ГЛАВА VII

# НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Понятието неопределен интеграл възниква съвсем естествено, когато си поставим за задача да дефинираме действието, обратно на действието диференциране. Оказва се обаче, че методите за извършването на това действие, което се нарича интегриране и се състои в намирането на една функция, на която познаваме производната, са много по-сложни, отколкото методите за диференциране. Ние ще се запознаем постепенно с различни методи, позволяващи ни да интегрираме някои специални, но все пак достатъчно широки класове от функции.

## § 40. Дефиниция и най-прости свойства на неопределените интеграли

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана в един интервал. Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е **примитивна функция** или **неопределен интеграл** на функцията $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцуема в този интервал и $F'(x)=f(x)$.

Така например функцията $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ е примитивна на функцията $f(x)=x^2$ в интервала $(-\infty, \infty)$. В същия интервал функцията $F(x)=\sin x$ се явява примитивна на функцията $f(x)=\cos x$.

Когато една функция $f(x)$ притежава поне една примитивна $F(x)$ в някой интервал, то тя притежава тогава и безбройно много примитивни в същия интервал, тъй като всяка функция от вида $F(x)+C$, където $C$ е константа, ще бъде също примитивна на $f(x)$. И наистина, ако $F'(x)=f(x)$, то $(F(x)+C)'=f(x)$. Лесно е да се види при това, че други примитивни функции дадената функция $f(x)$ няма. А именно валидна е следната

**Теорема.** *Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x)+C$, където $C$ е някаква константа.*

Доказателство. И наистина нека $\Phi(x)$ е произволно взета примитивна функция на $f(x)$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$. Имаме $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$, т. е. $\varphi'(x)=0$ за всяко $x$ от дадения интервал. Тогава съгласно основната теорема на интегралното смятане функцията $\varphi(x)$ е константа в този интервал, т. е. $\varphi(x)=C$, или $\Phi(x)-F(x)=C$, откъдето $\Phi(x)=F(x)+C$.

За да отбележим, че функцията $F(x)$ е примитивна на дадена функция $f(x)$, пишем

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

При това записване функцията $f(x)$ се нарича **подинтегрална функция**.

По-късно ще покажем, че всяка функция, непрекъсната в един интервал, има примитивна в този интервал и че следователно символът $\int f(x)dx$ има смисъл винаги когато $f(x)$ е непрекъсната.

Тази глава ще бъде посветена на методите за пресмятане на примитивните функции. Във важността на тази задача ще се убедим понататък — когато в следващата глава изучаваме теорията на т. нар. определени интеграли.

Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$. В основата на интегрирането на функциите или, както ще казваме още, на пресмятането на неопределените интеграли лежи следната таблица:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1). \qquad \int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C \quad (x\neq 0).$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C. \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C. \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotg} x+C.$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C. \qquad \int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C \quad (a\neq 0).$$

Естествено всяка от тези формули може да се прилага за такъв интервал, за който е дефинирана съответната подинтегрална функция.

Доказателството на формулите в таблицата е очевидно. Ще покажем само как се установява втората от тях. Трябва да проверим, че при $x\neq 0$ имаме $(\ln|x|+C)'=\frac{1}{x}$. Наистина в интервала $(0, \infty)$ имаме $\ln(|x|+C)'=(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, а в интервала $(-\infty, 0)$ получаваме $\ln(|x|+C)'=(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$.

Постепенно ще се запознаем с методи за пресмятане на различни видове неопределени интеграли, като във всички случаи ще се стремим да сведем търсения интеграл към един или няколко от табличните интеграли.

Обикновено константата $C$ се изпуска — не се пише, но се подразбира.

Първата формула от таблицата на основните интеграли веднага ни дава възможност да пресметнем редица интеграли. С нейна помощ получаваме например

$$\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4,$$

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\,dx=-x^{-1}=-\frac{1}{x},$$

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}=\int x^{-\frac{1}{5}}\,dx=\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}.$$

В случая, когато подинтегралната функция е константата 1, с помощта на същата формула или още по-просто чрез непосредствена проверка получаваме

$$\int dx=x.$$

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, притежаващи примитивни функции в някой интервал. Тогава тяхната сума — функцията $f(x)+g(x)$, също притежава примитивна и при това имаме

(1) $$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx.$$

Също така, ако $f(x)$ има примитивна, а $k$ е константа, то функцията $kf(x)$ има също примитивна и е в сила равенството

(2) $$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$$

Верността на последните две равенства се установява много просто. Наистина имаме

$$\left(\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\right)'=\left(\int f(x)\,dx\right)'+\left(\int g(x)\,dx\right)'=f(x)+g(x),$$

което показва, че функцията

$$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

е примитивна на функцията $f(x)+g(x)$. С това е доказано равенството (1). Равенството (2) пък следва от равенствата



$$\left(k\int f(x)\,dx\right)'=k\left(\int f(x)\,dx\right)'=kf(x).$$

Равенствата (1) и (2) вече ни позволяват да пресмятаме някои най-прости неопределени интеграли. Ето някои примери:

$$\int(2x+3)^2\,dx=\int(4x^2+12x+9)\,dx$$
$$=4\int x^2\,dx+12\int x\,dx+9\int dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x;$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}.$$

**Упражнения.** Да се пресметнат следните интеграли:

$$\int\frac{dx}{x^3};\quad\int\sqrt[4]{x}\,dx;\quad\int(x+3)^3\,dx;\quad\int\frac{x^2+2}{x}\,dx;\quad\int\frac{x^3-4x^2+2x+3}{x^2}\,dx.$$

## § 41. Внасяне под знака на диференциала

С оглед на по-голямо удобство при пресмятанията уславяме се за следното:

Ако $\varphi(x)$ е диференцуема функция, ще пишем

(1) $$\int f(x)\varphi'(x)\,dx=\int f(x)\,d\,\varphi(x).$$

Когато прилагаме това равенство, ще казваме, че в н а с я м е ф у н к ц и я т а $\varphi'(x)$ п о д з н а к а н а д и ф е р е н ц и а л а или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. С други думи, интегрираме функцията $\varphi'(x)$. Ето защо можем също да пишем

(2) $$\int f(x)\varphi'(x)\,dx=\int f(x)\,d\,[\varphi(x)+C],$$

където $C$ е произволна константа.

Също така ще имаме (въз основа на равенствата (1) и (2))

$$k\int f(x)\,d\,\varphi(x)=\int k\,f(x)\,d\,\varphi(x)=\int f(x)\,dk\,\varphi(x)=\int f(x)\,d[k\,\varphi(x)+C],$$

където $k$ и $C$ са константи, а $\varphi(x)$ е диференцуема функция.

Ето няколко примера за внасяне под диференциала:

$$\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x\,d\sin x;$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2;$$

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^5 d\, 2x = \frac{1}{2} \int (2x+1)^5 d(2x+1).$$

Нека забележим още следното: За всяка функция, притежаваща примитивна в някой интервал, имаме очевидно

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

От друга страна, за всяка диференцуема функция $f(x)$ е изпълнено

$$\int d f(x) = f(x).$$

Тези две равенства ни показват, че знаците $\int$ и $d$ взаимно се унищожават.

Ползата от действието внасяне под знака на диференциала се вижда ясно от следната

**Теорема.** *Нека за някакъв интервал $D$ имаме*

(3) $$\int f(x)\, dx = F(x).$$

*Ако $\varphi(t)$ е диференцуема функция, дефинирана в някой интервал $D_1$, стойностите на която принадлежат на интервала $D$, то в интервала $D_1$ имаме*

(4) $$\int f[\varphi(t)]\, d\varphi(t) = F[\varphi(t)].$$

Доказателство. Преди всичко интегралът от лявата страна на равенството (4) може да бъде написан така:

(5) $$\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

От друга страна, като използуваме правилото за диференциране на съставни функции и вземем пред вид, че в интервала $D$ имаме $F'(x) = f(x)$, ще получим равенствата

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

валидни за всяко $t$ от $D_1$. Виждаме, че производната на функцията $F[\varphi(t)]$, намираща се в дясната страна на равенството (4), е равна на подинтегралната функция на интеграла (5). С това теоремата е доказана.

Тази теорема ни позволява, накратко казано, във всяко равенство от вида (3) да заместим променливата $x$ с произволна диференцуема функция $\varphi(t)$ (стига стойностите на тази функция да принадлежат на интервала, за който е валидно равенството (3)). По-специално всички формули от нашата таблица на основните интеграли запазват своята валидност, ако заменим в тях навсякъде променливата $x$ с някоя диферен-



цуема функция $\varphi(t)$. Тази именно последна забележка заедно с действието внасяне под знака на диференциала ни дава възможност вече да пресмятаме много неопределени интеграли.

Ето някои примери:

1. $\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2}.$

2. $\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x d \sin x = \frac{1}{2} (\sin x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x.$

3. $\int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

4. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln(\ln x)$ при $x > 1$.

5. $\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d\, 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x.$

6. $\int (2x+3)^3 dx = \frac{1}{2} \int (2x+3)^3 d\, 2x = \frac{1}{2} \int (2x+3)^3 d(2x+3)$

   $= \frac{1}{8} (2x+3)^4.$

7. $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1}\, d\, 2x = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1}\, d(2x+1)$

   $= \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}.$

8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

   $(a>0, \quad -a<x<a).$

10. $\int \sin^3 x\, dx = -\int \sin^2 x d \cos x = -\int (1-\cos^2 x)\, d \cos x$

    $= -\int d \cos x + \int \cos^2 x d \cos x = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$

11. $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d\,2x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x.$$

**12.** $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d\,2x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

**13.** $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}}=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x}=\ln|\mathrm{tg}\,x|\;\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$

**14.** $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\int\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\quad(0<x<\pi).$$

**15.** $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$

От задача 14 получаваме

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

**Упражнения.** Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx.$ 2. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx.$ 3. $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}.$ 5. $\int\frac{dx}{x+1}.$ 6. $\int e^{-x}\,dx.$ 7. $\int e^{-x^2}\,x\,dx.$

8. $\int\frac{dx}{5+x^2}.$ 9. $\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 10. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^4}}.$ 11. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2+x^2}}.$

12. $\int\frac{x^2\,dx}{3+x^3}.$ 13. $\int\cos^3 x\,dx.$ 14. $\int\sin 5x\,dx.$ 15. $\int\sin^2 2x\,dx.$

16. $\int\frac{dx}{\sin 2x}.$ 17. $\int\cos x\,e^{\sin x}\,dx.$ 18. $\int\mathrm{tg}\,x\,dx.$



## § 42. Интегриране по части

Важно средство за пресмятане на неопределените интеграли е т. нар. формула за интегриране по части.

Нека $u(x)$ и $v(x)$ са две функции, диференцуеми в един интервал $D$. Тогава, както знаем, за всяко $x$ от $D$ имаме

$$[u(x)\,v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Това равенство показва, че функцията $u(x)\,v(x)$ е примитивна на функцията $u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$. Следователно имаме

$$u(x)\,v(x)=\int u'(x)\,v(x)\,dx+\int u(x)\,v'(x)\,dx,$$

което може да се напише още така:

$$u(x)\,v(x)=\int v(x)\,du(x)+\int u(x)\,dv(x),$$

или окончателно

$$\int u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x). \tag{1}$$

Равенството (1) се нарича **формула за интегриране по части**. Ние ще прибягваме към нея, когато желаем да пресметнем интеграла, който е в лявата страна на равенството, но интегралът, написан в дясната му страна, е по-достъпен за пресмятане. Ето някои примери.

**1.** $\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x=x(\ln x-1)\qquad(x>0).$$

**2.** $\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int\ln x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\quad(x>0).$$

**3.** $\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x.$

**4.** $\int xe^x\,dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x.$

**5.** $\int e^x\sin x\,dx=\int\sin x\,de^x=e^x\sin x-\int e^x\,d\sin x$

$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int\cos x\,de^x$$

$$=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x\,d\cos x$$

$$=e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx,$$

откъдето получаваме

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

Аналогично пресмятаме $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$.

**6.** Формулата за интегриране по части се използва при пресмятането на следните често срещани интеграли:

$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$ в интервала $(-\infty, \infty)$,

$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ в интервала $(-a, a)$,

$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx$ в интервалите $(-\infty, -a)$ и $(a, \infty)$,

където $a>0$.

Ние ще пресметнем подробно първия от тях (начинът за пресмятането на другите два е аналогичен). Имаме

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int x d\sqrt{a^2+x^2} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$$

$$+a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| - \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$$

Оттук

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|].$$

**7.** След като се запознаем с общия метод за интегриране на рационални функции, ще видим, че твърде често при това интегриране се достига до интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n},$$

където $a$ е някаква константа, а $n$ е цяло положително число. Ето как чрез известни преобразувания, между които и използване на формулата за интегриране по части, пресмятането на този интеграл, който за краткост ще означим с $I_n$, може да се сведе към пресмятането на интеграла $I_{n-1}$:

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(a^2+x^2)^n} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x(a^2+x^2)^{-n}\, dx^2$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x(a^2+x^2)^{-n}\, d(a^2+x^2)$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2(-n+1)a^2}\int x d\,(a^2+x^2)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2n-2}\right) I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

И така получихме следната рекурентна връзка:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)a^2}\,\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Като приложим този метод $n-1$ пъти, ние ще изразим $I_n$ в крайна сметка посредством интеграла

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2},$$

който се пресмята непосредствено.

**Упражнения.** Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int x^3 \ln x\, dx \quad (x>0)$.
2. $\int x^2 \sin x\, dx$.
3. $\int x^3 e^x\, dx$.
4. $\int \sqrt{x^2-2} \quad (x>\sqrt{2})$.
5. $\int \sqrt{5-x^2}\, dx \quad (-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$.
6. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
7. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
8. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.
9. $\int \arcsin x\, dx$.
10. $\int x \arcsin x\, dx$.
11. $\int x^2 \arcsin x\, dx$.
12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.
13. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^3}$.
14. $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$.

## § 43. Интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

При пресмятане на интегралите

(1) $$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

където $m$ и $n$ са произволни цели числа, постъпваме по различен начин в зависимост от разните случаи, които могат да се представят за стойностите на $m$ и $n$.

Преди всичко ще отбележим, че пресмятането на интеграла $I_{m,n}$ се извършва веднага, ако $m=1$ или $n=1$. Наистина имаме

$$I_{m,1}=\int \sin^m x \cos x\,dx=\int \sin^m x\,d\sin x=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}\sin^{m+1}x & \text{при } m\neq -1\\ \ln|\sin x| & \text{при } m=-1,\end{cases}$$

$$I_{1,n}=\int \sin x\cos^n x\,dx=-\int \cos^n x\,d\cos x=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1}x & \text{при } n\neq -1\\ -\ln|\cos x| & \text{при } n=-1.\end{cases}$$

Ако поне един от степенните показатели $m$ и $n$ е нечетно положително число, например $n=2k+1$, където $k$ е цяло положително число, то пресмятането на интеграла $I_{m,n}$ може да се сведе към разгледания вече случай по следния начин:

$$I_{m,2k+1}=\int \sin^m x\cos^{2k+1}x\,dx=\int \sin^m x\cos^{2k}x\cos x\,dx$$

$$=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\cos x\,dx.$$

Като развием $(1-\sin^2 x)^k$ по формулата на нютоновия бином, ние ще представим $I_{m,2k+1}$ като сума на интеграли от вида $I_{s,1}$.

Аналогично постъпваме с интегралите от вида $I_{2k+1,n}$ (където $k$ е цяло положително число), които пък представяме като сума на интеграли от вида $I_{1,s}$.

Пример 1. $\int \sin^6 x\cos^5 x\,dx$

$$=\int \sin^6 x\cos^4 x\,d\sin x=\int \sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\,d\sin x$$

$$=\int \sin^6 x\,d\sin x-2\int \sin^8 x\,d\sin x+\int \sin^{10}x\,d\sin x$$

$$=\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{2}{9}\sin^9 x+\frac{1}{11}\sin^{11}x.$$

В общия случай пресмятането на интегралите $I_{m,n}$ изисква известни преобразувания. Ние ще посочим начините за получаване на три рекурентни формули, с помощта на които можем да доведем пресмятането на всеки интеграл от вида (1) докрай.

I. При $m\neq-1$, като използуваме формулата за интегриране по части, можем да преобразуваме интерграла $I_{m,n}$ по следния начин:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$



$$=\int \sin^m x\cos^{n-1}x\,d\sin x=\frac{1}{m+1}\int \cos^{n-1}x\,d\sin^{m+1}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x-\frac{1}{m+1}\int \sin^{m+1}x\,d\cos^{n-1}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx.$$

И така получаваме

$$I_{m,n}=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}. \tag{2}$$

Аналогично при $n\neq-1$ получаваме

$$I_{m,n}=-\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n+2}. \tag{3}$$

II. Винаги можем да преобразуваме $I_{m,n}$ по следния начин:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int \sin^{m-2}x(1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx,$$

откъдето получаваме

$$I_{m,n}=I_{m-2,n}-I_{m-2,n+2}. \tag{4}$$

Аналогично се получава

$$I_{m,n}=I_{m,n-2}-I_{m+2,n-2}. \tag{5}$$

Да отбележим, че като използуваме формулите (2), (3), (4) и (5) можем да изразим интеграла $I_{m,n}$ при $m\neq-1$ посредством интеграла $I_{m,n-2}$, а при $n\neq-1$ — чрез интеграла $I_{m-2,n}$.

III. Когато $m\leq 0$ и $n\leq 0$, за препоръчване е (ако изобщо се налага някаква преработка в дадения интеграл) да се започне със следното преобразуване:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int \sin^m x\cos^n x(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx,$$

откъдето получаваме

$$I_{m,n}=I_{m+2,n}+I_{m,n+2}. \tag{6}$$

Лесно е да се види, че с помощта на формулите (2), (3), (4), (5) и (6) можем да сведем пресмятането на всеки интеграл от вида (1) към пресмятането на един или няколко от следните интеграли:

$$\int \sin x\,dx,\quad \int \cos x\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\int \sin x\cos x\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sin x\cos x},$$

$$\int \sin^2 x\,dx,\quad \int \cos^2 x\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x},\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x},$$

което вече се извършва непосредствено.

**Пример 2.** $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

$$= -\int \sin^3 x \cos^2 x \, d\cos x = -\frac{1}{3}\int \sin^3 x \, d\cos^3 x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^3 x \, d\sin^3 x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^2 x (1-\sin^2 x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Оттук получаваме

(7) $$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{6}\sin^3 x \cos^3 x + \frac{1}{2}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Остава да пресметнем интеграла

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx,$$

което ще направим отделно. Имаме

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\int \sin x \cos^2 x \, d\cos x = -\frac{1}{3}\int \sin x \, d\cos^3 x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^3 x \, d\sin x$$

$$= -\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^4 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^2 x (1-\sin^2 x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx,$$

откъдето

(8) $$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{4}\int \cos^2 x \, dx.$$

Най-сетне

(9) $$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$



От равенствата (7), (8) и (9) получаваме стойността на търсения интеграл.

**Пример 3.** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$

$$= -\int \frac{\sin x \, d\cos x}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\int \sin x \, d\cos^{-3} x$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{d\sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x.$$

**Пример 4.** $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Тъй като пресмятането на интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$ ни е познато (вж. пример 14 от § 41), можем да считаме задачата за решена.

**Пример 5.** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x (1-\cos^2 x)}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\, dx - \int \sin^2 x \, d\sin x$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} - \int \cos x \, dx - \frac{1}{3}\sin^3 x = \int \frac{dx}{\cos x} - \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Достигнахме до интеграла $\int \frac{dx}{\cos x}$, който знаем да пресмятаме.

Нека да забележим накрая, че понякога, като използуваме една или друга тригонометрична формула, можем да опростим пресмятанията на даден интеграл от вида (1), без да прибягваме към нито един от посочените методи за преобразуване на този интеграл. Така например интегралът

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx,$$

който ние пресметнахме, когато разглеждахме пример 2, може по-просто да бъде пресметнат така:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x\,d\,4x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x.$$

**Упражнения.** Пресметнете интегралите:

1. $\int \sin^3 x \cos^8 x\,dx.$ 2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx.$ 3. $\int \sin^4 x\,dx.$

4. $\int \cos^6 x\,dx.$ 5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx.$ 6. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

## § 44. Интегриране чрез смяна на променливата

Един метод, който твърде често се използува при пресмятането на неопределените интеграли, е т. нар. интегриране чрез смяна на променливата или интегриране чрез субституция. То се основава на следната

**Теорема.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал $D$, а функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в интервала $D_1$, като при това производната ѝ $\varphi'(t)$ е строго положителна (или пък строго отрицателна) в този интервал. Да предположим още, че множеството от стойностите на функцията $\varphi(t)$ съвпада с $D$. Ако за интервала $D_1$ е изпълнено равенството*

$$(1)\qquad \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t) = F(t),$$

*то за интервала $D$ имаме*

$$(2)\qquad \int f(x)\,dx = F[\psi(x)],$$

*където $\psi(x)$ е обратната функция на функцията $\varphi(t)$.*

Доказателство. Преди всичко нека отбележим, че от условието, наложено на $\varphi'(t)$, следва, че функцията $\varphi(t)$ е строго монотонна и следователно обратима в интервала $D_1$. Да напишем още веднъж равенството (1) в следния вид:

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F(t).$$

Така написано, то ни показва, че за всяко $t$ от $D_1$ имаме

$$(3)\qquad F'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$



За да докажем равенството (2), трябва да установим, че функцията $F[\psi(x)]$ е диференцуема в интервала $D$ и че нейната производна е равна на $f(x)$. Като приложим правилото за диференциране на съставни функции и като вземем пред вид равенството (3), получаваме

$$\{F[\psi(x)]\}' = F'[\psi(x)]\psi'(x) = f[\varphi(\psi(x))]\varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x).$$

Тъй като $\psi(x)$ е обратна функция на функцията $\varphi(t)$, то, от една страна, ще имаме $\varphi[\psi(x)] = x$, а, от друга страна, съгласно правилото за диференциране на обратни функции ще получим

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'[\psi(x)]}.$$

Следователно

$$\{F[\psi(x)]\}' = f(x)\varphi'[\psi(x)]\cdot\frac{1}{\varphi'[\psi(x)]} = f(x).$$

С това теоремата е доказана.

Тази теорема е в известен смисъл обратна на теоремата от § 41. Наистина, докато там видяхме как можем да пресмятаме интеграла

$$(4)\qquad \int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t),$$

когато познаваме интеграла

$$(5)\qquad \int f(x)\,dx,$$

тук, обратно, получаваме възможност да пресметнем втория от тези два интеграла, когато знаем първия.

Теоремата за смяна на променливата ще използуваме, когато желаем да пресметнем интеграла (5) и когато можем така да подберем функцията $\varphi(t)$, удовлетворяваща условието на теоремата, че интегралът (4), получен чрез заместване на $x$ с $\varphi(t)$, да бъде по-достъпен за третиране. След като пресметнем интеграла (4), връщаме се отново към променливата $x$, като в получения резултат заместваме $t$ с функцията $\psi(x)$, обратна на функцията $\varphi(t)$. Обикновено при решаване на задачи от този тип казваме, че извършваме субституцията $x = \varphi(t)$.

Пример 1. Нека да решим интеграла

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a>0) \text{ в интервала } (-a, a).$$

Да направим субституцията $x = a\sin t$, където $t$ се мени в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В този интервал имаме $(a\sin t)' = a\cos t > 0$ и се проверява лесно, че условията на теоремата са изпълнени. Тогава ще имаме

$$F(t) = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,d a\sin t = a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$

$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t\,d\,2t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}.$$

Обратна на функцията $x=a\sin t$ е очевидно функцията $\arcsin\frac{x}{a}$, дефинирана в интервала $(-a, a)$. Ние я получаваме, като решим, така да се каже, равенството $x=a\sin t$ относно $t$. Ето защо пишем $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и заместваме в получения резултат. Като вземем пред вид, че $\sin t=\frac{x}{a}$, получаваме

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Пример 2. Да пресметнем интеграла

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\quad(a>0)$$

в интервала $(-\infty, \infty)$. Можем да направим субституцията $x=a\operatorname{tg} t$, където $t$ се мени в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тук имаме $(a\operatorname{tg} t)'=\frac{a}{\cos^2 t}>0$. Въз основа на теоремата за смяна на променливата ще получим

$$F(t)=\int\frac{da\operatorname{tg} t}{(a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{a^3}\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2a^3}t+\frac{1}{4a^3}\sin 2t=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right).$$

Обратната функция на $x=a\operatorname{tg} t$ е функцията $t=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$, дефинирана за всяко $x$. Ето защо за целия интервал $(-\infty, \infty)$ ще имаме

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+a\frac{x}{a^2+x^2}\right).$$

С помощта на една проста субституция се пресмятат лесно интегралите от вида

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q},\tag{6}$$

където $p$ и $q$ са константи, удовлетворяващи условието $p^2-4q<0$. (Това е случаят, в който, както е известно, квадратното уравнение $x^2+px+q=0$ няма реални корени.) В този случай можем да направим субституцията

$$x=t-\frac{p}{2},\tag{7}$$



която ни позволява да се освободим от члена от първа степен в знаменателя. Наистина ще имаме

$$\int\frac{d\left(t-\frac{p}{2}\right)}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}=\int\frac{dt}{t^2-\frac{p^2}{4}+q}=\int\frac{dt}{t^2+\frac{4q-p^2}{4}}.$$

Тъй като константата $\frac{4q-p^2}{4}$ е положителна, имаме интеграл от вида

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2},$$

който се пресмята непосредствено. Стойността на търсения интеграл (6) ще намерим, като в получения резултат заместим $t$ с $x+\frac{p}{2}$. Това е обратната функция на функцията $t-\frac{p}{2}$, която намираме просто, като решим равенството (7) относно $t$.

Пример 3. Да пресметнем интеграла

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+4}.$$

Тук $p^2-4q=-7$, следователно интегралът е от разгледания по-горе тип. Правим субституцията $x=t+\frac{3}{2}$ и получаваме

$$\int\frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-3\left(t+\frac{3}{2}\right)+4}=\int\frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}=\frac{4}{7}\int\frac{dt}{\frac{4}{7}t^2+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\int\frac{d\frac{2}{\sqrt{7}}t}{\left(\frac{2t}{\sqrt{7}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{7}}.$$

Тъй като $t=x-\frac{3}{2}$, то получаваме окончателно

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+4}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}.$$

Субституцията (7) ни позволява да извършим пресмятането и на интеграли от вида

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.\tag{8}$$

При това тук тази субституция ни довежда винаги до резултат, т. е. тук не е необходимо да се правят някакви предположения за $p$ и $q$ (освен онези, които осигуряват подкоренният израз да бъде положителен в даден интервал).

**Пример 4.** Нека пресметнем интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} \quad \text{при} \quad x>1.$$

Правим субституцията $x=t-1$ и получаваме

$$\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+2(t-1)-3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} = \ln|t+\sqrt{t^2-4}|.$$

Но $t=x+1$, поради което получаваме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-8}|.$$

**Упражнения.** Пресметнете интегралите:

1. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ при $-a<x<a$.
2. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.
3. $\int \frac{dx}{x^2+x+5}$.
4. $\int \frac{dx}{2x^2-x+3}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

## § 45. Интегриране на рационални функции

Ще се запознаем с един общ метод, който ни позволява да интегрираме всяка рационална функция. Както знаем, общият вид на една рационална функция е

$$(1) \qquad f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми. От алгебрата е известно, че ако степента на $P(x)$ е по-висока или равна на степента на $Q(x)$, можем да извършим делението на полиномите и да получим представянето

$$f(x)=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Тук $S(x)$ и $R(x)$ са също полиноми, при това степента на $R(x)$ е по-ниска от степента на $Q(x)$. Тъй като интегрирането на полинома $S(x)$ не представлява проблема, можем от самото начало да допуснем, че в представянето (1) на рационалната функция $f(x)$ полиномът в числителя $P(x)$ е от степен, по-ниска от степента на полинома в знаменателя $Q(x)$.

Също така от алгебрата е известно, че полиномът $Q(x)$, както всеки полином, може да бъде разложен на прости множители от първа и втора степен, т. е. да се представи във вида

$$(2) \qquad Q(x)=C(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x^2+px+q)^{\lambda}\dots$$

Тук $C, a, b, \dots, p, q, \dots$ са реални константи, а степенните показатели $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \dots$ са цели и положителни. При това числата $a, b, \dots$



са реалните корени на уравнението $Q(x)=0$. Следователно множителите от първа степен ще липсват, когато това уравнение има само комплексни корени. Множителите от втора степен пък отговарят на комплексните корени на уравнението $Q(x)=0$, когато то има такива. Както знаем, комплексните корени а двa по два имагинерно спрегнати. На всеки два имагинерно спрегнати корена ще отговаря един множител от втора степен в разлагането (2), който те анулират. Поради това множителите от вида $x^2+px+q$ ще удовлетворяват условието $p^2-4q<0$ и няма да могат да бъдат разложени на множители от първа степен с реални коефициенти.

Като се има пред вид разлагането (2), може при направените предположения за степените на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ да се покаже чрез разсъждения от алгебричен характер, които ние няма да привеждаме, че рационалната функция (1) се разлага в сума от следния вид:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta}}{x-b} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Отделните събираеми в дясната страна на това равенство се наричат *е л е м е н т а р н и  д р о б и*. Те са два вида — едни, които отговарят на множителите от първа степен в разлагането (2) и имат в числителя си константа, и други, които отговарят на множителите от втора степен в това разлагане и имат в числителя си линейна функция. При това на всеки множител от разлагането (2) отговарят толкова елементарни дроби, колкото е стойността на неговия степенен показател.

Разлагането (3) свежда интегрирането на рационалната функция $f(x)$ към интегриране на елементарни дроби. Те са, както вече отбелязахме, два вида. Елементарните дроби от първия вид, т. е. от вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},$$

се интегрират непосредствено. Що се отнася до елементарните дроби от втория вид, т. е. от вида

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},$$

то тяхното интегриране се извършва чрез субституцията $x=t-\frac{p}{2}$ (тази субституция, разбира се, е излишна, когато $p=0$). Получаваме

$$\int \frac{Mt - \frac{p}{2} M + N}{\left(t^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right)^\lambda} dt.$$

Ако положим $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ (това можем да направим, тъй като $4q-p^2>0$) и $N-\frac{p}{2} M=K$, последният интеграл се разлага на следната сума:

$$M \int \frac{t\,dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} + K \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda}.$$

Първият от тези два интеграла се пресмята веднага, като внесем $t$ под знака на диференциала, а с пресмятането на втория се запознахме в § 42 (пример 7).

Разбира се, при този метод не е достатъчно само да се намери разлагането (2) и след това да се напише разлагането (3). Преди да пристъпим към интегрирането на елементарните дроби, трябва още да намерим константите $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_\lambda, N_\lambda, \ldots$, които участвуват в разлагането (3). Пресмятането на тези константи може да стане по различни начини. Ние ще покажем при конкретни примери как се извършва това. Обикновено започваме с това, че в равенството (3) се освобождаваме от знаменателя и получаваме равенството на два полинома. По-нататък можем или да дадем на $x$ някои конкретни стойности, или пък да приравним коефициентите пред еднаквите степени на $x$ в полиномите от лявата и от дясната страна на полученото равенство. И при двата начина се получават числени равенства, в които остават като неизвестни търсените константи. Те се пресмятат по правилата за решаване на системи уравнения.

Ще илюстрираме казаното с няколко примера.

Пример 1. Да се представи като сума на елементарни дроби функцията

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}.$$

Най-напред написваме разлагането $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$, откъдето имаме

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

След освобождаване от знаменателя получаваме

$$1=A(x+3)+B(x-2).$$

Като положим $x=2$, намираме $A=\frac{1}{5}$, а при $x=-3$ получаваме $B=-\frac{1}{5}$.

Следователно

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$



Пример 2. Да разложим функцията

$$f(x)=\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}.$$

Тъй като степента на полинома в числителя е по-висока от степента на полинома в знаменателя, най-напред извършваме делението и получаваме

$$\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=x-3+\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}.$$

След това разлагаме функцията $\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$ на елементарни дроби. Поради разлагането $x^4+3x^3+3x^2+x=x(x+1)^3$ ще имаме

$$\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{(x+1)^3}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{x+1},$$

откъдето получаваме

$$6x^3+3x+1=A(x+1)^3+B_1x+B_2x(x+1)+B_3x(x+1)^2.$$

След разкриване на скобите приравняваме коефициентите пред $x^3$, $x^2$, $x$, както и свободните членове от двете страни на полученото равенство:

$$\begin{aligned} A+B_3&=6,\\ 3A+B_2+2B_3&=0\\ 3A+B_1+B_2+B_3&=3,\\ A&=1. \end{aligned}$$

Оттук намираме

$$A=1,\ B_1=8,\ B_2=-13,\ B_3=5.$$

Следователно ще имаме окончателно

$$\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}=x-3+\frac{1}{x}+\frac{8}{(x+1)^3}-\frac{13}{(x+1)^2}+\frac{5}{x+1}.$$

Пример 3. Да разложим на елементарни дроби функцията

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}.$$

Поради разлагането $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ ще имаме

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1},$$

откъдето

$$x^2+2x+3=A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1).$$

Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на $x$, получаваме

$$A+M=1,\quad -M+N=2,\ A-N=3.$$

Оттук намираме

$$A=3,\ M=-2,\ N=0.$$

Следователно имаме

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{2x}{x^2+1}.$$

Пример 4. Да разложим функцията $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$.

Имаме

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2,$$

откъдето

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

И така ще имаме

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Като се освободим от знаменателя, получаваме

$$1=(Mx+N)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Px+Q)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Чрез сравняване на коефициентите достигаме до следната система уравнения относно неизвестните константи:

$$M+P=0,$$

$$N+Q+\sqrt{2}(P-M)=0,$$

$$M+P+\sqrt{2}(Q-N)=0,$$

$$N+Q=1.$$

Тази система е очевидно еквивалентна на системата

$$M+P=0, \qquad N+Q=1,$$

$$M-P=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad N-Q=0.$$

Оттук намираме

$$M=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad P=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad N=Q=\frac{1}{2}.$$

Следователно

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

**Упражнения.** Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int\frac{dx}{x^2+5x+4}$. Отг. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|$.



2. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$. Отг. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$.

3. $\int\frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$. Отг. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

4. $\int\frac{dx}{x^3-1}$. Отг. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

5. $\int\frac{dx}{x^4+1}$. Отг. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

6. $\int\frac{dx}{x^4-1}$. Отг. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$.

7. $\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$. Отг. $\frac{2}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

8. $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$. Отг. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

9. $\int\frac{dx}{x^6+1}$. Отг. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}x$.

## § 46. Интегриране на някои ирационални функции

За разлика от това, което имахме при рационалните функции, за интегриране на ирационалните функции не съществува общ метод. Нещо повече, по-голямата част от ирационалните функции притежават такива примитивни, които изобщо не могат да се изразят чрез елементарните функции. Само за някои специални категории ирационални функции съществуват методи за интегрирането им. Общ принцип е намирането на подходяща субституция, която позволява да сведем пресмятането на даден интеграл от ирационална функция към пресмятане на интеграл от рационална функция. Ще се спрем на някои от тези специални категории ирационални функции, за които това е възможно.

Най-напред ще разгледаме такива ирационални функции, в които променливата $x$ и няколко нейни радикала

$$\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\quad \sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ \ldots,\ \sqrt[n_s]{x^{m_s}}$$

са подложени само на т. нар. рационални действия, т. е. на действията събиране, изваждане, умножение и деление. Тук $n_1, n_2, \ldots, n_s$ са цели положителни числа, а $m_1, m_2, \ldots, m_s$ са цели числа. Функции от този вид винаги могат да бъдат интегрирани. Това става, като вземем най-малкото общо кратно $k$ на числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$ и направим субституцията

$$x=t^k.$$

При тази субституция всички радикали преминават в степени на $t$ с цели степенни показатели. Като вземем пред вид, че

$$dx=kt^{k-1}dt,$$

става ясно, че след субституцията ще получим интеграл от рационална функция на $t$.

Пример 1. Да пресметнем интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} \quad \text{при } x>0.$$

Правим субституцията $x=t^6$ и свеждаме дадения интеграл към интеграла

$$6\int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt.$$

Описаният метод може да се използува и при функции от по-сложен вид, а именно при такива функции, при които вместо радикали на $x$ имаме радикали на някоя дробно-линейна функция на $x$ от вида $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$ (тук $a$, $b$, $a_1$, $b_1$ са константи, удовлетворяващи условието $ab_1-a_1b\neq 0$). Предполагаме, че тези радикали

$$(1) \qquad \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_1}}, \quad \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_s]{\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{m_s}}$$

(където числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$ са пак цели и положителни, а $m_1, m_2, \ldots, m_s$ са цели) са подложени само на рационалните действия. Интегрирането на функции от този вид става чрез субституцията, определена от равенството

$$(2) \qquad \frac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^k,$$

където $k$ е най-малкото общо кратно на числата $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Наистина от равенството (2) получаваме

$$(3) \qquad x=\frac{b_1t^k-b}{a-a_1t^k}.$$

И така $x$ се явява рационална функция на $t$. Освен това всички радикали (1) преминават в степени на $t$ с цели степенни показатели. Най-сетне от (3) получаваме

$$dx=k\,\frac{ab_1-a_1b}{(a-a_1t^k)^2}\,t^{k-1}\,dt,$$

така че и множителят, който идва от $dx$, ни донася една рационална функция на $t$. В резултат получаваме интеграл от рационална функция на $t$.



Пример 2. Да се занимаем с интеграла

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt[3]{x+1}}\,dx \quad \text{при } x>0.$$

Посредством субституцията

$$x+1=t^6,$$

която ни дава $x=t^6-1$, даденият интеграл се свежда до следния интеграл от рационална функция:

$$-6\int \frac{t^3}{t^3+1}\,dt.$$

Пример 3. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \quad \text{при } x>1.$$

Представяме дадения интеграл във вида

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$$

и правим субституцията

$$\frac{x+1}{x-1}=t^2.$$

Оттук получаваме

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

Пресмятаме (за удобство) предварително $dx$ и получаваме

$$dx=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Тогава даденият интеграл се преобразува в интеграла

$$-4\int \frac{(t-1)\,t}{(t+1)(t^2-1)^2}\,dt=-4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^3(t-1)}.$$

**Упражнения.** Да се пресметнат следните итеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.
2. $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.
3. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)}$.

5. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

6. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

7. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}$.

8. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\,dx$.

## § 47. Субституции на Ойлер

Интегралите от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

където $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ е един израз, в който променливата $x$ и радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ са подложени само на рационалните действия, също могат винаги да бъдат пресметнати. Това става с помощта на три субституции, наречени субституции на Ойлер.

I. Първата субституция на Ойлер може да се използува, когато $a>0$. Тя се дава с равенството

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t. \tag{2}$$

След повдигане в квадрат двете страни на това равенство и проста преработка получаваме

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}.$$

Виждаме, че $x$ се представя като рационална функция на $t$. Замествам намерения израз за $x$ в дясната страна на равенството (2) и изразявам радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$ също като рационална функция на $t$. Най-сетне производната на $x$, която ще се появи в израза за $dx$, като производна на една рационална функция ще бъде също рационална функция на $t$. От всичко това е ясно, че след направената субституция интегралът (1) се превръща в интеграл от рационална функция на $t$

Пример 1. Да направим в интеграла

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx \quad (x>0)$$

субституцията

$$\sqrt{x^2+2x+2}=x+t.$$

Намираме

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{t^2-2}{1-t},$$



откъдето

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2}{1-t}+t=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2t+2}{1-t}$$

и

$$dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-2t+2}{(1-t)^2}\,dt.$$

Тогава даденият интеграл преминава в интеграла

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2-2t+2)^2}{(t^2-2)(t-1)^2}\,dt.$$

II. Втората субституция на Ойлер може да бъде използувана в случая, когато квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$ има два различни реални корена. Ако тези корени са $\alpha$ и $\beta$, то, както знаем, имаме разлагането

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Втората субституция на Ойлер се дава с равенството

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t\,(x-\alpha). \tag{3}$$

От равенството (3) след повдигане в квадрат и съкращаване на множителя $x-\alpha$ получаваме

$$x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a}.$$

И така $x$ е представено като рационална функция на $t$. Като заместим така намерения израз за $x$ в дясната страна на равенството (3), ще получим радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$, също изразен като рационална функция на $t$. Най-после и изразът за $dx$ ще представлява една рационална функция на $t$, умножена с $dt$. В резултат след извършване на субституцията интегралът (1) ще се преобразува в интеграл от рационална функция на $t$.

Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}} \quad \text{при} \quad x>3.$$

Тъй като $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, можем да направим субституцията

$$\sqrt{(x+1)(x-3)}=t\,(x+1),$$

откъдето намираме

$$x=-\frac{t^2+3}{t^2-1}.$$

По-нататък получаваме

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(1-\frac{t^2+3}{t^2-1}\right)=\frac{-4t}{t^2-1}$$

и

$$dx=\frac{8t}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Разглежданият интеграл след субституцията ще ни даде интеграла

$$2\int\frac{dt}{t^2+3}.$$

III. Третата субституция на Ойлер може да се използува, когато $c>0$. Тя се дава с равенството

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}. \tag{4}$$

След повдигане в квадрат и съкращаване на $x$ получаваме

$$x=\frac{b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}.$$

Отново получихме $x$, представено като рационална функция на $t$. Неговата производна ще бъде също рационална функция на $t$. Като заместим израза за $x$ в дясната страна на равенството (4), ще получим и радикала $\sqrt{ax^2+bx+c}$, изразен като рационална функция на $t$. Всичко това ни убеждава, че след извършване на горната субституция интегралът (1) ще се превърне в крайна сметка в интеграл от рационална функция.

Пример 3. Да разгледаме интеграла

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

при $x>1$ и да направим субституцията

$$\sqrt{x^2-x+1}=xt+1.$$

Получаваме

$$x=-\frac{2t+1}{t^2-1},$$

откъдето

$$\sqrt{x^2-x+1}=1-\frac{2t+1}{t^2-1}t=-\frac{t^2+t+1}{t^2-1}$$

и

$$dx=2\frac{t^2+t+1}{(t^2-1)^2}dt.$$

След заместването стигаме до интеграла

$$2\int\frac{t^2+t+1}{t(t-1)^2(t+1)}dt.$$

**Упражнения.** Да се пресметнат следните интеграли:

1. $\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$. Отг. $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}$.
2. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. Отг. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{2+x+\sqrt{x^2+x+1}}$.
3. $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$. Отг. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$.
4. $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$. Отг. $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.
5. $\int\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Отг. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}{(2+x+2\sqrt{x^2+x+1})^2}$.



## § 48. Интеграли от диференциален бином

Ще се спрем на още една категория интеграли от ирационални функции, а именно на интегралите от вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, \tag{1}$$

където степенните показатели $m$, $n$ и $p$ са рационални числа, а коефициентите $a$ и $b$ са произволни, различни от нула, константи. Тези интеграли носят името интеграли от диференциален бином. Има три случая, в които тези интеграли могат да бъдат пресметнати.

Първи случай. *Числото $p$ е цяло.* В този случай имаме най-много два радикала на $x$, именно $x^m$ и $x^n$, към които са приложени рационални действия. Следователно интегралът спада към разгледания вече от нас първи тип интеграли от ирационални функции (вж. § 46) и неговото пресмятане ни е познато.

Втори случай. *Числото $\frac{m+1}{n}$ е цяло.* В този случай правим субституцията

$$ax^n+b=t.$$

Тогава

$$x=\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и

$$dx=\frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

След заместването получаваме

$$\frac{1}{na}\int\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}t^p\,dt.$$

Първият множител под интеграла е рационална функция на $t$, тъй като степенният показател $\frac{m+1}{n}-1$ е цяло число. Ирационалност може да имаме само ако числото $p$ е дробно (което е допустимо). Но в този случай пак имаме интеграл от разгледания първи тип интеграли от ирационални функции.

Пример 1. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx \quad \text{при} \quad x>0.$$

Тук имаме $m=-1$, $n=4$, $p=\frac{1}{2}$. Виждаме, че числото $\frac{m+1}{n}=0$ е цяло и правим субституцията

$$1+x^4=t.$$

Получаваме

$$x=(t-1)^{\frac{1}{4}}$$

и

$$dx=\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{3}{4}}\,dt.$$

След заместването стигаме до интеграла

$$\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{t}}{t-1}\,dt,$$

който, както знаем, се пресмята с помощта на субституцията

$$t=u^2.$$

Получаваме следния интеграл от рационална функция

$$\frac{1}{2}\int \frac{u^2}{u^2-1}\,du.$$

Трети случай. *Числото* $\frac{m+1}{n}+p$ *е цяло.* В този случай, ако напишем интеграла (1) в следния вид:

$$\int x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx,$$

и положим $m+np=m_1$, $-n=n_1$, $p=p_1$, ще видим, че числото $\frac{m_1+1}{n_1}$ цяло. И наистина имаме

$$\frac{m_1+1}{n_1}=\frac{m+np+1}{-n}=-\left(\frac{m+1}{n}+p\right).$$

Като вземем пред вид това, което извършихме във втория случай, заключаваме, че субституцията

$$a+bx^{-n}=t$$

ще ни доведе до интеграл от познат тип.



Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

Тук $m=1, n=3$, $p=\frac{1}{3}$. Числото $\frac{m+1}{n}+p=1$ е цяло. Ето защо представяме дадения интеграл във вида

$$\int x^2\sqrt[3]{x^{-3}+1}\,dx$$

и правим субституцията

$$x^{-3}+1=t.$$

Оттук намираме

$$x=(t-1)^{-\frac{1}{3}}$$

и

$$dx=-\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{4}{3}}\,dt.$$

Така стигаме до интеграла

$$-\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt[3]{t}}{(t-1)^2}\,dt,$$

който, както знаем, се пресмята посредством субституцията $t=u^3$. Тя ни довежда до интеграла

$$-\int \frac{u^3}{(u^3-1)^2}\,du.$$

Доказано* е, че когато за някой интеграл от диференциален бином не е налице нито един от разгледаните три случая, той е нерешим, т. е. той представлява функция, която не може да се изрази чрез елементарните функции. Такъв е например интегралът

$$\int \sqrt{1+x^4}\,dx,$$

при който имаме $m=0$, $n=4$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{3}{4}$.

Изобщо при пресмятането на неопределените интеграли, т. е. при намирането на примитивна функция на дадена функция, ние считаме тази задача за решена, когато намерим тази примитивна, изразена посредством една или няколко елементарни функции. Далеч не всякога

---

* За първи път това е направил големият руски математик П. Л. Чебишев (1821—1894).

обаче търсената примитивна (макар и да знаем със сигурност, че тя съществува) може да бъде изразена по такъв начин. В такъв случай символът

$$\int f(x)\,dx$$

ни дефинира една трансцендентна функция, която не се изразява чрез елементарните функции.

Освен за интегралите от диференциален бином, неспадащи към никой от споменатите три случая, доказано е и за редица други неопределени интеграли, че не могат да бъдат изразени посредством елементарните функции. Такива са например интегралите

$$\int e^{x^2}\,dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\quad \int \cos x^2\,dx,\quad \int \frac{e^x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

а също и всеки неопределен интеграл, който може да се преобразува в някой от тях посредством една или друга субституция, в която участвуват само елементарни функции.

**Упражнения I.** Пресметнете следните интеграли:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$ Отг. $\displaystyle\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^4}\,dx.$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|.$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ Отг. $\displaystyle 2\left(4+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$ Отг. $\displaystyle -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$

**II.** Покажете за всеки от следващите неопределени интеграли, че не може да бъде изразен посредством елементарните функции (като го преобразувате, ако има нужда, чрез подходяща субституция в някой интеграл, за който това е доказано).

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$ 2. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{x}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}.$ 5. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int \frac{e^{x^2}}{x}\,dx.$



## § 49. Интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

Интегралите от вида

$$(1)\qquad \int R(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

където $R(\sin x,\ \cos x)$ е израз, в който над $\sin x$ и $\cos x$ са извършени само рационалните действия, могат винаги да бъдат пресметнати в интервала $(-\pi, \pi)$ посредством субституцията

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,$$

която ги превръща в интеграли от рационални функции на $t$.

Наистина имаме

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

От друга страна, при $-\pi<x<\pi$ са изпълнени равенствата

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Оттук получаваме

$$(2)\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Освен това

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Ясно е, че след заместването на $\sin x$, $\cos x$ и $dx$ в интеграла (1) ще получим интеграл от рационална функция на $t$.

Пример 1. Интегралът

$$\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$$

посредством субституцията $x=2\operatorname{arc\,tg} t$ и формулите (2) се преобразува в интеграла

$$2\int \frac{dt}{t^2+2t+3}.$$

Нека да отбележим, че когато $\sin x$ и $\cos x$ участвуват в израза $R(\sin x,\ \cos x)$, повдигнати в степени само с четни степенни показатели, за предпочитане е субституцията

$$x=\operatorname{arc\,tg} t,$$

която позволява да пресметнем интеграла (1) в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Тук имаме

$$t=\operatorname{tg} x$$

и поради тъждествата

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

получаваме

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}. \tag{3}$$

От друга страна,

$$dx = \frac{1}{1 + t^2}\, dt,$$

така че интегралът (1) отново ще премине в интеграл от рационална функция на $t$. При това лесно е да се съобрази, че в този случай субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} x$ ще ни доведе до такава рационална функция, в която съставляващите я полиноми са от по-ниска степен, отколкото ония, до които бихме стигнали, работейки със субституцията $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$.

Пример 2. Да разгледаме интеграла

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

Като прилагаме субституцията $x = \operatorname{arc\,tg} t$ и използваме първата от формулите (3), стигаме до интеграла

$$\int \frac{dt}{2t^2 + 1}.$$

Субституцията пък $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ преобразува разглеждания интеграл в интеграла

$$2 \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + 6t^2 + 1}\, dt.$$

**Упражнения.** Пресметнете следните интеграли:

1. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$. 2. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. 3. $\int \frac{\sin x \cos x}{(3 + \cos x)^2} dx$.

4. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$. 5. $\int \frac{1 + \cos x}{(3 + \sin x + 2 \cos x)^2}\, dx$.

6. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\, dx$. 7. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$.



ГЛАВА VIII

# ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Понятието определен интеграл е едно от най-централните не само в математическия анализ, но и в математиката въобще. Задачи, чието решаване води по естествен начин до това понятие, са били разглеждани още в древността. Все пак се счита, че то е било въведено в окончателен вид през XVII в. от двамата създатели на диференциалното и интегралното смятане — Нютон и Лайбниц, които са работили независимо един от друг. Основният техен резултат се състои в тясната връзка, която те са установили, че съществува между такива две на пръв поглед стоящи далеч едно от друго понятия, каквито са понятията определен интеграл и производна на функция. В какво именно се изразява тази връзка, представляваща едно от най-забележителните открития в математиката, ние ще видим, когато се запознаем със съдържанието на важната теорема, наречена в чест на нейните велики откриватели теорема на Лайбниц и Нютон.

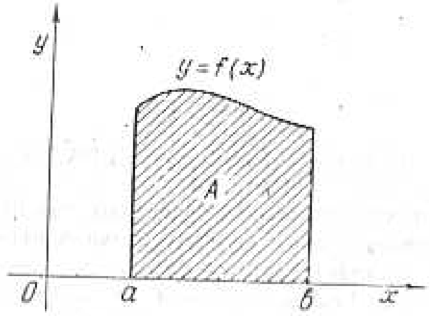
## § 50. Една задача за лице на фигура

Нека е дадена една неотрицателна функция $f(x)$, дефинирана в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Нейната графика ще се намира изцяло над оста $Ox$. Да предположим още, че $f(x)$ е ограничена в този интервал, и да си поставим задачата да пресметнем лицето на фигурата $A$, заградена от графиката на функцията $f(x)$, оста $Ox$ и правите с уравнения $x=a$ и $x=b$ (черт. 47).

Задачата, която току-що формулирахме, в същност не е добре поставена. Тя не може да има смисъл, докато не сме дефинирали самото понятие лице на фигурата $A$. Разбира се, когато това е някоя позната ни от елементарната геометрия фигура, например многоъгълник, ние знаем какво се нарича лице на тази фигура. В общия случай обаче това е понятие, което предстои да бъде дефинирано.*

* Тази задача — задачата за дефиниране на понятието лице на фигурата $A$, е частен случай от по-общата задача — да се дефинира понятието лице за някоя достатъчно широка категория равнинни множества. Ние ще се спрем върху тази по-обща задача в гл. XI.

И така ние искаме да определим едно число $I$, което да наречем лице на фигурата $A$. Разбира се, това число не може да бъде произволно. Следващата конструкция ще ни подскаже на какви условия трябва да отговаря то. Да разделим интервала $[a, b]$ по произволен начин на под-




Черт. 47

интервали (черт. 48). Точките на деление да означим с $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ако положим още $a=x_0$, $b=x_n$, то интервалът $[a, b]$ се разделя на следните подинтервали:

(1) $$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Тъй като функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, тя ще бъде ограначена и във всеки негов подинтервал. Да означим с $M_i$ точната горна граница, а с $m_i$ точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$ и да образуваме сумите

(2) $$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}), \quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

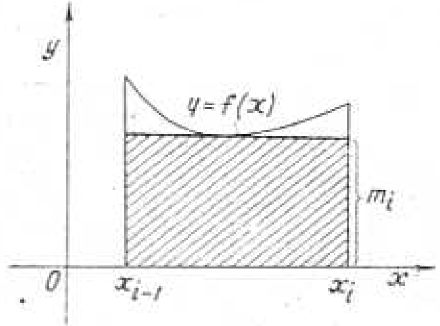
Тези две суми се наричат съответно **малка и голяма сума на Дарбу** за функцията $f(x)$, отговарящи на разделянето (1) на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Те могат много лесно да бъдат изтълкувани геометрично. Да разгледаме сумата $s$. Всяко нейно събираемо


Черт. 48

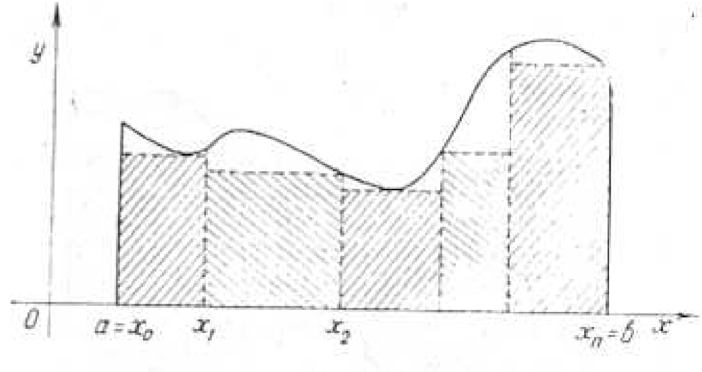
$m_i(x_i-x_{i-1})$ може да бъде изтълкувано като лице на един правоъгълник — правоъгълника, за основа на който служи отсечката, определена върху оста $Ox$ от точките $x_{i-1}$ и $x_i$, а за височина — отсечката с дължина $m$. Тъй като за всяко $x$ от интервала $[x_{i-1}, x_i]$ имаме $f(x) \geqq m_i$,



ясно е, че този правоъгълник изцяло ще се съдържа във фигурата, заградена от графиката на функцията $f(x)$, оста $Ox$ и правите с уравнения $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$ (черт. 49). Тогава сумата $s$ ще представлява лицето на един многоъгълник, който е съставен от $n$ правоъгълника от описания




Черт. 49



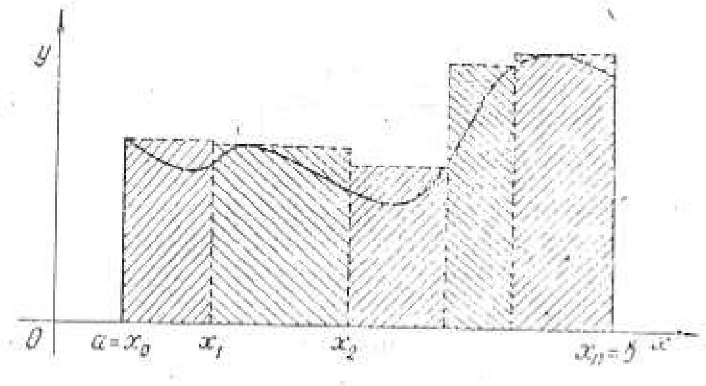

Черт. 50

вид и очевидно се съдържа във фигурата $A$. Този многоъгълник ние ще наречем вписан във фигурата $A$ (черт. 50).

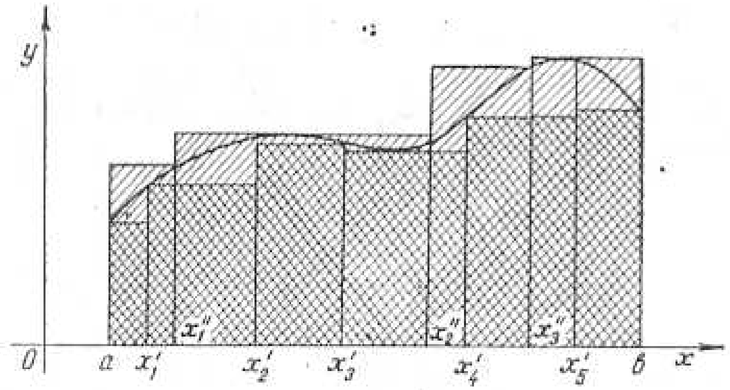
Като разсъждаваме аналогично, можем да изтълкуваме $S$ също като лице на многоъгълник. Това ще бъде един многоъгълник, който пък изцяло съдържа фигурата $A$ и който ще наречем описан около $A$. Той също е съставен от $n$ правоъгълника, отговарящи на $n$-те подинтервала в разделянето (1) (черт. 51). Височината на всеки от тези правоъгълници е равна на точната горна граница на функцияти $f(x)$ в съответния подинтервал.

И така на всяко разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали отговарят чрез описаната конструкция два многоъгълника — единият — вписан във фигурата $A$, другият — описан около нея. Естествено е да поискаме търсеното от нас число $I$, което желаем да наречем л и ц е  н а  ф и г у р а т а $A$, да бъде по-голямо или равно на лицето на вписания и по-малко или равно на лицето на описания многоъгълник, т. е. да удовлетворява неравенствата

(3) $$s \leq I \leq S.$$




Черт. 51




Черт. 52

Но разделянето на интервала $[a, b]$ на подинтервали може да бъде осъществено по безбройно много различни начини. При всяко такова разделяне ние желаем да бъдат изпълнени неравенствата (3). Възможно ли е това? За да отговорим на този въпрос, ще забележим най-напред, че неравенството

(4) $$s \leq S$$

е валидно не само когато $s$ и $S$ са малката и голямата сума на Дарбу, отговарящи на едно и също разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали (и когато то е очевидно), но и когато малката сума $s$ е взета при едно разделяне, а голямата сума $S$ — при друго. Действително $s$ е лицето на някакъв многоъгълник $P$, съдържащ се изцяло във фигурата $A$, а $S$ — лицето на друг многоъгълник $Q$, който пък съдържа изцяло фигурата $A$. Ясно е, че многоъгълникът $Q$ съдържа изцяло многоъгълника $P$, от което веднага следва неравенството (4). (На черт. 52 е показан един пример — с $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$, $x_5'$ са отбелязани точките, които осъществяват едно от двете разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, а с $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ — точките, осъществяващи другото.)

Нека вземем сега едно произволно разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали и си образуваме съответствуващата на това разделяне голяма сума на Дарбу $S$. Съгласно неравенството (4) сумата $S$ ще бъде по-голяма от малката сума на Дарбу $s$, образувана при кое да е разделяне на интервала $[a, b]$. Това означава, че множеството от малките суми на Дарбу, което ще получим, когато разгледаме всички възможни разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, е ограничено отгоре и че $S$ е една негова горна граница. Да означим с $\underline{I}$ точната горна граница на това множество. Тогава ще имаме

(5) $$\underline{I} \leq S.$$

Но сумата $S$ беше произволно взета голяма сума на Дарбу. Поради това неравенството (5) показва, че множеството от големите суми на Дарбу е ограничено отдолу и че числото $\underline{I}$ е една негова долна граница.

Ако означим с $\overline{I}$ неговата точна долна граница, то ще имаме

(6) $$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Съгласно неравенствата (3) търсеното от нас число $I$ трябва да бъде едновременно горна граница на множеството от малките суми на Дарбу и долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Следователно то трябва да удовлетворява неравенствата

(7) $$\underline{I} \leq I \leq \overline{I}.$$

Ако имаме $\underline{I} < \overline{I}$, то съществуват безбройно много числа за $I$, за които са изпълнени неравенствата (7). Когато обаче за някоя функция имаме $\underline{I} = \overline{I}$, то търсеното число $I$ се определя по един-единствен начин. В този именно случай ще считаме, че за фигурата $A$ може да се дефинира понятието лице и под л и ц е на фигурата $A$ ще разбираме числото $I = \underline{I} = \overline{I}$.

## § 51. Дефиниция на определен интеграл

Това, което извършихме в предишния параграф, е почти всичко, необходимо за въвеждането на понятието определен интеграл. Остава да добавим още малко, за да дойдем до дефиницията на това важно понятие.

Ние разглеждахме в предишния параграф една неотрицателна и ограничена функция $f(x)$. Сега ще се освободим от предположението за неотрицателност. Нека е дадена функцията $f(x)$, за която ще предположим само, че е дефинирана и ограничена в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Да разделим, както и преди, този интервал по произволен начин на краен брой подинтервали. Тези подинтервали пак ще означим така:

(1) $$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0=a$ и $x_n=b$. Като означим отново с $M_i$ и $m_i$ съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, ние образуваме малката и голямата сума на Дарбу, отговарящи на разделянето (1). Те са

(2) $$s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}), \quad S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Сега обаче не можем да дадем такова просто геометрично тълкуване на сумите $s$ и $S$, както в случая, когато $f(x)$ е неотрицателна.

Функцията $f(x)$ беше по условие ограничена в интервала $[a, b]$. Да означим с $l$ една нейна долна граница и да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-l$. Ясно е, че $\varphi(x)$ е неотрицателна. Освен това, ако $m_i'$ и $M_i'$ са съответно точната долна и точната горна граница на функцията $\varphi(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, то не е трудно да се съобрази, че ще имаме

$$m_i'=m_i-l, \qquad M_i'=M_i-l.$$

Оттук получаваме

$$m_i=m_i'+l, \qquad M_i=M_i'+l.$$

Тогава сумите (2) могат да се напишат по следния начин:

(3)
$$s=\sum_{i=1}^{n}(m_i'+l)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i-x_{i-1})+l\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}),$$
$$S=\sum_{i=1}^{n}(M_i'+l)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i-x_{i-1})+l\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}).$$

Обаче

(4) $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_1-x_0+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1}=x_n-x_0=b-a.$$

Ако сега означим с $s'$ и $S'$ сумите на Дарбу за функцията $\varphi(x)$, отговарящи на разделянето (1), равенствата (3) ни дават

(5)
$$s=s'+l(b-a),$$
$$S=S'+l(b-a).$$

Тъй като функцията $\varphi(x)$ е неотрицателна, то, както знаем от предишния параграф, множеството от сумите $s'$ е ограничено отгоре. Нека $\underline{I}'$ е неговата точна горна граница и нека $\overline{I}'$ пък е точната долна граница на ограниченото отдолу множество от сумите $S'$. Ние знаем, че

(6) $$\underline{I}' \leqq \overline{I}'.$$

Като вземем пред вид равенствата (5), заключаваме, че множеството от сумите $s$ е също така ограничено отгоре, а множеството от сумите $S$ е ограничено отдолу и че ако означим с $\underline{I}$ точната горна граница на първото, а с $\overline{I}$ точната долна граница на второто от тях, то ще имаме

(7)
$$\underline{I}=\underline{I}'+l(b-a),$$
$$\overline{I}=\overline{I}'+l(b-a).$$

Тогава от неравенството (6) и равенствата (7) следва, че

(8) $$\underline{I} \leqq \overline{I}.$$

И така за всяка функция $f(x)$, ограничена в интервала $[a, b]$, дефинирахме две числа — числото $\underline{I}$, явяващо се точна горна граница на множеството от нейните малки суми на Дарбу, и числото $\overline{I}$, представляващо точната долна граница на множеството от нейните големи суми на Дарбу. Първото от тези две числа ще наречем д о л е н  и н т е г р а л, а второто — г о р е н  и н т е г р а л на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Неравенството (8) показва, че за всяка ограничена функция долният интеграл не надминава горния. Когато за дадена ограничена функция $f(x)$ е изпълнено равенството

(9) $$\underline{I}=\overline{I},$$

ще казваме, че тя е  и н т е г р у е м а  в интервала $[a, b]$. Числото

$$I=\underline{I}=\overline{I}$$

се нарича  о п р е д е л е н  и н т е г р а л  на $f(x)$ в този интервал и се означава така:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числото $a$ се нарича долна граница, а числото $b$ — горна граница на написания определен интеграл.

Нека обърнем внимание върху следното: Определеният интеграл, както видяхме, е едно число. Поради това е безразлично с каква буква е означена независимата променлива в подинтегралната функция. Това ще рече, че вместо $\int_a^b f(x)dx$ можем да пишем $\int_a^b f(t)dt$ или $\int_a^b f(u)\,du$ и т. н

Ние вече видяхме как може да се изтълкува геометрично определеният интеграл, когато функцията $f(x)$ е неотрицателна. В общия случай това тълкуване не е валидно. Въпреки това обаче съществуват извънредно много възможности това число да бъде изтълкувано по един или друг начин, като бъде свързано с най-разнообразни въпроси от областта на приложенията на математиката. По-специално голям брой въпроси от физиката водят именно до определени интеграли.

Нека подчертаем още веднъж, че ние въведохме понятието определен интеграл само за функции, за които е изпълнено равенството (9), и тези функции нарекохме интегруеми. Не всички функции, ограничени в даден интервал, са интегруеми. Така например функцията, дефинирана в интервала $[0, 1]$ с равенствата

$$f(x)=0, \text{ когато } x \text{ е ирационално,}$$
$$f(x)=1, \text{ когато } x \text{ е рационално,}$$

не е интегруема. Действително, както и да разделим интервала $[0, 1]$ на подинтервали от вида (1), във всеки от тях $f(x)$ има точна долна граница, равна на 0, и точна горна граница, равна на 1. (Това е така, понеже както рационалните, тъй и ирационалните числа, както знаем, са разположени навсякъде гъсто върху реалната права.) Тогава

$$s=\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i-x_{i-1})=0,$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=1.$$

И тъй всяка малка сума на Дарбу е равна на 0, а всяка голяма сума на Дарбу е равна на 1. Следователно $I=0$, $I=1$ и $I<I$.

В следващия параграф ще видим, че всяка функция, която е непрекъсната в краен и затворен интервал, е интегруема в него. Оттук ще следва, че фигурата $A$, която разглеждахме в предишния параграф, има лице винаги когато неотрицателната функция $f(x)$, чиято графика я огражда отгоре, е непрекъсната.

Сумите на Дарбу, с които си послужихме, за да дефинираме определения интеграл, представляват очевидно едно средство за неговото пресмятане. Да се следва този път обаче е трудно и неудобно за работа. И все пак в някои специални случаи, например, когато функцията $f(x)$ е константа, това не е сложно. Наистина нека $f(x)=C$ за всяко $x$ в интервала $[a, b]$. Както и да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали, във всеки от тях точната горна и точната долна граница на функцията са равни на $C$. Тогава за сумите на Дарбу ще получим

$$s=\sum_{i=1}^{n} C(x_i-x_{i-1})=C(b-a),$$



$$S=\sum_{i=1}^{n} C(x_i-x_{i-1})=C(b-a).$$

Следователно както всички малки, така и всички големи суми на Дарбу са равни на $C(b-a)$. Оттук следва, че

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a).$$

И така ние вече познаваме стойността на определения интеграл, когато подинтегралната функция е константа.* По-специално получаваме равенството

$$\int_a^b dx=b-a.$$

По-нататък ще се запознаем с един общ метод за пресмятане на определените интеграли, с който можем да си служим винаги когато подинтегралната функция $f(x)$ е непрекъсната. Този метод се основава на споменатата вече теорема на Лайбниц и Нютон.

Засега ще отбележим само, че излизайки от самата дефиниция на определения интеграл, можем да установим лесно следното негово свойство:

Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако за всяко $x$ от този интервал тя удовлетворява неравенствата

$$m \leqq f(x) \leqq M, \tag{10}$$

то

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a). \tag{11}$$

Достатъчно е, разбира се, да разгледаме случая, когато $M$ е точната горна, а $m$ — точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Но тогава числото $M(b-a)$ се явява една специална голяма сума на Дарбу за функцията $f(x)$, а именно онази, която съответствува на случая, при който интервалът $[a, b]$ е „разделен" на един-единствен подинтервал — на самия себе си (този случай не се изключва в нашата дефиниция). Числото $m(b-a)$ се явява пък малката сума на Дарбу, отговаряща на същото това „разделяне". Определеният интеграл обаче е горна граница на множеството от малките суми и долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Оттук веднага следват неравенствата (11).

* В случая, когато $C>0$, този резултат напълно се съгласува с геометричното тълкуване на определения интеграл, тъй като фигурата $A$ в този случай представлява правоъгълник с основа, равна на $b-a$, и с височина, равна на $C$.

Като следствие от току-що доказаното твърдение получаваме: Ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако $f(x)\geqq 0$, то

$$\int_a^b f(x) \geqq 0.$$

Наистина в този случай можем да вземем $m=0$ и да приложим лявото от неравенствата (11).

## § 52. Интегруемост на непрекъснатите функции

Както вече споменахме, към категорията на интегруемите функции спадат всички непрекъснати функции. Това именно е съдържанието на теоремата, която сега ще докажем.

**Теорема.** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ то тя е интегруема в този интервал.*

Доказателство. Както знаем, от непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в крайния и затворен интервал $[a, b]$ следва, че тя е ограничена в този интервал. Нека $\underline{I}$ и $\overline{I}$ са съответно долният и горният интеграл на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Трябва да докажем, че те са равни помежду си. Да допуснем противното. Поради неравенството (8) от предишния параграф това означава, че $\underline{I}<\overline{I}$. В такъв случай числото $\varepsilon=\frac{\overline{I}-\underline{I}}{b-a}$ ще бъде положително. Ще си спомним сега теоремата за равномерната непрекъснатост от § 24. Съгласно тази теорема можем да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали по такъв начин, че във всеки от тях осцилацията на $f(x)$ да бъде по-малка от $\varepsilon$. Нека тези подинтервали са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0=a$ и $x_n=b$. На това разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали ще отговарят една малка и една голяма сума на Дарбу. Това са сумите

$$(1) \qquad s=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

където с $m_i$ и $M_i$ са означени съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. От дефиницията на долния и горния интеграл следва, че

$$s\leqq \underline{I}, \quad \overline{I}\leqq S.$$

От тези пък неравенства получаваме

$$(2) \qquad \overline{I}-\underline{I}\leqq S-s.$$



Като извадим почленно равенствата (1), ще получим

$$S-s=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Но разликата $M_i-m_i$ не е нищо друго освен осцилацията на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Следователно ще имаме

$$S-s<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a).$$

Като си спомним как бяхме избрали $\varepsilon$, последното неравенство добива вида

$$(3) \qquad S-s<\overline{I}-\underline{I}.$$

Но неравенствата (2) и (3) си противоречат. Следователно нашето първоначално допускане е погрешно. И така имаме $\underline{I}=\overline{I}$. С това теоремата е доказана.

Нека да подчертаем, че условието за непрекъснатост на една функция е само достатъчно условие за интегруемост. То не е необходимо. В същност категорията на интегруемите функции е далеч по-широка от тази на непрекъснатите. Така може да се покаже, че ако една функция е прекъсната в краен брой точки на един интервал и при това е ограничена, тя е интегруема в този интервал. Друго достатъчно условие за интегруемост е условието функцията да бъде монотонна в даден краен и затворен интервал.

## § 53. Суми на Риман

Нека отново да разгледаме една функция $f(x)$, дефинирана и ограничена в някой интервал $[a, b]$. Да разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали и във всеки от тях да изберем по една точка. По такъв начин, ако подинтервалите на разделянето са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където $x_0=a$, $x_n=b$, то ние ще имаме $n$ точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, избрани така, че

$$x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i \text{ при } i=1, 2, \ldots, n.$$

Сумата

$$(1) \qquad \sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

се нарича **с у м а н а Р и м а н.** Тя зависи очевидно от начина на разделянето на интервала $[a, b]$ на подинтервали и от избора на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Ако образуваме сумите на Дарбу

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i-x_{i-1}) \text{ и } S=\sum_{i=1}^{n} M_i (x_i-x_{i-1}),$$

отговарящи на същото разделяне на интервала $[a, b]$, то поради неравенствата

$$m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i,$$

изпълнени за $i=1, 2, \ldots, n$, ще получим

(2) $$s \leqq \sigma \leqq S.$$

И така сумата на Риман по своята стойност се намира винаги между съответните суми на Дарбу.

С помощта на римановите суми ние ще формулираме и докажем една теорема, която ще се окаже твърде полезна за непосредствено следващата наша работа. Предварително обаче ще въведем още едно понятие.

Нека ни е дадена една безкрайна редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Това означава следното: Най-напред сме разделили по някакъв начин $[a, b]$ на подинтервали. Получили сме едно разделяне, което сме нарекли първо. След това по някакъв нов начин отново сме разделили $[a, b]$ на подинтервали — получили сме друго разделяне, което сме нарекли второ, и т. н.

Да означим сега с $\delta_1$ дължината на най-големия от подинтервалите, получени при първото разделяне, с $\delta_2$ — дължината на най-големия от подинтервалите, получени при второто разделяне, и т. н., изобщо с $\delta_n$ — дължината на най-големия от подинтервалите, получени при $n$-тото разделяне. Ще казваме, че ни е дадена една и з д р е б н я в а щ а р е д и ц а о т р а з д е л я н и я на интервала $[a, b]$ на подинтервали, когато редицата от числата

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

клони към нула.

Лесно можем да посочим примери за издребняващи редици от разделяния. Такава редица можем да получим, ако например при първото разделяне разделим интервала $[a, b]$ на две равни части, при второто на три равни части и т. н., изобщо при $n$-тото разделяне го разделим на $n+1$ равни части. Тогава $\delta_n=\frac{b-a}{n+1}$ и е ясно, че $\lim \delta_n=0$.

Друг пример за издребняваща редица от разделяния можем да получим по следния начин: При първото разделяне делим $[a, b]$ на две равни части, при второто делим всяка от тях също на по две равни части, така че интервалът е разделен на четири равни части, при третото разделяне той се оказва разделен на осем равни части и т. н. Тук пък имаме $\delta_n=\frac{b-a}{2^n}$ и отново $\lim \delta_n=0$.



Да преминем сега към теоремата, за която вече споменахме.

**Теорема.** *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Ако е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали и ако при всяко от тези разделяния си образуваме по една риманова сума за $f(x)$, то редицата от така получените риманови суми*

(3) $$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

*е сходяща и клони към интеграла* $\int_a^b f(x)dx$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\varepsilon$ е едно произволно положително число. Трябва да намерим такова число $\nu$, че при $n>\nu$ да имаме

(4) $$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Ще използуваме теоремата за осцилациите от § 20. Съгласно тази теорема ние можем да намерим такова число $\delta>0$, че във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина, по-малка от $\delta$, осцилацията на $f(x)$ да е по-малка от положителното число $\frac{\varepsilon}{b-a}$. От друга страна, дадена е една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Това ще рече, че ако

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

са дължините на максималните подинтервали, получени при последователните разделения в тази редица, то $\lim \delta_n=0$. Тогава ще съществува такова число $\nu$, че при $n>\nu$ ще имаме $\delta_n<\delta$. Нека сега разгледаме $n$-тото разделяне на интервала $[a, b]$. На него отговарят една риманова сума $\sigma_n$ и две суми на Дарбу $s_n$ и $S_n$, за които са изпълнени следните неравенства:

(5) $$s_n \leqq \sigma_n \leqq S_n.$$

Знаем също, че

(6) $$s_n \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_n.$$

От неравенствата (5) и (6) получаваме

(7) $$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq S_n-s_n.$$

Ако подинтервалите на $n$-тото разделяне са

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{m-1}, x_m],$$

където $x_0=a$, $x_m=b$, то сумите $s_n$ и $S_n$, подробно написани, са

$$s_n=\sum_{i=1}^{m} m_i(x_i-x_{i-1}),\ S_n=\sum_{i=1}^{m} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

Тук, както винаги, с $m_i$ и $M_i$ сме означили съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава

$$S_n-s_n=\sum_{i=1}^{m}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{8}$$

Нека сега предположим, че $n>\nu$. Тогава ще бъде изпълнено неравенството $\delta_n<\delta$, т. е. най-големият подинтервал при $n$-тото разделяне ще има дължина, по-малка от $\delta$. А това значи, че дължините на всички подинтервали при това разделяне са по-малки от $\delta$ и че следователно, съгласно избора на числото $\delta$, осцилацията на $f(x)$ във всеки от тях ще бъде по-малка от $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогава от равенството (8) получаваме

$$S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \tag{9}$$

Най-сетне от (7) и (9) следва, че при $n>\nu$ е изпълнено неравенството

$$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

което показва, че редицата (3) е сходяща и клони към $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ние ще използуваме тази теорема в следващия параграф, за да докажем някои основни свойства на определения интеграл. Тя обаче има и важно самостоятелно значение. Така например при много въпроси от физиката естествено се достига до риманови суми, след което с помощта на току-що доказаната теорема се преминава към определени интеграли.

## § 54. Основни свойства на определените интеграли

Свойствата на определените интеграли, които ще докажем в този параграф, в същност са валидни винаги когато интегралът съществува, т. е. при произволни интегруеми функции. Ние обаче с цел да опростим нещата ще установим тези свойства само в случая, когато подинтегралните функции са непрекъснати.

Преминаваме сега към формулирането и доказателството на тези основни свойства.

I. *Ако $f(x)$ е една функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$, а $C$ е едно реално число, то*



$$\int_a^b Cf(x)\,dx=C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{I}$$

Доказателство. Ако интервалът е разделен на подинтервалите

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \tag{1}$$

където $x_0=a$, $x_k=b$, и ако във всеки от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ е избрана по една точка $\xi_i$, то можем да образуваме римановата сума $\sigma$ за функцията $f(x)$ и римановата сума $\sigma'$ за функцията $Cf(x)$, които ще бъдат съответно

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sigma'=\sum_{i=1}^{k} Cf(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Ясно е, че

$$\sigma'=C\sigma. \tag{2}$$

Нека сега е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали, като същевременно при всяко от тези разделяния е избрана и по една точка в съответните подинтервали. Ако означим римановата сума, отговаряща на $n$-тото разделяне за функцията $f(x)$, със $\sigma_n$, а тази за функцията $Cf(x)$ със $\sigma_n'$, то съгласно равенството (2) ще имаме

$$\sigma_n'=C\sigma_n.$$

Оттук, като използуваме теоремата от предишния параграф, заключаваме, че е в сила равенството (I).

II. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a, b]$, то*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx. \tag{II}$$

Доказателство. Ако е дадено някое разделяне от вида (1) на интервала $[a, b]$ на подинтервали и е избрана по някакъв начин по една точка $\xi_i$ във всеки от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$, то можем да образуваме римановата сума $\sigma'$ за функцията $f(x)$, римановата сума $\sigma''$ за функцията $g(x)$ и римановата сума $\sigma$ за функцията $f(x)+g(x)$. Ясно е, че

$$\sigma'=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sigma''=\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k}[f(\xi_i)+g(\xi_i)](x_i-x_{i-1}).$$

Следователно

(3) $$\sigma=\sigma'+\sigma''.$$

Нека вземем сега една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, b]$ на подинтервали и нека на $n$-тото разделяне отговарят римановите суми: $\sigma_n'$ за $f(x)$, $\sigma_n''$ за $g(x)$ и $\sigma_n$ за $f(x)+g(x)$, образувани при един и същ избор на точките $\xi_i$. Тогава съгласно равенството (3) ще получим

$$\sigma_n=\sigma_n'+\sigma_n'',$$

откъдето отново въз основа на теоремата от предишния параграф идваме до заключението за верността на равенството (II).

III. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции, непрекъснати в интервала $[a, b]$ и удовлетворяващи неравенството*

(4) $$f(x)\leqq g(x)$$

*за всяко $x$ от този интервал, то*

(III) $$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. Ако е извършено разделяне от вида (1) на интервала $[a, b]$ на подинтервали и е направен избор на точките $\xi_i$ в тях, то за римановите суми $\sigma'$ на $f(x)$ и $\sigma''$ на $g(x)$ ще имаме

$$\sigma'=\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

$$\sigma''=\sum_{i=1}^{k}g(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

откъдето поради неравенството (4) ще получим

(5) $$\sigma'\leqq\sigma''.$$

Да вземем сега една издребняваща редица от разделяния на $[a, b]$ на подинтервали и да означим със $\sigma_n'$ и $\sigma_n''$ съответно римановите суми за функциите $f(x)$ и $g(x)$, отговарящи на $n$-тото разделяне и образувани при един и същ избор на точките $\xi_i$. Поради неравенството (5) ще имаме

$$\sigma_n'\leqq\sigma_n'',$$

откъдето, прибягвайки отново към теоремата от предишния параграф, ще получим неравенството (III).

IV. *Ако $f(x)$ е една функция, непрекъсната в $[a, b]$, то*



(IV) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Неравенството (IV) следва от неравенствата

$$f(x)\leqq|f(x)|\quad\text{и}\quad -f(x)\leqq|f(x)|$$

и от свойството (III).

V. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и ако $c$ е една вътрешна точка от този интервал, то*

(V) $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Нека интервалът $[a, c]$ е разделен на подинтервалите

(6) $$[x_0', x_1'],\ [x_1', x_2'],\ \ldots,\ [x_{p-1}', x_p'],$$

а интервалът $[c, b]$ — на подинтервалите

(7) $$[x_0'', x_1''],\ [x_1'', x_2''],\ \ldots,\ [x_{q-1}'', x_q''],$$

където $x_0'=a$, $x_p'=x_0''=c$, $x_q''=b$. Ако вземем всички подинтервали — както тези, които участвуват в разделянето (6), така и онези, които участвуват в разделянето (7), ще получим едно разделяне на целия интервал $[a, b]$ на подинтервали, което ще наречем получено от обединяването на разделянията (6) и (7). Нека си изберем по една точка $\xi_i'$ във всеки от интервалите $[x_{i-1}', x_i']$ и по една точка $\xi_j''$ във всеки от интервалите $[x_{j-1}'', x_j'']$ и си образуваме след това римановите суми

$$\sigma'=\sum_{i=1}^{p}f(\xi_i')(x_i'-x_{i-1}'),$$

$$\sigma''=\sum_{j=1}^{q}f(\xi_j'')(x_j''-x_{j-1}'').$$

Като съберем $\sigma'$ и $\sigma''$, ние очевидно ще получим една риманова сума за функцията $f(x)$, отговаряща именно на това обединено разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали. Ако означим тази сума със $\sigma$, то ще имаме

(8) $$\sigma=\sigma'+\sigma''.$$

Нека сега е дадена една издребняваща редица от разделяния на интервала $[a, c]$ на подинтервали и една издребняваща редица от разделяния на интервала $[c, b]$. Като обединим $n$-тите разделяния на $[a, c]$ и $[c, b]$, ще получим едно разделяне на целия интервал $[a, b]$. По този начин получаваме една редица от разделяния на интервала $[a, b]$, която очевидно е също издребняваща. Ако означим съответно със $\sigma_n'$, $\sigma_n''$ и $\sigma_n$ римановите суми на $f(x)$, отговарящи на $n$-тите разделяния на интервалите $[a, c]$, $[c, b]$ и $[a, b]$, образувани при някакъв избор на точките $\xi_i'$ и $\xi_i''$, то съгласно равенството (8) ще имаме

$$\sigma_n=\sigma_n'+\sigma_n''.$$

Остава най-сетне отново да се позовем на теоремата от предишния параграф, за да получим равенството (V).

Разбира се, с помощта на принципа за пълната математична индукция можем да обобщим равенството (V) за случая, когато интервалът $[a, b]$ е разделен на $m$ подинтервала от вида

$$[a, c_1],\ [c_1, c_2], \ldots, [c_{m-1}, b],$$

където $m$ е произволно цяло положително число. В този случай ще имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{c_{m-1}}^b f(x)\,dx.$$

За да допълним списъка на основните свойства на определените интеграли, нека добавим тук и свойството, което доказахме в края на § 51.

VI. *Ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и ако $m$ и $M$ са съответно една нейна долна и една нейна горна граница в този интервал, то*

$$\text{(VI)}\qquad m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq M(b-a).$$

Към всичко изложено в този параграф ще добавим следното. Символа

$$\text{(9)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

ние дефинирахме засега само когато е даден един интервал $[a, b]$, в който разглеждаме интегруемата функция $f(x)$. Това ще рече, че трябва да имаме $a<b$, т. е. долната граница на интеграла трябва да бъде по-малка от горната. Оказва се обаче целесъобразно да дадем смисъл на символа (9) и когато долната граница на интеграла е по-голяма от горната, и даже в случая, когато горната и долната граница са равни. Това се постига, като най-напред при $a>b$ дефинираме символа (9) с помощта на равенството

$$\text{(10)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Тук в дясната страна на равенството имаме определен интеграл, разбиран в смисъла на нашата първоначална дефиниция, тъй като $b<a$ (предполагаме, разбира се, че $f(x)$ е интегруема в интервала $[b, a]$).



Ако искаме сега да дадем смисъл на символа (9) в случая, когато $a=b$, и то така, че равенството (10) да остава в сила и в този случай, идваме по необходимост до дефиниционното равенство

$$\text{(11)}\qquad \int_a^a f(x)\,dx=0.$$

Целесъобразността на дефинициите, които дадохме с помощта на равенствата (10) и (11), се вижда от следното: Равенството (V), което доказахме в този параграф, бе установено от нас при условие, че точките $a$, $b$ и $c$ удовлетворяват неравенствата $a<c<b$. Лесно може да се провери сега, като се вземат пред вид равенствата (10) и (11), че равенството (V) остава в сила при всякакво взаимно разположение на точките $a$, $b$ и $c$, без да се изключва и евентуалното съвпадане на някои от тях (стига, разбира се, функцията $f(x)$ да е дефинирана и непрекъсната във всички интервали, които се определят от тези точки).

## § 55. Теорема за средните стойности

Една проста, но полезна теорема при определените интеграли е следната

**Теорема за средните стойности.** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то съществува поне една точка $\xi$ в този интервал, за която е изпълнено равенството*

$$\text{(1)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a).$$

Доказателство. Да означим с $m$ и $M$ съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. От неравенствата

$$m\leqq f(x)\leqq M$$

следва, както знаем, че

$$m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq M(b-a).$$

Оттук получаваме

$$\text{(2)}\qquad m\leqq\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leqq M.$$

Поради непрекъснатостта на $f(x)$ съществуват, както знаем от теоремата на Вайерщрас, две точки $x_1$, $x_2$ от интервала $[a, b]$, за които

$$\text{(3)}\qquad f(x_1)=m,\quad f(x_2)=M.$$

Можем да считаме, че тези две точки са различни. Наистина, ако $x_1=x_2$, то бихме имали $m=M$, откъдето би следвало, че $f(x)$ е константа. Този случай обаче може да се изключи от разглеждане, тъй като теоремата тогава е очевидна. И така точките $x_1$ и $x_2$ определят един интервал. По отношение на този интервал ние ще приложим към функцията $f(x)$ теоремата за междинната стойност от § 24. Като вземем пред вид равенствата (3) и неравенствата (2), ще заключим, че съществува поне една точка $\xi$, намираща се между $x_1$ и $x_2$, за която е изпълнено равенството

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Оттук се получава равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a) \tag{1}$$

и теоремата е доказана.

Нека да отбележим, че доказаното равенство може очевидно след умножаване с $(-1)$ да се напише във вида

$$\int_b^a f(x)\,dx=f(\xi)(a-b).$$

Следователно равенството (1) остава валидно независимо от това, дали долната граница на интеграла е по-малка от горната или обратно — при единственото условие $f(x)$ да е непрекъсната в затворения интервал, определен от тези две точки.

Когато функцията $f(x)$ е неотрицателна, на равенството (1) може да се даде просто геометрично тълкуване. Наистина то изразява това, че в интервала $[a, b]$ съществува точка $\xi$ със следното свойство: лицето на фигурата, заключена между отсечката с краища $a$ и $b$ върху оста $Ox$, вертикалните прави, минаващи през тези две точки, и графиката на $f(x)$, е равно на лицето на правоъгълника с основа същата отсечка и височина, равна на $f(\xi)$.

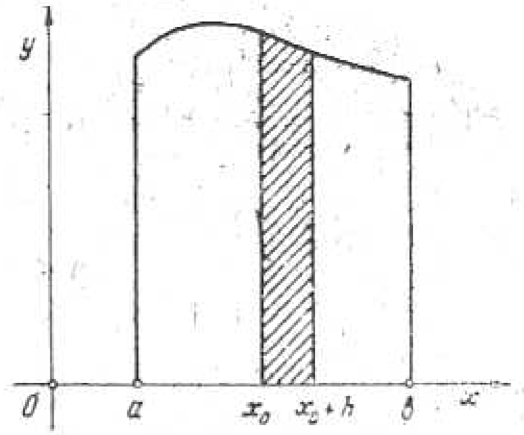
## § 56. Теорема на Лайбниц и Нютон

С важната теорема на Лайбниц и Нютон, заемаща централно място в диференциалното и интегралното смятане, се установява в случая, когато $f(x)$ е непрекъсната функция, една проста връзка между понятията определен и неопределен интеграл на $f(x)$ — две понятия, стоящи твърде далеч едно от друго по начина на своето въвеждане.

Съдържанието на тази теорема, както и идеята за нейното доказателство имат ярко изразен геометричен характер, който особено просто се



вижда, когато функцията $f(x)$ е неотрицателна. И наистина нека $f(x)$ е една функция, дефинирана и непрекъсната в един интервал $D$, и нека $a$ е някоя точка от този интервал. Ако $x$ е друга точка от интервала $D$, то $f(x)$ като непрекъсната в крайния и затворен интервал, определен от




Черт. 53

точките $a$ и $x$, ще бъде интегруема в този интервал. И тъй за всяко $x$ от $D$ можем да си образуваме определения интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Стойността на този интеграл представлява очевидно една функция на $x$, дефинирана в интервала $[a, b]$. Да означим тази функция с $F(x)$. Оказва се, че тя е примитивна функция на $f(x)$ в интервала $D$, т. е. че имаме $F'(x)=f(x)$ за всяко $x$ от $D$. За да се убедим в това, трябва да разгледаме израза

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \tag{1}$$

и да видим, че при произволно $x_0$ от $D$ той клони към $f(x_0)$, когато $h$ клони към нула.

Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и нека $h>0$. Тогава $F(x_0+h)$ и $F(x_0)$ могат да бъдат тълкувани като лица, сто защо и разликата $F(x_0+h)-F(x_0)$ можем да разглеждаме като лице — именно като лице на фигурата, показана на черт. 53. Ако положителното число $h$ е малко, стойността на $f(x)$ в интервала $[x_0, x_0+h]$ поради непрекъснатостта на $f(x)$ малко ще се отличава от $f(x_0)$, поради което и лицето на разглежданата фигура ще бъде приблизително равно на лицето на правоъгълника, имащ основа, равна на $h$, и височина, равна на $f(x_0)$. Другояче казано, разликата $F(x_0+h)-F(x_0)$ ще бъде приблизително равна на $hf(x_0)$, а частното (1) — на $f(x_0)$. При това грешката, която правим, вземайки това число за истинска стойност на частното (1), ще става все по-малка, когато вземаме все по-малки стойности за $h$. Това навежда на мисълта, че частното (1) клони към $f(x_0)$, когато $h$ клони към нула. Както ще видим веднага от изложеното по-долу подробно доказателство, този резултат е верен и без предположението за неотрицателност на $f(x)$.

И така ще установим следната

**Теорема на Лайбниц и Нютон.** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един интервал $D$, то функцията*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{2}$$

*е диференцуема в този интервал и за всяко $x$ от $D$ е изпълнено равенството*

$$F'(x)=f(x). \tag{3}$$

*Другояче казано, $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала $D$.*

Доказателство. Нека $x$ е произволна точка от интервала $D$. Ако $x+h$ е друга точка от този интервал, то ще имаме

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Като приложим към последния интеграл теоремата за средните стойности, ще получим

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi),$$

където $\xi$ е някаква точка, намираща се между $x$ и $x+h$. Ако оставим $h$ да клони към 0, то точката $\xi$ ще клони към $x$. Ето защо, като вземем пред вид непрекъснатостта на $f(x)$ в точката $x$, ще получим

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x).$$

С това равенството (3) е установено и теоремата е доказана.

Нека отбележим впрочем, че ако $D$ е краен и затворен интервал от вида $[a, b]$, то, както е ясно от направените разсъждения и както това се съгласува с нашата уговорка от § 27, равенството (3) трябва да се взема в точките $a$ и $b$ съответно в следния вид:



$$F'_{+}(a)=f(a), \qquad F'_{-}(b)=f(b).$$

Теоремата на Лайбниц и Нютон ни дава един прост начин за пресмятане на определените интеграли от непрекъснати функции. Наистина нека да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

където $f(x)$ е една функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$. Ако образуваме функцията $F(x)$, дефинирана с помощта на равенството (2), ще имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b).$$

И така задачата е да се пресметне $F(b)$. Ние видяхме, че $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$. Но функцията $f(x)$ има безбройно много примитивни, всяка от които, както знаем, се различава от $F(x)$ с константа. Нека познаваме някоя (коя да е) примитивна функция $\Phi(x)$ на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Ще имаме

$$F(x)=\Phi(x)+C.$$

За да пресметнем константата $C$, нека вземем $x=a$. Получаваме

$$F(a)=\Phi(a)+C.$$

Но $F(a)=0$, следователно $C=-\Phi(a)$. И така за всяко $x$ от интервала $[a, b]$ е изпълнено равенството

$$F(x)=\Phi(x)-\Phi(a).$$

Специално при $x=b$ ще получим

$$F(b)=\Phi(b)-\Phi(a),$$

или окончателно

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{5}$$

От изложеното се вижда, че за да пресметнем определения интеграл (4), трябва да пресметнем най-напред неопределения интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

т. е. да намерим една примитивна функция $\Phi(x)$ на функцията $f(x)$, след което да приложим формулата (5). Тази формула за по-голямо удобство при прилагането ѝ се записва още и по следния начин:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|\,\Phi(x)\,\Big|_a^b,$$

където под $\left|\Phi(x)\right|_a^b$ разбираме разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$.

Примери.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\left|\operatorname{arctg} x\right|_0^1=\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} 0=\frac{\pi}{4}$.

2. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,d\,2x$$

$$=\frac{1}{2}\left|x\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\left|\sin 2x\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(0-0)=\frac{\pi}{2}.$$

3. $$\int_1^2 \ln x\,dx=\left|x\ln x\right|_1^2-\int_1^2 x\,d\ln x$$

$$=(2\ln 2-\ln 1)-\int_1^2 dx=2\ln 2-\left|x\right|_1^2=2\ln 2-1.$$

Нека отбележим, че равенството (5) остава валидно и когато $a>b$ при условие, че $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[b, a]$. Наистина тогава ще имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx=-[\Phi(a)-\Phi(b)]=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Най-сетне равенството (5) е очевидно, когато $a=b$.

От теоремата на Лайбниц и Нютон се получава следното следствие:

*Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцуема, а нейната производна е непрекъсната в един интервал $D$ и ако $a$ е точка от този интервал, то за всяко $x$ от $D$ е изпълнено равенството*

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt. \tag{6}$$

Действително функцията $f(x)$ е една примитивна на своята производна $f'(x)$ в интервала $D$ и равенството (6) се получава непосредствено от формулата (5), приложена за подинтегрална функция $f'(x)$ към интервала, определен от точките $a$ и $x$.



**Упражнения.** Пресметнете следните определени интеграли:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$. Отг. $\frac{2}{3}$.

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$. Отг. $\ln\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$. Отг. $\frac{4}{15}$.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$. Отг. $\frac{\pi}{2}$.

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$. Отг. $\ln\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4+x^2}\,dx$. Отг. $2\sqrt{2}+2\ln(1+\sqrt{2})$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Отг. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$. Отг. $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

## § 57. Смяна на променливата в определените интеграли

При пресмятането на определените интеграли понякога е удобно да се прибегне към смяна на променливата. Тя се основава на следната

**Теорема.** *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, а функцията $\varphi(t)$ е диференцуема и притежава непрекъсната производна в един интервал $[\alpha, \beta]$, като нейните функционални стойности принадлежат на интервала $[a, b]$. Нека освен това*

$$\varphi(\alpha)=a, \qquad \varphi(\beta)=b.$$

*Тогава е в сила равенството*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t). \tag{1}$$

Доказателство. Равенството (1), което искаме да докажем, може да се запише във вида

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

Да разгледаме функциите

$$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$$

и

$$\Phi(s)=\int_{\alpha}^{s} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Първата от тях е дефинирана в интервала $[a, b]$, а втората — в интервала $[\alpha, \beta]$. Съгласно теоремата на Лайбниц и Нютон те са диференцуеми и

$$(3)\qquad F'(u)=f(u) \qquad \text{при } a\leqq u\leqq b,$$
$$\Phi'(s)=f[\varphi(s)]\varphi'(s) \qquad \text{при } \alpha\leqq s\leqq\beta.$$

Нека си образуваме сега съставната функция $F[\varphi(s)]$, която очевидно е дефинирана и диференцуема в интервала $[\alpha, \beta]$, и нека пресметнем нейната производна. Като вземем пред вид равенствата (3), ще получим

$$\{F[\varphi(s)]\}'=F'[\varphi(s)]\varphi'(s)=f[\varphi(s)]\varphi'(s)=\Phi'(s).$$

Виждаме, че двете функции $F[\varphi(s)]$ и $\Phi(s)$ имат една и съща производна в интервала $[\alpha, \beta]$, следователно те се различават с константа в този интервал. И така ще имаме

$$(4)\qquad F[\varphi(s)]=\Phi(s)+C.$$

За да пресметнем константата $C$, нека дадем на $s$ стойността $\alpha$. Ще получим

$$F[\varphi(\alpha)]=\Phi(\alpha)+C.$$

Но

$$F[\varphi(\alpha)]=F(a)=0, \qquad \Phi(\alpha)=0.$$

Следователно $C=0$ и равенството (4) придобива вида

$$F[\varphi(s)]=\Phi(s).$$

Ако дадем сега на $s$ стойността $\beta$, ще получим

$$F[\varphi(\beta)]=\Phi(\beta),$$

или поради условието $\varphi(\beta)=b$:

$$F(b)=\Phi(\beta).$$

Последното равенство, написано по-подробно, ни дава равенството (2), което пък, както вече отбелязахме, не е нищо друго освен, другояче записано, равенството (1).

Пример. Да пресметнем интеграла $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ посредством субституцията $x=a\sin t$. Функцията $a\sin t$ ще разгледаме в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имаме

$$a\sin 0=0, \qquad a\sin\frac{\pi}{2}=a$$

и лесно се вижда, че всички условия на теоремата за смяна на променливата са изпълнени. Тогава



$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,da\sin t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,d\,2t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left|t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{a^2}{4}\left|\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

**Упражнения.** Пресметнете следните определени интеграли:

1. $\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$ Отг. $\frac{3a^4\pi}{16}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$ Отг. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$ Отг. $\frac{1}{3}\ln 4+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

## § 58*. Интегрална форма на остатъчния член във формулата на Тейлор. Форма на Коши

Формулата на Тейлор, валидна за функции $f(x)$, диференцуеми $n+1$ пъти в някоя околност на точката $a$, има, както знаем, вида

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n.$$

Изразът

$$(1)\qquad R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

се нарича *остатъчен член* във формулата на Тейлор. Както ще видим, остатъчният член $R_n$ може да бъде записван и по други начини и това обстоятелство се оказва полезно при редица въпроси, при които се използува формулата на Тейлор. Когато $R_n$ е изразен чрез равенството (1), казваме, че сме записали остатъчния член във *формата на Лагранж*.

Ще покажем сега, че ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната в разглежданата околност на точката $a$, $R_n$ може да се запише във формата

$$(2) \qquad R_n=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

наречена *интегрална форма* на остатъчния член. Наистина, интегрирайки последователно по части, получаваме

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,df^{(n)}(t)$$

$$=\frac{1}{n!}\left|(x-t)^n f^{(n)}(t)\right|_a^x-\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)\,d(x-t)^n$$

$$=-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,df^{(n-1)}(t)$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\left|(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\right|_a^x$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n-1)}(t)\,d(x-t)^{n-1}=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)\,dt$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}-\cdots$$

$$-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Най-сетне, като вземем пред вид, че

$$\int_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a),$$

ще имаме

$$f(x)-f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$



$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

откъдето следва равенството (2).

Интегралната форма на $R_n$ позволява да изведем още един запис на остатъчния член. Наистина, ако към интеграла в дясната страна на равенството (2) приложим теоремата за средните стойности, ще получим

$$R_n=\frac{1}{n}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a),$$

където $\xi$ е точка, намираща се между точките $a$ и $x$. Ако $\theta=\frac{\xi-a}{x-a}$, то $0<\theta<1$ и ще имаме $\xi=a+\theta(x-a)$. Тогава $R_n$ ще придобие вида

$$(3) \qquad R_n=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

или, ако $x-a=h$, вида

$$(4) \qquad R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Когато използуваме този начин за изразяване на $R_n$, казваме, че сме записали остатъчния член във *формата на Коши*.

## § 59. Интеграли в несобствен смисъл

Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал $[a, b)$, който е отворен отдясно, или пък е дефинирана в интервала $[a, b]$, но е непрекъсната само в интервала $[a, b)$, то тя може и да не бъде интегруема в този интервал. Тя е обаче непрекъсната и следователно интегруема във всеки интервал от вида $[a, \beta]$, където $a<\beta<b$. Естествено е тогава да се запитаме дали интегралът

$$\int_a^\beta f(x)\,dx,$$

който представлява функция на $\beta$, дефинирана в интервала $[a, b)$, притежава граница при $\beta$, клонящо отляво към $b$. Ако тази граница съществува, то ние ще я приемем по дефиниция за стойност на интеграла

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx,$$

който ще наречем интеграл в несобствен смисъл или по-кратко несобствен интеграл, а за самата функция $f(x)$ ще казваме, че е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, b]$. Казва се също в този случай, че несобственият интеграл (1) е *с х о д я щ*. И така той се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Ако пък границата, написана в дясната страна на това равенство, не съществува, то казваме, че и несобственият интеграл (1) не съществува или че е *р а з х о д я щ*. На един разходящ несобствен интеграл не се приписва никаква стойност, така че символът (1) в такъв случай не представлява никакво число.

Аналогични разсъждения могат да се направят, когато вместо интервал от вида $[a, b)$ имаме интервал от вида $(a, b]$, т. е. интервал, отворен отляво. Естествено несобственият интеграл на една функция $f(x)$, непрекъсната в интервала $(a, b]$, ще се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a,\ \alpha>a} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

П р и м е р 1. Функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[0, 1)$, следователно може да се постави въпросът за сходимостта на несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} \left|\sqrt{1-x}\right|_0^\beta$$

$$= -2\lim_{\beta\to 1,\ \beta<1} (\sqrt{1-\beta}-1) = 2.$$

И така разглежданият несобствен интеграл е сходящ и неговата стойност е равна на 2.

П р и м е р 2. Функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $(0, 1]$. Сега ще имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} \left|\ln x\right|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to 0,\ \alpha>0} (-\ln\alpha).$$

Но границата, до която достигнахме, не съществува (тя е равна на $\infty$) и следователно несобственият интеграл



$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

е разходящ.

Съществуват още един вид несобствени интеграли — т. нар. несобствени интеграли в безкрайни граници. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал от вида $[a, \infty)$, то тя е интегруема във всеки интервал от вида $[a, p]$, където $p>a$. Можем тогава да се занимаем с въпроса, дали интегралът

$$\int_a^p f(x)\,dx,$$

който е функция на $p$, дефинирана в интервала $[a, \infty)$, притежава граница при $p$, клонящо към безкрайност. Ако тази граница съществува, то ние я означаваме така:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{2}$$

и я наричаме *н е с о б с т в е н  и н т е г р а л  в  г р а н и ц и  о т* $a$ до $\infty$. Казваме също, че несобственият интеграл (2) е *с х о д я щ* или че функцията $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, \infty)$. И така имаме по дефиниция

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,dx.$$

Ако границата, която е в дясната страна на това равенство, не съществува, то несобственият интеграл (2) се нарича *р а з х о д я щ* и не му се приписва никаква стойност.

Аналогично по дефиниция имаме

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,dx,$$

където $f(x)$ е функция, дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, a]$.

Най-сетне, когато една функция $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x$ от реалната права, въвеждаме следното дефиниционно равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Интегралът в лявата страна на това равенство е сходящ, когато са сходящи и двата интеграла, написани в дясната му страна.

се също в този случай, че несобственият интеграл (1) е *с х о д я щ*. И така той се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Ако пък границата, написана в дясната страна на това равенство, не съществува, то казваме, че и несобственият интеграл (1) не съществува или че е *р а з х о д я щ*. На един разходящ несобствен интеграл не се приписва никаква стойност, така че символът (1) в такъв случай не представлява никакво число.

Аналогични разсъждения могат да се направят, когато вместо интервал от вида $[a, b)$ имаме интервал от вида $(a, b]$, т. е. интервал, отворен отляво. Естествено несобственият интеграл на една функция $f(x)$, непрекъсната в интервала $(a, b]$, ще се дефинира с равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a,\ \alpha>a} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

П р и м е р 1. Функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[0, 1)$, следователно може да се постави въпросът за сходимостта на несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta\to1,\ \beta<1} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\beta\to1,\ \beta<1} \left|\sqrt{1-x}\right|_0^\beta$$

$$= -2\lim_{\beta\to1,\ \beta<1} (\sqrt{1-\beta}-1) = 2.$$

И така разглежданият несобствен интеграл е сходящ и неговата стойност е равна на 2.

П р и м е р 2. Функцията $f(x)=\frac{1}{x}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $(0, 1]$. Сега ще имаме

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to0,\ \alpha>0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to0,\ \alpha>0} \left|\ln x\right|_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to0,\ \alpha>0} (-\ln\alpha).$$

Но границата, до която достигнахме, не съществува (тя е равна на $\infty$) и следователно несобственият интеграл



$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

е разходящ.

Съществуват още един вид несобствени интеграли — т. нар. несобствени интеграли в безкрайни граници. Ако една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал от вида $[a, \infty)$, то тя е интегруема във всеки интервал от вида $[a, p]$, където $p>a$. Можем тогава да се занимаем с въпроса, дали интегралът

$$\int_a^p f(x)\,dx,$$

който е функция на $p$, дефинирана в интервала $[a, \infty)$, притежава граница при $p$, клонящо към безкрайност. Ако тази граница съществува, то ние я означаваме така:

$$(2)\qquad \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

и я наричаме *н е с о б с т в е н  и н т е г р а л  в  г р а н и ц и  о т* $a$ до $\infty$. Казваме също, че несобственият интеграл (2) е *с х о д я щ* или че функцията $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, \infty)$. И така имаме по дефиниция

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,dx.$$

Ако границата, която е в дясната страна на това равенство, не съществува, то несобственият интеграл (2) се нарича *р а з х о д я щ* и не му се приписва никаква стойност.

Аналогично по дефиниция имаме

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,dx,$$

където $f(x)$ е функция, дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, a]$.

Най-сетне, когато една функция $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x$ от реалната права, въвеждаме следното дефиниционно равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Интегралът в лявата страна на това равенство е сходящ, когато са сходящи и двата интеграла, написани в дясната му страна.

Пример 3. Да разгледаме несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Имаме

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to\infty}\int_0^p \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to\infty}\left|\operatorname{arc\,tg} x\right|_0^p = \lim_{p\to\infty}\operatorname{arc\,tg} p = \frac{\pi}{2}.$$

И така интегралът е сходящ и неговата стойност е $\frac{\pi}{2}$.

Пример 4. Да се занимаем с несобствения интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

Тук получаваме

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{p\to\infty}\int_1^p \frac{dx}{x} = \lim_{p\to\infty}\left|\ln x\right|_1^p = \lim_{p\to\infty}\ln p = \infty.$$

Следователно разглежданият несобствен интеграл е разходящ.

Ако две функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в несобствен смисъл в някой интервал, то тяхната сума $f(x)+g(x)$, както и тяхната разлика $f(x)-g(x)$ са също интегруеми в несобствен смисъл в този интервал. Това се отнася както за несобствени интеграли в крайни граници, така и за такива, които са взети в безкрайни граници.

Действително, ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в несобствен смисъл например в интервала $[a, b)$, то

$$\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta g(x)\,dx,$$

$$\lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta [f(x)-g(x)]\,dx = \lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta f(x)\,dx - \lim_{\beta\to b,\ \beta<b}\int_a^\beta g(x)\,dx.$$

Тъй като границите, написани в десните страни на тези равенства, съществуват, ще съществуват и границите, написани в левите им страни. При това ще имаме

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$



$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ако вместо интервал от вида $[a, b)$ имаме интервал от вида $(a, b]$, разсъжденията по същество остават същите. По подобен начин разсъждаваме и когато имаме несобствени интеграли в безкрайни граници.

**Упражнения.** Установете сходимостта или разходимостта на следните несобствени интеграли:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. Отг. $\frac{\pi}{2}$.

2. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\,dx$. Отг. $\sqrt{2}+\frac{3}{2}\pi - 3\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+4x-5}$. Отг. $\ln 7$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Отг. $\frac{\pi}{2}$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$. Отг. 2.

## § 60. Принцип за сравняване при несобствените интеграли. Абсолютна сходимост на несобствени интеграли

Понякога е от значение да знаем дали даден несобствен интеграл е сходящ или не, без да се интересуваме от неговата стойност. В такъв случай е желателно да можем да отговорим на този въпрос и без да прибягваме непременно към самата дефиниция за несобствен интеграл. (За да приложим дефиницията, ние трябва, както знаем, да пресметнем преди всичко един неопределен интеграл — което дори когато сме в състояние да го извършим, може да бъде свързано с дълги пресмятания.)

В това отношение извънредно полезна е следната теорема, която е в известен смисъл аналогична на принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове. Ние ще я формулираме за случая на интервал от вида $[a, b)$, като е ясно как ще изглежда тя в останалите случаи на несобствени интеграли.

**Теорема (принцип за сравняване на несобствените интеграли).** *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала $[a, b)$ и нека за всяко $x$ от този интервал са изпълнени неравенствата*

(1) $$0 \leqq f(x) \leqq g(x).$$

*Тогава, ако несобственият интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *е сходящ, то сходящ е и несобственият интеграл* $\int_a^b f(x)dx$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме функциите

$$F(\beta)=\int_a^\beta f(x)\,dx \quad \text{и} \quad G(\beta)=\int_a^\beta g(x)\,dx,$$

дефинирани за всяко $\beta$ от интервала $[a, b)$. Като вземем пред вид неотрицателността на $f(x)$ и $g(x)$, лесно е да се убедим, че $F(\beta)$ и $G(\beta)$ са растящи. Наистина, ако $a \leqq \beta_1 < \beta_2 < b$, то

$$F(\beta_2)-F(\beta_1)=\int_a^{\beta_2} f(x)\,dx-\int_a^{\beta_1} f(x)\,dx=\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx \geqq 0,$$

$$G(\beta_2)-G(\beta_1)=\int_a^{\beta_2} g(x)\,dx-\int_a^{\beta_1} g(x)\,dx=\int_{\beta_1}^{\beta_2} g(x)\,dx \geqq 0.$$

Освен това от неравенствата (1) следва, че за всяко $\beta$ от интервала $[a, b)$ имаме още

(2) $$F(\beta) \leqq G(\beta).$$

Дадено е, че границата $\lim\limits_{\beta \to b,\, \beta < b} G(\beta)$ съществува. Поради монотонността на функцията $G(\beta)$ оттук следва, че тя е ограничена отгоре. Като вземем пред вид неравенството (2), заключаваме, че и функцията $F(\beta)$ е ограничена отгоре в интервала $[a, b)$. Поради нейната монотонност това е достатъчно, както знаем от теорема 2, § 19, за да твърдим, че границата $\lim\limits_{\beta \to b,\, \beta < b} F(\beta)$ съществува, което именно искахме да установим.

Преди да направим някои приложения на доказания вече принцип за сравняване на несобствени интеграли, ще въведем едно понятие, което напомня понятието абсолютна сходимост на безкраен ред.

Ще казваме, че несобственият интеграл от една функция $f(x)$ е **а б с о л ю т н о с х о д я щ**, когато несобственият интеграл от функцията $|f(x)|$ е сходящ.

Казва се в този случай също, че функцията $f(x)$ е **а б с о л ю т н о и н т е г р у е м а в н е с о б с т в е н с м и с ъ л** в дадения интервал.

Лесно е да се види, че всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл е сходящ. Нека покажем как се установява това в случая на несобствени интеграли в крайни граници. Случаят на интеграли в безкрайни граници се третира по същия начин.



И така нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b)$ и нека несобственият интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

е сходящ. Да разгледаме двете помощни функции

$$g(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2} \quad \text{и} \quad h(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}.$$

Те удовлетворяват неравенствата

$$0 \leqq g(x) \leqq |f(x)|, \qquad 0 \leqq h(x) \leqq |f(x)|$$

и следователно съгласно принципа за сравняване са интегруеми в несобствен смисъл в интервала $[a, b)$. Но тогава ще бъде интегруема в несобствен смисъл и тяхната разлика. Имаме обаче

$$g(x)-h(x)=f(x).$$

И така несобственият интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

е сходящ, което трябваше да докажем.

Една функция $f(x)$ обаче може да бъде интегруема в несобствен смисъл в някой интервал, без да бъде абсолютно интегруема в него.

Така например интегралът

(3) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

е сходящ, но не абсолютно сходящ. Преди всичко нека забележим, че макар подинтегралната функция да не е дефинирана при $x=0$, тя притежава граница, равна, както знаем, на 1, когато $x$ клони към 0. Ето защо, считайки, че сме дефинирали израза $\frac{\sin x}{x}$ допълнително при $x=0$, приписвайки му стойност 1, ние получаваме една функция, която вече е не само дефинирана, но и непрекъсната в целия интервал $[0, +\infty)$, включително и в левия му край — точката 0. По такъв начин е ясно, че интегралът (3) не е несобствен по отношение на лявата си граница — това е един несобствен интеграл в безкрайни граници, дефиниран, както знаем, посредством равенството

(4) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{p \to \infty} \int_0^p \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Да се занимаем с интеграла, стоящ под знака lim в горното равенство. Съгласно казаното по-горе това е един обикновен определен интеграл. Той може да се преработи така:

$$\int_0^p \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{d\cos x}{x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \left|\frac{\cos x}{x}\right|_{\frac{\pi}{2}}^p - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\cos p}{p} - \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

От получените накрая три събираеми първото е число, независещо от $p$. За второто събираемо поради неравенството $\left|\frac{\cos p}{p}\right| \leq \frac{1}{p}$ имаме

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\cos p}{p} = 0.$$

За да изследваме третото събираемо, ще излезем от неравенството $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ и ще забележим, че несобственият интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

е сходящ (това се проверява непосредствено). Оттук въз основа на принципа за сравняване на несобствени интеграли заключаваме, че и интегралът $\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ е сходящ. Това пък означава, че несобственият интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ е абсолютно сходящ и значи сходящ. Следователно границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^p \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

съществува. По този начин се убеждаваме, че границата, написана в дясната страна на равенството (4), съществува, т. е. че несобственият интеграл (3) е сходящ.

Нека видим сега, че този интеграл не е абсолютно сходящ, т. е. че границата

(5) $$\lim_{p\to\infty} \int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$



не съществува. Да си вземем едно произволно положително число $A$. След това, използувайки факта, че хармоничният ред е разходящ, да вземем цялото положително число $n$ толкова голямо, че да имаме

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 3A.$$

Най-сетне да вземем $p > n\pi$. Тогава ще имаме

$$\int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{\left(k-\frac{5}{6}\right)\pi}^{\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi} |\sin x|\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi - \left(k-\frac{5}{6}\right)\pi\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > A.$$

И така за всяко положително число $A$ можем да намерим такова $p$, че да имаме

$$\int_0^p \frac{|\sin x|}{x}\,dx > A.$$

Това показва, че границата (5) не съществува (тя е равна на $\infty$).

Стойността на интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ не можем непосредствено да пресметнем, тъй като подинтегралната функция не притежава примитивна, изразяваща се чрез елементарните функции. С един начин за пресмятане на този интеграл ще се запознаем в § 84.

## § 61. Критерии за сходимост и разходимост на несобствени интеграли

Принципът за сравняване на несобствени интеграли може да се използува за получаването на някои достатъчни условия за интегруемост и неинтегруемост на функция в несобствен смисъл, известни като к р и т е р и и  з а  с х о д и м о с т  и л и  р а з х о д и м о с т  н а  н е с о б с т в е н и  и н т е г р а л и. Ние ще приведем четири такива критерия.

I. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в някой интервал от вида $[a, b)$ и ако тя удовлетворява в този интервал неравенството*

(1) $$|f(x)| \leq \frac{A}{(b-x)^{\lambda}},$$

*където $A$ е положителна константа и $\lambda<1$, то несобственият интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *е сходящ.*

Действително, ако покажем, че функцията $\frac{A}{(b-x)^\lambda}$ е интегруема в несобствен смисъл в разглеждания интервал, то от принципа за сравняване на несобствени интеграли ще следва, че $f(x)$ е даже абсолютно интегруема в същия интервал. Непосредствено се получава

$$\int\limits_a^b \frac{A}{(b-x)^\lambda}\,dx = A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int\limits_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = -\frac{A}{1-\lambda} \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \left|(b-x)^{1-\lambda}\right|_a^\beta$$

$$= -\frac{A}{1-\lambda} \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} [(b-\beta)^{1-\lambda}-(b-a)^{1-\lambda}] = \frac{A(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

и желаното твърдение е установено.

В случая, когато имаме интервал от вида $(a, b]$, неравенството (1) трябва да се замени с неравенството

$$|f(x)| \leqq \frac{A}{(x-a)^\lambda}.$$

Тук, разбира се, също се изисква да бъдат изпълнени условията $A>0$ $\lambda<1$.

От доказания по-горе критерий можем да получим следното следствие, което е по-удобно за работа:

**Следствие.** *Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$, респективно в интервала $(a, b]$, и ако границата*

$$\lim_{x\to b,\ x<b} f(x)(b-x)^\lambda,$$

*респективно границата*

$$\lim_{x\to a,\ x>a} f(x)(x-a)^\lambda,$$

*съществува при някое $\lambda<1$, то несобственият интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *е сходящ.*

Действително нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$ и нека съществува първата от написаните граници. Тогава функцията $f(x)(b-x)^\lambda$, а следователно и нейната абсолютна стойност $|f(x)|(b-x)^\lambda$ ще бъде ограничена в някой интервал от вида $(b-\delta, b)$. От друга страна, непрекъснатата функция $|f(x)|(b-x)^\lambda$ е сигурно ограничена в крайния и затворен интервал $[a, b-\delta]$. Оттук следва, че тя е ограничена в целия интервал $[a, b)$, т. е. че съществува такава положителна константа $A$, която удовлетворява неравенството



$$|f(x)|(b-x)^\lambda \leqq A$$

за всички точки от този интервал. Но последното неравенство е очевидно равносилно с неравенството (1).

Случаят на интервал от вида $(a, b]$ се разглежда аналогично.

**Пример 1.** Да изследваме сходимостта на несобствения интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{2+x^2}{1-x^2}}\,dx.$$

(Интегралът е несобствен, понеже подинтегралната функция не е дефинирана при $x=1$.) Имаме

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+x^2}{(1-x)(1+x)}}.$$

Тъй като функцията

$$f(x)(1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2+x^2}{1+x}}$$

е непрекъсната в точката $x=1$, то тя сигурно притежава граница при $x\to1$, $x<1$. Тук $\lambda={}^1/_2$. Следователно разглежданият интеграл е сходящ.

**Пример 2.** Нека разгледаме несобствения интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln x\,d\,x.$$

(Интегралът е несобствен, тъй като $\ln x$ не е дефиниран при $x=0$.) Да вземем кое да е число $\lambda$, удовлетворяващо неравенствата $0<\lambda<1$, и да потърсим границата

$$\lim_{x\to0,\ x>0} x^\lambda \ln x.$$

Като положим $x=\frac{1}{t}$, ще имаме (вж. § 35)

$$\lim_{x\to0,\ x>0} x^\lambda \ln x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^\lambda} \ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t^\lambda} = 0.$$

Следователно интегралът $\int\limits_0^1 \ln x dx$ е сходящ.

II. *Ако функцията $f(x)$, непрекъсната в интервала $[a, b)$, удовлетворява в този интервал неравенството*

(2) $$f(x) \geqq \frac{A}{b-x},$$

*където $A$ е положителна константа, то несобственият интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *е разходящ.*

Наистина да допуснем, че този интеграл е сходящ. Тогава въз основа на принципа за сравняване ще заключим, че несобственият интеграл от функцията $\frac{A}{b-x}$ е също сходящ в интервала $[a, b)$. Обаче чрез непосредствено пресмятане получаваме

$$\int_a^b \frac{A}{b-x}\,dx = A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \int_a^\beta \frac{dx}{b-x} = -A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} \Big| \ln(b-x) \Big|_a^\beta$$

$$= -A \lim_{\beta\to b,\ \beta<b} [\ln(b-\beta) - \ln(b-a)] = \infty.$$

И така нашето допускане за сходимост на разглеждания несобствен интеграл е било погрешно. Следователно той е разходящ.

Да забележим, че когато се касае за интервал от вида $(a, b]$, неравенството (2) следва да бъде заменено с неравенството

$$f(x) \geqq \frac{A}{x-a},$$

където $A$ е пак положителна константа.

Доказаният критерий за разходимост на несобствени интеграли също позволява да се изведе от него едно следствие, което се оказва удобно за работа.

**Следствие.** *Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b)$, респективно в интервала $(a, b]$. Ако границата*

$$\lim_{x\to b,\ x<b} f(x)(b-x),$$

*респективно границата*

$$\lim_{x\to a,\ x>a} f(x)(x-a),$$

*съществува и е различна от нула (но се позволява да бъде равна на $\infty$ или на $-\infty$), то несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ е разходящ.*

Пример 3. Да изследваме сходимостта на несобствения интеграл

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx.$$

(Този интеграл е несобствен, тъй като знаменателят на подинтегралната функция става нула при $x=2$.) Имаме



$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}.$$

Тъй като функцията

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}(2-x) = \frac{2x+1}{3-x}$$

е очевидно непрекъсната в точката $x=2$ и получава в тази точка стойност, различна от нула, тя ще притежава граница, различна от нула при $x\to 2$, $x<2$. Заключаваме, че разглежданият несобствен интеграл е разходящ.

III. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$, където $a>0$, и ако в този интервал удовлетворява неравенството*

$$|f(x)| \leqq \frac{A}{x^\lambda},$$

*където $A$ е положителна константа, а $\lambda>1$, то несобственият интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *е сходящ.*

Действително достатъчно е да покажем, че функцията $\frac{A}{x^\lambda}$ е интегруема в несобствен смисъл в интервала $[a, \infty)$. Това се вижда обаче веднага с непосредствена проверка. Наистина имаме

$$\int_a^\infty \frac{A}{x^\lambda}\,dx = A \lim_{p\to\infty} \int_a^p \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{A}{1-\lambda} \lim_{p\to\infty} \Big| x^{-\lambda+1} \Big|_a^p$$

$$= \frac{A}{1-\lambda} \lim_{p\to\infty} \left[ \frac{1}{p^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}} \right] = \frac{A}{(\lambda-1)a^{\lambda-1}}.$$

Оттук въз основа на принципа за сравняване следва, че функцията $f(x)$ е даже абсолютно интегруема в интервала $[a, \infty)$.

Ще дадем и тук едно следствие от току-що доказания критерий за сходимост, улесняващо нашата работа с несобствените интеграли.

**Следствие.** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$ и ако съществува границата*

$$\lim_{x\to\infty} x^\lambda f(x),$$

*където $\lambda>1$, то несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е сходящ.*

Пример 4. Да разгледаме несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x-3}{x^3+2}\,dx.$$

Имаме

$$x^2\frac{x-3}{x^3+2}=\frac{x^3-3x^2}{x^3+2}.$$

Тук $\lambda=2$. Тъй като границата

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{x^3+2}$$

съществува (тя е равна на 1), интегралът е сходящ.

Пример 5. Да разгледаме интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Да вземем $\lambda=2$. Както знаем от § 35, имаме $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$. Оттук следва, че разглежданият несобствен интеграл е сходящ.

IV. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$, където $a>0$, и удовлетворява неравенството*

$$f(x)\geqq\frac{A}{x}$$

*при $A$ — положителна константа, то несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ.*

Действително, ако допуснем, че този интеграл е сходящ, то ще бъде сходящ и интегралът от функцията $\frac{A}{x}$. Той обаче е разходящ, тъй като имаме

$$\int_a^\infty\frac{A}{x}\,dx=A\lim_{p\to\infty}\int_a^p\frac{dx}{x}=A\lim_{p\to\infty}\left|\ln x\right|_a^p=A\lim_{p\to\infty}(\ln p-\ln a)=\infty.$$

Както и при по-рано разгледаните критерии, ще приведем едно следствие от получения критерий за разходимост, което е удобно за работа.

**Следствие.** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, \infty)$ и ако границата*

$$\lim_{x\to\infty}xf(x)$$

*съществува и е различна от нула (но се допуска да бъде равна на $\infty$ или $-\infty$), то несобственият интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ е разходящ.*

Пример 6. Да разгледаме интеграла



$$\int_1^\infty\frac{3x-2}{x^3+x+1}\,dx.$$

Имаме

$$\lim_{x\to\infty}x\frac{3x-2}{x^3+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+x+1}=3.$$

Следователно интегралът е разходящ.

Пример 7. Да изследваме сходимостта на интеграла

$$\int_2^\infty\frac{dx}{\ln x}.$$

От § 35 знаем, че $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\infty$. Следователно интегралът е разходящ.

**Упражнения.** Установете сходимостта или разходимостта на следните несобствени интеграли:

1. $\int_0^1\frac{dx}{x}$.
2. $\int_1^2\frac{x}{\sqrt[3]{2-x}}\,dx$.
3. $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
4. $\int_{-1}^1\frac{x+2}{x^2+4x+3}\,dx$.
5. $\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$.
7. $\int_0^\infty\frac{2x^2+x-3}{x^4+x^2+1}\,dx$.
8. $\int_1^\infty\frac{x^2-x+1}{x^3}\,dx$.
9. $\int_0^\infty\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$.
10. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.
11. $\int_0^\infty\frac{x^2+x+2}{e^x}\,dx$.
12. $\int_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
13. $\int_3^\infty\frac{dx}{\ln(\ln x)}$.

## § 62*. Интегрален критерий на Коши за редове с положителни членове

Понятието несобствен интеграл ни позволява да получим следното необходимо и достатъчно условие за сходимостта на един безкраен ред с положителни членове, известно под името

**Интегрален критерий на Коши за редове с положителни членове.** *Ако функцията $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в интервала $[1, \infty)$, е положителна и намаляваща, то безкрайният ред*

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots \tag{1}$$

*е сходящ тогава и само тогава, когато несобственият интеграл*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

*е сходящ.*

Доказателство. Наистина имаме

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{n} \int_1^{n} f(x)\,dx. \tag{3}$$

От друга страна,

$$\int_1^{n} f(x)\,dx=\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Тъй като поради монотонността на функцията $f(x)$ в интервала $[k-1,\ k]$ са изпълнени неравенствата $f(k-1)\geqq f(x)\geqq f(k)$, ще имаме

$$f(k)\leqq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqq f(k-1),$$

откъдето поради равенството (4) получаваме

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\leqq \int_1^{n} f(x)\,dx\leqq f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$$

От тези неравенства, като вземем пред вид равенството (3), е ясно, че ако редът (1) е сходящ, сходящ ще бъде и интегралът (2), а също, че и обратно — от сходимостта на интеграла (2) следва сходимостта на реда (1).

Пример. Да изследваме реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{5}$$

За целта да разгледаме в интервала $[2,\ \infty)$ функцията $f(x)=\frac{1}{x \ln x}$. Тя е очевидно положителна и намаляваща в този интервал. Съгласно интегралния критерий на Коши редът (5) ще бъде сходящ или разходящ



в зависимост от това, дали е сходящ или разходящ несобственият интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \tag{6}$$

(тук, разбира се, не е съществено това, че вместо интервала $[1,\ \infty)$ сме взели интервала $[2,\ \infty)$). На последния въпрос обаче можем да отговорим непосредствено. Имаме

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}=\lim_{p\to\infty} \int_2^{p} \frac{dx}{x \ln x}=\lim_{p\to\infty} \int_2^{p} \frac{d \ln x}{\ln x}=\lim_{p\to\infty} \Big| \ln(\ln x) \Big|_2^{p}$$

$$=\lim_{p\to\infty}(\ln(\ln p)-\ln(\ln 2))=\infty.$$

И тъй несобственият интеграл (6) е разходящ, значи разходящ е и редът (5).

ГЛАВА IX

# РЕДИЦИ И РЕДОВЕ ОТ ФУНКЦИИ. СТЕПЕННИ РЕДОВЕ

В тази глава, след като въведем понятието равномерна сходимост и докажем няколко теореми, отнасящи се до редици и редове от функции, ще се спрем специално на т. нар. степенни редове, които играят важна роля както в математиката, така и в нейните приложения. Ще се запознаем с разни методи, позволяващи ни да представим дадена функция като сума на степенен ред или, както се казва, да развием тази функция в степенен ред. Едно такова представяне, когато то е възможно, има голямо както чисто теоретично, така и практическо значение поради това, че то ни дава възможност да получаваме приближени изрази за дадената функция, които представляват полиноми. А полиномите (или целите рационални функции), както знаем, се явяват в известен смисъл най-простите функции — в смисъл, че при тях променливата $x$ е подложена само на най-простите аритметични действия — събиране, изваждане и умножение. Основно средство за развиване на функциите в степенни редове се явява познатата ни от гл. VI формула на Тейлор, която ни довежда до понятието Тейлоров ред на функция.

## § 63. Равномерна сходимост

Ако е дадено едно множество $M$ от реални числа и ако на всяко естествено число $n$ съпоставим по една функция $f_n(x)$, дефинирана в $M$, то ще получим редицата от функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

При всяка фиксирана точка $x$ от $M$ редицата (1) представлява една редица от числа, която може да бъде сходяща или разходяща. Множеството $N$ от ония точки $x$, за които редицата (1) е сходяща, се нарича нейна о б л а с т н а с х о д и м о с т. Границата на редицата (1) зависи, разбира се, от $x$ и представлява следователно една функция на $x$, дефинирана в множеството $N$.

Да разгледаме сега една редица от функции от вида (1) с област на сходимост $N$ и нека $f(x)$ е нейната гранична функция. Съгласно дефиницията за сходимост на редица от числа, ако $x$ е точка от $N$, а $\varepsilon$ е положително число, то ще съществува някакво число $\nu$ такова, че при $n>\nu$ ще имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2}$$

Ясно е при това, че числото $\nu$ ще зависи от това, как сме избрали точката $x$ и числото $\varepsilon$. Особено важен е обаче случаят, когато редицата (1) е такава, че числото $\nu$ може да бъде избрано независимо от точката $x$. Така идваме до следната

**Дефиниция.** *Нека редицата от функции*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

*е сходяща за всяко $x$ от едно множество $N$ и нека $f(x)$ е нейната граница. Казваме, че редицата* (1) *е р а в н о м е р н о с х о д я щ а в $N$, ако за всяко положително число $\varepsilon$ съществува такова число $\nu$, зависещо само от $\varepsilon$, но не и от $x$, че при $n>\nu$ неравенството*

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{2}$$

*е изпълнено за всички точки $x$ от $N$.*

П р и м е р. Да разгледаме редицата от функции

$$\sin x,\ \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots$$

Лесно е да се види, че нейната област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$ и че граничната ѝ функция е константата 0. Нещо повече, тя е даже равномерно сходяща в този интервал. Наистина нека $\varepsilon>0$ и нека си образуваме числото $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$. При $n>\nu$ за всяко $x$ ще имаме

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\frac{|\sin nx|}{n}\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{\nu}=\varepsilon.$$

Тук числото $\nu$ бе избрано само в зависимост от $\varepsilon$, а неравенството

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|<\varepsilon$$

е изпълнено при $n>\nu$ за всички числа $x$ от интервала $(-\infty, \infty)$. Следователно изискванията на дефиницията за равномерна сходимост са удовлетворени.

Що се отнася до съществуването на редици от функции, които не са равномерно сходящи, то в следващия параграф ще посочим пример за такава редица.

## § 64. Три теореми за редици от функции

Значението на понятието равномерна сходимост се вижда от важната роля, която то играе в теоремите, с които ще се запознаем в този параграф.

Първата от тези теореми разглежда следния въпрос. Ако една редица от функции е сходяща за всяко $x$ от едно множество $N$ и ако всички нейни членове са функции, непрекъснати в $N$, можем ли да твърдим, че граничната функция ще бъде също непрекъсната в $N$? Отговорът на този въпрос в общия случай е отрицателен. В това се убеждаваме от следния

Пример. Да разгледаме редицата от функции

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

в затворения интервал $[0, 1]$. Всички нейни членове са непрекъснати функции в този интервал. Както знаем, тази редица (която е геометрична прогресия) клони към 0 при $0 \leqq x < 1$. При $x=1$ пък всички нейни членове са равни на 1 и тя клони към 1. И така редицата е сходяща в затворения интервал $[0, 1]$. Обаче нейната гранична функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } 0\leqq x<1 \\ 1 \text{ при } x=1 \end{cases}$$

не е непрекъсната в този интервал — тя е прекъсната в точката $x=1$.

Този пример показва, че не винаги границата на една редица от непрекъснати функции е също непрекъсната. Толкова по-интересна се явява следната

**Теорема 1.** *Ако редицата*

(1) $$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

*от функции, непрекъснати в едно множество $N$, е равномерно сходяща в $N$, то граничната ѝ функция $f(x)$ е също непрекъсната в $N$.*

Доказателство. Нека $x_0$ е точка от $N$. Ще покажем, че $f(x)$ е непрекъсната в тази точка. За целта да вземем произволно положително число $\varepsilon$. Тъй като дадената редица от функции е равномерно сходяща, ще съществува такова число $\nu$, че при $n>\nu$ неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ще бъде изпълнено за всички точки $x$ от $N$. Да разгледаме сега някоя функция $f_n(x)$, номерът $n$ на която удовлетворява неравенството $n>\nu$. Това е по условие функция, непрекъсната в точката $x_0$. Следователно съществува такова положително число $\delta$, че за стойностите на $x$ от $N$, за които имаме $|x-x_0|<\delta$, е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогава при $|x-x_0|<\delta$ ще имаме



$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|$$

$$\leqq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Намерихме такова число $\delta$, че от неравенството $|x-x_0|<\delta$ следва неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Това означава, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0$. Но тази точка беше произволно взета в множеството $N$. Следователно $f(x)$ е непрекъсната в $N$.

След като разполагаме с току-що доказаната теорема, нека се върнем отново към разгледаната преди това редица

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Всички нейни членове са функции, непрекъснати в интервала $[0, 1]$. Ако допуснем, че тя е равномерно сходяща в този интервал; би следвало, че и нейната гранична функция е непрекъсната, което обаче, както видяхме, не е вярно. И така тази редица може да ни послужи като пример на редица от функции, която е сходяща в някакво множество от точки, но не е равномерно сходяща в него.

**Теорема 2 (теорема за почленно интегриране).** *Нека е дадена редицата*

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

*от функции, непрекъснати в един краен и затворен интервал $[a, b]$. Ако тя е равномерно сходяща в този интервал и $f(x)$ е нейната гранична функция, то редицата от определените интеграли*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx,\quad \int_a^b f_2(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_n(x)\,dx, \dots$$

*е сходяща, като при това*

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Преди всичко нека забележим, че както знаем от теорема 1, граничната функция $f(x)$ ще бъде също непрекъсната и следователно интегруема в интервала $[a, b]$.

Нека $\varepsilon$ е едно положително число. Тогава числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ е също положително и поради равномерната сходимост ще съществува такова число $\nu$, че при $n>\nu$ ще имаме

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

за всяко $x$ от интервала $[a, b]$. Това неравенство показва, че числото $\frac{\varepsilon}{b-a}$ е горна граница на функцията $|f_n(x)-f(x)|$, когато $n>\nu$. Ето защо при $n>\nu$ ще имаме

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|$$

$$\leqq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,$$

с което теоремата е доказана.

Полученият резултат може да се запише още и така:

$$\lim\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim f_n(x)\,dx,$$

поради което тази теорема се нарича също **т е о р е м а з а г р а н и ч е н п р е х о д п о д з н а к а н а и н т е г р а л а.**

**Теорема 3 (теорема за почленно диференциране).** *Нека редицата от функции*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,f_n(x),\dots$$

*е сходяща в един интервал $D$ и клони към $f(x)$ и нека всички нейни членове са диференцуеми, а производните им — непрекъснати функции в този интервал. Ако редицата от производните*

$$f_1'(x), f_2'(x),\dots,f_n'(x),\dots$$

*е равномерно сходяща в $D$ и клони към $\varphi(x)$, то функцията $f(x)$ също е диференцуема и*

$$f'(x)=\varphi(x)$$

*за всяко $x$ от $D$.*

Д о к а з а т е л с т в о. Да си вземем една точка $a$ от интервала $D$. Ако $x$ е произволно взета точка от $D$, то, както знаем (формула (6) от § 56), ще имаме

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Следователно

$$\lim f_n(x)=\lim f_n(a)+\lim\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Ако разгледаме редицата от производните в затворения интервал, определен от точките $a$ и $x$, то към нея можем да приложим теоремата за почленно интегриране. Ще получим

$$f(x)=f(a)+\int_a^x \varphi(t)\,dt.$$



Оттук въз основа на теоремата на Лайбниц и Нютон заключаваме, че $f(x)$ е диференцуема в точката $x$ и че $f'(x)=\varphi(x)$. Тъй като $x$ беше избрано произволно в интервала $D$, теоремата е доказана.

## § 65. Редове от функции

Множеството $N$ от точките $x$, за който е сходящ даден ред от функции

(1) $$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots,$$

се нарича негова **о б л а с т н а с х о д и м о с т.** Сумата на реда (1) е очевидно функция на $x$, дефинирана в $N$.

Понятието равномерна сходимост съвсем естествено се пренася за редовете от функции. Ще казваме, че редът (1) е **р а в н о м е р н о с х о д я щ** в множеството $N$, когато редицата от неговите частични суми

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \dots,\ S_n(x),\ \dots$$

е равномерно сходяща в $N$.

Теоремите 1, 2 и 3 от предишния параграф веднага ни дават следващите три теореми, отнасящи се до редове от функции.

**Теорема 1.** *Ако всички членове на реда*

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots$$

*са непрекъснати функции в едно множество $N$ и ако той е равномерно сходящ в $N$, то неговата сума $u(x)$ е също непрекъсната функция в $N$.*

**Теорема 2 (теорема за почленно интегриране).** *Ако редът*

(1) $$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots,$$

*членовете на който са непрекъснати функции в затворения интервал $[a, b]$, е равномерно сходящ в този интервал, то редът*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\dots$$

*сходящ и ако сумата на реда (1) е $u(x)$, то имаме*

$$\int_a^b u(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\dots$$

**Теорема 3 (теорема за почленно диференциране).** *Нека редът от функции*

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots$$

*е сходящ в един интервал $D$ със сума $u(x)$ и нека всичките му членове са диференцуеми функции, а производните им — непрекъснати функции в този интервал. Ако редът*

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\dots+u_n'(x)+\dots$$

*е равномерно сходящ в $D$, то функцията $u(x)$ е диференцуема и за всяко $x$ от $D$ имаме*

$$u'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

Всяка от тези три теореми се доказва, като се разгледа редицата от частичните суми на дадения ред и към тази редица се приложи съответната теорема, отнасяща се до редици от функции.

Съществува едно твърде удобно достатъчно условие за равномерна сходимост на ред от функции. То се дава със следната

**Теорема 4.** *Нека е даден редът от функции*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

*дефинирани в едно множество $N$, и нека за всяко $x$ от $N$ и за всяко $n$ са изпълнени неравенствата*

$$|u_n(x)|\leqq a_n, \tag{2}$$

*където $a_n$ са някакви положителни константи. Ако числовият ред*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{3}$$

*е сходящ, то даденият ред от функции (1) е равномерно сходящ в $N$.*

Доказателство. Преди всичко от неравенствата (2) и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове следва, че редът

$$|u_1(x)|+|u_2(x)|+\ldots+|u_n(x)|+\ldots$$

е сходящ за всяко $x$ от $N$, т. е. че редът (1) е даже абсолютно схоящ в множеството $N$. Нека $u(x)$ е неговата сума. Да въведем следните означения:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),$$
$$\sigma_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

По условие редът (3) е сходящ. Това значи, че числовата редица

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$$

е сходяща и клони към някаква граница $\sigma$. Да вземем едно произволно положително число $\varepsilon$. Ще съществува такова число $\nu$, че при $n>\nu$ да имаме

$$|\sigma_n-\sigma|<\varepsilon.$$

Тогава за всяко $x$ от $N$ при $n>\nu$ ще имаме

$$\begin{aligned}|S_n(x)-u(x)|&=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots|\\ &\leqq|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\ldots\\ &\leqq a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots=\sigma-\sigma_n<\varepsilon.\end{aligned}$$

А това означава, че редът (1) е равномерно сходящ.

Пример. Да разгледаме реда

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n^2}+\cdots \tag{4}$$



От неравенствата

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqq\frac{1}{n^2}$$

и от сходимостта на реда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

която се установява лесно чрез критерия на Раабе—Дюамел, следва съгласно теорема 4, че редът (4) е равномерно сходящ.

## § 66. Степенни редове. Област на сходимост

Степенните редове са една специална категория редове от функции. Важната роля, която те играят в математическия анализ и неговите приложения, се обяснява с обстоятелството, че техните частични суми представляват полиноми.

Общият вид на един степенен ред е следният:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

Числата $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се наричат негови коефициенти.

Множеството от точките, за които е сходящ един степенен ред, се нарича негова о б л а с т   н а   с х о д и м о с т. Тя може да съвпада с множеството на всички реални числа. Такъв е случаят например със следния степенен ред:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{2}$$

Наистина нека $x\neq0$ и нека към реда

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+\cdots \tag{3}$$

приложим критерия на Даламбер. Имаме

$$\lim\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|x|^n}{n!}\right)=\lim\frac{|x|}{n+1}=0.$$

Получената граница е по-малка от 1, следователно редът (3) е сходящ, а това ще рече, че редът (2) е даже абсолютно сходящ за всички $x\neq0$. Но той очевидно е сходящ и при $x=0$. И така степенният ред (2) е сходящ за всяко $x$, т. е. негова област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$.

Има една стойност на $x$, за която всеки степенен ред е сходящ — това е числото 0. Съществуват обаче степенни редове, които са разходящи за всяка друга стойност на $x$. Ето пример за един такъв ред:

$$1+1!\,x+2!\,x^2+\cdots+n!\,x^n+\cdots \tag{4}$$

Ако образуваме при $x\neq0$ отношението

$$\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}=(n+1)\,|x|,$$

виждаме, че за достатъчно големи стойности на $n$ то става по-голямо от 1. Оттук получаваме неравенството

$$(n+1)!\,|x|^{n+1}>n!\,|x|^n,$$

изпълнено за всички стойности на $n$, по-големи от дадено число. Това ни показва, че редицата

$$1,\ 1!\,|x|,\ 2!\,|x|^2,\dots,\ n!\,|x|^n,\dots$$

не може да клони към нула. Но тогава няма да клони към нула и редицата от членовете на реда (4), който следователно ще бъде разходящ. И така неговата област на сходимост се състои от една единствена точка — точката 0.

Разгледаните два примера представляват, така да се каже, крайните случаи, които могат да се срещнат при степенните редове. Съществуват, разбира се, степенни редове, чиято област на сходимост не съвпада с цялата реална ос, нито пък се състои само от точката 0. Такъв пример ни дава познатата геометрична прогресия

$$1+x+x^2+\dots+x^n+\dots, \tag{5}$$

която представлява един степенен ред, сходящ, както знаем, при $|x|<1$ и разходящ при $|x|\geqq 1$. Неговата област на сходимост е следователно отвореният интервал $(-1, 1)$.

Ние ще покажем (и това е извънредно важен резултат), че областта на сходимост на един степенен ред (когато тя не се свежда до единствената точка 0) е винаги интервал, и то интервал от специален вид. Преди всичко ще докажем следната

**Теорема 1.** *Ако степенният ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

*е сходящ за точката $x_0$, то той е сходящ, и то абсолютно, за всяко $x$, удовлетворяващо неравенството $|x|<|x_0|$.*

Доказателство. От сходимостта на числовия ред

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n+\dots$$

следва, че редицата от неговите членове

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\dots,a_nx_0^n,\dots$$

клони към нула. Поради това тя е ограничена и можем да намерим такова число $A$, че за всяко $n$ да бъде изпълнено неравенството

$$|a_nx_0^n|\leqq A. \tag{6}$$

Нека сега $x_1$ е число, удовлетворяващо неравенството $|x_1|<|x_0|$. Тогава числото $q=\left|\frac{x_1}{x_0}\right|$ ще удовлетворява неравенствата $0\leqq q<1$. Да разгледаме сега реда



$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_nx_1^n+\dots \tag{7}$$

За неговия общ член $a_nx_1^n$ имаме

$$|a_nx_1^n|=\left|a_n\frac{x_1^n}{x_0^n}x_0^n\right|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n\leqq Aq^n.$$

От полученото неравенство и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове следва, че редът

$$|a_0|+|a_1x_1|+|a_2x_1^2|+\dots+|a_nx_1^n|+\dots \tag{8}$$

е сходящ. Действително неговият $n$-ти член е по-малък или равен на $n$-тия член на геометричната прогресия

$$A+Aq+Aq^2+\dots+Aq^n+\dots,$$

която е сходяща, тъй като $0\leqq q<1$.

Това означава, че редът (7) е абсолютно сходящ. Тъй като точката $x_1$ беше произволна точка, удовлетворяваща неравенството $|x_1|<|x_0|$, то теоремата е доказана.

От тази теорема следва, че когато един степенен ред е сходящ за всяко $x$, той е и абсолютно сходящ за всяко $x$.

По-нататък от нея следва също, че ако даден степенен ред е разходящ за някое $x_1$, то той е разходящ и за всяко $x$, удовлетворяващо неравенството $|x|>|x_1|$.

Сега е лесно да се установи следната важна теорема, която дава отговор на въпроса за вида на областта на сходимост на един степенен ред.

**Теорема 2.** *Нека е даден един степенен ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots \tag{1}$$

*Тогава или той е абсолютно сходящ за всяко $x$, или е сходящ само при $x=0$, или най-сетне съществува едно положително число $r$ със следното свойство: при $|x|<r$ редът е абсолютно сходящ, а при $|x|>r$ е разходящ.*

Доказателство. Нека допуснем, че даденият ред нито е абсолютно сходящ за всяко $x$, нито пък е сходящ само в точката $x=0$. Трябва да покажем, че в такъв случай съществува положително число $r$ със свойството, изказано във формулировката на теоремата.

Да означим с $M$ множеството от ония числа $x$, за които редът (1) е сходящ. Ако допуснем, че това множество не е ограничено отгоре, ще заключим, че редът (1) е абсолютно сходящ за всяко $x$ — случай, който ние изключихме. Наистина, каквото и число $x$ да си вземем, числото $|x|$ няма да бъде горна граница на множеството $M$. Значи ще съществува число $x_1$, което принадлежи на $M$ (т. е. за което редът (1) е сходящ) и за което имаме $|x|<x_1$. Но тогава съгласно теорема 1 редът ще бъде сходящ и за точката $x$.

Следователно множеството $M$ е ограничено отгоре. Да означим с $r$ неговата точна горна граница. Тъй като $M$ съдържа числото 0, то числото $r$ е неотрицателно. Ако бихме имали обаче $r=0$, то редът би бил сходящ само при $x=0$ — случай, който също изключихме. Наистина при $r=0$ редът е разходящ очевидно за всяко положително $x$. Но той ще бъде тогава разходящ и за всяко отрицателно $x$ — от неговата сходимост за някое отрицателно число $x_1$ би следвала сходимостта му и за всички положителни числа $x$, по-малки от $|x_1|$.

И така $r>0$. Нека $x$ е число, удовлетворяващо неравенството $|x|<r$. Тогава $|x|$ няма да бъде горна граница на множеството $M$, т. е. ще съществува число $x_1$ от $M$, такова, че $|x|<x_1$. Оттук следва че редът (1) е абсолютно сходящ в точката $x$.

Ако пък $x$ е число, за което $|x|>r$, то можем да вземем такова число $x_1$, че да имаме $r<x_1<|x|$. Ако допуснем сега, че редът (1) е сходящ в точката $x$, той ще бъде сходящ и в точката $x_1$, което противоречи на дефиницията на числото $r$.

По такъв начин установихме, че степенният ред (1) е абсолютно сходящ при $|x|<r$ и разходящ при $|x|>r$. С това теоремата е доказана.

Положителното число $r$, което въведохме при доказателството на тази теорема, се нарича **радиус на сходимост** на дадения степенен ред. Прието е да се счита, че когато един степенен ред е сходящ за всяко $x$, той има радиус на сходимост $x=\infty$, а когато е сходящ само за точката 0, неговият радиус на сходимост е $r=0$. По такъв начин можем да говорим за радиус на сходимост при всеки степенен ред.

Нека отбележим, че в теорема 2 не се говори нищо за сходимостта на реда (1) в крайните точки на интервала $(-r, r)$. В действителност ние и не можем да изкажем никакво общо твърдение, отнасящо се до тези две точки — редът може да бъде сходящ в едната от тях и разходящ в другата или пък да бъде сходящ и в двете, или най-сетне разходящ и в двете.

И наистина геометричната прогресия (5) ни дава пример за степенен ред, който има радиус на сходимост, равен на 1, и който е разходящ в двете крайни точки на интервала $(-1, 1)$.

Ето още два примера, които ще ни убедят, че действително са възможни и другите два случая, за които споменахме:

Степенният ред

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots \tag{9}$$

има радиус на сходимост $r=1$. Действително достатъчно е да го разгледаме за положителни стойности на $x$. Като приложим при $x>0$ критерия на Даламбер, имаме

$$\lim\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}\right)=\lim\left(\frac{n}{n+1}\cdot x\right)=x.$$

Оттук следва, че при $0<x<1$ редът е сходящ, а при $x>1$ — разходящ, което показва, че имаме $r=1$. При $x=1$ редът (9) е разходящ, тъй като в този случай той се превръща в хармоничния ред, а при $x=-1$ той е сходящ съгласно критерия на Лайбниц. И така неговата област на сходимост е интервалът $[-1, 1)$.

Да разгледаме най-сетне степенния ред



$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots \tag{10}$$

При $x>0$ получаваме

$$\lim\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{x^n}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2}{(n+1)^2}x=x.$$

Оттук въз основа на критерия на Даламбер заключаваме, че редът (10) е сходящ при $0<x<1$ и разходящ при $x>1$ и че следователно неговият радиус на сходимост е $r=1$. При $x=1$ получаваме реда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

за който с помощта на критерия на Раабе — Дюамел се установява, че е сходящ. Но тогава редът (10) ще бъде даже абсолютно сходящ и при $x=-1$. И така неговата област на сходимост е затвореният интервал $[-1, 1]$.

Ще отбележим накрая, че от теорема 2 можем да извлечем още и следното

**Следствие.** *Ако степенният ред*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

*има радиус на сходимост $r$, то той е равномерно сходящ във всеки интервал от вида $[-c, c]$, където $0<c<r$. (Когато $r=\infty$, това твърдение е вярно за всяко положително число $c$.)*

Наистина твърдението следва от сходимостта на числовия ред

$$|a_0|+|a_1c|+|a_2c^2|+\ldots+|a_nc^n|+\ldots,$$

от теорема 4, § 65 и от неравенствата

$$|a_nx^n|\leqq|a_nc^n|,$$

изпълнени за всяко $x$ от интервала $[-c, c]$.

**Упражнения.** Определете радиусите на сходимост на следните степенни редове:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{3^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} x^n$.

## § 67. Диференциране на степенните редове

Ако диференцираме почленно даден степенен ред

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

то в резултат ще получим отново един степенен ред, а именно реда

(2) $$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

За тези два реда е в сила следната

**Теорема 1.** *Степенните редове* (1) *и* (2) *имат един и същ радиус на сходимост.*

Доказателство. Нека означим радиуса на сходимост на реда (1) с $r$, а този на реда (2) с $r'$. Да вземем една точка $x_1$ от интервала $(-r', r')$. За тази точка редът (2) е абсолютно сходящ, т. е. сходящ е редът

$$|a_1|+2|a_2x_1|+\ldots+n|a_nx_1^{n-1}|+\ldots$$

Ако умножим този ред с числото $|x_1|$, ще получим сходящия ред

$$|a_1x_1|+2|a_2x_1^2|+\ldots+n|a_nx_1^n|+\ldots$$

Тогава от очевидните неравенства

$$|a_nx_1^n|\leqq n\,|a_nx_1^n|,$$

изпълнени за всяко $n$, и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове ще следва, че редът (1) е абсолютно сходящ за точката $x_1$. Тъй като това беше произволна точка от интервала $(-r', r')$, то редът (1) се оказва сходящ за всички точки от този интервал. Следователно неговият радиус на сходимост $r$ не може да бъде по-малък от $r'$. И така имаме

(3) $$r'\leqq r.$$

Нека сега $x_2$ е точка от интервала $(-r, r)$. Да вземем едно положително число $x_0$, удовлетворяващо неравенствата $|x_2|<x_0<r$. Редът (1) ще бъде абсолютно сходящ за точката $x_0$. Поради това редицата от неговите членове

$$a_0,\ a_1x_0,\ a_2x_0^2,\ \ldots,\ a_nx_0^n,\ \ldots$$

ще клони към нула и следователно ще бъде ограничена. Нека $A$ е такова число, за което е изпълнено неравенството

$$|a_nx_0^n|\leqq A \quad \text{за всяко } n.$$

Да разгледаме реда

(4) $$|a_1|+|2a_2x_2|+\cdots+|na_nx_2^{n-1}|+\cdots$$

и да образуваме числото $q=\dfrac{|x_2|}{x_0}$. За общия член на реда (4) имаме

$$|na_nx_2^{n-1}|=\left|na_n\frac{x_2^{n-1}}{x_0^{n-1}}x_0^{n-1}\right|=\frac{|a_nx_0^n|}{x_0}nq^{n-1}\leqq\frac{A}{x_0}nq^{n-1}.$$



Като вземем пред вид, че $0<q<1$, и използуваме критерия на Даламбер, убеждаваме се, че редът

$$1+2q+\ldots+nq^{n-1}+\ldots$$

е сходящ. Неговата сходимост, разбира се, няма да се наруши, ако умножим всичките му членове с числото $\dfrac{A}{x_0}$. Ето защо от неравенството

$$|na_nx_2^{n-1}|\leqq\frac{A}{x_0}nq^{n-1},$$

което вече доказахме за всяко $n$, и от принципа за сравняване на редове с неотрицателни членове ще следва сходимостта и на реда (4). Това означава, че редът (2) е абсолютно сходящ за произволно взетата точка $x_2$ от интервала $(-r, r)$. Следователно неговият радиус на сходимост е най-малко равен на $r$, т. е. имаме

(5) $$r'\geqq r.$$

От неравенствата (3) и (5) получаваме най-сетне

$$r=r',$$

което искахме да докажем.

Нека подчертаем обаче, че макар степенните редове (1) и (2) да имат един и същ радиус на сходимост, техните области на сходимост могат и да не съвпадат. Това ще рече, че в крайните точки на интервала $(-r, r)$ двата реда могат да имат различно поведение. Така например степенният ред

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

както видяхме в миналия параграф, има за област на сходимост интервала $[-1, 1)$, докато полученият от него чрез почленно диференциране степенен ред

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

е разходящ при $x=-1$ и има за област на сходимост отворения интервал $(-1,1)$.

Степенните редове са особено удобни за работа поради валидността на следната

**Теорема 2 (теорема за диференциране на степенните редове).** *Сумата* $f(x)$ *на един степенен ред*

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

*е диференцуема функция за всяка вътрешна точка от неговия интервал на сходимост и при това*

(6) $$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

Доказателство. Както знаем от теорема 1, редовете (1) и (2) имат един и същ радиус на сходимост $r$. Нека $x\in(-r, r)$ и нека $c$ е число, удовлетворяващо неравенствата $|x|<c<r$. Съгласно следствието, което получихме в края на предишния параграф, степенният ред (2) е равномерно сходящ в интервала $[-c, c]$. Тогава въз основа на теоремата

за почленно диференциране на редове от функции от § 65 заключаваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в точката $x$ и че е в сила равенството (6). Тъй като $x$ беше произволна точка от интервала $(-r, r)$, с това теоремата е доказана.

От тази теорема следва по-специално, че сумата на един степенен ред е непрекъсната функция във всички вътрешни точки от неговия интервал на сходимост.

В заключение нека отбележим, че ако интегрираме почленно степенния ред

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots,$$

чийто радиус на сходимост е $r$, полученият степенен ред

(7) $$a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\dots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots$$

има същия радиус на сходимост, тъй като редът (1) се получава от него чрез почленно диференциране. Нещо повече, въз основа на теорема 2 можем да твърдим, че сумата на степенния ред (7) представлява една примитивна функция на сумата на степенния ред (1) в интервала $(-r, r)$.

## § 68. Тейлоров ред

Доказаните в предишните параграфи свойства на степенните редове ги правят твърде удобни за работа. Ето защо, както вече имахме случая да отбележим, твърде е желателно дадена функция $f(x)$ (когато това е възможно) да бъде представена, поне за някоя част от своята дефиниционна област, като сума на степенен ред или, както се казва още, да бъде развита в степенен ред.

Един основен метод за постигането на тази цел е използването на т. нар. тейлоров ред.

В § 36 бяхме доказали, че ако $f(x)$ е функция, $n+1$ пъти диференцуема в някоя околност на една точка $a$, то за всяка точка $a+h$ от тази околност е валидна следната формула, наречена формула на Тейлор:

(1) $$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_n.$$

Изразът $R_n$ се нарича остатъчен член и има вида

(2) $$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

където $\theta$ е число, намиращо се между 0 и 1.

Нека сега е дадена една функция $f(x)$, която е безбройно много пъти диференцуема в някоя околност $(a-\delta, a+\delta)$ на една точка $a$ (тази околност може да бъде в частност и интервалът $(-\infty, +\infty)$). Ние можем да напишем тогава формулата на Тейлор при всяко цяло положително число $n$. Това ни навежда на мисълта да си образуваме следния степенен ред на променливата $h$:



(3) $$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dots$$

Този ред се нарича тейлоров ред на функцията $f(x)$ относно точката $a$. Ако означим с $S_n$ неговата $(n+1)$-ва частична сума, то формулата на Тейлор ни дава

$$f(a+h)=S_n+R_n.$$

Ясно е, че ако за някоя стойност на $h$ имаме $\lim R_n=0$, то ще имаме и $\lim S_n=f(a+h)$, т. е. редът (3) ще бъде сходящ и неговата сума ще бъде равна на $f(a+h)$. За ония точки $a+h$ от интервала $(a-\delta, a+\delta)$, за които това е изпълнено, ние казваме, че функцията $f(x)$ се развива в тейлоров ред. Обикновено това са точките от някой интервал от вида $(a-\delta_1, a+\delta_1)$, явяващ се подинтервал на интервала $(a-\delta, a+\delta)$. В такъв случай казваме, че $f(x)$ е развиваема в тейлоров ред в околността $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ на точката $a$ или по-кратко, че $f(x)$ се развива в тейлоров ред около точката $a$. За точките от споменатата околност имаме

(4) $$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\dots$$

Ако положим $a+h=x$, равенството (4) се написва така:

(5) $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

В специалния случай, когато $a=0$, получаваме т. нар. маклоренов ред на функцията $f(x)$, който има вида

(6) $$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

В този случай за остатъчния член $R_n$ имаме

(7) $$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),$$

където $0<\theta<1$.

Когато за всяка точка $x$ от някой интервал $(-\delta, \delta)$ е изпълнено равенството

(8) $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots,$$

казваме, че $f(x)$ се развива в маклоренов ред в този интервал. Това ще се осъществи, когато за всяка от тези стойности на $x$ остатъчният член $R_n$ клони към нула.

Ние ще получим сега маклореновите развития на някои конкретни функции. Тези степенни развития се използуват често в математическия анализ.

Да разгледаме функцията $f(x)=e^x$. Тъй като за нея $f^{(n)}(x)=e^x$ и следователно $f^{(n)}(0)=1$ за всяко $n$, то нейният маклоренов ред е следният:

(9) $$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\dots$$

Ние изследвахме този ред в § 66 и видяхме, че той е абсолютно сходящ за всяко $x$, т. е. че неговата област на сходимост е интервалът $(-\infty, \infty)$. Сега ще покажем, че неговата сума за всяко $x$ е равна на $e^x$, т. е. че в целия интервал $(-\infty, \infty)$ е изпълнено равенството

(10) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Както видяхме, за целта трябва да изследваме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Нека $x$ е произволно число. Имаме

(11) $$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

По-нататък разсъждаваме по следния начин: Изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ представлява общият член на един сходящ ред, тъй като редът (9), както отбелязахме вече, е абсолютно сходящ за всяко $x$. Но редицата от членовете на всеки сходящ ред клони към нула. Следователно имаме

$$\lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Оттук и от неравенството (11) следва, че $\lim R_n = 0$. С това е доказано, че функцията $e^x$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty, \infty)$.

Да вземем сега функцията $f(x) = \sin x$. За нея имаме (вж. § 30)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оттук получаваме

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Имаме $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следователно маклореновият ред на функцията $\sin x$ ще бъде следният:

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Остатъчният член тук е

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

От неравенството

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

по същия начин, както по-горе, се убеждаваме, че $\lim R_n = 0$ за всяко $x$. И така функцията $\sin x$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty, \infty)$. Следователно за всяко $x$ е изпълнено равенството



$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

По подобен начин получаваме и маклореновото развитие на функцията $\cos x$. То е следното:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

и е валидно също така в интервала $(-\infty, \infty)$.

Да разгледаме и функцията $f(x) = (1+x)^m$, където $m$ е произволно реално число, дефинирана при $x > -1$. Лесно получаваме

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Оттук

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1) \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots$$

Като използуваме означенията

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

ще запишем маклореновия ред на функцията $(1+x)^m$ по следния начин:

(12) $$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

Изследването на остатъчния член тук показва, че $\lim R_n = 0$ при $-1 < x < 1$. И така функцията $(1+x)^m$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-1, 1)$. За всяко $x$ от този интервал е изпълнено равенството

(13) $$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

Наистина нека $x$ е число от интервала $(-1, 1)$ и нека представим $R_n$ във формата на Коши, която получихме в § 58*. Ще имаме

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1},$$

или

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}.$$

Като вземем пред вид, че $|x| < 1$ и $0 < \theta < 1$, виждаме, че $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ и че ако $m < 1$, то $(1+\theta x)^{m-1} \leqq (1-|x|)^{m-1}$, а ако $m \geqq 1$, то $(1+\theta x)^{m-1} \leqq (1+|x|)^{m-1}$. Следователно при $m < 1$ имаме

(14) $$|R_n| \leqq \frac{|m(m-1)\ldots(m-n)|}{n!}|x|^{n+1}(1-|x|)^{m-1},$$

а при $m \geqq 1$

(15) $$|R_n| \leqq \frac{|m(m-1)\ldots(m-n)|}{n!}|x|^{n+1}(1+|x|)^{m-1}.$$

Ако към реда

$$(16) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|m(m-1)\dots(m-n)|}{n!} |x|^{n+1}$$

приложим критерия на Даламбер, виждаме, че той е сходящ. Следователно общият му член клони към нула. Оттук въз основа на неравенството (14) (при $m<1$) или (15) (при $m\geqq 1$) заключаваме, че $\lim R_n=0$. И така равенството (13) е в сила за всички $x$ от отворения интервал $(-1,1)$.

Нека забележим впрочем, че равенството (13) е валидно и за $x=1$, когато $m\geqq 1$. Наистина при $m>1$ и $x=1$ редът (16) е също сходящ, както можем да се убедим с помощта на критерия на Раабе — Дюамел, и заключението се извършва отново въз основа на неравенството (15). При $m=1$ пък равенството (13) е очевидно за всяко $x$ (в дясната му страна в този случай всички събираеми след второто са нули).

Редът (12) се нарича биномен ред. Равенството (13) представлява очевидно обобщение на формулата

$$(14) \qquad (1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\dots+\binom{m}{m}x^m,$$

валидна, когато $m$ е цяло положително число. Наистина, когато $m$ е цяло положително число, коефициентите $\binom{m}{n}$ са равни на нула при $n=m+1$, $m+2, \dots$ и равенството (13) преминава в равенството (14).

**Упражнения.** Като използувате степенните развития на функциите $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ и $(1+x)^m$, намерете степенните развития и посочете интервалите, в които те са валидни, за следните функции:

1. $f(x)=e^{x^2}$.
2. $f(x)=\sin 2x$.
3. $f(x)=\cos^2 x$.
4. $f(x)=\sin^4 x$.
5. $f(x)=\sin 2x\cos x$.
6. $f(x)=\cos 3x\cos x$.
7. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$.
8. $f(x)=\dfrac{1}{(2+x^2)^2}$.
9. $f(x)=\sqrt{4+x}$.
10. $f(x)=\sqrt[4]{1-x^2}$.
11. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

## § 69. Други начини за развиване на функции в степенни редове

Освен използването на тейлоровия или маклореновия ред съществуват и други начини дадена функция $f(x)$ да бъде развита в степенен ред. Ние ще посочим чрез конкретни примери някои от тях.

I. Един такъв метод е преди всичко използването на познатата ни формула за сумата на геометричната прогресия

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots,$$



валидна при $-1<x<1$. Ето няколко примера, поясняващи как се извършва това.

Пример 1. Функцията $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ се представя като сума на една геометрична прогресия по следния начин:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\dots+(-1)^n x^{2n}+\dots \quad \text{при } |x|<1.$$

Пример 2. За функцията $f(x)=\frac{1}{2-x}$ имаме

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\dots+\frac{x^n}{2^n}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\dots+\frac{x^n}{2^{n+1}}+\dots \quad \text{при } |x|<2.$$

Пример 3. При функцията $f(x)=\frac{x}{3+2x}$ получаваме

$$\frac{x}{3+2x}=\frac{x}{3}\,\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\frac{x}{3}\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{2^2}{3^2}x^2-\dots+(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n+\dots\right)$$

$$=\frac{x}{3}-\frac{2}{3^2}x^2+\frac{2^2}{3^3}x^3+\dots+(-1)^n\cdot\frac{2^n}{3^{n+1}}x^{n+1}+\dots \quad \text{за } |x|<\frac{3}{2}.$$

Горният метод може да бъде използуван и след предварително разлагане на функцията на сума от елементарни дроби. Ето един пример за такъв начин на работа.

Пример 4. За да развием в ред функцията $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2x-3}$, найнапред я представяме като сума от две елементарни дроби. Получаваме

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{7}{4}\,\frac{1}{x+3}.$$

Имаме

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{4}(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots) \quad \text{при } |x|<1$$

и

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{7}{4.3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{7}{4.3}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}-\dots+(-1)^n\frac{x^n}{3^n}+\dots\right) \quad \text{при } |x|<3,$$

откъдето

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=-\frac{1}{4}(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots)$$

$$+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}x-\frac{5}{27}x^2+\cdots+\frac{1}{4}\left((-1)^n\frac{7}{3^{n+1}}-1\right)x^n+\cdots \text{ при } |x|<1.$$

II. Друг метод за развиване на функции в степенни редове е методът на почленното интегриране. Ние ще го приложим за получаването на две важни развития, които често се използуват в математическия анализ.

Най-напред да разгледаме функцията $f(x)=\ln(1+x)$, дефинирана при $x>-1$. Като диференцираме, получаваме $f'(x)=\frac{1}{1+x}$. Но в отворения интервал $(-1, 1)$ имаме

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

Ако интегрираме почленно степенния ред, написан в дясната страна на това равенство, ще получим степенния ред

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \tag{2}$$

Този ред има също така радиус на сходимост, равен на 1, а за всяко $x$ от интервала $(-1, 1)$ неговата сума $\varphi(x)$ съгласно теоремата за диференциране на степенните редове има производна, равна на сумата на реда, който интегрирахме. Следователно $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}$.

Двете функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имат една и съща производна в интервала $(-1, 1)$ и следователно тяхната разлика е константа в този интервал. За да пресметнем тази константа, да дадем на $x$ стойността 0. Тъй като $f(0)=0$ и $\varphi(0)=0$, то заключаваме, че $f(x)=\varphi(x)$ в интервала $(-1, 1)$. И така получихме равенството

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

валидно при $-1<x<1$. Може да се покаже, че то остава валидно и за точката $x=1$.

Наистина при $0<x<1$ редът (2) удовлетворява условията на критерия на Лайбниц. Ето защо съгласно бележките, които направихме след доказателството на този критерий в § 11, ще имаме

$$\left|\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

При $x\to 1$ горното неравенство преминава в неравенството

$$\left|\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{n+1},$$

откъдето получаваме равенството

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$



Като втори пример ще разгледаме функцията $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. За нейната производна $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ имаме

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \text{ при } -1<x<1.$$

Като интегрираме почленно степенния ред от това равенство, получаваме степенния ред

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \tag{3}$$

чиято сума $\varphi(x)$ е диференцуема в интервала $(-1, 1)$ и има за производна в този интервал сумата на реда, който интегрирахме. И така $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

От равенството $f'(x)=\varphi'(x)$ заключаваме, че функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ се различават с една константа в интервала $(-1, 1)$. Но тъй като $f(0)=\varphi(0)=0$, то тази константа е нула. И така имаме $f(x)=\varphi(x)$, т. е. получаваме развитието

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \tag{4}$$

валидно при $-1<x<1$. Може да се покаже, че то е валидно и при $x=1$, и при $x=-1$.

Наистина, ако $0<x<1$, то редът (3) удовлетворява условията на критерия на Лайбниц, поради което ще имаме

$$\left|\operatorname{arc\,tg} x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

При $x\to 1$ получаваме

$$\left|\operatorname{arc\,tg} 1-\left(1-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{1}{2n+3},$$

откъдето следва равенството

$$\operatorname{arc\,tg} 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots \tag{5}$$

По този начин виждаме, че равенството (4) е вярно при $x=1$. То е вярно и при $x=-1$, защото при замяна на $x$ с $-x$ двете страни на равенството (4) само си сменят знака. Нека забележим, че равенството (5), като вземем пред вид, че $\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}$, може да се запише и така:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots\right).$$

III. Най-сетне степенните развития на някои функции могат да се получат и посредством метода на почленното диференциране. Ще покажем това с един пример. Да вземем функцията $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Забелязваме, че тази функция е производна на функцията $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$, за която имаме развитието

$$\varphi(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

валидно в интервала $(-1, 1)$. Тогава, ако диференцираме почленно този степенен ред, неговата сума съгласно теоремата за диференциране на степенните редове ще бъде равна на $\varphi'(x)$ в същия интервал. Но $\varphi'(x)=f(x)$. И така получаваме развитието

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

валидно при $-1<x<1$.

**Упражнения.** Да се развият в степенни редове следните функции, като се посочат и съответните интервали, в които тези развития са валидни:

1. $f(x)=\frac{1}{3+x}$.
2. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+5}$.
3. $f(x)=\frac{x}{x^2+2x-8}$;
4. $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}$.
5. $f(x)=\ln(1+x^2)$.
6. $f(x)=\ln\frac{2-x}{3+x}$.
7. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x^2$.
8. $f(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$.



ЧАСТ III

# ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА ДВЕ НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ