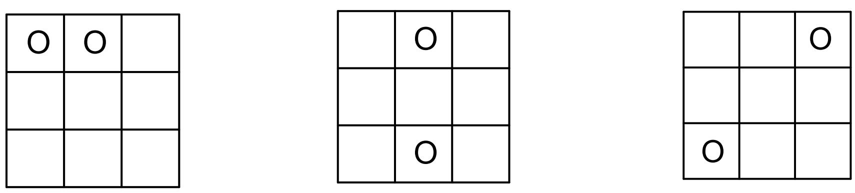
Проблем 2. *Колко различни огърлици могат да се направят от* n *на брой черни и бели мъниста (допуска се огърлицата да бъде и едноцветна)? Същият въпрос, ако огърлиците трябва да се състоят от точно* a *бели и* b *черни мъниста,* $a + b = n$.

Проблем 3. *По колко различни начина могат да се оцветят най-много с три цвята стените на куба?*

Дискусия по Проблем 1. Общият брой възможни разположения на пробивите е $N = \binom{n^2}{2} = n^2(n^2-1)/2$. Но щом ръбовете са равноправни, то разположенията на пробивите, които са съответни при завъртане на 90° са неразличими за карт-четеца. Същото важи и за конфигурации от пробиви, които са съответни при обръщане на картата с другата страна нагоре, т.е. съответни при някоя от четирите осевите симетрии на квадрата. Следователно, изказано на математически език, неразлечими са конфигурации, които са съответни при действието на елемент от групата на еднаквостите на квадрата - диедралната група D_4. Но това означава, че броят на различните за карт-четеца идентификационни карти съвпада с броя на орбитите, на които се разбива множеството от възможните N конфигурации при действието на D_4. Това ни позволява да приложим Теорема 4.1.13.

Пример 4.2.1 *Да намерим броя на различнити идентификационни карти при* $n = 3$. За да приложим Теорема 4.1.13 трябва да намерим за всяка еднаквост на квадрата колко конфигурации оставя неподвижни. Идентитетът запазва всички конфигурации. Въртенията на 90° и 270° не запазват нито една конфигурация от два пробива, а ротацията на 180°, т.е. осевата симетрия, запазва всички централно симетрични конфигурации, т.е. 4 броя. Четирите осеви симетрии запазват само по 6 конфигурация - 3 конфигурации, при които пробивите са по оста и 3, които са симетрични спрямо оста. Следователно,

$$t = \frac{1}{8}\left(\binom{9}{2} + 1.4 + 4.6\right) = \frac{64}{8} = 8.$$

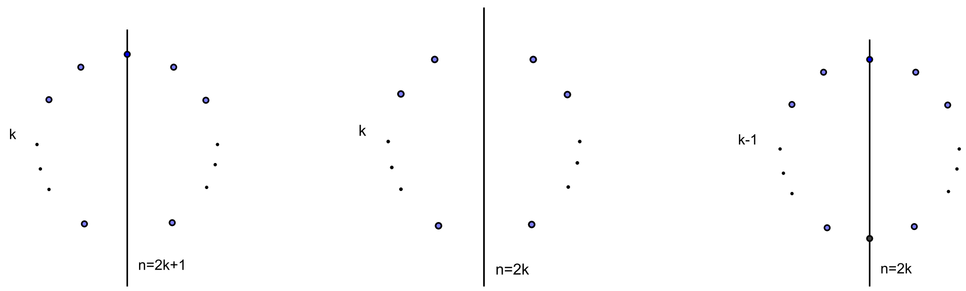


Упражнение 4.2.1 *Намерете броя на различните идентификационни карти в случая $n = 4$.*

Упражнение 4.2.2 *Покажете, че броят на различните идентификационни карти за произволно n се дава с формулите*

$$t = \begin{cases} \frac{1}{16}(n^4 + 6n^2 - 4n), & n \text{ четно} \\ \frac{1}{16}(n^4 + 8n^2 - 8n - 1), & n \text{ нечетно} \end{cases}.$$

Дискусия по Проблем 2. Може да разглеждаме огърлицата като правилен n-ъгълник (върховете са мънистата). Ако ги номерираме, то броят на възможните подредби на мънистата е $N = 2^n$ (в този брой се включват изцяло бялата и изцяло черната огърлици). В случая, когато броят на белите е фиксиран, $N = \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$.
Ако обаче изтрием номерата, то някои от тези подредби стават неразличими. Например, ако завъртим огърлицата (или ние се завъртим около нея) подредбата на мънистата ще изглежда различна, т.е. наредби, които са съответни при ротация около центъра на огърлицата по същество съвпадат. Ако две наредби са съответни при обръщане на огърлицата (т.е. при осева симетрия) те също представят една и съща подредба. В математически термини, неразличими са наредби, които са съответни при действието на групата от еднаквости на правилния n-ъгълник, т.е диедралната група D_n. Както знаем тя се състои от идентитета, $n - 1$ ротации (степени на завъртането с едно мънисто обратно на часовниковата стрелка, например) и n осеви симетрии.
Ротацията σ на ъгъл $2\pi/n$ (с едно мънисто) и степените й, които са взаимнопрости с n запазват точно 2 подредби - изцяло черната и изцяло бялата огърлици. Ако $(n, k) = d$, то σ^k запазва 2^d конфигурации.
Ако $n = 2k + 1$ е нечетно, то всички осеви симетрии имат неподвижен връх и запазват $2^k.2 = 2^{k+1}$ подредби (виж фигурата). При $n = 2k$ четно половината симетрии са с оси през два върха и запазват $2^{k-1}.2^2 = 2^{k+1}$ подредби. Останалите k симетрии са с ос явяваща се симетрала на две страни и запазват по 2^k конфигурации.



Да илюстрираме горните разсъждения с няколко примера:

Пример 4.2.2 *Да определим колко различни огърлици със 7 мъниста от два цвята (бели и черни) могат да се направят.*
Прилагаме Теорема 4.1.13. Всички 6 ротации запазват по 2 подредби. Осевите симетрии запазват по $2^4 = 16$ подредби. Следователно има

$$t = \frac{1}{14}\left(2^7 + 6{\times}2 + 7{\times}16\right) = \frac{126}{7} = 18$$

различни огърлици.

Упражнение 4.2.3 *Колко различни огърлици със p мъниста от два цвята, p просто, могат да се направят?*

Пример 4.2.3 *Да преброим съществено различни огърлици с 9 мъниста в два цвята.*
В този случай всяка от деветте осеви симетрии запазва по 2^5 конфигурации, но за разлика от случая $n = 7$ ротациите σ^3 и σ^6 запазват по 2^3 конфигурации. Следователно има

$$t = \frac{1}{18}\left(2^9 + 6.2 + 2.8 + 9.32\right) = 16 + \frac{270}{9} = 46$$

различни огърлици.

Пример 4.2.4 *Да намерим различните огърлици, които могат да се направят от 5 сини и 3 червени мъниста.*
Общият брой конфигурации е $\binom{8}{3} = 56$. Една осева симетрия има неподвижна конфигурация точно тогава, когато остта ѝ минава през два върха, син и червен, и запазва 6 конфигурации (2 възможности за върховете на остта и 3 за останалите). Ротациите не запазват конфигурации тъй като 3 (и 5) е взаимнопросто с 8. И така, могат да се направят

$$t = \frac{1}{16}(56 + 7.0 + 4.0 + 4.6) = \frac{80}{16} = 5$$

различни огърлици.

Упражнение 4.2.4 *Колко различни огърлици могат да се направят от 6 сини и 13 червени мъниста?.*

Ето и една малко по-сложна ситуация:

Пример 4.2.5 *Колко различни огърлици могат да се направят от 2 сини, 2 бели и 3 червени мъниста?*
Разглеждаме огърлицата като правилен шестоъгълник, на чиито върховете (номерирани с числата от 1 до 6) са поставени мънистата. Общият брой конфигурации (2 сини, 2 бели и 2 червени мъниста) е $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$. Групата от симетрии на правилния шестоъгълник е D_6 състояща се от 12 елемента - 6 ротации $(\epsilon, \sigma, \dots, \sigma^5)$ и 6 осеви симетрии.
От всички ротации само σ^3 (централната симетрия) запазва конфигурации - тези на които диагоналите са едноцветни. Броят на тези конфигурации е 6 (по толкова начина могат да се оцветят 3 диагонала в 3 цвята).
Всяка от трите осеви симетрии относно диагонал запазва също по 6 конфигурации - по 2 възможности за всеки цвят на диагонала (виж фигурите). Всяка от осевите симетрии относно симетрала също запазва по $3! = 6$ конфигурации.
Следователно броят на съществено различните огърлици е

$$t = \frac{1}{12}(90 + 1.6 + 3.6 + 3.6) = 11.$$

Дискусия по Проблем 3. Страните на куба са 6, така че общият възможен брой оцветявания е 3^6. Групата от симетрии на куба поражда група от пермутации на страните на куба. От параграф 3.1.5 лесно се извлича, че тази група е

4.3 Допълнителни задачи към Глава 4.

Задача 4.1 *По колко начина 3 абсолютно еднакви мухи могат да кацнат на върховете на правилен петоъгълник?*

Задача 4.2 *По колко различни начина могат да се оцветят върховете на куб в два цвята, така че да има по равен брой едноцветни?*

Задача 4.3 *По колко различни начина могат да се оцветят стените на куб в четири цвята?*

Задача 4.4 *Докажете, че броят на различните огърлици с n мъниста оцветени в r цвята се дават с формулите:*

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{d|n}\varphi(d)r^{\frac{n}{d}} + \dfrac{1}{2}r^{\frac{n+1}{2}}, & n \textit{ нечетно} \\ \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{d|n}\varphi(d)r^{\frac{n}{d}} + \dfrac{1}{4}(1+r)r^{\frac{n}{2}}, & n \textit{ четно} \end{cases}.$$

Задача 4.5

Задача 4.6

Задача 4.7

Задача 4.8