

Дефиниция за сходимост

Казваме, че редицата A е сходяща и има граница L ако за всяко положително число ϵ можем да намерим такова число n_0 , че всички членове от n_0 -вия нататък са на разстояние по-малко от ϵ от L .

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Граница на редица записваме по този начин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

След определено число n всички членове са в ϵ околност на L .

И след като това е изпълнено за всяко $\epsilon > 0$, колкото и малко да е то, значи можем да твърдим, че от когато n клони към безкрайност, членовете на редицата са произволно близки до L . Безкрайно близки до L .

Дефиниция за сходимост на Коши

Съществува още една дефиниция за сходяща редица, която ще наричаме дефиниция на Коши.

Дефиниция:

Една редица е сходяща, ако за всяко $\epsilon > 0$ можем да намерим някакво число N такова, че за всяко m и n по-големи от N да следва:

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

Забележете, че тук нищо не се казва за самата граница на редицата. Тази дефиниция се използва основно когато не сме сигурни за стойността на границата.

Диференцируема функция

Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако в дадена вътрешна точка x_0 от дефиниционната област на функцията съществува границата

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Теорема на Лагранж (Теорема за крайните нараствания)

Теорема:

Ако $f(x)$ е

1. непрекъсната над $[a, b]$
2. $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$

то $\exists c \in (a,b)$, за която

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Забележете, че първият интервал е затворен, а вторият - отворен.

Доказателство:

Доказателството се основава на теоремата на Рол. Съставяме си помощна функция

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

която е непрекъсната над $[a,b]$ и диференцируема над (a,b) (използването на помощни функции е черна магия - много силно оръжие, но е трудно за научаване).

Нашата помощна функция има равни стойности в края на интервала $[a,b]$, специално сме си я избрали такава за да можем да приложим теоремата а Рол.

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - b) = f(b)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - b) = f(b)$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

От теоремата на Рол имаме, че за F има точка $c \in (a,b)$ за която $F'(c)=0$. Кое то означава

$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и така намерихме C което да отговаря на условията на теоремата. С което доказахме нашата теорема. В това доказателство трябва да запомните, че се използва теоремата на Рол и да намерите начин да запомните помощната функция(хубаво ще е да се позамислите малко, за да започнете сами да намирате подходящи помощни функции за целите които искате да постигнете).

Теорема, свързваща първа производна и монотонност на функция

Теорема:

Ако $f(x)$ е дифенерцируема над интервала $\langle a,b \rangle$, можем да определим нейната монотонност чрез първата производна както следва:

1. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ върху интервала $\langle a,b \rangle$, то функцията е монотонно растяща върху интервала $\langle a,b \rangle$
2. $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ върху интервала $\langle a,b \rangle$, то функцията е монотонно намаляваща върху интервала $\langle a,b \rangle$
3. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ върху интервала $\langle a,b \rangle$, то функцията е строго монотонно растяща върху интервала $\langle a,b \rangle$
4. $f'(x) < 0 \Rightarrow$ върху интервала $\langle a,b \rangle$, то функцията е строго монотонно намаляваща върху интервала $\langle a,b \rangle$

Доказателство:

Права посока

Имаме, че $f'(x) \geq 0$ над $\langle a, b \rangle$, ще докажем, че функцията е монотонно растяща за интервала $\langle a, b \rangle$.

Взимаме си произволни x_1, x_2 такива, че $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 < x_2$ (когато си взимаме произволни, означава че това което ще докажем важи за всички x_1, x_2 отговарящи на условията). Взимаме интервала $[x_1, x_2]$ и Прилагаме теоремата на Лагранж за него :

$\exists c \in [x_1, x_2] : F'(c) = f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ по условие имаме $f'(x) \geq 0$ от което следва

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

имаме и $x_2 - x_1 > 0$ следователно $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ това важи за произволно избрани x_1, x_2 от което следва че теоремата е вярна в първия случай.

Останалите случаи са аналогични.

Обратна посока

Имаме че функцията е монотонно растяща за интервала $\langle a, b \rangle$, ще докажем че $f'(x) \geq 0$.

От дефиницията за производна имаме че $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. От монотонността имаме, че

за $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ и така:

$$x_0 > x, f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

имаме граница на положително число върху положително, което е положително, а за $x_0 < x$ имаме граница на отрицателно върху отрицателно, което също е положително, като добавим и че знаменателят не може да става 0 $\Rightarrow f'(x) \geq 0$.

Аналогично и за останалите случаи.

Смяна на променливата в неопределен интеграл.

Нека функцията $f'(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δx , а $\varphi(t)$ е непрекъснатата диференцируема в отворения интервал Δt , при което $\varphi(\Delta t) \subset \Delta x$. Тогава, ако

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

То

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

Доказателство. Да положим $\Phi'(t) = F(\varphi(t))$. Съгласно верижното правило за диференциране на съставни функции имаме

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

понеже по определение $F'(x) = f(x)$. Това показва, че $\Phi(t)$ е една примитивна за функцията $(\varphi(t)) \varphi'(t)$, откъдето следва верността на формулата

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

и да се разглежда като получена след полагането $x = \varphi(t)$ и затова се нарича формула за смяна на променливата.

Важен частен случай е, когато знаем

$$\int f(t)dt = F(t) + C$$

Тогава след линейната смяна $t = ax + b$, $a \neq 0$, получаваме

$$\int f(ax+b)d(ax+b) = a \int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$$

=>

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Кога една функция клони към $+\infty$

Коши

Казваме че функцията $f(x)$ има граница $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ ако за всяко $\forall N$ (N -число) може да се намери число A такова че за всяко $\forall x \in D$ и $x > A$ да бъде изпълнено $f(x) > N$

Хайне

Дадена ни е функцията $f(x)$. Ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, всички членове на която са положителни, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ клони към $+\infty$, то казваме, че и функцията $f(x)$ клони към $+\infty$,

Теорема за равномерната непрекъснатост

Теорема:

$f(x)$ дефинирана върху X .

Ако $f(x)$ е непрекъсната върху крайния затворен интервал $[a,b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в него.

Интегриране по части

Формулата за интегриране по части гласи следното:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

Доказателство:

Ще разпишем производната на $f(x)g(x)$:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

И ще използваме факта, че интеграл от производната на нещо е самото нещо (+ константа разбира се):

$$\int (h(x))' dx = h(x)$$

сега просто заместваме $h(x)$ със $f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f(x)g(x))' dx \\ &= \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx \\ &= \int g(x)f'(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = \int g(x)df(x) + \int f(x)dg(x) \end{aligned}$$

Прехвърляме от правилната страна и получаваме:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

Точка на съгъстяване

Дефиниция:

Нека $X \subset \mathbb{R}$

Една стойност x_0 от множеството X наричаме *точка на съгъстяване*, ако във всяка ненулева нейна околност има точка от X , различна от x_0 :

$$\forall \delta > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Теорема на Вайерщрас

Теорема:

Ако $f(x)$ е непрекъснатата и дефинирана над интервала $[a, b]$ то нейните точни горна и долна граници в интервала $[a, b]$ съществуват и освен това се достигат в интервала.

Теорема на Рол

Теорема:

Нека $f(x)$ е определена върху краен затворен интервал $[a, b]$ и такава че:

1. $f(x)$ е непрекъснатата върху $[a, b]$
2. $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$
3. $f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказателство:

Ще използваме теоремата на Вайерщрас, която гласи, че всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал достига своята най-голяма и най-малка стойност за някакви стойности принадлежащи на интервала. Т.е

$$\exists x_0, x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x); f(x_0) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

- Ако минимумът и максимумът са равни, тогава функцията е константа, т.е производна нула навсякъде - т.е теоремата е доказана
- Ако минимумът и максимумът се различават, тогава със сигурност поне едно от x_0, x_1 ще бъде различно от a и b (защото $f(x_0) \neq f(x_1)$, а $f(a) = f(b)$). Без ограничение на общността допускаме, че $x_0 \neq a$ и $x_0 \neq b$.

Тогава $x_0 \in (a, b)$, x_0 локален екстремум \Rightarrow (От теоремата на Ферма) $f'(x_0) = 0$.

Готово - намерихме точка от отворения интервал, с нулева производна.