Приближено представяне на функции — формула на Тейлър

Основна теорема

Теорема 1 *Нека $f(x)$ има производни до ред $n+1$ в околност $(a-\delta\,,\ a+\delta)$ на точката a. За всяко $x \in (a-\delta\,,\ a+\delta)$ и всяко $p>0$ съществува c между a и x такова, че*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; \left(\frac{x-a}{x-c}\right)^p \frac{(x-c)^{n+1}}{n!\,p}\, f^{(n+1)}(c) \;=$$

$$=\; f(a) \;+\; (x-a)\, f'(a) \;+\; \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) \;+\; \ldots \;+\; \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \;+\; R_{n+1}(x,\, p)$$

□ Понеже числата между a и x могат да бъдат представени във вида $a + t\,(x-a)$ за $t \in (0\,,\,1)$ заключението на теоремата може да бъде формулирано и така:

съществува $\theta \in (0\,,\,1)$, за което

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; \frac{(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p}\, f^{(n+1)}\,(a+\theta\,(x-a)) \;.$$

За даденото a и фиксирано $x \in (a-\delta\,,\ a+\delta)$ полагаме при $t \in [0\,,\,1]$

$$\varphi(t) \;=\; f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,(1-t)^k\, f^{(k)}\,(a+t\,(x-a)) \;-\; Q\,(1-t)^p \;,$$

където числото Q е избрано така, че $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, т.е. $Q \;=\; f(x) \;-\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

За така избраното Q, за функцията φ и интервала $[0\,,\,1]$ е приложима теоремата на Рол, която ни показва, че съществува $\theta \in (0\,,\,1)$, за което $\varphi'(\theta)=0$. Понеже за $t \in (0\,,\,1)$ е изпълнено

$$\begin{aligned}\varphi'(t) \;=\; &-(x-a)\, f'\,(a+t\,(x-a)) \;- \\ -\sum_{k=1}^{n} &\left(-\frac{(x-a)^k}{(k-1)!}\,(1-t)^{k-1}\, f^{(k)}\,(a+t\,(x-a)) \;+\; \frac{(x-a)^{k+1}}{k!}\,(1-t)^k\, f^{(k+1)}\,(a+t\,(x-a)) \right) \;+ \\ &+\; p\,Q\,(1-t)^{p-1} \;=\end{aligned}$$

$$=\; -\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\,(1-t)^n\, f^{(n+1)}\,(a+t\,(x-a)) \;+\; p\,Q\,(1-t)^{p-1} \;,$$

то $\quad -\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n!}\,(1-\theta)^n\, f^{(n+1)}\,(a+\theta\,(x-a)) \;+\; p\,Q\,(1-\theta)^{p-1} \;=\; 0 \quad$, т.е.

$$Q \;=\; \frac{(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p}\, f^{(n+1)}\,(a+\theta\,(x-a)) \quad ,$$

което, заедно с предишното представяне на Q, доказва теоремата. ■

Представяне на остатъчния член

В основната теорема само остатъчният член зависи от числото $p > 0$, т.е. при различни p (съответно различни θ) полиномът, с който приближаваме $f(x)$, е един и същ, а остатъчният член приема различни форми:

- форма на Лагранж: $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$,
  получава се при $p = n+1$;
- форма на Коши: $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$,
  получава се при $p = 1$;
- форма на Пеано: $R_{n+1}(x) = o\big((x-a)^n\big)$, може да бъде получена от основната теорема, при предположение, че $f^{(n+1)}(x)$ е ограничена в околността $(a-\delta,\ a+\delta)$.

Единственост на развитието на Тейлър

Теорема 2 *Нека $f(x)$ има производни до ред n в околност $(a-\delta,\ a+\delta)$ на точката a и $(n+1)$-ва производна в точката a. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ тогава и само тогава, когато $b_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ за $k = 0, 1, 2, \ldots n$.*

$\Box\Rightarrow$ Имаме $f(a) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)\right) = b_0$.

Ако $b_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ за $0 \le k \le p < n$, то, съгласно правилото на Лопитал, приложено p пъти,

$$b_{p+1} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^{p+1}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(p+1)(x-a)^p} =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a)}{(p+1)!\,(x-a)} = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} \quad .\blacksquare$$

$\Box\Leftarrow$ Съгласно правилото на Лопитал, приложено n пъти,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k}{n(x-a)^{n-1}} =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!\,(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0 \quad ,$$

понеже $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в точката a. $\blacksquare$

Забележка: Последните разсъждения показват, че представянето във форма на Пеано е валидно при предположение само за непрекъснатост на $f^{(n)}(x)$.

Развитие на Маклорен за някои елементарни функции

При $a = 0$ формулата на Тейлор носи името и на Маклорен. Следващото твърдение е непосредствено приложение на основната теорема.

Теорема 3 *Валидни са следните представяния:*

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$

  $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ *или* $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} e^{\theta x}$ *или* $R_{n+1}(x) = o(x^n)$;

- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x),$

  $R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\theta x + (n+1)\pi)$ *или*

  $R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}(1-\theta)^{2n+1}}{(2n+2)!} \sin(\theta x + (n+1)\pi)$ *или* $R_{2n+2}(x) = o\left(x^{2n+1}\right)$;

- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$

  $R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ *или*

  $R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}(1-\theta)^{2n}}{(2n)!} \cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ *или* $R_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n}\right)$;

- *за* $\alpha \notin \mathbb{N}$: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1}(x) =$

  $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_{n+1}(x),$

  $R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}$ *или*

  $R_{n+1}(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n$ *или* $R_{n+1}(x) = o(x^n)$;

- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_{n+1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_{n+1}(x),$

  $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ *или* $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} e^{\theta x}$ *или* $R_{n+1}(x) = o(x^n)$;