

1) Докажете, че ако $\lim f(x) = -\infty / +\infty$ и $\lim g(x) = L < 0$, то $\lim f(x)g(x) = +\infty / -\infty$; ($x \rightarrow a$ при всичките граници).

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot \mp \infty = \operatorname{sgn}(L) \mp \infty = \pm \infty$$

2) Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е навсякъде диференцируема. Докажете, че f е намаляваща/растяща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ / $f'(x) \geq 0$ за всяко x от $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

$$\text{Ако } f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \geq 0 \Leftrightarrow f(x+dx) - f(x) \geq 0 \quad (\text{т.к. } dx > 0)$$

$f(x+dx) \geq f(x)$ за всяко x в $\mathbb{R}$ и произволно безкрайно малко dx - определението на растяща функция.

3) Функцията $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича изпъкнала в X , ако...

$$f(\Omega x_1 + (1 - \Omega)x_2) \leq \Omega f(x_1) + (1 - \Omega)f(x_2) \text{ за всяко } \Omega \in [0, 1] \text{ и всеки } x_1, x_2 \in X.$$