Производна на функция

Основни правила за диференциране

1. $(c)' = 0$ $\qquad c = const$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3. $(cu)' = c.u'$ $\qquad c = const$

Производна на произведение:

4. $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Производна на частно:

5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Производна на сложна функция:

6. $\left(u(v(x))\right)' = u'(v(x))v'(x)$

Таблица на основните производни

1. $\left(x^{p}\right)' = px^{p-1}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

3. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

4. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ $\qquad$ $x \in \left(-1,1\right)$

5. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ $\qquad$ $x \in \left(-1,1\right)$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

7. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$

8. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 9. $(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

10. $(a^x)' = a^x \ln a$ $0 < a \neq 1$

11. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Да се намери производната на функцията:

Задача 1 $y = 5$ $y' = 0$

Задача 2 $y = x^5$ $y' = 5x^4$ от (1) $\left(x^p\right)' = px^{p-1}$

Задача 3 $y = \dfrac{x^3}{3}$

Намиране на първата производна:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}.\left(x^3\right)' = \frac{1}{3}.3x^2 = x^2$$ от (1) $\left(x^p\right)' = px^{p-1}$

Намиране на втората производна:

$$y'' = (x^2)' = 2x$$

Намиране на третата производна:

$$y''' = (2x)' = 2$$

Задача 4 Производна на сбор от функции

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

$$y = 2x + 1$$

$$y' = 2$$

$$y'' = 0$$

Задача 5

$$y = \frac{4 - 5x}{7}$$

$$y' = \frac{1}{7}(4 - 5x)' = \frac{1}{7}(-5) = -\frac{5}{7}$$

Задача 6 $y = 5x^2 - 3x - 8$

$$y' = \left(5x^2\right)' + \left(-3x\right)' + \left(-8\right)'$$

$$y' = 10x - 3$$

Задача 7 $y = \left(x - 3\right)^2 - x^2$

$$y' = 2\left(x - 3\right) - 2x$$

Задача 8 $y = x^5 - 2x^3 - 1$

$$y' = 5x^4 - 6x^2$$

$$y'' = 20x^3 - 12x$$

$$y''' = 60x^2 - 12$$

Задача 9 $y=\left(-x^2+4x+3\right)-\left(-5x^2+2x-1\right)$

$$y'=-2x+4+10x-2$$

$$y'=8x+2$$

Задача 10 $y=x^6-x^3$

$$y'=6x^5-3x^2$$

Задача 11 $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^2$

$$y'=x^3-2x$$

Задача 12 Производна на произведение от функции

$$\boxed{\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

$$y = \left(2x^2 - x\right)\left(-x^2 + 6x\right)$$

$$y' = \left(2x^2 - x\right)'\left(-x^2 + 6x\right) + \left(2x^2 - x\right)\left(-x^2 + 6x\right)' =$$

$$= (4x - 1)\left(-x^2 + 6x\right) + \left(2x^2 - x\right)(-2x + 6) =$$

$$= -8x^3 + 39x^2 - 12x$$

Задача 13 $y = x^2\left(2x^2 - x\right)\left(-x^2 + 6x\right)$

$$y' = 2x\left(2x^2 - x\right)\left(-x^2 + 6x\right) + x^2\left(4x - 1\right)\left(-x^2 + 6x\right) +$$
$$x^2\left(2x^2 - x\right)\left(-2x + 6\right)$$

Задача 14 $y = \left(-x + 2\right)\left(-x^2 + 6x\right)$

$$y' = (-1)\left(-x^2 + 6x\right) + \left(-x + 2\right)\left(-2x + 6\right)$$

Задача 15 $y = 5\left(x^3 - x\right)\left(3 + 8x\right)\left(x^5 + x^2\right)$

$$y' = 0\left(x^3 - x\right)\left(3 + 8x\right)\left(x^5 + x^2\right) +$$
$$5\left(3x^2 - 1\right)\left(3 + 8x\right)\left(x^5 + x^2\right) + 5\left(x^3 - x\right)(8)\left(x^5 + x^2\right) +$$
$$5\left(x^3 - x\right)\left(3 + 8x\right)\left(5x^4 + 2x\right)$$

Задача 16 Производна на частно от степен на функция

$$\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

$$y=\frac{3x^2+2x}{7x+2}$$

$$y'=\frac{\left(3x^2+2x\right)'(7x+2)-\left(3x^2+2x\right)(7x+2)'}{(7x+2)^2}=$$

$$=\frac{(6x+2)(7x+2)-\left(3x^2+2x\right)7}{(7x+2)^2}=\frac{21x^2+12x+4}{(7x+2)^2}$$

Задача 17 $\quad y=\dfrac{-5x^2+2x-1}{2x^2-x}$

$$y'=\frac{\left(-5x^2+2x-1\right)'\left(2x^2-x\right)-\left(-5x^2+2x-1\right)\left(2x^2-x\right)'}{\left(2x^2-x\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-10x+2\right)\left(2x^2-x\right)-\left(-5x^2+2x-1\right)\left(4x-1\right)}{\left(2x^2-x\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2+4x-1}{\left(2x^2-x\right)^2}$$

Задача 18 Производна на функция от функция

$$\boxed{\left(u\left(v\left(x\right)\right)\right)' = u'\left(v\left(x\right)\right)v'\left(x\right)}$$

$$y = \sin\left(3x+4\right)$$

$$y' = \left(\sin\left(3x+4\right)\right)'\left(3x+4\right)' = \cos\left(3x+4\right).$$

Десислава Стоянова Войникова

Задача 19 $y=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{5}{6}\cos 6x$

$$y'=\frac{1}{2}(\cos 2x)2-\frac{5}{6}(-\sin 6x)6$$

$$=\cos 2x+5\cos 6x$$

Задача 20 $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{x^3+1}$

$$y'=\frac{1}{3\cos^2\sqrt[3]{x^3+1}}\left(1+x^3\right)^{-\frac{2}{3}}3x^2$$

Задача 21 Производна на степен на функция със степенен показател естествено число

$$\boxed{y' = \left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'}$$

$$y = \left(3x^2 + 2\right)^5$$

$$y' = 5\left(3x^2 + 2\right)^4.\left(3x^2 + 2\right)' = 5\left(3x^2 + 2\right)^4. \quad x$$

Задача 22 $y = \left(5x + 2\right)^3$

$$y' = 3\left(5x + 2\right)^2\left(5x + 2\right)'$$

$$y' = 15\left(5x + 2\right)^2$$

Задача 23 $y=\sqrt[3]{\left(7x^5-5\right)^2}$

$$y'=\left[\left(7x^5-5\right)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}\left(7x^5-5\right)^{\frac{2}{3}-1}\left(7x^5-5\right)'=$$

$$=\frac{2}{3}\left(7x^5-5\right)^{-\frac{1}{3}}35x^4=\frac{70x^4}{3\sqrt[3]{7x^5-5}}$$

Задача 24 $y=\frac{1}{3}\left(x^4-1\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$y'=\left[\frac{1}{3}\left(x^4-1\right)^{-\frac{3}{2}}\right]'=-\frac{3}{2}\frac{1}{3}\left(x^4-1\right)^{-\frac{3}{2}-1}\left(x^4-1\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^4-1\right)^{-\frac{5}{2}}4x^3=\frac{-2x^3}{\sqrt{\left(x^4-1\right)^5}}$$

Десислава Стоянова Войникова

Задача 25 Производна на тригонометрична функция

$$y = 6x^2 \sin x$$

от (2) $(\sin x)' = \cos x$ и производна на сложна функция

$$y' = 6\left[\left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)'\right] =$$

$$= 6\left(2x \sin x + x^2 \cos x\right)$$

Задача 26 Производна на логаритмична функция

$$y = x\ln(1-x)$$

от (12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ и производна на сложна функция

$$y' = x\ln(1-x) = (x)'.\ln(1-x) + x.(\ln(1-x))' =$$

$$= \ln(1-x) + x.\frac{1}{1-x}(1-x)' = \ln(1-x) + x.\frac{1}{1-x}(-1) =$$

$$= \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

Десислава Стоянова Войникова

Задача 27 Производна на показателна функция

$y = 3^{-x}$ от (10) $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$

$y' = -3^{-x}\ln 3$

Задача 28 $y = 7x^2 - x^3 - \log_5 x$

$$y' = 14x - 3x^2 - \frac{1}{x\ln 5}$$

$$y'' = 14 - 6x + \frac{1}{\ln 5.x^2}$$

$$y''' = -6 - \frac{2}{\ln 5.x^3}$$

Задача 29 $y = 3\sqrt[3]{x^2}$

Представяме функцията във вида $y = 3x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = 3\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$$

от (1) $\left(x^p\right)' = px^{p-1}$

$$y'' = 2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$y''' = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}} = \frac{8}{9}x^{-\frac{7}{3}}$$

Задача 30 $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}}$

Представяме функцията във вида $y = 3x^{-\frac{4}{3}}$

$$y' = 3\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} = -4x^{-\frac{7}{3}}$$ от (1) $\left(x^p\right)' = px^{p-1}$

Задача 31 $y = x^2\sqrt[5]{x^2}$

Представяме функцията във вида $y = x^2 x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{12}{5}}$

$$y' = \frac{12}{5}x^{\frac{12}{5}-\frac{5}{5}} = \frac{12}{5}x^{\frac{7}{5}}$$ от (1) $\left(x^p\right)' = px^{p-1}$

Задача 32 $y = \dfrac{4x}{1-x^2}$ *Имаме производна на частно.*

$$y' = 4\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = 4\left[\frac{(x)'(1-x^2) - x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}\right] =$$

$$= 4\left[\frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2}\right] = 4\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{4(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$$

Десислава Стоянова Войникова

Задача 33 $y = 2\sqrt{1-x^2}$

Представяме функцията във вида $y = 2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Имаме производна на сложна функция.

$$y' = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-2x\right) =$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Намираме втората производна.

$$y'' = -2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -2\left[\frac{1\sqrt{1-x^2} - x\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1-x^2}\right] =$$

$$= -2\left[\frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right] = -\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Задача 34 $y=\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$

От таблицата на основните производни използваме 12, като същевременно имаме производна на сложна функция.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\left(1+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}$$

Задача 35 $y = \mathrm{e}^{3x} \arcsin 5x$

Търсим производна на произведение от сложни функции, като същевременно използваме 10 и 4 от таблицата на основните производни.

$$y' = \left(\mathrm{e}^{3x}\right)' \arcsin 5x + \mathrm{e}^{3x} \left(\arcsin 5x\right)' =$$

$$= \mathrm{e}^{3x} \left(3x\right)' \arcsin 5x + \mathrm{e}^{3x} \frac{1}{\sqrt{1-\left(5x\right)^2}} \left(5x\right)' =$$

$$= 3\mathrm{e}^{3x} \arcsin 5x + \frac{5\,\mathrm{e}^{3x}}{\sqrt{1-\left(5x\right)^2}}$$

Задача 36 $$y=\frac{x^2}{\ln 4x}$$

Търсим производна на частно, като същевременно използваме 1 и 12 от таблицата на основните производни.

$$y'=\frac{2x\ln 4x-x^2\dfrac{1}{4x}(4x)'}{(\ln 4x)^2}=\frac{2x\ln 4x-\dfrac{4x^2}{4x}}{(\ln 4x)^2}=$$

$$=\frac{x(2\ln 4x-1)}{(\ln 4x)^2}$$

Задача 37 $y = \cos^3 x + \cos\left(x^3\right)$

$$y' = \left(\cos^3 x\right)' + \left(\cos\left(x^3\right)\right)' = 3\cos^2 x\left(\cos x\right)' - \sin\left(x^3\right)3x^2 =$$

$$= -3\sin x\cos^2 x - 3x^2\sin\left(x^3\right)$$

Задача 38 $y = \sqrt{\operatorname{arctg} 6x} - \arcsin^3\left(x^2\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} 6x}}\frac{1}{1+36x^2}6 - 3\arcsin^2\left(x^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}2x =$$

$$= \frac{3}{\left(1+36x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} 6x}} - \frac{6x\arcsin^2\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}$$

Задача 39 $\quad y = 5\mathrm{e}^{x^2} + {}^{\arccos 7x}$

Използваме:

$$\boxed{\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}.\ln a.u'(x)}$$

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = \mathrm{e}^{u(x)}\,u'(x)}$$

$$y' = 5^{x^2}.\ln \mathrm{e}5.\left(x^2\right)'.+ {}^{\arccos 7x}.\arccos 7\left(x\right)' =$$

$$= 5^{x^2}.\ln 5\mathrm{e}.2x + {}^{\arccos 7x}.\left(-\frac{1}{\sqrt{1-49x^2}}.7\right)$$

Десислава Стоянова Войникова

Задача 40 $y=\operatorname{tg}^3\left(3x^6-8x^2+7x\right)$

$$y'=3\operatorname{tg}^2\left(3x^6-8x^2+7x\right)\frac{1}{\cos^2\left(3x^6-8x^2+7x\right)}\left(18x^5-16x+7\right)$$

Задача 41 $y=\dfrac{\sin 5x}{\cos^4 3x}$

$$y'=\frac{(\sin 5x)'\cos^4 3x-\sin 5x\left(\cos^4 3x\right)'}{\left(\cos^4 3x\right)^2}=$$

$$=\frac{5\cos 5x\cos^4 3x-\sin 5x\left[4\cos^3 3x(-\sin 3x)3\right]}{\cos^8 3x}=$$

$$=\frac{5\cos 5x\cos^4 3x+12\sin 5x\cos^3 3x\sin 3x}{\cos^8 3x}$$

Задача 42 $$y=\sin^4\left(2x^2-4x+1\right)$$

$$y'=4\sin^3\left(2x^2-4x+1\right)\cos\left(2x^2-4x+1\right)\left(4x-4\right)$$

Задача 43 $$y=\sin\sqrt{1+x^2}$$

$$y'=\cos\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\cos\sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x=\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Изчисление с Mathematica

Чрез функцията $D[f,x]$ или $\partial_x f$ символично се определя частната производна на f относно x.

Чрез функцията $D[f,x,y\ldots]$ или $\partial_{x,y} f$ символично се определя частната производна на f относно x, производна на резултата относно y и т.н.

Чрез функцията $D[f,\{x,n\}]$ или $\partial_{x,x} f$ се определя n-та производна на f относно x (тук n=2).

Задача: Да се намерят първа, втора и трета производна на функцията $y = \dfrac{x^3}{3}$

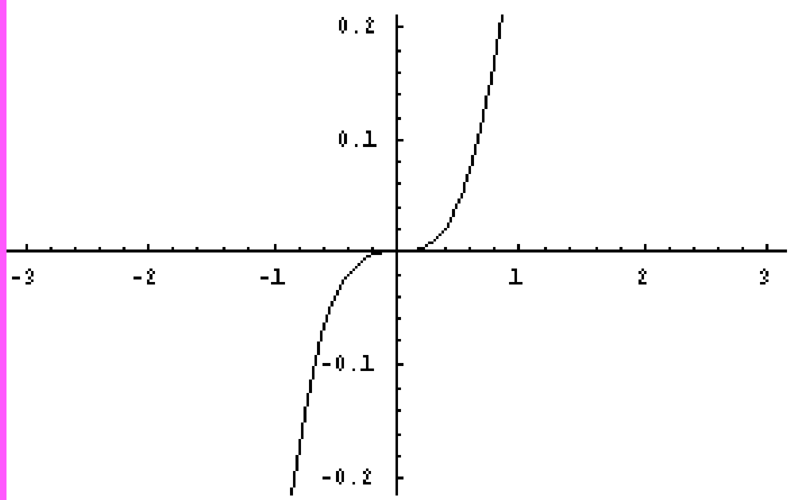
```
f[x_] := x^3/3 ;
Print["Първата производна на функцията f относно x е f'x = ", ∂x f[x]]
Print["Втората производна на функцията f относно x е f''x = ", ∂x,x f[x]]
Print["Третата производна на функцията f относно x е f'''x = ", ∂x,x,x f[x]]
```

Първата производна на функцията f относно x е $f'_x = x^2$

Втората производна на функцията f относно x е $f''_x = 2x$

Третата производна на функцията f относно x е $f'''_x = 2$

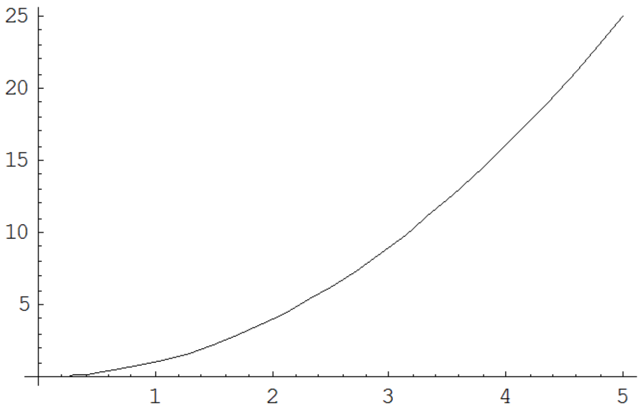
```
Plot[f[x], {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



- Graphics -

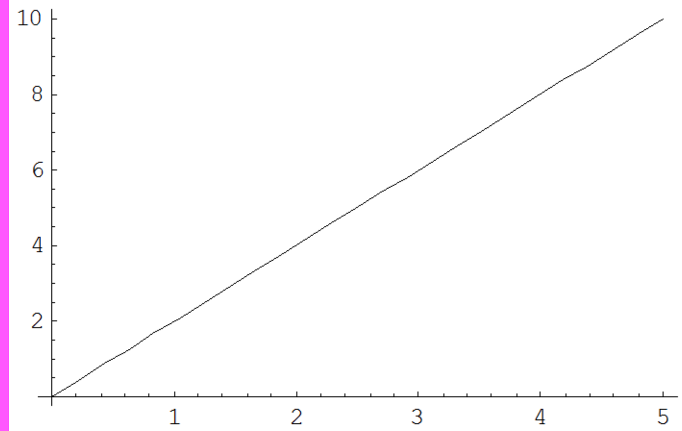
Десислава Стоянова Войникова

```
Plot[ f'[x], {x, 0, 5}]
```



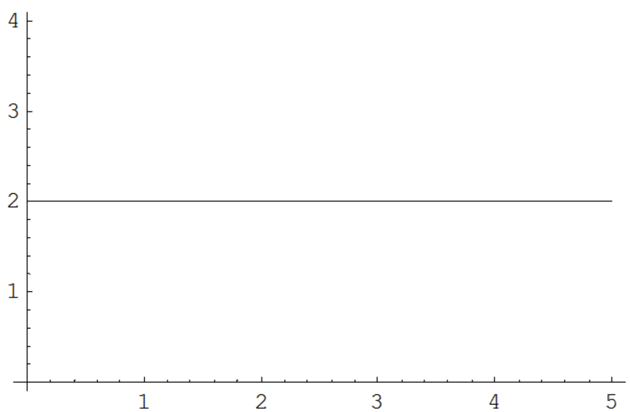
- Graphics -

```
Plot[ f''[x], {x, 0, 5}]
```



- Graphics -

```
Plot[ f'''[x], {x, 0, 5}]
```



- Graphics -

Десислава Стоянова Войникова