

1. Пресметнете производната на $f(x) = \frac{(\ln x)^x}{2^{3x+1}}$.

Решение:

$$\ln f(x) = \ln \left(\frac{(\ln x)^x}{2^{3x+1}} \right) = x \ln(\ln x) - (3x+1) \ln 2.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\ln x) + x \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} - 3 \ln 2, \text{ т.е. } f'(x) = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - 3 \ln 2 \right) \frac{(\ln x)^x}{2^{3x+1}}.$$

2. Пресметнете производната на $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2}$.

Решение:

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt{x} + \ln e^{x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln x + x^2.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{2} \sqrt{x} \frac{1}{x} + 2x = \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x. \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \right) \sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2}.$$

Забележка: И двете задачи използват техниката наречена *логаритмично диференциране*.

3. Пресметнете производната на неявната функция y , зададена чрез равенството:

$$y^3 + y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$\text{Решение: } 3y^2 y' + y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}.$$

$$y' = -\frac{1}{(3y^2+1)} \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}.$$

Забележка: Не забравяйте, че $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$.