

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"

7 юли 2010г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за f при дадено подразделяне на интервала. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман и на риманов интеграл чрез подхода на Дарбу. Докажете, че непрекъснатите функции са интегруеми по Риман.

2. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегруема функция. Докажете, че $\int_a^x f(t)dt$ е непрекъснатата функция на x . Формулирайте достатъчно условие, при което тази функция е диференцируема. Пресметнете $F'(x)$ за

$$F(x) = \int_2^{x^3} \frac{dt}{\ln t},$$

където $x \in (2, 3)$.

3. Формулирайте и докажете критерия на Лайбниц (за знакопроменливи редове).

4. Развийте в степенен ред около нулата функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[4]{1+t^2}}.$$

Определете радиуса и областта на сходимост на получения степенен ред. Равномерно сходящ ли е той? Обосновете отговора си.

5. Дайте дефиниция на отворено множество в n -мерното евклидово пространство. Докажете, че сечение на краен брой отворени множества е отворено. Остава ли в сила предишното твърдение, ако отворените множества са безброй много? Обосновете отговора си.

6. Намерете частните производни на функцията

$$f(x) = \arctg(\|x\|) \cdot \langle x, a \rangle,$$

където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и a е векторът $(5, 7, 2)$.

7. Формулирайте и докажете теоремата на Шварц за равенство на смесените производни.

8. Нека $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция, дефинирана в отвореното множество $U \subset \mathbb{R}^2$. Какво наричаме втори диференциал на f ? Изведете формулата на Тейлър до първи ред за f с остатък във формата на Лагранж. Формулирайте достатъчно условие дадена критична точка на f да е локален екстремум. Намерете критичните точки на функцията

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

и определете техния вид (локален минимум, локален максимум или седлова точка).