

1. Пресметнете стойностите на:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ в) $\operatorname{arctg}(-1)$ г) $\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$ д) $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$.

Отговори: а) $\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $-\frac{\pi}{4}$ г) $-\frac{\pi}{6}$ д) $\frac{5\pi}{6}$.

Забелжка: Добре е да се знае, че функциите $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ са нечетни
($f(-x) = -f(x)$) и формулите $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$.

2. Намерете ДМ и множеството от стойностите на функциите:

а) $\arcsin \frac{\pi}{|x|}$ б) $\arccos \frac{1}{x^2}$.

Решение:

а) $f(t) = \arcsin t$ е дефинирана за $-1 \leq t \leq 1$. Неравенството $-1 \leq \frac{\pi}{|x|}$ е изпълнено за

всяко $x \neq 0$, а решенията на $\frac{\pi}{|x|} \leq 1$ са $|x| \geq \pi$ т.е. $x \leq -\pi \vee x \geq \pi$. Съобразяваме, че

$0 < \frac{\pi}{|x|} \leq 1$. Тогава $0 < \arcsin \frac{\pi}{|x|} \leq \frac{\pi}{2}$.

б) $g(t) = \arccos t$ е дефинирана за $-1 \leq t \leq 1$. Неравенството $-1 \leq \frac{1}{x^2}$ е изпълнено за

всяко $x \neq 0$, решенията на $\frac{1}{x^2} \leq 1$ са $|x| \geq 1$ т.е. $x \leq -1 \vee x \geq 1$. Понеже $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$ имаме

$0 \leq \arccos \frac{1}{x^2} < \frac{\pi}{2}$.

3. Пресметнете : а) $\sin \left(\arccos \left(-\frac{1}{3} \right) \right)$, б) $\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)$, в) $\cos \left(2 \arcsin \frac{1}{5} \right)$.

Решение:

а) От $0 \leq \arccos x \leq \pi$ разбираме, че $A = \sin(\arccos x) \geq 0$. $A^2 = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$.

Докажем, че $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. При $x = -\frac{1}{3}$ $A = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

б) За правоъгълният триъгълник с катети $BC = 1, AC = 2$, имаме $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, а хипотенузата

$AB = \sqrt{5}$. Тогава $\cos \alpha = \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. По – общо : $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

в) От формулата $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ получаваме :

$\cos \left(2 \arcsin \frac{1}{5} \right) = 1 - 2\sin^2 \left(\arcsin \frac{1}{5} \right) = \frac{23}{25}$. По същия начин доказваме, че

$\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$.