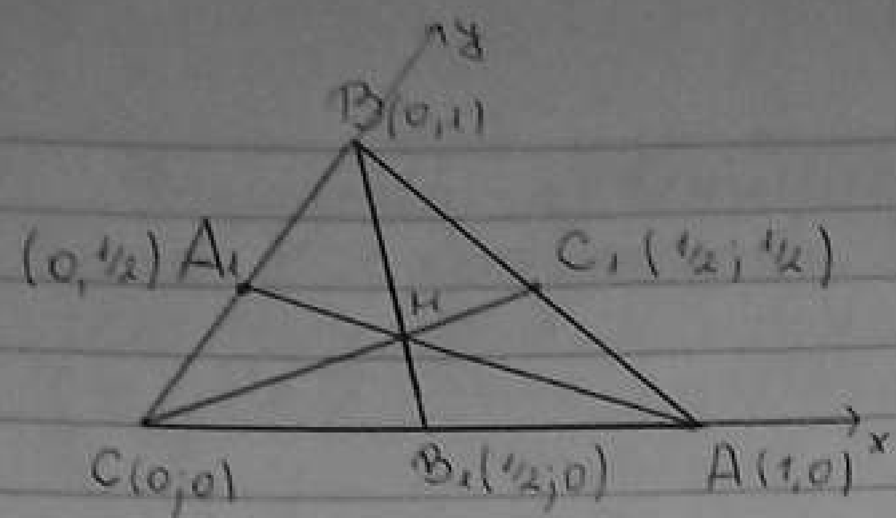


$M = AA_1 \cap BB_1$

$AA_1 : ax + by + c = 0$

$A \in AA_1 \Rightarrow a\,1 + b\,1 + c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$

$A_1 \in AA_1 \Rightarrow a.0 + b\,{}^1/_2 + c = 0 \Rightarrow b = -2c$

Нека $c = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 : -x - 2y + 1 = 0$

Аналог. $BB_1 : -2x - y + 1 = 0$

$M = AA_1 \cap BB_1 : \left| \begin{array}{l} -2x - y + 1 = 0 \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad \Rightarrow -3y + 1 = 0 \Rightarrow y = {}^1/_3$

$\Rightarrow x = {}^1/_3 \Rightarrow M({}^1/_3; {}^1/_3)$

$CC_1 : ax + by + c = 0$

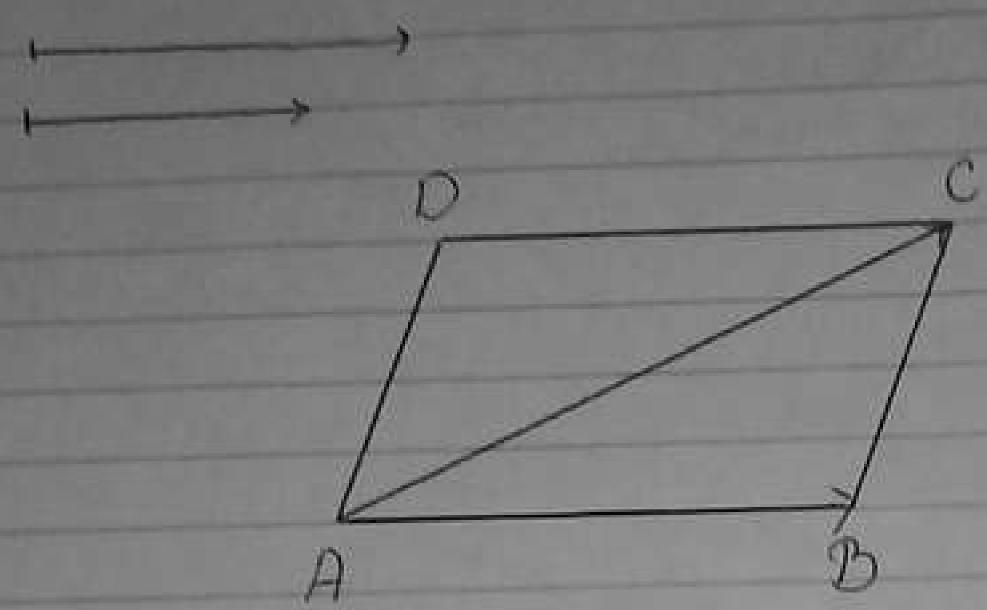
$C \in CC_1 \Rightarrow a.0 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$C_1 \in CC_1 \Rightarrow a\,{}^1/_2 + b\,{}^1/_2 + c = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Нека $b = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow CC_1 : -x + y = 0$

$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow M \in CC_1$

Вектори



Релация на еквивалентност

Нестрога дефиниция на релация:
Нека X е множество
Казваме, че в X е зададена (двуместна) релация R, ако за $\forall x, y \in X$ е казано дали x е в релация R с y (в този случай пишем xRy) или не

Примери
1. $x = y$ (равенство)
2. успоредност на прави: $a \parallel b$

Деф: Нека X е множ. Озн. с X^2 множ. от всички наредени двойки с елем. от X т.е $X^2 = \{(x, y) : x, y \in X\}$
Аналог $X^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$

Формална дефиниция на релация:
Нека X е множество R! (Двуместна) релация в X е подмножество R на X^2. Ако $(x,y) \in R$, то казваме, че x е в релация R с y и пишем xRy.

Примери:
① $=$ $R = \{(x,x) : x \in X\}$
② $f: X \to X$ $R = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
③ $\leq$ $R = \{(x,y) : x \leq y\}$
④ $\parallel$ $R = \{(x,y) : x \parallel y\}$

Деф. Казваме, че релацията $\sim$ в множ. X е релация на еквивалентност ако има св-вата:
① $x \sim x$ за всяко $x \in X$ (рефлексивност)
② Ако $x \sim y$, то $y \sim x$ (симетричност)
③ Ако $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивност)

$\equiv$ $\approx$ $\cong$

Примери:
① $=$ е релация на еквивалентност
② $f: x \to x$ е релация на еквивалентност $\Leftrightarrow$ $f(x) = x$ за $\forall x \in X$
т.е когато f е тъждествена ф-я на X
③ $\leq$ не е релация на еквивалентност, защото не е симетрична
④ $\parallel$ ако считаме, че всяка права е $\parallel$ на себе си, то успоредността е

релация на еквивалентност

Деф. Нека $\sim$ е релация на еквив. в X
Клас на еквивал. на $x \in X$ се нарича множеството $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$

Тв. Нека $\sim$ е рел. еквив. в X
Тогава:
ⓐ $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$
ⓑ Ако $x \not\sim y$, то $[x] \cap [y] = \emptyset$

X се разпада на обединение на непресичащи се класове на еквивалентност

Обратното: Ако X се разпада на обед. на непресичащи се множества, то имаме рел. на еквивалентност в X, за която тия множ. са класовете на еквив.

Док.
ⓐ Нека $x \sim y$
Нека $z \in [x] \Rightarrow x \sim z$
Имаме $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
$\Rightarrow$ имаме $y \sim x,\ x \sim z \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \in [y]$
$\Rightarrow \forall z$ от $z \in [x] \Rightarrow [x] \subset [y]$
Аналогично от $y \sim x$ получ. $[y] \subset [x]$
$\Rightarrow [x] = [y]$
Обратно: Нека $[x] = [y]$
Имаме $y \sim y \Rightarrow y \in [y] = [x] \Rightarrow x \sim y$
ⓑ Нека $x \not\sim y$
Да допуснем, че $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in [x] \cap [y]$
$\Rightarrow z \in [x] \Rightarrow x \sim z$
$z \in [y] \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \sim y$
$\Rightarrow x \sim z;\ y \sim z \Rightarrow x \sim y$ - противоречие

$\Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

Примери:

① $= \; [x] = \{x\}$

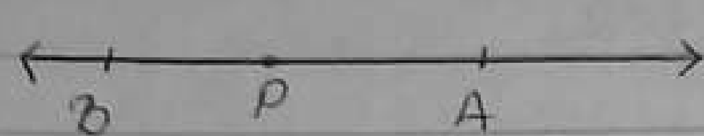
② $\parallel \; [x] = \{ \cancel{\quad} \; y : x \parallel y \}$ - съдържа безброй много елементи

1 Вектори

- отсечка

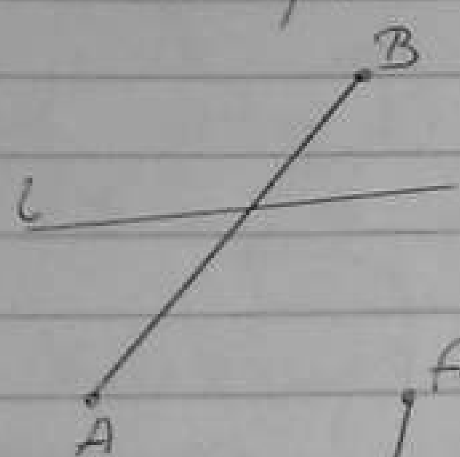
A

$AA = \{A\}$ - нулева отсечка

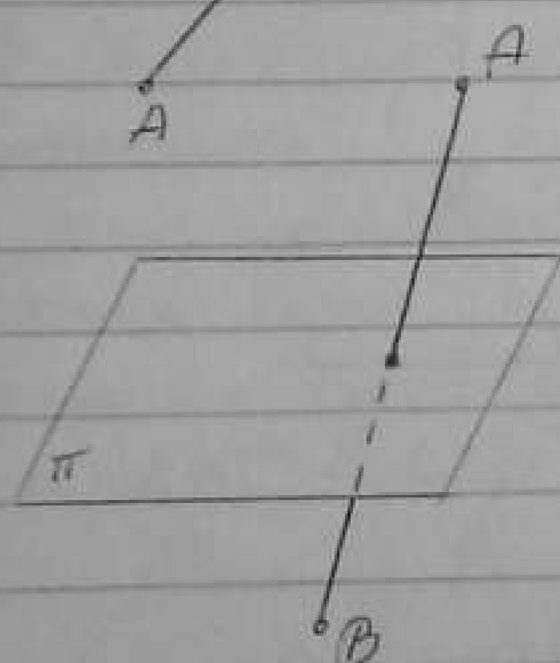


- лъч

$\overrightarrow{PA}$; $\overrightarrow{PB}$ - противоположни лъчи



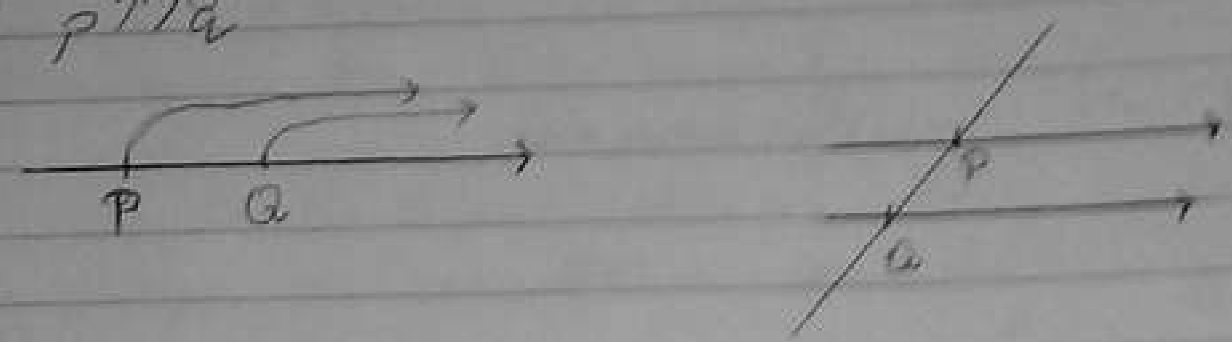
- полуравнина



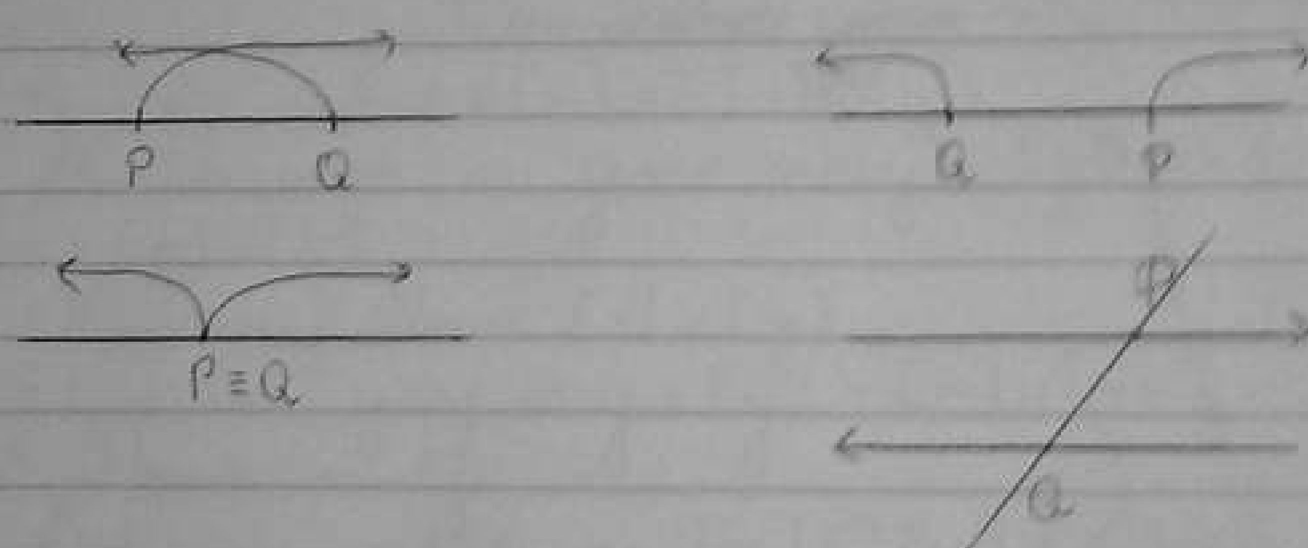
<u>Деф.</u> Казваме, че лъчите p и q са еднопосочни ако правите в/у които лежат са успоредни и:

ⓐ ако лежат на една и съща права, то $p \supset q$ или $q \supset p$

ⓑ ако са на различни прави и π е равнината определена от тия две прави и P и Q са началата на p и q, то p и q лежат в една и съща полуравнина в π отн. правата PQ. $p \uparrow\uparrow q$



Казваме, че p и q са противопол. ако лежат в/у $\parallel$ прави но не са еднопосочни



<u>Тв. 1</u> Релацията еднопосочност на лъчи е релация на еквивал. в множ. от вс. лъчи

Класовете на еквив. се нар. посоки

АГ - Вектори

Деф. Казваме, че отс. AB и CD са еднакви и пишем $AB \cong CD$, ако дълж. $|AB| = |CD|$

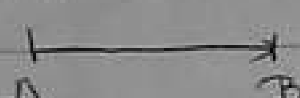
Заб. Очев. деф. не зависи от избора на един. отсечка

Тв2 Еднаквостта на отсечки е релация на еквив. в множ-вото на всички отсечки

Деф. Отсечка на която единият край A е избран за първи, а другият B за втори, се нарича насочена отсечка или свързан вектор и се означава с $\overrightarrow{AB}$

A се нар. начало, а B - край на насоч. отс. $\overrightarrow{AB}$

Ако $A = B$, то нас. отс. $\overrightarrow{AA}$ се нарича нулева

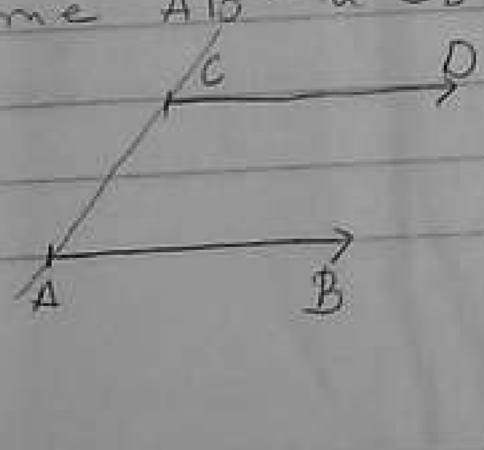


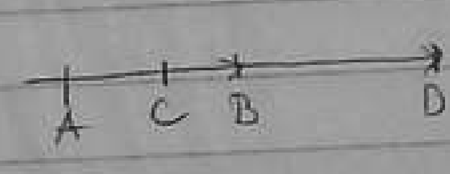
Заб. Ако $A \neq B$, то отс AB = отс. BA, но нас. отс $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са различни

Деф. Казваме, че насоч. отс. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочни (и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), ако е изпълнено едно от условията

а) поне една от $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нулева (т.е $A=B$ или $C=D$)

б) ако и двете са ненулеви (т.е. $A \neq B$ и $C \neq D$), то лъчите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопос. ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$)

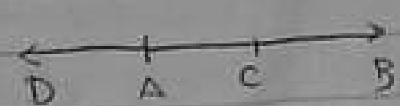




Казваме, че $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са противоположни (и пишем $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$), ако е изпълнено едно от условията

а)

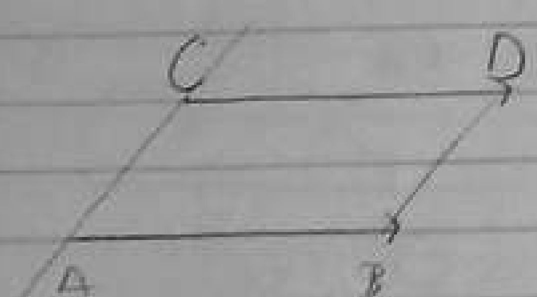
б) - получ. и от б) като $\vec{AB} \uparrow \vec{CD}$ се замени с $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$



От Тв. 1 =>

Тв 3 Релацията еднопосочност на насочени отс. е релация на еквив. в множ. на всички насочени отс.

Деф Казваме, че насоч. отс. $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ са равни (и пишем $\vec{AB} = \vec{CD}$) ако отс. $AB \cong$ отс. CD и $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$



Тв. 4 $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$

Док.

Дост. да докажем само $\Rightarrow$, защото обр. $\Leftarrow$ следва от нея с размяната на ролите на B и C

Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

а) Нека $A = B$

$\Rightarrow$ отс. AB = отс. AA тя се състои от една точка

Тъй като отс. $AB \cong$ отс $CD \Rightarrow$ отс CD се състои от една т. $\Rightarrow C = D$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

б) Нека $A \neq B$

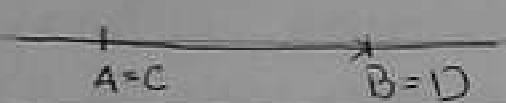
$\Rightarrow C \neq D$ защото ако $C = D$ както в а) ще получим, че и $A = B$

$\Rightarrow$ отс. $AB \cong$ отс. CD и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е $AB^{\to} \uparrow\uparrow CD^{\to}$

а) правите AB и CD съвпадат $\Rightarrow AB^{\to} \uparrow\uparrow CD^{\to}$

означава $AB^{\to} \supset CD^{\to}$ или $CD^{\to} \supset AB^{\to}$

а.1) $A = C$



$\Rightarrow CD^{\to} = AB^{\to}$

$\Rightarrow D \in CD^{\to} = AB^{\to}$ и отс. $\underset{\overset{\shortparallel}{|AD|}}{|CD|} = |AB|$

$\Rightarrow B = D$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA}$ - нулев, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB}$ - нулев

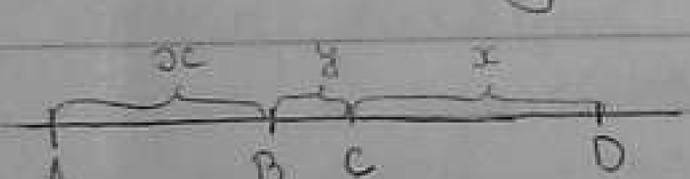
$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

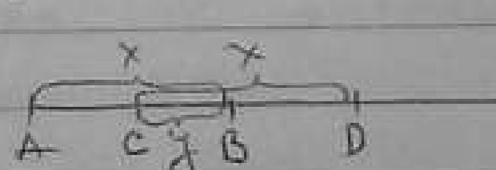
а.2) $A \neq C$

Б.О.О. $AB^{\to} \supset CD^{\to}$

Нека $|AB| = |CD| = x$, $|BC| = y$

$\Rightarrow$ имаме следните две възможности

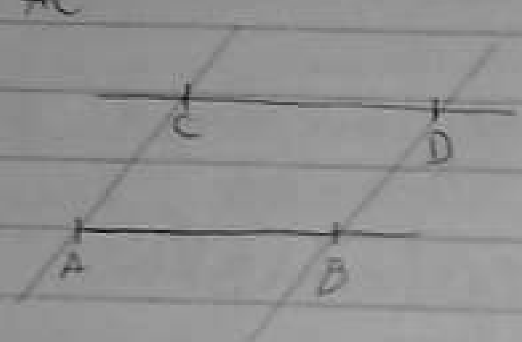




$|AC| = x + y = |BD|$
$|AC| = x - y = |BD|$

и в двата случая отс. $AC \cong$ отс. BD
и в двата случая $AC^{\to} \supset BD^{\to}$
т.е. $AC^{\to} \uparrow\uparrow BD^{\to}$, т.е. $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$
Значи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

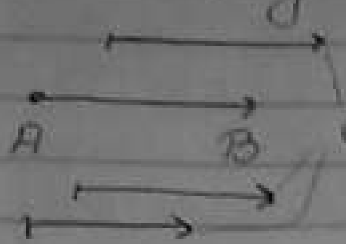
б) AB и CD са различни прави
$\Rightarrow AB \cong CD$ и
$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. $AB^{\to} \uparrow\uparrow CD^{\to}$
т.е. $AB^{\to}$ и $CD^{\to}$ са успоредни
и $AB^{\to}$ и $CD^{\to}$ са в една и съща полуравнина отн AC



$\Rightarrow ABDC$ е успоредник
$\Rightarrow AC \cong BD$ и $AC \not\ni B$ и
C и D са в една и съща полуравнина отн AB
т.е. $AC^{\to} \uparrow\uparrow BD^{\to}$ т.е. $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

От Тв.2 и Тв.3 $\Rightarrow$
Тв.5 Равенството на свързани вектори е релация на еквивалентност в множ. на всички свързани век.
Деф. Класовете на еквив. спрямо рел. равенство на свързани вектори се нар. свободни вектори

Ако v е своб. в-р и $\vec{AB} \in v$, то казваме, че $\vec{AB}$ е представител на v и пишем $\vec{AB} = v$



② Линейни операции с вектори

От сега нататък вместо „свободен вектор" ще казваме само вектор

От деф. на равенство е очев. че всеки две нулеви отсечки насочени отсечки са равни и ако една нас. отс. е равна на нулева, то и тя е нулева

=> нулевите насочени отс. образуват един клас на еквив. т.е. един своб. в-р, който се озн. с 0

Т 1. Нека v е вектор и O е произв. т.
Тогава $\exists!$ т. P : $\vec{OP} = v$

Док.

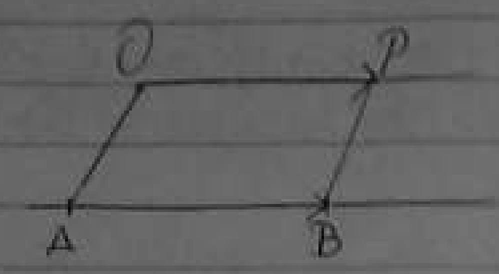
Ако $v=0$, то $P=O$. $O \equiv P$

(Ако) Нека $v \neq 0$

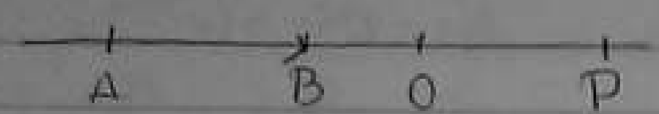
Нека $\vec{AB}$ е представител на v

$v \neq 0 \Rightarrow A \neq B$

Ако O не лежи в/у правата AB, то P е единств. точка за която $ABPO$ е успоредник



Ако O лежи върху AB, то пак е ясно, че съществува $\exists!\ P$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$



Деф: Нека v е вектор, $\overrightarrow{AB}$ е представител на v, тогава векторът с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича противоположен на v и се означава с $-v$

Коректност: трябва да докажем, че деф. не зависи от избора на представителя $\overrightarrow{AB}$ на v.
Нека $\overrightarrow{CD}$ е друг представител на v
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
$\Rightarrow$ (от Тв 4 от предишната тема) $\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ (от Тв 4) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ са представители на един и същ в-р
т.е деф. на $-v$ е коректна

Пример:
Нека $v=0$ Нека O е точка
$\Rightarrow \overrightarrow{OO}$ е представителя на v
$\Rightarrow \overrightarrow{OO}$ е представител и на $-v \Rightarrow -v=0$
$\Rightarrow -0=0$

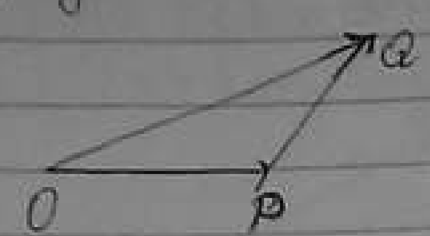
Деф. (събиране на вектори)

Нека u и v са вектори и O е произв. т.

Нека т. P:

P: $\overrightarrow{OP} = u$ и Q: $\overrightarrow{PQ} = v$

Сума (сбор) на u и v се нарича вектора с представител $\overrightarrow{OQ}$. Озн. се с $u+v$



Коректност: Трябва да се докаже че деф. на $u+v$ не зависи от избора на O.

Нека O' е друга т., P': $\overrightarrow{O'P'} = u$, Q': $\overrightarrow{P'Q'} = v$

Трябва да видим че $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PP'}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{QQ'} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$

Т.2 Събирането на вектори има следните св-ва:

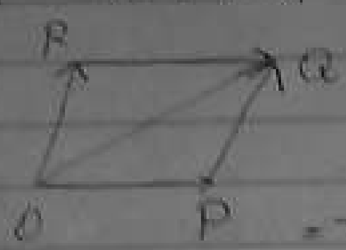
1) $u+v = v+u$ (комутативност)
2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (асоциативност)
3) $u+0 = u$
4) $u+(-u) = 0$

Док.

① O – произв. точка, P: $\overrightarrow{OP} = u$, Q: $\overrightarrow{PQ} = v$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = u+v$

Нека $R : \overrightarrow{OR} = v$



$\Rightarrow \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{RQ}$ е представител на u

$\Rightarrow \overrightarrow{OR}$ е представ. на v

$\overrightarrow{RQ}$ е пред. на $u \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = v \Rightarrow u + v = v + u$

Линейни операции с вектори

Док.

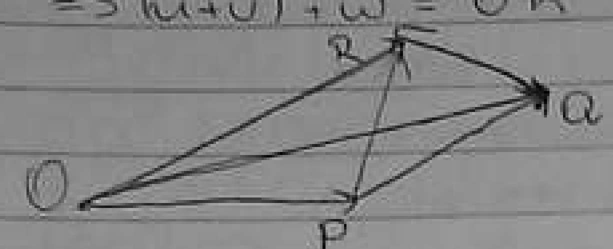
② O - произв. точка

P: $\overrightarrow{OP} = u$ Q: $\overrightarrow{PQ} = v$

$u+v = \overrightarrow{OQ}$

R: $QR = w$

$\Rightarrow (u+v)+w = \overrightarrow{OR}$



$v=\overrightarrow{PQ}$, $w=\overrightarrow{QR} \Rightarrow v+w=\overrightarrow{PR}$

Имаме, че $\overrightarrow{OP}=u$, $\overrightarrow{PR}=v+w \Rightarrow \overrightarrow{OR}=u+(v+w)$

$\Rightarrow (u+v)+w = u+(v+w)$

③ O - произволна точка, P: $\overrightarrow{OP}=u$

Имаме $\overrightarrow{PP}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=u+0 \Rightarrow u+0=u$

④ O - произволна точка, P: $\overrightarrow{OP}=u$

$\Rightarrow \overrightarrow{PO}=-u \Rightarrow \overrightarrow{OO}=u+(-u) \Rightarrow 0=u+(-u)$

Сл. От ① и ② получаваме

→ Ако $u_1, u_2, \dots, u_k$ са вектори, то тяхната сума не зависи от това как са подредени, нито от това как са поставени скоби

Поради това няма да пишем скоби $u_1+u_2+\dots+u_k$

Деф (изваждане на в-ри)

u, v - вектори

$u - v := u + (-v)$

Деф (умножение на в-р с число)

Нека u е вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$

Произведение на λu се нарича в-рът v, деф. по следния начин:

а) $\lambda = 0$ или $u = 0$, то $v = 0$

б) Ако $\lambda \neq 0$ и $u \neq 0$, то

Нека O е произволна точка, т. P: $\overrightarrow{OP}$ е представител на u

Върху правата OP построяваме т. Q. $|OQ| = |\lambda| . |OP|$

и $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ при $\lambda > 0$

$\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ при $\lambda < 0$

Тогава v е в-рът с представител $\overrightarrow{OQ}$

Озн $v = \lambda u$

Коректност:

① Независимост от избора на един. отс. за измерване на дължина

$|OQ| = |\lambda||OP| \Leftrightarrow \frac{|OQ|}{|OP|} = |\lambda|$

Ако се избере друга единична отсечка, отнош. на дълж. на OP и OQ си остава същото

В частност, ако бяхме избрали един. отс да е OP, то $|OQ| = |\lambda|$

② Независимост от избора на началната т. O

Нека O' е друга т.

P': $\overrightarrow{O'P'} = u$

В/у правата $O'P'$ взимаме Q'

$|O'Q'| = |\lambda||O'P'|$ и

$\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ при $\lambda \geq 0$

$\overrightarrow{O'Q'} \downarrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$ при $\lambda < 0$

Трябва да док. че $\overrightarrow{O'Q'} = \overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP}$, защото са представители на u

$\Rightarrow |O'P'| = |OP|$ и $\overrightarrow{O'P'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$

$|O'Q'| = |\lambda||O'P'| = |\lambda||OP| = |OQ|$

Ако $\lambda > 0$ $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{O'P'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} \Rightarrow$

$= \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$

Ако $\lambda < 0$ $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{O'P'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow$ и в двата случая $\overrightarrow{O'Q'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O'Q'} = \overrightarrow{OQ}$

$\Rightarrow$ деф. на $v = \lambda u$ е коректна

Т. 3 Умножението на вектор с число има следните св-ва

⑤ $1 . u = u$

⑥ $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu) u$ (асоц.)

⑦ $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$

⑧ $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ (дистрибутивни св-ва)

Заб. Считаме, че умнож. на в-р с число има по-висок приоритет от събирането на вектори

—

Отклонение по ЛА

Def Множество V, в което са въведени две операции – събиране и умножение с реално число, за които са в сила свата 1-8 от Т.2 и Т.3 се нарича реално векторно(линейно) пространство.

Пример:

$n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_3): x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$

Ако $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$,

то $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2,\dots, x_n+y_n)$

Ако $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$

—

От Т.2 и Т.3 получаваме.

Сл. Векторите в пространството образ. реално линейно пространство

От св-вата на лин. пространства получ.

Тв. линейните операции с в-ри имат следните свойства

1) $-0=0$

2) $-(-u)=u$

3) $-(u+v) = -u-v$

4) $u+w = v+w \Rightarrow u=v$

5) $0.u=0$

6) $\lambda.0=0$

7) Ако $\lambda.u = 0$, то $\lambda=0$ или $u=0$

8) Ако $\lambda.u=\lambda.v$ и $\lambda\neq 0$, то $u=v$

9) Ако $\lambda u=\mu.u$ и $u\neq 0$, то $\lambda=\mu$

10) $(-1).u=-u$

11) $(\lambda-\mu)u=\lambda u-\lambda\mu$

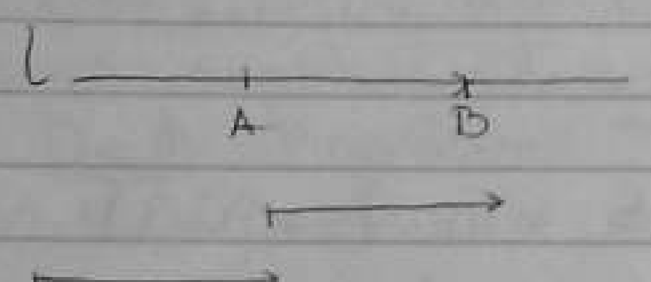
12) $\lambda(u-v)=\lambda u-\lambda v$

3 Условия за колинеарност и компланарност на вектори

Def. Казваме, че в-р v е колинеарен с правата l, ако v има представител, който лежи в/у l.

Еквив. деф. е всеки представител на v да е успореден на l.

Пишем $v \| l$.



2) Казваме че в-рите $v_1, v_2, \dots, v_k$ са колинеарни, ако $\exists$ права l, така, че всеки от тях е колинеарен с l.

При два в-ра пишем $v_1 \| v_2$

3) Казваме, че в-рът v е компланарен с равнината π, ако v има представител, който лежи в π.

Еквив. деф. е всеки представител на v е успореден на π

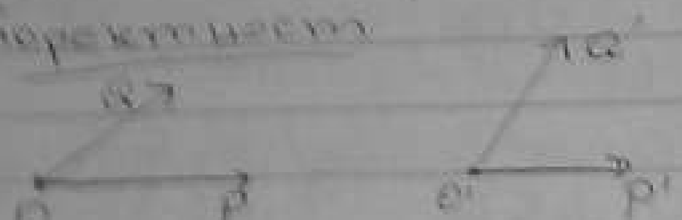
Пишем $v \parallel \pi$

4) Казваме, че в-рите $v_1, v_2, \ldots, v_k$ са компланарни, ако $\exists$ равн. π, така, че всеки от тях е компланарен с π.

<u>Деф</u> Под ъгъл м/у ненулеви в-ри u и v разбираме ъгъла м/у произволни техни представители с едно начало.

Озн. $\measuredangle(u,v)$

<u>Коректност</u>



$\overrightarrow{OP} = u, \overrightarrow{OQ} = v \quad \overrightarrow{O'P'} = u \ ; \ \overrightarrow{O'P'} = v$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'P'}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O'Q'}$

$\Rightarrow \measuredangle POQ = \measuredangle P'O'Q' \Rightarrow$ деф. $\measuredangle(u,v) = \measuredangle POQ)$ е коректна

<u>Деф</u> Под дължината на в-р v разбираме дължината на произволен негов представител (деф. за е коректна, защото различните представители са равни свързани в-ри и $\Rightarrow$ имат една и

сбира долни.

Т.1 Нека u и v са в-ри и $u \neq 0$.
Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$:
$v = \lambda u$
Числото λ в това рав. е единствено
Т.2 Нека u, v, w са в-ри и u и v не са колинеарни. Тогава u, v, w са компланарни
$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $w = \lambda u + \mu v$
Числата λ и μ в това рав. са единств.
Т.3 Нека t, u, v, w, са в-ри и u, v, w не са компланарни.
Тогава $\exists! \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$: $t = \lambda u + \mu v + \nu w$

—

Отк. по ЛА

Нека V е линейно простр. (реално)
<u>Деф.</u> Казваме, че $u \in V$ е линейна комбинация на векторите
$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ с коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
ако $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$
<u>Деф.</u> Казваме, че векторите
$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ са линейно зависими
ако $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, поне едно от които е различно от 0, така че $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$
Казваме, че $v_1, \dots, v_k$ са линейно ~~за~~ независими, ако не са линейно зависими.
т.е. ако $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ само ако при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Тв Един в-р v_1 е линейно зав $\Leftrightarrow v_1 = 0$
Един в-р v_1 е лин. незав $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

Тв Нека $k \geq 2$. В-рите $v_1, v_2, \dots, v_k$ са лин зав. $\Leftrightarrow$ един от тях е лин. комб. на останалите

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k$

Тв Нека $v_1, \dots, v_k \in V$ са лин незав и вектора u се представя като тяхна лин комб. Тогава това представяне е единствено, т.е коеф. са еднозначно определени

$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$

$0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) v_k$

$v_1 \dots v_k$ - лин нез $\Rightarrow \lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_k - \mu_k = 0$

Деф. Нека $n \in \mathbb{N}$. Казваме, че V е n-мерно, ако във V $\exists$ n лин. незав в-ри, но всеки $n+1$ в-ри са лин зав.
(т.е размерността е макс възможен брой лин незав. в-ри във V)

Пример: $\mathbb{R}^n$ е n-мерно

Сл. 1 Два вектора са колинеарни $\Leftrightarrow$ са лин. зав.

Сл.2 Векторите ~~,~~ колинеарни с дадена права, образуват едномерно реално лин пространство

Сл.3 3 вектора са компланарни <=> когато са лин завис.

Сл.4 Векторите, компланарни с дадена равнина образуват двумерно реално ~~пр~~ лин пространство

Сл.5 Всеки 4 в-ра в пространството са лин завис.

Сл.6 Векторите в пространството образуват 3-мерно реално лин простр.

Условия за колинеарност и компланарност

Т1 - Нека u и v са вектори и $u \neq 0$
Тогава u и v са колинеарни <=>
$\exists \lambda \in \mathbb{R}: v = \lambda u$
Числото λ в това рав. е единств.

Док.

1) Нека $v = \lambda u$
Тогава от деф. на умн. на в-р с число => $u \parallel v$
Единствеността на λ
От деф. на умн. на в-р с число =>
$|v| = |\lambda| . |u|$
т.е. $|\lambda| = \frac{|v|}{|u|}$ ($|u| \neq 0$, защ. $u \neq 0$)
=> $\lambda = 0$, ако $v = 0$
А ако $v \neq$, то $\lambda > 0$ ~~ко~~ при $u \uparrow\uparrow v$
$\lambda < 0$ при $u \uparrow\downarrow v$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0, & \text{при } v=0 \\ \dfrac{|v|}{|u|}, & \text{при } v\neq 0 \text{ и } u\uparrow\uparrow v \\ -\dfrac{|v|}{|u|}, & \text{при } v\neq 0 \text{ и } u\uparrow\downarrow v \end{cases} \qquad (1)$$

$\Rightarrow \lambda$ е единствено

2) Нека u и v са колинеарни

Деф. λ чрез ф-лата (1)

Ако $v=0$, то $\lambda=0 \Rightarrow v=0=0.u=\lambda.u$

Ако $v\neq$, то $|\lambda| = |v|/|u|$, т.е. $|v| = |\lambda|.|u|$

и освен това $u\uparrow\uparrow v$ при $\lambda>0$, а

$u\uparrow\downarrow v$ при $\lambda<0$

$\Rightarrow$ от деф на умн. на в-р с число $\Rightarrow$

$\Rightarrow v=\lambda u$

<u>Т2</u> Нека u,v,w са в-ри и

u и v не са колинеарни.

Тогава u,v,w са компланарни $\Leftrightarrow$

$\exists \lambda,\mu \in \mathbb{R}$: $w=\lambda u+\mu v$

Числата λ и μ в това рав. са

единствени.

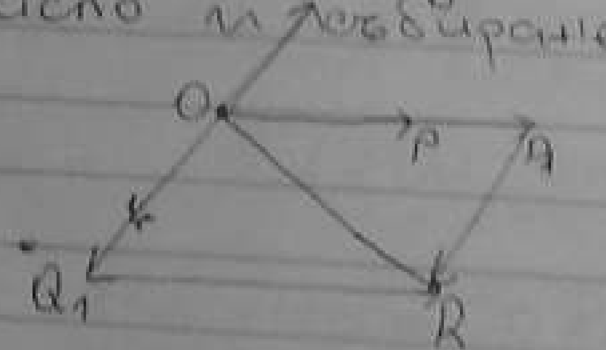
<u>Док.</u>

1) Нека $w=\lambda u+\mu v$

Тогава u,v,w са компланарни –

следва от деф. на умн. на в-р с

число и събиране на в-ри.



$\overrightarrow{OP}=u$

$\overrightarrow{OQ}=v$

$\overrightarrow{OP_1}=\lambda u$

$\overrightarrow{OQ_1}=\mu.v$

$\overrightarrow{OR}=\lambda u+\mu v=w$

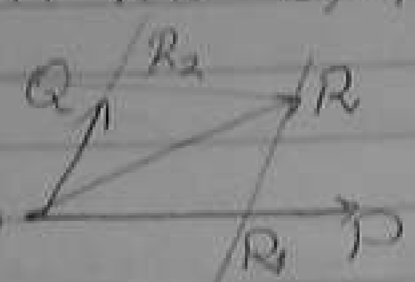
u, v, w имат представители в равн. OPQ => са компланарни

Единственост на λ и μ:

λ и μ са единствени, защото u и v са лин. независими (по Сл. 1) и w е тяхна лин. комб. => w се пише като лин. комб. на u и v по единствен начин.

2) Нека u, v, w са компланарни

Нека O е произв. т., P, Q, R: $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$ => R лежи в равн. опред. от т. O, P, Q



Нека прес. точка на правата през R която е усп. на OQ, и OP е P_1, а прес. т. на правата през R, която е усп. на OP, и OQ е R_2

Нека $u_1 = \overrightarrow{OR_1}$, $v_1 = \overrightarrow{OR_2}$

=> $w = u_1 + v_1$

Но $u_1 \parallel u$ и по T1 => $\exists \lambda : u_1 = \lambda u$

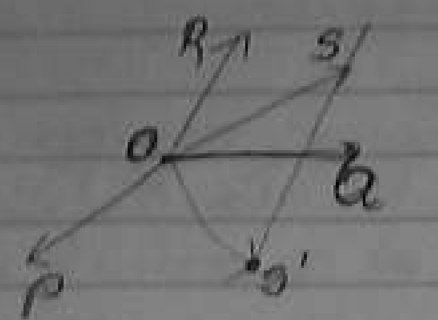
$v_1 \parallel v$ и по T1 => $\exists \mu : v_1 = \mu . v$

=> $w = \lambda u + \mu . v$

T3 Нека t, u, v, w са в-ри и u, v, w не са компланарни. Тогава $\exists ! \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:

$t = \lambda u + \mu v + \nu w$

Док.
Нека O е произв. т., P, Q, R, S:
$\vec{OP}=u$, $\vec{OQ}=v$, $\vec{OR}=w$, $\vec{OS}=t$



Нека S' е прес. т. на равн OPQ и правата през S $\parallel$ на OR.
Нека $t'=\vec{OS'}$, $t''=\vec{S'S}$ $\Rightarrow t=t'+t''$.
Имаме, че u, v, t' са компл. (с равн OPQ) и u и v не са колин.
По Т2 $\Rightarrow \exists \lambda, \mu: t'=\lambda u+\mu v$
Също $t'' \parallel w$ и $w \neq 0$
По Т1 $\Rightarrow \exists \nu: t''=\nu . w$
$\Rightarrow t=\lambda u+\mu v+\nu w$
Коеф λ, μ, ν в това рав. са единствени, защото u, v, w са лин. независими (по сл. 3) и $\Rightarrow$ представянето на t като тяхна лин. комб. е единствено

4 Координатни системи. Ориентации

Откл. по ЛА
Нека V е n-мерно реално лин. пространство
Деф. Базис (база) на V е всяка наредена n-орка $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, която се състои от

линейно независими в-ри $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Тв. Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис за V и $v \in V$. Тогава $\exists!\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}: v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Тия $x_1, x_2, \dots, x_n$ се наричат кординати на V спрямо баз. $e = (e_1, \dots, e_n)$ за V

Пример

В $\mathbb{R}^n$ един базис е $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, където $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

т.е. $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{1}, 0, \dots, 0)$

Нар. се стандартен или ~~каноана~~.

Нека $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ са два базиса за V

Матрица за прехода от a към b се нарича матрицата $T = (t_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, която се деф. по следния начин

$$b_1 = t_{11} a_1 + t_{21} a_2 + \dots + t_{n1} a_n$$
$$b_2 = t_{12} a_1 + t_{22} a_2 + \dots + t_{n2} a_n \qquad (1)$$
$$b_n = t_{1n} a_1 + t_{2n} a_2 + \dots + t_{nn} a_n$$

т.е. $b_i = t_{1i} a_1 + t_{2i} a_2 + \dots + t_{ni} a_n$

т.е. кординатите на b-тата спрямо базиса от a-тата са стълбове на T

(1) може да се запише чрез матрично у-вение като $(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) . T$

и още по-кратко: $b = a.T$

Матрицата на прехода винаги е обратима $\Rightarrow$ $\det(T) \neq 0$

Зад. Оттук нататък под $\overline{OP}$ ще разбираме свободния в-р, деф. от нас. отс. $\overline{OP}$. Ако имаме предвид насочена отсечка ще уточняваме изрично.

За да въведем едновременно координатна с-ма в/у права в равн. и в простр., въвеждаме следните означения:

Озн. множ. от всички точки в простр. с A_3, а множ. от всички в-ри в простр. с V_3.

Ако π е равн., то озн. множ. от всички точки в/у π с A_2, а множ. от всички в-ри, които са компланарни с π – с V_2

Ако l е права, то озн. множ. от всички точки в/у l с A_1, а множ. от всички в-ри, които са колин. с l – с V_1

От пред. въпрос знаем, че V_n е n-мерно реално ~~число~~ лин. простр.

$n = 1, 2, 3$ –

Деф. Афинна координатна с-ма K в A_n е двойка, състояща се от точка $O \in A_n$ и базис $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ на V_n

Пишем $K = O_{e_1 e_2 \dots e_n}$

O се нар. начало на K, а в-рите $e_1, \dots, e_n$ – координатни или базисни в-ри

Ако е зада. единична отс. за измерване на дължини и $|e_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$

и $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$

то казваме, че K е ортонормирана

координатна с-ма

Нека $v \in V_n$. Тъй като $(e_1, \dots, e_n)$ е базис на V_n, то $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

Тия $x_1, \dots, x_n$ се нар координати на v спрямо K (т.е. това са координатите на v спрямо базиса $(e_1, \dots, e_n)$)

Пишем $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Нека $P \in A_n$. Координати на P спрямо K се нар координатите на $\overrightarrow{OP}$ спрямо K

Пишем $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Правата през O, която е колинеарна с в-ра e_i и е ориентирана с e_i, се нар i-та координатна ос и я озн. често с O_x

(Оста Ox_1 се нарича абсцисна ос, а коорд x_1 - абсциса и се озн често с x вместо x_1

При $n \geq 2$ оста Ox_2 се нар ординатна ос, а коорд x_2 - ордината и се бележи с y вместо с x_2

При $n = 3$ оста Ox_3 се нарича апликатна ос, а коорд x_3 - апликата и се бележи често с z вместо x_3

Деф Казваме, че два базиса a и b на V_n са еднакво ориентирани, ако за матр. на прехода T от a към b имаме $\det(T) > 0$

Пишем $a \sim b$

Казваме, че a и b са против. ориент., ако $\det(T) < 0$

(Зад. Винаги $\det(T) \neq 0$)

ТВ 1) Релацията еднаква ориентираност е рел. на еквив. в множ. от всички базиси на V_n

2) Класовете на еквив. спрямо тая релация са два

Ако b е един базис, то те са

$\{a : a$ е базис на $V_n,\ a \sim b\}$ и

$\{a : a$ е базис на $V_n,\ a \not\sim b\}$

Примери

1) $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и $(-b_1, b_2, \dots, b_n)$ са противоп. ориентирани

2) При $n \geq 2$ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и $(b_2, b_3, \dots, b_n)$ са противоположно ориент.

3) При $n = 3$ (b_1, b_2, b_3) и (b_2, b_3, b_1) са еднакво ориент.

Деф a и b - базиси на реалното лин. простр. V_n,

T - матр. на прехода от a към b

($\Rightarrow \det T \neq 0$)

Казваме, че a е еднакво ориент. с b, ако $\det(T) > 0$ (пишем $a \sim b$), а a е против. ориент. на b ако $\det(T) < 0$

ТВ. 1) Релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквив. в множ. на всички базиси на V_n

2) Класовете на еквив. спрямо тая

рел. са два. Ако a е един базис, то те са
$\{ \underset{\text{баз.}}{b} : a \sim b \}$ и $\{ \underset{\text{баз}}{b} : a \nsim b \}$

($a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$
Матр на прехода T от a към b се
задава с $b = a.T$)

Док. 1) рефлективност: $a \overset{?}{\sim} a$

$a = a.E$ => матр. на прехода от a към a е E
и $\det(E) = 1 > 0$ => $a \sim a$

симетричност: Ако $a \sim b \overset{?}{=>} b \sim a$

$a \sim b$ => $b = a.T$ и $\det(T) > 0$
=> $a = b.T^{-1}$ => матр. на прехода от b към a
е T^{-1} и $\det(T^{-1}) = \dfrac{1}{\det(T)} > 0$ => $b \sim a$

транзитивност:

Ако $a \sim b$, $b \sim c \overset{?}{=>} a \sim c$
Нека $b = a.S$ => $\det(S) > 0$
$c = b.T$ => $\det(T) > 0$
$c = aST$
=> матр на прехода от a към c
е ST и $\det(ST) = \det(S)\det(T) > 0$
=> $a \sim c$
=> $\sim$ е рел. на еквив.

2) ~~Очев.~~ Нека b е баз. фикс.
Очев. $\{ a : a \sim b \}$ е клас на еквив. - тоя на b
=> трябва само да док, че $\{ a : a \nsim b \}$

също е клас на еквивалентност

Нека $a \sim b$, $c \sim b$

Трябва да се док., че $a \sim c$

Имаме $b = a S$ и $\det(S) < 0$

$c = b . T$ и $\det(T) < 0$

Тогава $c = a ST$ и $\det(ST) = \underbrace{\det S}_{<0} \underbrace{\det(T)}_{<0} > 0$

$\Rightarrow a \sim c$

<u>Деф</u> Ориентация във V_n (и в A_n) е всеки от двата класа еквив. отн. еднаквата ориентираност на базиси

Казваме, че V_n (и A_n) е ориентирана, ако е избрана едната от двете ориента-ция се нар. полож., а другата отриц.

Очев. ориент. може да се зададе като се избере един базис b на V_n

<u>Зад.</u> Ориентация в/у права се нар. посока в/у правата, а ориентирана права се нар. ос.

Ориентация в равн. се нар. посока на въртене в равн.

<u>Деф.</u> Нека A_n е ориентирана

<u>Коорд.</u> с-ма $K = Oe_1 \dots e_n$ се нарича полож. ориентирана или дясна (съотв. отриц. ориент. или лява), ако коорд. базис $(e_1, \dots, e_n)$ задава полож. (съотв. отриц.) ориентация

Аналитично изразяване на линейните операции с вектори

Отново работим едновр. в/у права ($n=1$), в равн. ($n=2$) и в простр. ($n=3$)
Нека $K' = Oe_1 \dots e_n$ е афинна коорд. с-ма в A_n.

Т.1 Нека $u(x_1, \dots, x_n)$, $v(y_1, \dots, y_n) \in V_n$. Тогава $u = v \Leftrightarrow x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$

Док.
Имаме $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$,
$v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$
$\Rightarrow u = v \Leftrightarrow x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$
$\Leftrightarrow x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$ (защ. $(e_1, \dots, e_n)$ е базис)

Т.2 Нека $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$,
$u_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \in V_n$, $j = 1, \dots, k$,
$v(y_1, \dots, y_n) \in V_n$
Тогава $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$
$\Leftrightarrow y_i = \lambda_1 x_{i1} + \lambda_2 x_{i2} + \dots + \lambda_k x_{ik}$
$i = 1, \dots, n$

Док.
Имаме $u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_{ij} e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_{ij} \right) e_i$$

$\Rightarrow i$-тата коорд. на $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$ е $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_{ij}$

По Т.1 $v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \iff y_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_{ij}$, $i=1,\dots,n$

Сл. 1 Дадени в-ри от V_n са лин. зав. $\iff$ коорд. им вектори са лин. зав. ($\in \mathbb{R}^n$)

Отк. по ЛА

Ранг на матрица

Нека имаме матр. $A=(a_{ij}) \in M(m\times n, \mathbb{R})$

квадратна подматрица на A е всяка матр., която се получава от A чрез избиране на k реда на A и k стълба на A и премахване на останалите редове и стълбове

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ако сме избрали редовете с номера $i_1,\dots,i_k$ и стълбовете с номера $j_1,\dots,j_k$, то подматр. е $(a_{i_\lambda j_\mu})$, $\lambda,\mu=1,\dots,k$

Минор от ред на A се нар. детерм. на квадратна подматр. от ред k.

Ранг на A се нар. най-голямото k, за което $\exists$ минор от ред k, който е $\neq 0$

Ранг на нулевата матр. по деф. е 0

Пример: Матр. $n\times n$ е обратима $\iff$ рангът и е n.

Т. Рангът на A = макс. брой лин. незав.

редове на A = макс броя лин незав стълбове на A.

Сл. 2 В-рите $u(x_1, \dots, x_n)$, $v(y_1, \dots, y_n) \in V_n$ са колинеарни $\Leftrightarrow$

матр. $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$ има ранг ≤ 1

Това сл. е безинтересно при $n=1$

При $n=2$

Сл. 3 В-рите $u(x_1, x_2)$, $v(y_1, y_2) \in V_2$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$

Сл. 4 при $n=3$

В-рите $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3) \neq$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0$

$\det\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$ $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$

Сл. 5 В-рите $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$ са компланарни $\Leftrightarrow$

матр. $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ има ранг $\leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$

Т.3 Нека $P(x_1,\dots,x_n)$, $Q(y_1,\dots,y_n) \in A_n$
Тогава в-рът $\overrightarrow{PQ}$ има спрямо K коорд.
$\overrightarrow{PQ}(y_1-x_1,\dots,y_n-x_n)$

Док. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$
Имаме, че коорд. на $\overrightarrow{OP}$ са коорд. на P
и коорд. на $\overrightarrow{OQ}$ са коорд. на Q
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}(x_1,\dots,x_n)$, $\overrightarrow{OQ}(y_1,\dots,y_n)$
$\Rightarrow$ (по Т.1) $\overrightarrow{PQ}(y_1-x_1, y_2-x_2,\dots,y_n-x_n)$

5 Смяна на координатната система

Отново работим едновр. в/у права $(n=1)$, в равн. $(n=2)$, простр. $(n=3)$

Т.1 Нека $K=Oe_1\dots e_n$ и $K'=O'e'_1\dots e'_n$ са две афинни коорд. с-ми в A_n и коорд. на O' спрямо K са $(s_1,\dots,s_n)$, а матр. на прехода от $(e_1,\dots,e_n)$ към $(e'_1,\dots,e'_n)$ е $T=(t_{ij})$, $i,j=1,\dots,n$

Тогава:

1) Ако $v\in V_n$ има коорд. $(x_1,\dots,x_n)$ спрямо K и $(x'_1,\dots,x'_n)$ спрямо K', то $x_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j$, $i=1,\dots,n$
Ако озн. $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $x'=\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$, то тия равен. са еквив. на матр. рав. $x=Tx'$

2) Ако $P\in A_n$ има коорд. $(x_1,\dots,x_n)$ спрямо K и $(x'_1,\dots,x'_n)$ спрямо K', то $x_i=s_i+\sum_{j=1}^{n} x_j$

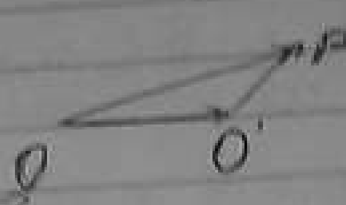
Ако озн. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, то тия

, рав. са еквив. на матр. рав. $x = s + Tx'$

Док.

1) док. по 1А

2) Имаме $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$



Имаме, че коорд. на $\overrightarrow{OP}$ спрямо K са коорд. на P спрямо K

Аналог. коорд. на $\overrightarrow{OO'}$ спрямо K са коорд. на O' спрямо K

Също коорд. на $\overrightarrow{O'P}$ спрямо K' са коорд. на P спрямо K' $\Rightarrow \overrightarrow{O'P} = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$

$\Rightarrow$ i-тата коорд. на $\overrightarrow{OP}$ спрямо K = i-тата (коорд. ~~спрямо~~ на $\overrightarrow{OO'}$ спрямо K) +

$+ \sum_{j=1}^{n} x_j' \cdot$ (i-тата коорд. на e_j' спрямо K)

Имаме $e_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$

$\Rightarrow$ i-тата коорд. на e_j' спрямо K е t_{ij}

$\Rightarrow x_i = s_i + \sum_{j=1}^{n} x_j' t_{ij}$

$\Rightarrow x = s + Tx'$

Смяна на коорд. с-ма

1) Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ и $K' = O'e'_1 \dots e'_n$ са две афинни координатни системи в A_n, коорд. в-р на O' спрямо K е $\boxed{S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}}$, и матрицата на прехода от $(e_1, \dots, e_n)$ към $(e'_1, \dots, e'_n)$ е $T = (t_{ij})$

Тогава:

1) Ако v е в-р и коорд. в-ри спрямо K и K' са съответно $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, то $x = Tx'$

2) Ако P е точка и коорд. ѝ в-ри спрямо K и K' са съответно: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $x = S + Tx'$.

Заб. 1) Правилото за смяна в 1) може да се помни така: v има коорд. в-р x означ. $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Това може да се напише $v = e.x$, където $e = (e_1, \dots, e_n)$

Аналогично $v = e'x' \Rightarrow e.x = e'x'$

Това, че T е матрица на прехода от e към e' означ. че $e' = e.T \Rightarrow e.x = eT.x'$

формално ни е и получ. $x = T.x'$, т.е. ф-лата за смяна на коорд. ~~може~~ Обратно: ако помним $x = T.x'$ формулата за смяна на координати можем да получим ф-лата за смяна на базиса: във $e.x = e'x'$ заместваме $x = Tx \Rightarrow eTx' = e'x'$ съкращ. формално на x' и получаваме $eT = e'$

2) От $x = S + Ty'$ получаваме как x' се изразява с x: $x' = T^{-1}(-S + x) = -T^{-1}S + T^{-1}x$. Ако K и K' са ортонорм. коорд. с-ми, то T е ортогонална, т.е. $T^{-1} = T^t$. Тогава горната ф-ла се опростява до $x' = T^t(-S + x)$ (Опростяване, защото T^t се

намира тривиално, а смятането на T^{-1} е трудоемко)

⑥ Скаларно произведение

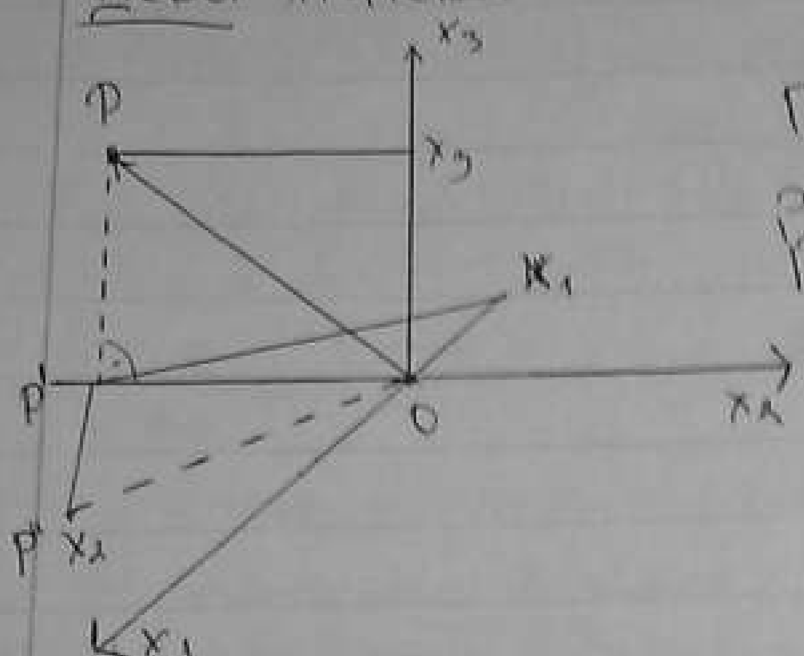
Считаме, че е фикс. един отс. за измерване на дължини.

Т.1 Нека $K = O$ е ортон. коорд система. Тогава:

1) Ако векторът u има спрямо K коорд. (x_1, x_2, x_3), то $|u| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

2) Ако т. P и Q имат спрямо K коорд. $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$, то $|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}$

Д-во: 1) Нека P $\overrightarrow{OP} = u \Rightarrow P$ има коорд (x_1, x_2, x_3)



Проектираме ортог. в равн. Ox_1x_2 до т. P'. По Т-мата на Питагор
$|OP|^2 = |OP'|^2 + |PP'|^2$

Имаме $P'(x_1, x_2, 0)$

$|P'P''| = |x_1|$, $|OP''| = |x_2|$

По т-мата на Питагор

$|OP|^2 = |P'P''|^2 + |OP''|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$|PP'| = |x_3| \Rightarrow |u|^2 = |OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |u| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

2) $|PQ| = |\overrightarrow{PQ}|$

Имаме $\overrightarrow{PQ}(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$

от 1) $\Rightarrow |PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$

<u>Деф.</u> Скаларно произведение на векторите u и v се нарича реалното число $\langle u,v\rangle$, дефинирано по следния начин:

1) Ако $u=0$ или $v=0$, то $\langle u,v\rangle = 0$
2) Ако $u\neq 0$ и $v\neq 0$, то $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$

<u>Други означения:</u> uv, $u.v$, (u,v), $\langle u|v\rangle$

<u>Пример:</u> Ако $u\neq 0$

$$\langle u,u\rangle = |u||u|\underbrace{\cos\underbrace{\sphericalangle(u,u)}_{0}}_{1} = |u|^2$$

<u>Т-ма2:</u> Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$

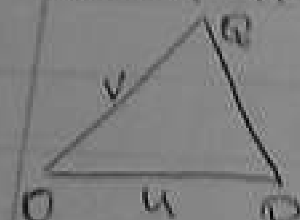
<u>Док.</u> $\langle u,v\rangle \overset{(|u|\neq 0,\,|v|\neq 0)}{\Longleftrightarrow} |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle(u,v) = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(u,v) = \pi/2 \Leftrightarrow u \perp v$

$\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\sphericalangle(u,v)$

<u>Т-ма3:</u> Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е ортонормирана коорд. система и спрямо в-рите u и v имащи коорд. $u(x_1,x_2,x_3)$ и $v(y_1,y_2,y_3)$. Тогава $\langle u,v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

<u>Док.</u> Ако $u=0$ или $v=0$ твърд. очевидно е изпълнено. Нека $u\neq 0$ и $v\neq 0$. Нека P и Q: $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$



По косинусовата т-ма за $\triangle OPQ$

$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos\sphericalangle POQ$

$|OP| = |u|$, $|OQ| = |v|$, $\sphericalangle POQ = \sphericalangle(u,v)$

$\Rightarrow |OP||OQ| \cos \measuredangle POQ = |u||v| \cos \measuredangle(u,v) = \langle u,v \rangle$

$\Rightarrow |PQ|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u,v \rangle$

$\Rightarrow \langle u,v \rangle = 1/2 (|u|^2 + |v|^2 - |PQ|^2)$

По т-ма 1 $|u|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$|v|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

Имаме, че коорд. на P са коорд. на u $\Rightarrow P(x_1, x_2, x_3)$

Аналог. $Q(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow$ по (Т1)

$|PQ|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$

Заместваме в (1), опростяваме и ги получ.

$\langle u,v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

От т-ма 1, т-ма 2, т-ма 3 получ.

Т-ма 4. Нека спрямо ортонорм. коорд. система в-рите u и v имат корд. $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава:

1) $u \perp v \Leftrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$

2) Ако $u \neq 0$ и $v \neq$, то $\cos \measuredangle(u,v) = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}}$

Т-ма 5. Скаларното произведение има следните св-ва:

① $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ (симетричност)

② $\langle u+v, w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

③ $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$ за $\lambda \in \mathbb{R}$ аргумент

④ Ако $u \neq 0$, то $\langle u,u \rangle > 0$ (положителност)

(хомогенност по)

Док: Нека K е ортонорм. коорд. с-ма и в-рите u, v, w имат спрямо нея коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$

① $\langle u,v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ по Т.3

① $\langle v,u\rangle = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$ по Т3

$\Rightarrow \langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$

(следва от деф., защото $\measuredangle(v,u) = \measuredangle(u,v)$)

③ Имаме $\lambda u(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \lambda u, v\rangle = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + (\lambda x_3)y_3 =$

$= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \lambda\langle u,v\rangle$

④ $\langle u,u\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, защото $u \neq 0$

(следва и от деф., защото $\langle u,u\rangle = |u|^2 > 0$)

Сл. Скаларното произведение на в-ри е скаларно произв. в смисъл на лин. алгебра и следователно в-рите в простр образуват 3-мерно евклидово лин. простр.

Деф. Нека V е лин. простр. Скаларно произведение в V е изображение $V \times V \to \mathbb{R}: (u,v) \to \langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$ което има св-вата ①-④ в Т-ма 5. Евклидово лин. простр. е реално простр, в което е фиксирано едно скаларно произведение

Заб 1) Ако $u = 0$, то $\langle u,u\rangle = 0$ (по деф., или от 2) с $u=0$, или от ③ ($u=0$, $\lambda=0$)

$\Rightarrow$ имаме $\langle u,u\rangle \geq 0$ и $= \Leftrightarrow u = 0$

2) Св-вата ② и ③ заедно са еквивалентни на св-вото $\langle \lambda u + \mu u, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \mu\langle v,w\rangle$ за $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, което се нарича линейност по първия аргумент

3) Поради симетричността на скаларното произведение то е адитивно, хомогенно и линейно и по втория си аргумент (т.е. билинейно)

Тв. Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е произволна афинна коорд. с-ма и спрямо нея в-рите u и v

Ако $\varphi > \pi/2$, то $\alpha = \pi - \varphi$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\cos\varphi > 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = |\cos\varphi|$

$\Rightarrow V_{парал} = |u \times v| \cdot |w| \cdot |\cos\varphi| = |\,|u \times v| \cdot |w| \cdot \cos\angle(u \times v, w)|$

$= |\langle u \times v, w \rangle| = |\langle u, v, w \rangle|$

Тетраедър е OPRQ $V_{тетр} = \frac{1}{6} V_п = \frac{1}{6} |\langle u, v, w \rangle|$

Векторно

Полуравнини

Нека $K = Oxy$ е афинна коорд. система в равнината

Теорема Нека правата L има спрямо K -общо ур. $Ax + By + C = 0$ и нека т. P_1 и P_2 имат коорд. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Озн. $L(x,y) = Ax + By + C$

Тогава

1) P_1 и P_2 са от различни отворени полуравнина относно $L \iff L(x_1, y_1) \cdot L(x_2, y_2) < 0$ (т.е. когато $L(x_1, y_1)$ и $L(x_2, y_2)$ имат различни знаци)

2) P_1 и P_2 са от една и съща отворена полурав. относно $L \iff L(x_1, y_1) L(x_2, y_2) > 0$ (т.е. $L(x_1, y_1)$ и $L(x_2, y_2)$ имат еднакви знаци)

Заб. За затв. полур. усл. са ≤ 0 и ≥ 0 съотв.

Следствие Нека правата ℓ има спрямо K уравнение $\ell \cdot L(x,y) = Ax + By + C = 0$

Тогава отворените полуравнини относно ℓ са множествата $\{P(x,y) : L(x,y) > 0\}$ и $\{P(x,y) : L(x,y) < 0\}$

Заб. За затв. полуравнини се задават аналогично с ≤ 0 и ≥ 0 съотв.

Нормално уравнение на права в равнина

Деф. Нека ℓ е права. Всеки вектор, който е неперпендикулярен на ℓ (т.е. $\perp$ на векторите колинеарни с ℓ) се нарича нормален вектор за ℓ. Оттук нататък работим в равнината.

Нека $K = Oxy$ е ортонормирана коорд с-ма в равнината

Твърдение 1 Нека l има спрямо K уравн $Ax + By + C = 0$. Тогава в-рът N с коорд (A, B) е нормален за l

Док. Знаем, че в-рът $v(-B, A) \parallel l$, $v \neq 0 \Rightarrow$
$N \perp l \Leftrightarrow N \perp v \Leftrightarrow \langle N, v \rangle = 0$ $(A(-B) + BA = 0) \Rightarrow$
$N \perp v \Rightarrow N$ е нормален за l

Твърдение 2 Нека т. P_0 и ненулевият в-р N имат спрямо K коорд $P_0(x_0, y_0)$ и $N(A, B)$. Тогава правата l_0 през P_0, която е перпенд на N, има спрямо K ур. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

Док

Очевидно е, че l е еднозначно опред[illegible] е/с усл. $P_0 \in l$, $N \perp l$

Нека m е правата с ур. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ (това е общо ур. на права защото $(A, B) \neq (0, 0)$, защото $N \neq 0$)

Очев. $P_0 \in m$, защото $A(x_0 - x_0) + B(y_0 - y_0) = 0$, а $N(A, B) \perp m$ по Твърдение 1 $\Rightarrow m = l$

Нека l е права в равн. Тогава всички нормални за l в-р са колинеарни $\Rightarrow$ съществуват точно два единични норм. в-ра за l

Ако $N(A, B)$ е ненулев норм. в-р за l, то те са $n = \frac{N}{|N|}$ и $-n$

т.е $n\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$ и $-n\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$

<u>Деф.</u> Общо ур. на правата ℓ спрямо K, в което норм. в-р с коорд. коеф. пред x и y е единичен, се нарича нормално уравнение. Ако ℓ има общо ур. $Ax+By+C=0$, то те са $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$

и $-\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$

<u>Док.</u> Нека $\ell: Ax+By+C=0$

Тогава произв. общо ур. на ℓ има вида

$\lambda(Ax+By+C)=0$, където $\lambda \neq 0$

$(\lambda A)x+(\lambda B)y+\lambda C=0$

Това е норм. ур. $\Rightarrow (\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1$

$\lambda^2A^2+\lambda^2B^2=1$

$\lambda^2(A^2+B^2)=1$

$\lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{A^2+B^2}}$

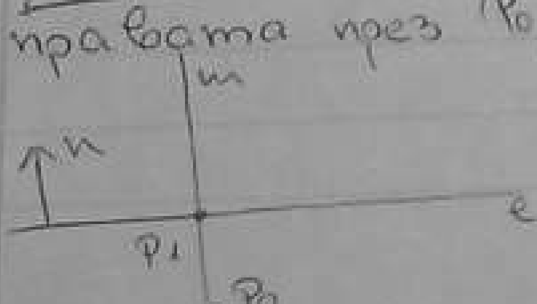
$\Rightarrow \ell$ има точно две норм. ур. и те се задават от ф-лите в твърд.

<u>Приложение на нормалното ур.</u>

1) Разстояние от точка до права

<u>Твърдение 4</u> Нека правата ℓ има спрямо K норм. ур. $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ и нека т. P_0 има спрямо K коорд. (x_0, y_0). Означаваме $L(x,y):=\alpha x+\beta y+\gamma$. Тогава разстоянието $d(P_0,\ell)$ от P_0 до ℓ е $d(P_0,\ell)=|L(x_0,y_0)|$

<u>Д-во</u> Нека n е норм. в-р с коорд. (α,β). Нека m е правата през P_0, която е $\perp$ на ℓ.



Нека $m \cap \ell = P_1(x_1,y_1)$

$\overrightarrow{P_1P_0} \perp \ell \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_0} \parallel n \Rightarrow$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_1P_0}=\lambda n$

$\Rightarrow d(P_0, \ell) = |P_0 P_1| = |\overrightarrow{P_1 P_0}| = |\lambda n| = |\lambda||n| = |\lambda|$

Имаме $\overrightarrow{P_1 P_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$

От $\overrightarrow{P_1 P_0} = \lambda n \Rightarrow x_0 - x_1 = \lambda \alpha,\ y_0 - y_1 = \lambda \beta$

$x_1 = x_0 - \lambda \alpha$

$y_1 = y_0 - \lambda \beta$

$P_1 \in \ell \Rightarrow \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha(x_0 - \lambda\alpha) + \beta(y_0 - \lambda\beta) + \gamma = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)}_{L(x_0, y_0)} - \lambda \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}_{=1} = 0$

$\Rightarrow \lambda = L(x_0, y_0)$

$\Rightarrow d(P_0, \ell) = |L(x_0, y_0)|$

Зад. Числото $\delta(P_0, \ell) := L(x_0, y_0)$ се нарича ориент. разст. от P_0 до ℓ. Поради $\overrightarrow{P_1 P_0} = \lambda n = \delta(P_0, \ell)$ и $L(x_0, y_0) = \lambda$

$\Rightarrow \delta(P_0, \ell) > 0 \iff \overrightarrow{P_1 P_0}$ сочи в полупр., в която сочи n

$\delta(P_0, \ell) < 0 \iff \overrightarrow{P_1 P_0}$ сочи в полупр. в която сочи $-n$

имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава
$$\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j = g_{11} x_1 y_1 + g_{22} x_2 y_2 + g_{33} x_3 y_3 +$$
$$+ g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{13}(x_1 y_3 + x_3 y_1) + g_{23}(x_2 y_3 + x_3 y_2),$$
където $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$

<u>Док</u> Имаме $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$
$$v = \sum_{j=1}^{3} y_j e_j$$
$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = g_{ij}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$$

Второто равенство следва от това което се има в предвид, че $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \langle e_j, e_i\rangle = g_{ji}$

7 <u>Векторно произведение</u>

Считаме, че са фикс. единичен отсечка и ориентация в A_3.

<u>Деф</u> Векторно произведение на в-рите u и v се нар. векторът $u \times v$, дефинираме по следния начин:

1) ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$

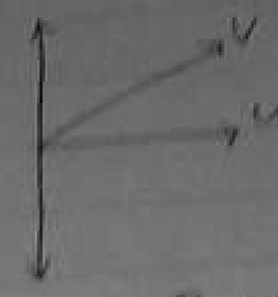
2) ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единствения в-р за който: $|u \times v| = |u||v| \sin\sphericalangle(u, v)$

$u \times v \perp u, v$

$(u, v, u \times v)$ образуват полож. ориентиран базис (дясна тройка) $u \wedge v$

<u>Заб.</u> 1) Има точно два в-ра w: $|w| = |u||v| \sin\sphericalangle(u,v)$
$w \perp u, v$

$w \neq 0$, защото u и v не са колин. $\Rightarrow \sphericalangle u,v \neq 0$ и $\pi \Rightarrow$ $\sin\sphericalangle(u,v) \neq 0 \Rightarrow |w| \neq 0$ $\Rightarrow u, v, w$ са некомплан. $\Rightarrow$ образуват базис и $\Rightarrow$ можем да говорим за ориентация на базиса. Двете възможности за w са противопол. в-ри $\Rightarrow$ двата възм. базиса са противопол. ориент. $\Rightarrow$ точно един от тях е полож. ориентиран $\Rightarrow u \times v$ е еднозначно опред., т.е. 2) е коректна.

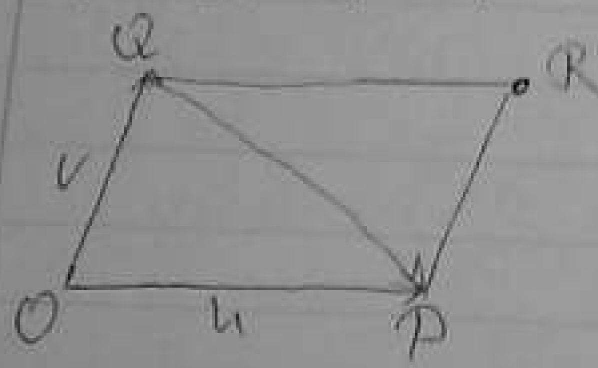


2) Ако u и v са колинеарни, ако ненулеви, то $\sphericalangle(u,v) = 0$ или $\pi \Rightarrow \sin\sphericalangle(u,v) = 0 \Rightarrow |u \times v| = 0 = |u||v|\sin\sphericalangle(u,v)$. От деф. $\Rightarrow$

Т-ма 1 u и v са колин $\Leftrightarrow u \times v = 0$

Т-ма 2 Нека u и v са неколинеарни в-ри. Тогава лицето на успоредника построен в/у тях е $|u \times v|$, а лицето на триъгълника, построен в/у тях е $\frac{1}{2}|u \times v|$.

Док. Нека O е произв. т., P, Q.
$\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, R: $OPRQ$ е успоредник.
(т.е. R: $\overrightarrow{PR} = v$)



$OPRQ$ е успоредник, построен в/у u и v,
$S_{OPRQ} = |OP||OQ|\sin\sphericalangle POQ = |u||v|\sin\sphericalangle(u,v) = |u \times v|$

OPQ е триъгълник построен в/у u и v и
$S_{OPQ} = \frac{1}{2} S_{OPRQ} = \frac{1}{2}|u \times v|$

Т-ма 3 Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е ортонорм. полож. коорд. с-ма и спрямо нея в-рите u и v имат коорд.: $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. Тогава коорд. на $u \times v$ спрямо K са

$$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Док. Нека w е в-рът с горните координати (т.е. детерминантите). Ще док., че $w = u \times v$

Нека $u \parallel v$

Ако $u = 0$, то $w = 0 = u \times v$

Ако $u \neq 0$, то $\exists \lambda \in \mathbb{R} : v = \lambda u$

$\Rightarrow y_i = \lambda x_i, \quad i = 1,2,3$

$\Rightarrow w = 0 = u \times v$

$\Rightarrow$ ако $u \parallel v$ имаме $w = u \times v$

Нека u и v не са колинеарни

$$|w|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 =$$

$$= |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2 = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2\cos^2\sphericalangle(u,v) =$$

$$= |u|^2|v|^2(1 - \cos^2\sphericalangle(u,v)) = |u|^2|v|^2\sin^2\sphericalangle(u,v)$$

$$\Rightarrow |w| = |u||v|\sin\sphericalangle(u,v) = |u \times v|.$$

В частност $w \neq 0$, защото $|w| = \underbrace{|u \times v|}_{\neq 0,\ \text{защото } u \text{ и } v \text{ не са колин.}} > 0$

$$\langle u, w\rangle = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

Аналог. $\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow u, v \perp w$

u, v, w образуват базис, защото $w \perp u, v$ и $w \neq 0$

Имаме, че $K = Oe_1e_2e_3$ е полож. ориентирана

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ е полож. ориент.

=> трябва да док., че (u,v,w) е еднакво ориент. с (e_1,e_2,e_3), т.е. $\det(T)>0$, където T е матр. на прехода от (e_1,e_2,e_3) към (u,v,w)

Имаме

$$T=\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & x_2y_3-x_3y_2 \\ x_2 & y_2 & x_3y_1-x_1y_3 \\ x_3 & y_3 & x_1y_2-x_2y_1 \end{array}\right)} \\ \text{коорд. на } u & \text{коорд. на } v & \text{коорд. на } w \end{array}$$

$\det(T)=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=$
$=|w|^2>0 \Rightarrow (u,v,w)$ е полож. ориентиран базис $\Rightarrow w=u\times v$

Начин за помнене

$$u\times v=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}=(\quad)e_1+(\quad)e_2+(\quad)e_3$$

...... коорд. е минорът, който се получава чрез задраскване на i-тия ред, който при $i=2$ се взима с "-" (или винаги с "+", но тогава се започва от следващия ред като се пише минора)

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Т-ма 4 Векторното произведение има следните св-ва:

1) $v\times u=-u\times v$ (антисиметричност)

2) $(u+v)\times w=u\times w+v\times w$ (адитивност по двата аргумента)

3) $(\lambda u)\times v=\lambda\, u\times v$, $u\times(\lambda v)=\lambda\, u\times v$ за $\lambda\in\mathbb{R}$ (хомогенност по двата аргумента)

<u>Док.</u> Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е ортоном. полож. коорд. с-ма и нека спрямо K $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$

$$\Rightarrow u\times v\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$v\times u\left(\begin{vmatrix} y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}\right) -$$

$$- \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow v\times u = -u\times v$

2) $u+v\,(x_1+y_1,\ x_2+y_2;\ x_3+y_3)$

$$(u+v)\times w\left(\underbrace{\begin{vmatrix} x_2+y_2 & z_2 \\ x_3+y_3 & z_3 \end{vmatrix}}, \begin{vmatrix} x_3+y_3 & z_3 \\ x_1+y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1+y_1 & z_1 \\ x_2+y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \ldots$$

$\Rightarrow (u+v)\times w = u\times w + v\times w$

$u\times(v+w) = -(v+w)\times u = -v\times u - w\times u = u\times v + u\times w$

3) $\lambda u\,(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$$\Rightarrow (\lambda u)\times v\left(\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda x_2 & y_2 \\ \lambda x_3 & y_3 \end{vmatrix}}_{\shortparallel}, \begin{vmatrix} \lambda x_3 & y_3 \\ \lambda x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda x_1 & y_1 \\ \lambda x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\lambda \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

$\Rightarrow (\lambda u)\times v = \lambda . u\times v$

$u \times (\lambda v) = -(\lambda v) \times u = -\lambda\, v \times u = \lambda\, u \times v$

Зад. 2) и 3) означ., че векторното произв. е линейно по двата си аргумента (билинейно) т.е. $(\lambda u + \mu u') \times w = \lambda\, u \times w + \mu\, u' \times w$ и аналог. по втория арг.

Смесено произведение

Считаме, че е фикс. единична отсечка и ориентация в A_3.

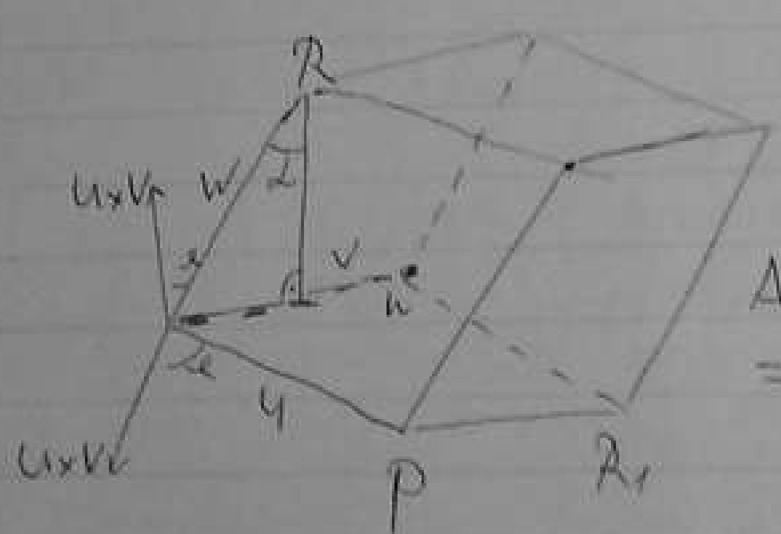
Деф. Смесеното произведение на в-рите u, v, w (в този ред) се нар. числото $\langle u, v, w \rangle := \langle u \times v, w \rangle \in \mathbb{R}$

$uvw \; (u, v, w)$

Т-ма 1

Нека в-рите u, v, w не са компланарни. Тогава обемът на паралелепипеда построен в/у тях е $|\langle u, v, w \rangle|$, а обемът на тетраедъра построен в/у тях е $\frac{1}{6} |\langle u, v, w \rangle|$.

Док. Нека O е произв. точка, PQR: $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v$, $\overrightarrow{OR} = w$



$V_{парал} = S_{OPRQ} \cdot h$

$S_{OPRQ} = |u \times v|$

$h = |w| \cos \alpha$

Нека $\varphi = \angle(u \times v, w)$

Ако $\varphi \le \pi/2$, то $\alpha = \varphi$

$\Rightarrow \cos \alpha = \cos \varphi > 0$

Смесено произведение

Деф. Смесено произв. на в-рите се нар. числото
$\langle u,v,w\rangle := \langle u\times v, w\rangle \in \mathbb{R}$

Т-ма 1 Нека $Ox_1x_2x_3$ е полож. ориентирана ортонорм. коорд. с-ма, спрямо нея в-рите u,v,w имат коорд.:
$u(x_1,x_2,x_3)$, $v(y_1,y_2,y_3)$, $w(z_1,z_2,z_3)$. Тогава

$$\langle u,v,w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Док. Развиваме по 3-ти стълб. и получаваме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot z_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\cdot z_2 +$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot z_3 = \langle u\times v, w\rangle = \langle u,v,w\rangle$$

Т-ма 3 Векторите u,v,w са компланарни
$\Leftrightarrow \langle u,v,w\rangle = 0$

Док. Нека K е полож. ориент. ортонорм. коорд. с-ма. Тогава u,v,w са компланарни $\overset{\text{усл. за компл.}}{\Leftrightarrow}$ детерм. от коорд. на u,v,w спрямо K е $0 \Leftrightarrow \langle u,v,w\rangle = 0$

Т-ма 4 Смесеното произведение има следните св-ва:

1) $\langle u,v,w\rangle = -\langle v,u,w\rangle = -\langle w,v,w\rangle = -\langle u,w,v\rangle$ (антисиметричност)

2) $\langle u,v,w\rangle = \langle v,w,u\rangle = \langle w,u,v\rangle$ (цикличност)

3) $\langle u_1+u_2, v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle$ | адитивност
$\langle u, v_1+v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle$ | по трите
$\langle u, v, w_1+w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle$ | аргумента

4) $\lambda\cdot\langle u, v, w\rangle = \langle \lambda u, v, w\rangle = \langle u, \lambda v, w\rangle = \langle u, v, \lambda w\rangle$ за $\lambda \in \mathbb{R}$
хомогенност по трите аргумента

Док. Следва от св-вата на детерм. или от св-вата на векторното и скаларното произведение (с изкл. на последните две св. в 4))

Заб. От 3) и 4) => смес. произв. е линейно по трите си аргум. (т.е. трилинейно) т.е. $\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w\rangle = \lambda_1\langle u_1, v, w\rangle + \lambda_2\langle u_2, v, w\rangle$ и аналог. за другите два аргумента

Т-ма 5 Нека K е произв. афинна коорд. с-ма и спрямо нея в-рите u, v, w имат коорд. $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава

$$\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \langle e_1, e_2, e_3\rangle$$

Док. Имаме $u = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot e_i$, $v = \sum_{j=1}^{3} y_j e_j$, $w = \sum_{k=1}^{3} z_k \cdot e_k$

От линейността по трите аргумента получ.
$\langle u, v, w\rangle = \langle \sum x_i e_i, \sum y_j e_j, \sum z_k e_k\rangle = \sum x_i y_j e_k \langle e_i, e_j, e_k\rangle$
Ако някои два от e_i, e_j, e_k съвпадат, то от антисиметр. => $\langle e_i, e_j, e_k\rangle = 0$ => остават събираемите, за които e_i, e_j, e_k са различни и по св-вата 1) и 2) от т-ма 4 $\overset{!}{=>}$ $\langle e_i, e_j, e_k\rangle$ се изразява чрез $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ =>
=> получ. $\langle u, v, w\rangle = (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1) \cdot \langle e_1, e_2, e_3\rangle$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

Общи бележки за уравнения и множество

Нека $X < A_n$ е множество и $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна коорд. с-ма в A_n

1) Нека M е някакво множ. и $f, g : \mathbb{R}^n \to M$

Ако $P(x_1, \dots, x_n) \in X \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$, то казваме, че $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ е уравнение на X спрямо K и пишем $X : f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$

2) Нека Λ е някакво множ. и $h = (h_1, \dots, h_n) : \Lambda \to \mathbb{R}^n$

Ако $P(x_1, \dots, x_n) \in X \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x_1 = h_1(\lambda), \dots x_n = h_n(\lambda)$, то казваме, че множ. X има скаларни параметрични уравнения $x_1 = h_1(\lambda), \dots, x_n = h_n(\lambda)$ и пишем

$$X : \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \Lambda$$

Понякога се иска това λ да е единствено

3) Нека Λ е множество и $\tilde{h} : \Lambda \to V_n$ (в-ри в A_n)

За т. $P \in A_n$ озн $r = \overrightarrow{OP}$, ч се нарича радиус в-р на P относно K

Ако $P \in X \Leftrightarrow r = \tilde{h}(\lambda)$ за някое $\lambda \in \Lambda$, то казваме, че X има векторно параметрично ур. $r = \tilde{h}(\lambda)$ и пишем $X : r = \tilde{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$

4) Връзка между векторно параметрично и скаларни параметрични ур.

Знаем, че коорд. изобр. $\boxed{\begin{matrix} \varkappa : V_n \to \mathbb{R}^n \text{ е биекция} \\ v(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{matrix}}$

Нека X има вект парам. ур. $X : r = \tilde{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$

Деф. $h := \varkappa \circ \tilde{h} : \Lambda \to \mathbb{R}^n$

Знаем, че P и $r = \overrightarrow{OP}$ имат едни и същи

коорд. спрямо K
т.е. $P(x_1,\dots,x_n) \in X \iff \exists \lambda \in \Lambda: r = \tilde{h}(\lambda) \iff \exists \lambda \in \Lambda\ x(r) = x(\tilde{h}(\lambda)) \iff$
$(x_1,\dots,x_n) = h(\lambda) = (h_1(\lambda),\dots,h_n(\lambda))$
$\iff \exists \lambda \in \Lambda\ x_1 = h_1(\lambda),\dots, x_n = h_n(\lambda) \iff X$ има скаларно парам. ур.

$$X: \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \Lambda$$

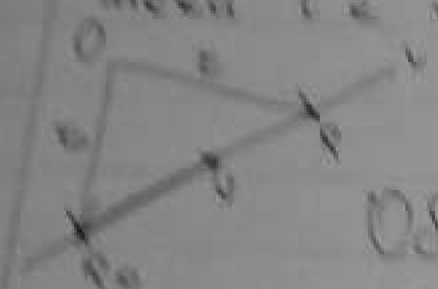
(т.е. записвайки векторното парам. ур. по координатите получ. скаларни парам. ур.)
Обратно ако X има скал. парам. ур.

$$X: \begin{cases} x_1 = h_1(\lambda) \\ \vdots \\ x_n = h_n(\lambda) \end{cases}, \text{ то}$$

полаг. $\tilde{h} = \varkappa_0^{-1} h$ и аналог. на по-горе получ. че X има вект. парам. ур. $X: r = \tilde{h}(\lambda), \lambda \in \Lambda$

Параметрични уравнения на права, лъч и отсечка

① Векторно парам. ур.
Нека l е права, т. $P_0 \in l$, в-р $v \parallel l$, $v \neq 0$.



Ако $P \in l \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel l \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v \Rightarrow$
$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda v$
Обратно Ако $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda v \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v$
$\Rightarrow P \in l \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda v$
Нека K е коорд. с-ма с начало O. Нека r и r_0 са радиус-векторите на P и P_0, т.е. $r = \overrightarrow{OP}$, $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = r - r_0 \Rightarrow P \in l \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: r - r_0 = \lambda v$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: r = r_0 + \lambda v \Rightarrow$ правата l има спрямо K векторно парам. ур.

(1) $l: r = r_0 + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Заб. Всяка права има безброй много вект. парам. ур., защото $P_0 \in l$ и $v \parallel l$ могат да се изберат по безбройно много начини

② Скаларно парам. ур. за права

Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма, l е права, т. $P_0 \in l$, в-рът $v \parallel l$, $v \neq 0$ и коорд. за P_0 и v спрямо K са $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(a, b, c)$

Ако $P(x,y,z)$, то $r = \overrightarrow{OP}$ има коорд. като P, а радиус-вектора $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ има коорд. като P_0.

Написвайки вект. парам. ур. (1) по коорд. получаваме, че има скал. парам. ур.

$$(2) \quad l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

③ Параметр. ур. за права през две точки

Нека $P_0 \neq P_1$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$\Rightarrow$ P_0P_1 се определя от т. P_0 и в-ра $v = \overrightarrow{P_0P_1} \neq 0$. Имаме $\overrightarrow{P_0P_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

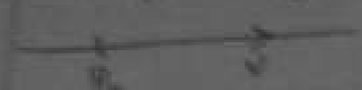
От (2) получаваме, че P_0P_1 има парам. ур.:

$$(3) \quad P_0P_1: \begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

или еквив.

$$(4) \quad P_0P_1: \begin{cases} x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z = (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

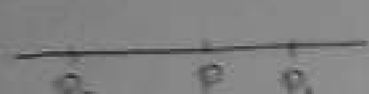
4. Парам. ур. на лъч



Нека a е лъч с нач. P_0, и който $a \uparrow\uparrow v$
$\Rightarrow P \in a \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda v$, къд. $\lambda \geq 0$
$\Rightarrow a$ има парам. ур. (2), но с $\lambda \geq 0$ (за затв. лъч)
$\lambda > 0$ (за отв. лъч)

За лъча $P_0P_1 \rightarrow$ аналог. имаме ур. (3) или (4), но с $\lambda \geq 0$ (за затв. лъч) или $\lambda > 0$ (за отв. лъч)

5. Парам. ур. на отсечка
Нека $P_0 \neq P_1$



$P \in$ отс. $P_0P_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{P_0P_1}$, където $\lambda \in [0,1]$ - за затв. отс. и $\lambda \in (0,1)$ за отв. отс.
$\Rightarrow$ отс. P_0P_1 има ур. (3) или (4), но с $\lambda \in [0,1]$ - за затв. от. или $\lambda \in (0,1)$ - за от. отс.

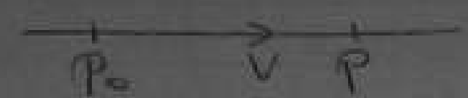
Общо уравнение на права в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна коорд. система в равн.

Т-ма 1. 1) Всяка права l в равнината има спрямо K уравн. от вида
$$Ax + By + C = 0, \text{ където } (A, B) \neq (0,0)$$

2) Обратно: всяко ур. от вида
$$Ax + By + C = 0, \text{ където } (A, B) \neq (0,0),$$
е ур. спрямо K на някоя права

Док: 1) Нека $P_0(x_0,y_0) \in l$, в-р $v(a,b) \parallel l$, $v \neq 0$



Както при вект. парам. ур.

Тогава $P(x,y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel v$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

коорд. на $\overrightarrow{P_0P}$ — коорд. на v

$\Leftrightarrow bx - ay + (-bx_0 + ay_0) = 0$

Озн. $A := b$, $B := -a$, $C := bx_0 + ay_0$

$\Rightarrow P(x,y) \in l \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$

$\Rightarrow l$ има ур. $Ax + By + C = 0$

При това $(A,B) = (b,-a) \neq (0,0)$, защ. $v(a,b) \neq 0$

2) $Ax + By + C = 0$ има решение, защото $(A,B) \neq (0,0)$

(ако напр. $A \neq 0$, то ур. е еквивал. на $x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$ и едно реш. е $y=0, x=-\frac{C}{A}$)

Нека (x_0,y_0) е едно реш.

$\Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow C = -Ax_0 - By_0$

Нека P_0 е т. с коорд. (x_0,y_0) и в-р $v(-B,A)$

От това, че $(A,B) \neq (0,0) \Rightarrow v \neq 0$

Нека l е правата определена от т. P_0 и в-р v

От док. на 1) $\Rightarrow l: bx - ay + (-bx_0 + ay_0) = 0$

където (a,b) са коорд. на v, $\Rightarrow$

$\Rightarrow l: Ax + By + \underbrace{(-Ax_0 - By_0)}_{= C} = 0$

$\Rightarrow l: Ax + By + C = 0$

<u>Деф</u> Уравнение на l спрямо K от вида $Ax+By+C=0$ се нар. общо уравнение на l спрямо K

<u>Зад</u> Автоматично имаме, че $(A,B) \neq (0,0)$, защото ако $(A,B)=(0,0)$, то или $C=0 \Rightarrow$ ур. е $0=0$, т.е. всички точки от равн. го удовл. $\Rightarrow$ е ур. на цялата равн., а не на l, или $C \neq 0$ $\Rightarrow$ урав. е $C=0$ - няма реш. $\Rightarrow$ е урав. на $\emptyset$, а не на l
празно множество

<u>Тв 1</u> 1) Правата l, която е опр. с т. $P_0(x_0, y_0)$ и ненулевия в-р $v(a,b)$, има спрямо K общо ур.
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

2) Нека $P_0(x_0,y_0)$ и $P_1(x_1,y_1)$ са две различни точки. Тогава правата P_0P_1 има ур.
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0$$
или еквив.
$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Док</u>
1) това го док. в док. на 1) на Т-ма 1
2) Първото уравнение следва от първата част (1) с $v = \overrightarrow{P_0P_1}(x_1-x_0, y_1-y_0)$
Второто ур. следва от първото,

защото
$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & x_0 & x_1-x_0 \\ y-y_0 & y_0 & y_1-y_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}$$

Тв 2 Нека l има спрямо K общо ур. $Ax+By+C=0$. Тогава:

1) в-рът v с коорд. $v(-B,A)$ е колинеарен с l;

2) в-рът u с коорд. $u(a,b)$ е колин. с l $\iff Aa+Bb=0$

Док. 1) това го док. в док. на 2) на Т-ма 1

2) Тъй като $v \neq 0$ и $v \parallel l$, то $u \parallel l$
$$\iff u \parallel v \iff \begin{array}{cc} & \\ \begin{vmatrix} a & -B \\ b & A \end{vmatrix} & = 0 \\ \text{коорд. на } u \quad \text{коорд. на } v & \end{array}$$

$\iff Aa+Bb=0$

Взаимно положение на прави в равнината

Нека $K=Oxy$ да е афинна коорд. с-ма

Т-ма 1 Нека правите l_1 и l_2 имат спрямо K общи ур.

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $\quad l_2: A_2x+B_2y+C_1=0$

Озн. $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$

Тогава:

1) $l_1 = l_2 \iff r(\tilde{A}) = 1$ $($и $\Rightarrow$ и $r(A)=1) \iff \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$

2) $l_1 \parallel l_2 = 2 \iff \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1 , B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$

3) l_1 и l_2 са пресичащи се $\iff r(A)=2$ $($и $\Rightarrow$ и $r(\tilde{A})=2) \iff \det(A) \neq 0 \iff \nexists \lambda \in \mathbb{R}$:

$: A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$

Първата част на тази т-ма може да формулира ~~по следния начин~~ и така.

<u>Т 2</u> Нека правата l има спрямо K общо ур. Тогава всяко общо ур. на l спрямо K има вида $\lambda(Ax+By+C)=0$, където $\lambda \neq 0$, и обратното всяко ур. от ~~вид~~ този вид е общо ур. на l спрямо K.

~~Пуж~~ <u>Полуравнини</u>

Нека $K = Oxy$ е афинна коорд. с-ма в равнината

<u>Т-ма</u> Нека правата l има спрямо K общо ур.

$Ax+By+C=0$ и нека т. P_1 и P_2 имат коорд. $P_1(x_1,y_1)$, в $P_2(x_2,y_2)$

Озн. $L(x,y) = Ax+By+C$

Тогава:

1) P_1 и P_2 са от различни отворени полуравн. отн. $l \iff L(x_1,y_1)\,L(x_2,y_2)<0$

(т.е. когато $L(x_1,y_1)$ и $L(x_2,y_2)$ имат различни знаци)

2) P_1 и P_2 са от една и съща отворена полуравн. отн. l

$\iff L(x_1,y_1)\,L(x_2,y_2) > 0$

(т.е. когато $L(x_1,y_1)$ и $L(x_2,y_2)$ имат еднакви знаци)

<u>Заб</u> За затв. полуравн. усл. са ≤ 0 и ≥ 0 съотв.

<u>Сл.</u> Нека правата l има спрямо K ур.

$l: L(x,y) = Ax + By + C = 0.$

Тогава отворените полуравнини относно l са множествата $\{P(x,y) : L(x,y) > 0\}$ и $\{P(x,y) : L(x,y) < 0\}$

<u>Заб</u> Затв. полуравн. се задават аналог. с ≥ 0 и ≤ 0

<u>Нормално уравнение на права в равнината</u>

<u>Деф</u> Нека l е права. Всеки вектор, който е перпендикулярен на l (т.е. перпендикулярен е на в-рите, колинеарни с l) се нар. нормален вектор за l.

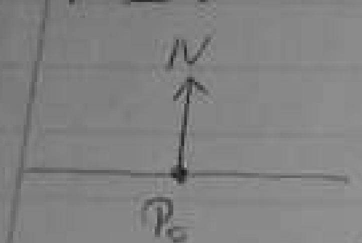
Оттук нататък работим в равнината. Нека $K = Oxy$ е ортонормирана коорд. с-ма в равн.

<u>Тв.1</u> Нека l има спрямо K уравн.

$Ax + By + C = 0$. Тогава в-рът N с коорд.

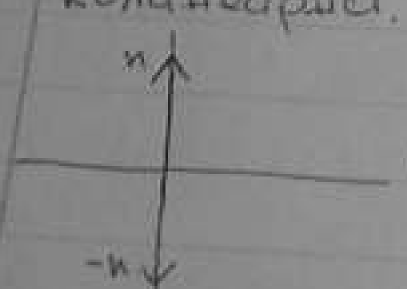
(A, B) е нормален за l.
Док
Знаем, че $v(-B, A) \parallel l$ и $v \neq 0 \Rightarrow N \perp l \Leftrightarrow N \perp v$
$\Leftrightarrow \langle N, v \rangle = 0$
$\langle N, v \rangle = A(-B) + BA = 0$
$\Rightarrow N \perp v \Rightarrow N$ е норм за l

Тв 2 Нека т. P_0 и ненулевият в-р N имат спрямо K коорд. $P_0(x_0, y_0)$, $N(A, B)$. Тогава правата l през P_0, която е перпенд. на N, има спрямо K ур.
$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$
Док
Очев. е, че l е еднозн. опред. с усл. $P_0 \in l$, $N \perp l$.



Нека m е правата с ур.
т. $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$
(това е общо ур. на правата, защото $(A, B) \neq (0, 0)$, защото $N \neq 0$
Очев. $P_0 \in m$, защото $A(x_0-x_0) + B(y_0-y_0) = 0$
а $N(A, B) \perp m$ по тв 1 $\Rightarrow m = l$

Нека l е права в равн.
Тогава всички нормални за l в-ри са колинеарни.



$\Rightarrow \exists$ точно два единични норм. в-ри за l

Ако $N(A, B)$ е ненулев норм в-р за l, то те са $n = \frac{N}{|N|}$ и $-n$

т.е. $n\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ и $-n\left(-\frac{A}{\sqrt{}}, -\frac{B}{\sqrt{}}\right)$

<u>Деф.</u> Общо урав на правата l спрямо K, в което нормалният в-р с коорд. коефициентите пред x и y е единичен се нар. нормално уравнение на l спрямо K ~~та ака~~

$\Rightarrow$ ако $l: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, то това е норм. ур. $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

<u>Тв. 3</u> Всяка права l има спрямо K точно две нормални уравнения. Ако l има общо ур.

$Ax + By + C = 0$, то те са $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ и

$$-\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

<u>Док</u> Нека $l: Ax + By + C = 0$. Тогава произв. общо ур. на l има вида $\lambda(Ax + By + C) = 0$, където $\lambda \neq 0$

$(\lambda A)x + (\lambda B)y + \lambda C = 0$

Това е норм. ур. $\Leftrightarrow (\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = 1$$

$$\lambda^2 (A^2 + B^2) = 1$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{A^2+B^2}}$$

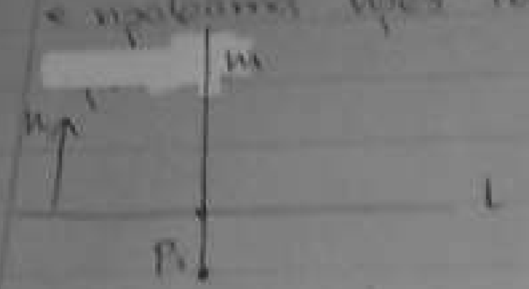
$\Rightarrow l$ има точно две норм. ур. и те се задават от ф-ите в твърд.

Приложение на нормативността.

1) Разстояние от точка до права

Тв-е Нека правата l има спрямо К нормално ур. $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, и нека т. P_0 има спрямо К коорд. (x_0, y_0). Озн. $L(x,y) := \alpha x+\beta y+\gamma$. Тогава разстоянието $d(P_0, l)$ от P_0 до l е $d(P_0, l) = |L(x_0,y_0)|$

Д-во Нека n е норм. в-р с коорд. (α, β). Нека m е правата през P_0, която е $\perp$ на l



Нека $m \cap l = P_1(x_1, y_1)$

$P_1P_0 \perp l \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n$

$\Rightarrow d(P_0, l) = |P_0P_1| = |\overrightarrow{P_1P_0}| =$

$= |\lambda n| = |\lambda||n| = |\lambda|$

Имаме $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n \Rightarrow x_0 - x_1 = \lambda\alpha,\ y_0 - y_1 = \lambda\beta$

$x_1 = x_0 - \lambda\alpha$

$y_1 = y_0 - \lambda\beta$

$P_1 \in l \Rightarrow \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0$

$\Rightarrow \alpha(x_0 - \lambda\alpha) + \beta(y_0 - \lambda\beta) + \gamma = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)} - \lambda\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{=1} = 0$

$\Rightarrow L(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \lambda = L(x_0, y_0)$

$\Rightarrow d(P_0, l) = |L(x_0, y_0)|$

Зав. Числото $\sigma(P_0, l) := L(x_0, y_0)$ се нарича ориент. разст. от P_0 до l. Поради $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda n =$

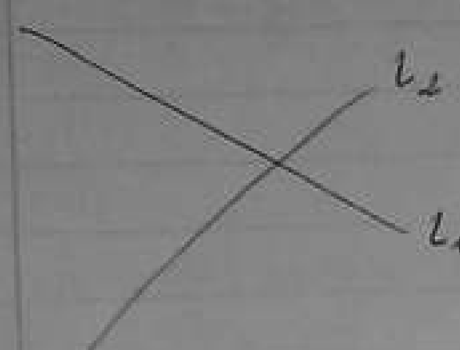
$\sigma(P_0, l)\, n = L(x_0, y_0) = \lambda$

$\Rightarrow \sigma(P_0, l) > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_0}$ сочи в полур. в която сочи n

$d(P_0, l) < 0 \iff \overrightarrow{P_1P_0}$ сочи в полупр. в която сочи $-n$

Приложения на норм. ур. на права

2) Ъгъл м/у две прави



Под ъгъл м/у две прави l_1 и l_2 се разбира по-малкия от двата ъгъла, които сключват.

Нека N_1 и N_2 са норм. в-ри за l_1 и l_2

Ако $\angle(N_1,N_2) \le \pi/2$, то $\angle(l_1,l_2) = \angle(N_1,N_2)$

Ако $\angle(N_1,N_2) \ge \pi/2$, то $\angle(l_1,l_2) = \pi - \angle(N_1,N_2)$

$\Rightarrow \cos\angle(l_1,l_2) = |\cos\angle(N_1,N_2)|$

Нека l_1 и l_2 имат норм. ур.

$l_1: \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$, $l_2: \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$

$\Rightarrow n_1(\alpha_1,\beta_1)$ е един. норм. в-р за l_1

$n_2(\alpha_2,\beta_2)$ е един. норм. в-р за l_2

$\Rightarrow \cos\angle(l_1,l_2) = |\cos\angle(n_1,n_2)| = \left|\frac{\langle n_1,n_2\rangle}{\underbrace{|n_1|}_{=1}\underbrace{|n_2|}_{=1}}\right| = |\langle n_1,n_2\rangle|$

$= |\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2|$

$\Rightarrow \angle(l_1,l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2|$

Декартово уравнение на права в равнината

Нека $K=Oxy$ е аф. коорд. с-ма

Нека l е права и нека $Ax+By+C=0$ е общо ур. на l

$l \parallel Oy \iff l \parallel e_2(0,1)$

$\iff A.0 + B.1 = 0 \iff B = 0$

Нека l не е усп. на Oy $\Rightarrow B \neq 0$

$\Rightarrow$ ур. на l е еквив. на $y = -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}$

Озн. $k = -\frac{A}{B}$, $m = -\frac{C}{B}$

$\Rightarrow l: y = kx + m$

Ур. от тоя вид се нар. декартово ур. на l спрямо K и k се нар. ъглов коефициент

Нека $v(a,b) \parallel l$

Имаме $l: -kx + y - m = 0$ - общо ур.

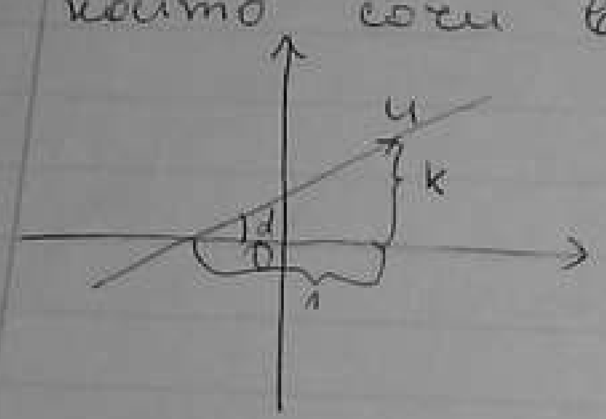
$\Rightarrow v(a,b) \parallel l \iff -ka + b = 0$

$\Rightarrow$ ако $v(a,b) \neq 0$ и $v \parallel l \Rightarrow b = ka \Rightarrow k = \frac{b}{a}$

(не може $a = 0$, защ. тогава и $b = k.a = 0 \Rightarrow v = 0$)

Нека $K = Oxy$ е ортонорм.

Озн. $\alpha = \angle(\vec{Ox}, c)$, кдд. c е лъчът в/у l, който сочи в горната полуравнина

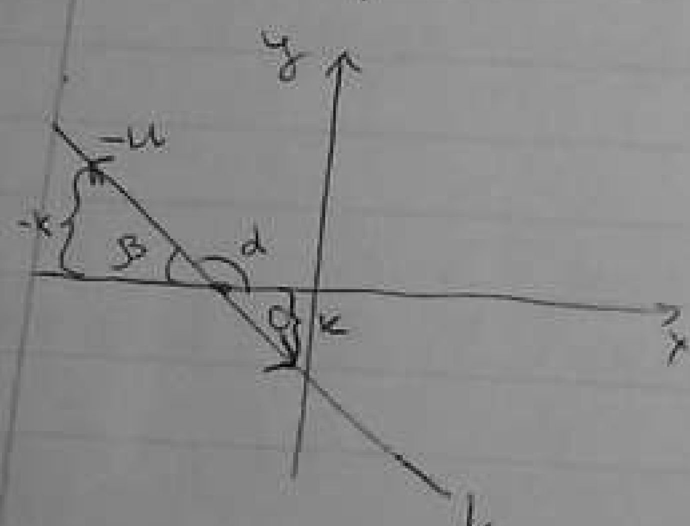


В-р, колин. с l е $u(1,k)$

$u - u(-1,-k)$

Ако $k > 0$, то $u(1,k) \uparrow\uparrow c$

$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{k}{1} = k$



Ако $k < 0$ $-u(-1,-k) \uparrow\uparrow c$

$\Rightarrow \alpha = \pi - \beta$

$\Rightarrow tg\,\alpha = -tg\,\beta = -\frac{-k}{1} = k$

Ако $k = 0$, то все едно кой лъч ще се вземе, защото ъглите са 0 и π и в двата случая $tg\alpha = 0 = k$ => винаги $tg\alpha = k$

Параметрични уравнения на равнина

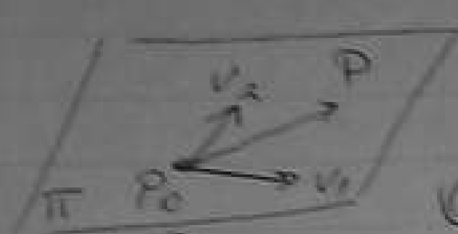
1) Векторно парам. уравнение

Нека π е равнина, т. $P_0 \in \pi$ и неколин. в-ри v_1 и v_2 са компланарни с π

т. $P \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{P_0P}$ е компланарен с π

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P}, v_1$ и v_2 са компланарни

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$



Обратно: ако $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, то $\overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компл. $\Rightarrow \overrightarrow{P_0P}$ е компланарен.

$\Rightarrow P \in \pi \iff \exists \lambda_1, \lambda_2: \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

Нека K е афинна коорд. с-ма с нач. т. O

Озн. с r и r_0 радиус. в-рите на P и P_0, т.е. $r = \overrightarrow{OP}$, $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = r - r_0$

$\Rightarrow P \in \pi \iff \exists \lambda_1, \lambda_2: r - r_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2: r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\Rightarrow$ π има спрямо K векторно парам. ур.

(1) $\pi: r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) Скаларни параметрични уравнения

Нека $K = Oxyz$ - аф. коорд. система, т. $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, неколин. в-ри $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни с π

Нека т. $P(x, y, z)$

Радиус в-рите $r(x, y, z)$, $r_0(x_0, y_0, z_0)$. Скалар парам. уравнения се получават като се запише вект. парам. ур. покоординатно

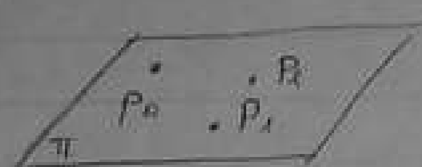
(2)

$$\pi = \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_1 \end{cases}$$

коорд на точка ↑ | коорд на 1в-р ↑ | коорд на 2в-р ↑

3. Параметр уравнения на равнина през три точки

Нека т. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ са некол. и π е равн. опред. от тях



Общо уравнение на равнина

$K = Oxyz$ - афинна коорд. с-ма

Т.1 1) Всяка равнина има спрямо K ур. от вида $Ax + By + Cz = 0$, където $A, B, C \neq 0$

2) Всяко ур. от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ където $A, B, C \neq 0$ е уравнение спрямо K на някоя равн. π

Деф. Ур. на равн. π от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ се нар. общо уравнение на π.

Т.2 Нека равн. π има спрямо K общо ур. $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава в-рът $u(a, b, c)$ е компланарен с $\pi \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$

Док. Нека $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Нека $P_1(x_1, y_1, z_1)$: $\overrightarrow{P_0P_1} = u$. Имаме $\overrightarrow{P_0P_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ $\Rightarrow x_1 - x_0 = a$, $y_1 - y_0 = b$, $z_1 - z_0 = c \Rightarrow x_1 = x_0 + a$, $y_1 = y_0 + b$, $z_1 = z_0 + c$

u е компланарен с $\pi \Leftrightarrow P_1 \in \pi \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x_0 + a) + B(y_0 + b) + C(z_0 + c) + D = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (Aa + Bb + Cc) = 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$

Декартово уравнение на равнина

Нека π е равн. с общо ур. $Ax + By + Cz + D = 0$. $\pi \parallel Oz \Leftrightarrow \pi \parallel e_3(0, 0, 1) \Leftrightarrow A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Нека π не е усп. на $Oz \Rightarrow C \neq 0 \Rightarrow$ ур. на π е еквив. на $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$

Озн. $k = -\frac{A}{C}$, $l = -\frac{B}{C}$, $m = \frac{-D}{C} \Rightarrow \pi : z = kx + ly + m$.

Ур. на π от този вид се нар. декартово ур. на π спрямо K.

Взаимно положение на две равнини

Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма.

Т-ма 1 Нека равн. π_1 и π_2 имат спрямо K общи ур.

$\pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Озн. $A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$

Тогава:

1) $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = 1$ $(\Leftrightarrow)$ и $r(A) = 1 \Leftrightarrow$
$\exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1$

2) $\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1,\ r(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1,$
$B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$

3) π_1 и π_2 са пресичащи се $\Leftrightarrow r(A) = 2$ (и $\Rightarrow$ и $r(\tilde{A}) = 2$)
$\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R} : A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$

<u>Док.</u>

Мн-вото от пресечните точки на π_1 и π_2 се състои от точки, чиито коорд. са реш. на с-мата:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Имаме, че A е матр. на с-мата, а $\tilde{A}$ е разш. матр. на с-мата. Т-ма (Руше) с-мата има реш. $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A})$.

$A \neq 0$, защото първия ред е $\neq 0$, защото $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ е ур. на π_1 (дори и втория ред е $\neq 0$) $\Rightarrow r(A) \geq 1$

A е $2 \times 3 \Rightarrow r(A) \leq 2$

$\tilde{A}$ е $2 \times 4 \Rightarrow r(\tilde{A}) \leq 2$. A е подм. на $\tilde{A} \Rightarrow r(A) \leq r(\tilde{A}) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \leq 2 \Rightarrow$ имаме следните възможни вз-ти:

$r(A) = 1,\ r(\tilde{A}) = 1$	Ще док., че първите две възм. за равн. съответ-	
$r(A) = 1,\ r(\tilde{A}) = 2$	стват на първите две възм. за ранговете	
$r(A) = 2,\ r(\tilde{A}) = 2$	$\Rightarrow$ третата възм. за равн. съответства на	

третите за ранговете. $\pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ с-мата няма решение $\Leftrightarrow r(A) \neq r(\tilde{A}) \Leftrightarrow r(A) = 1,\ r(\tilde{A}) = 2$

Ще док. 1). Нека $r(\tilde{A}) = 1$ (и $\Rightarrow$ от $1 \leq r(A) \leq r(\tilde{A}) \Rightarrow r(A) = 1$)
$\Rightarrow$ двата реда на $\tilde{A}$ са лин. зав. Видяхме, че първият ред е ненулев (защото първият ред на $\tilde{A}$ е ненулев) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ втория ред $= \lambda \cdot$ (първия) т.е. $\exists \lambda : A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,$
$D_2 = \lambda D_1$. При това $\lambda \neq 0$, защото ако $\lambda = 0$, то
$A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = 0$ и $\Rightarrow A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ не е ур. на $\pi_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 : \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$ не е ур. на $\pi_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi_2 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \pi_1$. Обратно: Нека $\pi_1 = \pi_2$
$\Rightarrow$ Ако $P \in \pi_1 \Rightarrow P \in \pi_2 \Rightarrow$ удовл. ур. на π_2. Имаме $(A_1, B_1, C_1) \neq$
$(0,0,0)$. Нека напр. $A_1 \neq 0 \Rightarrow$ ур. на π_1 е еквив. на

$$x = -\frac{B_1}{A_1},\ y = \frac{-C_1}{A_1},\ z = -\frac{D_1}{A_1}$$

$\Rightarrow \forall y, z$ т. $P\left(\frac{-B_1}{A_1}y - \frac{C_1}{A_1}z - \frac{D_1}{A_1}, y, z\right) \in \pi_1 \Rightarrow P \in \pi_2 \Rightarrow$ удовл. ур. на π_2

$$\Rightarrow \forall y, z \quad A_2\left(-\frac{B_1}{A_1} - \frac{C_1}{A_1}z - \frac{D_1}{A_1}\right) + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall y, z \quad \left(B_2 - \frac{A_2}{A_1} \cdot B_1\right)y + \left(C_2 - \frac{A_2}{A_1} \cdot C_1\right) \cdot z + \left(D_2 - \frac{A_2}{A_1} D_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{A_2}{A_1} B_1,\ C_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot C_1,\ D_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot D_1$$

Озн. $\lambda = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1$

$\Rightarrow$ двата реда на $\tilde{A}$ са пропорц. $\Rightarrow r(\tilde{A}) < 1 \Rightarrow r(A) = 1$
при това $\lambda \neq 0$, заради това те A_2, B_2, C_2, D_2 са коеф. в ур. на π_2. С това док. 1)

Док. и $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(\tilde{A}) = A \quad \pi_1 \parallel \pi_2$ и $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1, r(\tilde{A}) = 2 \Rightarrow$
π_1 и π_2 са прес. и $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$. Остава да док. втори-те еквив. в 2) и 3): Имаме, че $r(A) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : A_2 = \lambda A_1,$
$B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ ($\lambda \neq 0$, защото и вторият ред $\neq 0$) В тоя случай $r(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow D_2 \neq \lambda D_1$ (защ. иначе $r(\tilde{A}) \leq 2$) $\Rightarrow$ и $r(\tilde{A}) = 2$
$r(A) = 2 \Leftrightarrow$ редовете на A не са ~~пропор~~ пропорционални $\Leftrightarrow$
$\nexists \lambda : A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ – това е втората еквив. в 3)

Първата част на Т.1 може да се формулира и так:

Т.2 Нека равн. π има спрямо K общо ур. $Ax + By + Cz + D = 0$
Тогава всяко общо ур. на π спрямо K има вида
$\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$, където $\lambda \neq 0$ и обратно всяко ур. от тоя вид е общо ур. на π спрямо K

Задаване на права в пространството чрез двойка уравнения

Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма

Т-ма. 1) Всяка права l в простр. има спрямо K ур. от вида
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$
където рангът на матр. $A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2

2) Обратно: всяка двойка ур. от вида (1), където $r(A) = 2$ са ур. спрямо K на някоя права l.

Док. 1) Нека π_1 и π_2 са две кр. равнини (пресичащи се), за които l е пресечната права. Нека π_1 и π_2 имат общи уравнения $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,
$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,
$$\Rightarrow l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{т.е. (1)}$$
При това $r(A) = 2$, защото π_1 и π_2 са пресичащи се (от предишния въпрос)

2) Тъй като $r(A) = 2 \Rightarrow$ редовете на A са ненулеви $\Rightarrow A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ са ур. на рав. π_1 и π_2. π_1 и π_2 са пресичащи се, защото $r(A) = 2$ (от предишния въпрос)

Нека $l = \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow l \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, т.е. е (1)

Деф. Ако правата l е зададена спрямо K с ур. (1), то казваме, че l има двойка ур. (1).

Зав. Тъй като (1) задават правата l, то автоматично $r(A) = 2$ (защото ако $r(A) = 0$, то с-мата ще задава или цялото простр. (при $D_1 = D_2 = 0$) или $\varnothing$

(при $(D_1, D_2 \neq 0)$) а при $r(A)=1$ ℓ-мата ще задава или рав-
нина (при $r(A)=1$) или $\emptyset$ (при $r(\tilde{A})=2$) От док. на Т-ма 1
получ. **Тв 1.** Правата ℓ има двойки ур. (1) $\Leftrightarrow$ A_1x+B_1y
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ са ур. на две
разл. равнини π_1 и π_2, които съд. ℓ.

Тв 2 Нека правата ℓ е зададена с двойката ур (1).
Тогава равн. π съд. ℓ $\Leftrightarrow$ π има ур. от вида *
$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, където
$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$

Док. Нека π съдържа ℓ и π има ур.
$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Разгл. системата

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases}$$

Нека $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{A}=\left(\begin{array}{c|c} & D_1 \\ A & D_2 \\ & D_3 \end{array}\right)$

Системата има реш. и то безброй много, защото
коорд. на всички точки от ℓ са реш.
По Т. Руше $r(A)=r(\tilde{A})$. Ако $r(A)=3 \Rightarrow$ (Т. Крамер) с-мата
има единств. реш. - прот. $r(A)\leq 2$. Но матр от
първите два реда на A има ранг 2 $\Rightarrow r(\tilde{A})=2$
(заради ур. на ℓ) $\Rightarrow r(A)=2 \Rightarrow$ първите редове са л.з.
и тъй като първите два реда са л.н.з. (защ. матр
от тях има ранг 2) $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2$! 3-ти ред $=\lambda_1$(1-ви ред) $+\lambda_2$(2 ред)
$\Rightarrow A_3=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, $B_3=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2$, $C_3=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$, $D_3=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2$
Не може $\lambda_1=\lambda_2=0$, защото ще получ., че $A_3=B_3=D_3=0$ и
няма да е $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ да е ур. на равн. π.
$\Rightarrow \pi: \lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$
Обратната посока е очевидна

Общо уравнение на равнина

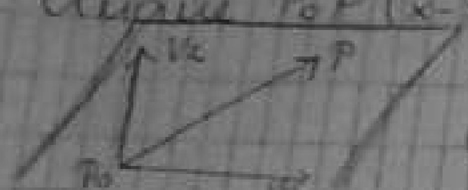
Нека $K = Oxyz$ е афинна коорд. с-ма.

Т-ма! 1) Всяка равн. π има спрямо K ур. от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0,0,0)$.

2) Обратно: Всяко ур. от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, е ур. спрямо K на някоя равнина.

Док. 1) Нека $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ и векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни с π и не са колинеарни. Както при извода на вект. парам. ур. имаме, че $P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни.

Имаме $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \Rightarrow P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни $\Leftrightarrow$ детерминантата от коорд. им е 0



$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \text{коорд на } \overrightarrow{P_0P} \quad \text{коорд на } v_1 \quad \text{коорд на } v_2 \end{array}$$

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Озн. $A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ (1)

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

$\Rightarrow P \in \pi \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow Ax+By+Cz \underbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}_{D}=0$

$\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$

$\Rightarrow \pi$ има ур. $Ax+By+Cz+D=0$

$(A, B, C) \neq (0,0,0)$, защото ако $(A,B,C)=(0,0,0)$, то всички минори от втори ред на $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ са 0 и $\Rightarrow v_1 \| v_2$ - противор.

2) $Ax+By+Cz+D=0$ има решение защото $(A,B,C) \neq (0,0,0)$ (напр., ако $A \neq 0$, то ур. е еквив. на $x=-\frac{B}{A}y-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A}$ и едно реш. е напр. $y=0$, $z=0$, $x=-\frac{D}{A}$). Нека (x_0,y_0,z_0) е едно решение

$\Rightarrow Ax_0+By_0+D=0 \Rightarrow D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Нека т. P_0 има коорд (x_0, y_0, z_0). Ще получим исканото, ако намерим в-ри $v_1(a_1,b_1,c_1)$ $v_2(a_2,b_2,c_2)$, за които са изпълнени рав. (1).

Б.О.О. считаме, че $A \neq 0$. Нека $b_1=A$, $c_1=1$, $b_2=0$, $c_1=0$, $a_1=-B$, $a_2=-\frac{C}{A}$ $\Rightarrow$ в-рите

$v_1(-B, A, 0)$ и $v_2(-\frac{C}{A}, 0, 1)$ са изпълнени равенствата (1).

v_1 и v_2 са неколинеарни, защото $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ има ненулев минор от втори ред.

$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A \neq 0$

$\Rightarrow$ т. P_0 и в-рите v_1 и v_2 определят равнината π, която от док. 1) има уравнение

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y-y_0)\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

т.е. $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, т.е.

$\pi: Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{= D} = 0$

т.е. $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

<u>Деф.</u> Нека π е равнина. Всяко ур. на π спрямо К от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ се нар. общо уравнение на π спрямо К.

<u>Заб.</u> Автоматично $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, защото ако $(A,B,C) = (0,0,0)$, то или $D = 0 \Rightarrow$ ур. е $0=0 \Rightarrow$ всяка т. е реш. и $\Rightarrow$ това е ур. на цялото простр., а не на π, или $D \neq 0 \Rightarrow$ $D = 0 \Rightarrow$ няма реш. $\Rightarrow$ това ур. е ур. на $\emptyset$, а не на π.

<u>Тв.</u> 1) Равнината π, която се задава с т. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколин. в-ри $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ има спрямо К общо ур.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

2) Равн. π, която е определена от неколин. т. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ има спрямо К общо ур.

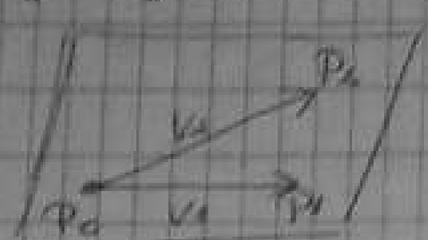
$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

или еквив.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Док.</u> 1) това го док. в док. на 1) на т-ма 1

2) Първото ур. следва от 1), защото π е опред. от т. P_0 и в-рите $v_1 = \overrightarrow{P_0P_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ и $v_2 = \overrightarrow{P_0P_2}(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)$



Второто уравнение следва от първото, защото

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}$$

Полупространства

Нека $K = Oxyz$ е аф. коорд. с-ма в простр.

Т-ма Нека равн. π има спрямо K ур. $Ax+By+Cz+D=0$

а т. P_1 и P_2 имат коорд. $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$

Озн. $L(x,y,z) = Ax+By+Cz+D$

Тогава

1) P_1 и P_2 са от различни отв. ~~полупростр.~~ полупростр. отн. π
$\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2) < 0$ (т.е. $L(x_1,y_1,z_1)$ и $L(x_2,y_2,z_2)$ имат различни знаци)

2) P_1 и P_2 са от едно и също отв. полупрост. отн. π $L(x_1,y_1,z_1)$ и $L(x_2,y_2,z_2) > 0$ ~~(т.е. $L(x_1,y_1,z_1)$ и $L(x_2,y_2,z_2)$ имат еднакви знаци)~~.

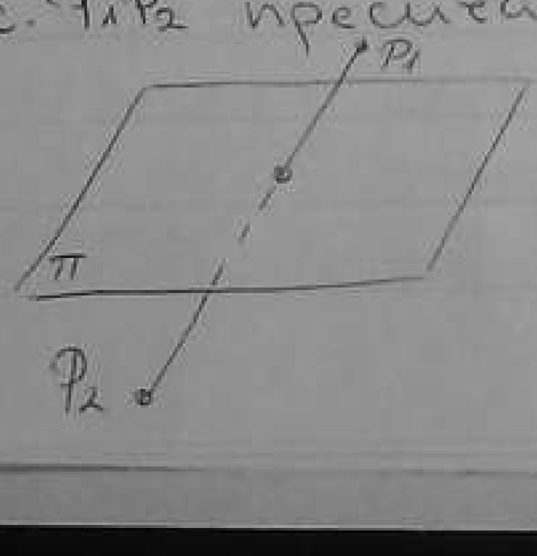
(т.е. $L(x_1,y_1,z_1)$ и $L(x_2,y_2,z_2)$ имат еднакви знаци)

Д-во $P_1 \in \pi \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1) = 0$
$P_2 \in \pi \Leftrightarrow L(x_1,y_2,z_2) = 0$

$\Rightarrow P_1 \notin \pi,\ P_2 \notin \pi \Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1) \neq 0,\ L(x_2,y_2,z_2) \neq 0$
$\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)\,L(x_2,y_2,z_2) \neq 0 \Rightarrow$ 1) и 2) са еквив. $\Rightarrow$ достат. е док. едното.

Ще док. 1)

P_1 и P_2 са от разл. отв. полупростр. $\Leftrightarrow$ отв. отс. P_1P_2 пресича равн. π



Имаме $\pi: L(x,y,z)=0$

отс. отс P_1P_2 $\begin{cases} x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2 \\ y=(1-\lambda)y_1+\lambda y_2, \quad \lambda\in(0,1) \\ z=(1-\lambda)z_1+\lambda z_2 \end{cases}$

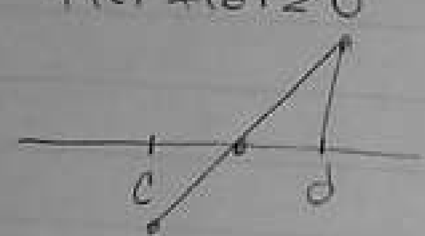
$\Rightarrow$ отс. отс. P_1P_2 пресича $\pi \Leftrightarrow L((1-\lambda)x_1+\lambda x_2, (1-\lambda)y_1+\lambda y_2, (1-\lambda)z_1+\lambda z_2)=0$

има реш $\lambda\in(0,1)$

$$L((1-\lambda)x_1+\lambda x_2, (1-\lambda)y_1+\lambda y_2, (1-\lambda)z_1+\lambda z_2)=0 \Leftrightarrow$$
$$A((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)+B((1-\lambda)y_1+\lambda y_2)+C((1-\lambda)z_1+\lambda z_2)+\underset{(1-\lambda)D+\lambda D}{\underset{\parallel}{D}}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\underbrace{(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}_{L(x_1,y_1,z_1)}+\lambda\underbrace{(Ax_2+By_2+Cz_2+D)}_{L(x_2,y_2,z_2)}=0$$
$$\Leftrightarrow (L(x_2,y_2,z_2)-L(x_1,y_1,z_1))\lambda+L(x_1,y_1,z_1)=0$$

Кога има решение $\lambda\in(0,1)$?

Лема: Нека $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $c<d$, $f(\lambda)=a\lambda+b$. Тогава ур $f(\lambda)=0$ има реш. $\lambda\in(c,d) \Leftrightarrow$ $f(c)f(d)<0$ или $a=b=0$ (т.е. $f\equiv 0$)



При нас $c=0$, $d=1$

$f(\lambda)=(L(x_2,y_2,z_2)-L(x_1,y_1,z_1))\lambda+L(x_1,y_1,z_1)$

т.е $a=L(x_2,y_2,z_2)-L(x_1,y_1,z_1)$

$b=L(x_1,y_1,z_1)\neq 0$

$\Rightarrow f\not\equiv 0 \Rightarrow f(\lambda)=0$ има реш. в $(0,1) \overset{\text{лемата}}{\Leftrightarrow} f(0)f(1)<0$

$\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)L(x_2,y_2,z_2) < 0 \Rightarrow P_1$ и P_2 са от разл. полупр. $\Leftrightarrow L(x_1,y_1,z_1)L(x_2,y_2,z_2)<0$

Сл. Нека спрямо K π има ур. π. $L(x,y,z) = Ax+By+Cz=0$

Тогава отв. полупростр. отн. π са множ. $\{P(x,y,z) : L(x,y,z)>0\}$ и $\{P(x,y,z) : L(x,y,z)<0\}$

Заб. За затв. полупростр. е същото с ≥ 0 и ≤ 0

Нормални уравнения на равнината

Деф. Вектор, който е перпендикулярен на равн. (т.е. перпенд. е на в-рите, които са компл. с равнината) се нарича нормален в-р за равнината.

Оттук нататък ще считаме, че е фикс. ортонормирана коорд. с-ма $K=Oxyz$

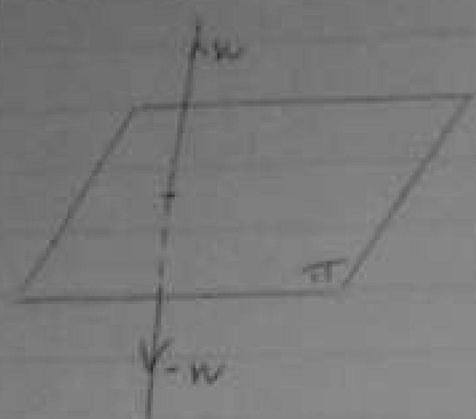
Тв.1 Нека π има спрямо K общо ур. $Ax+By+Cz+D=0$. Тогава в-рът N с коорд. спрямо K (A,B,C) е нормален за π

Док. Нека $v(a,b,c)$.
Тогава $v \parallel \pi \Leftrightarrow Aa+Bb+Cc=0$
$\Leftrightarrow \langle N, v\rangle = 0 \Leftrightarrow N \perp v$
$\Rightarrow N$ е норм. за π

Тв.2 Нека спрямо K т. P_0 и ненулевия в-р N имат коорд. $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $N(A,B,C)$. Тогава равн π през P_0, която е перпенд на N има ур спрямо K $\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

<u>Док</u> като на съотв. тв. за права в равн.

Нека π е равн => всички норм в-ри на π са колинеарни => ∃ точно два единични норм. в-ра



Ако $N(A,B,C) \neq 0$ е норм. в-р, то те са $n = \frac{N}{|N|}$ и $-n$

т.е. $n\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$

и $-n\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$

<u>Деф</u> Общо ур. на равн. π спрямо K, в която норм в-р с коорд. коефиц. пред x, y, z е единичен, се нар. норм. ур. на π спрямо K => ако

$\pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

то това ур. е норм $\iff \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

<u>Тв3</u> Всяка равнина π има спрямо K точно две норм ур. Ако $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, то те са

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

и

$$-\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Док. Както съотв. тв. за права в равн.

Приложения на норм. ур.

1) Разстояние от точка до равн.

Тв.4 Нека спрямо K равн. π има норм. ур. $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, а т. P_0 има коорд. (x_0,y_0,z_0)

Озн. $L(x,y,z)=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$

Тогава разст. $d(P_0,\pi)$ от P_0 до π е $d(P_0,\pi)=|L(x_0,y_0,z_0)|$

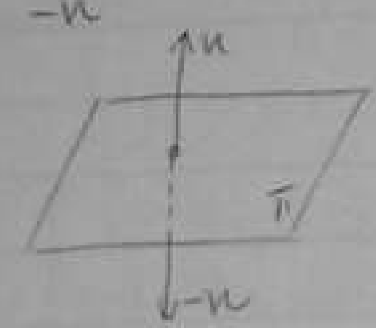
Док. - както при права в равн.

Заб. Числото $\delta(P_0,\pi):=L(x_0,y_0,z_0)$ се нар. ориентирано разст. от P_0 до π по отн. на норм. в-р $n(\alpha,\beta,\gamma)$

Както при права в равн. имаме

$\delta(P_0,\pi)>0 \iff P_0$ е в отв. полупр., в което сочи n

$\delta(P_0,\pi)<0 \iff P_0$ е в отв. полупр., в което сочи $-n$



2) Ъгъл м/у две равнини

Под ъгъл м/у две равнини π_1 и π_2 се разбира по-малкия от двата ъгъла, които сключват

Ако N_1 и N_2 са ненулеви норм. в-ри за π_1 и π_2, то както при права в равн. се вижда, че

$$\angle(\pi_1,\pi_2) = \begin{cases} \angle(N_1,N_2), \text{ ако } \angle(N_1,N_2) \le \pi/2 \\ \pi - \angle(N_1,N_2), \text{ ако } \angle(N_1,N_2) > \pi/2 \end{cases}$$

т.е. $\cos\angle(\pi_1,\pi_2) = |\cos\angle(N_1,N_2)|$ => ако π_1 и π_2 имат норм. ур. $\pi_i : \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z + \delta_i = 0$, $i=1,2$

то $\cos\angle(\pi_1,\pi_2) = |\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|$

$\Rightarrow \angle(\pi_1,\pi_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|$

Окръжност и сфера

1) Окръжност

Работим в равн.

Деф. Окръжност с център C и радиус $R > 0$ е множ. от всички т. P, за които $|PC| = R$

Нека $K = Oxy$ е ортонорм. коорд. с-ма

Нека C има коорд. (α,β)

Ако $P(x,y) \Rightarrow |PC| = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$

Нека окр. е c $\Rightarrow P \in c \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Leftrightarrow$

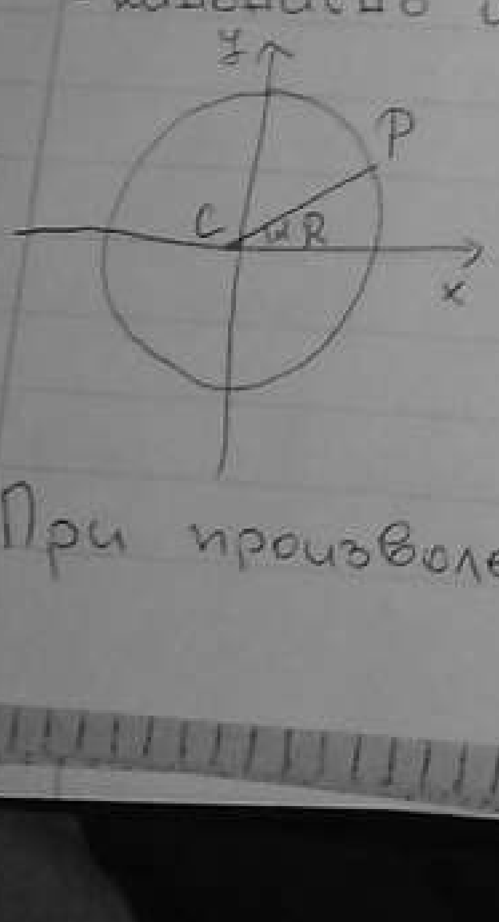
$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$

$\Rightarrow c: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$

Ако $C = O$, то $\alpha=\beta=0$

$\Rightarrow c: x^2+y^2=R^2$

- канонично или централно ур. на окр



Парам. ур. c $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

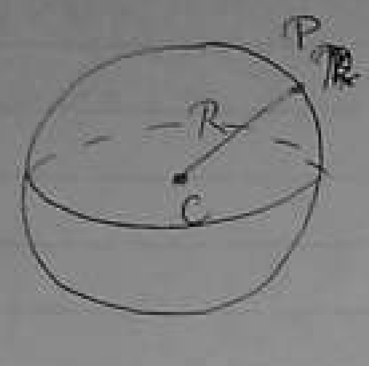
При произволен център $C(\alpha,\beta)$

$$C\begin{cases} x = \alpha + R\cos u \\ y = \beta + R\sin u \end{cases}, u \in [0, 2\pi]$$

2) Сфера

Работим в простр.

Деф. Сфера с ц. C и рад. R е множ. от всички точки в простр. за които $|PC| = R$

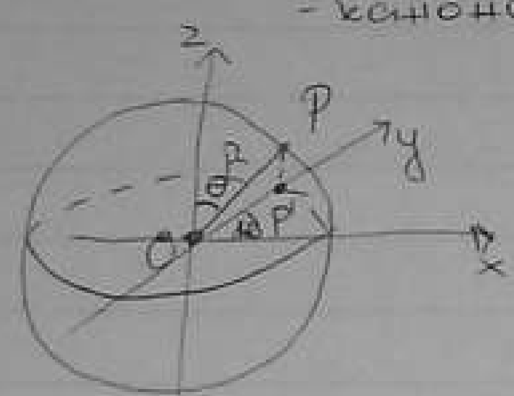


Нека $K = Oxyz$ е ортонорм. коорд. с-ма и C има спрямо K коорд. (α, β, γ) => както при окр. сферата S

$S: (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$

При $C = O$ $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

- канонично или центр. ур.



$\theta = \angle(\overrightarrow{OP}, Oz) \in [0, \pi]$

P' - проекц. на P в Oxy,

$u = \angle(\overrightarrow{OP'}, Ox) \in [0, 2\pi]$

$|OP'| = R\sin\theta$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x = R\sin\theta\cos u \\ y = R\sin\theta\sin u \\ z = R\cos\theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi], u \in [0, 2\pi]$$

При произв. център $C(\alpha, \beta, \gamma)$

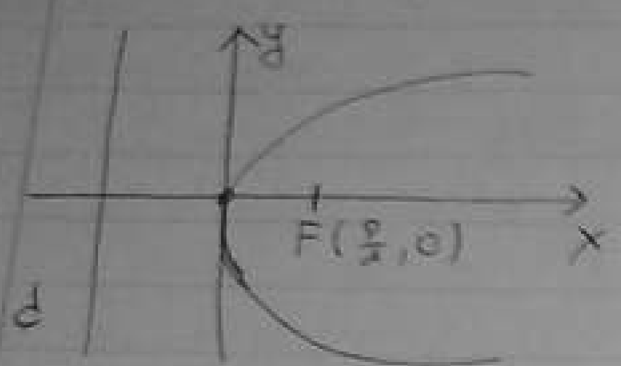
$$S: \begin{cases} x = \alpha + R\sin\theta\cos u \\ y = \beta + R\sin\theta\sin u \\ z = \gamma + R\cos\theta \end{cases}$$

Елипса, хипербола, парабола

Работим в равнината

1) Парабола

Деф. Парабола е мн-во от т. P, които спрямо някоя ортонорм. коорд. с-ма $K=Oxy$ има ур. $y^2=2px$, където $p>0$
това се нар. канонично ур. на параболата



$y=ax^2+bx+c$

P се нарича параметър на параб.
O - връх
Ox - ос
$F(\frac{p}{2},0)$ - фокус
$d: x=-\frac{p}{2}$ - директриса

Тв. Нека d е права и F е точка, която не лежи на d. Тогава мн-во от т. P за които разст. от P до F и от P до d са равни е парабола с фокус F и директр. d
(т.е получ. еквив. деф. на параб.)

Док.
Взимаме коорд. с-ма K, $F(\frac{p}{2},0)$, $d: x=-\frac{p}{2}$
(т.е $p=d(F,d)$)

Нека $P(x,y)$

$|PF| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$

$d(P,d) = |x + \frac{p}{2}|$

$|PF| = d(P,d) \iff \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$

$\iff x^2 + px^2 + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = x^2 + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$

$\iff y^2 = 2px$

$\Rightarrow$ въпросното множ. е параб. $y^2 = 2px$