Анализ 1, специалност ‘Софтуерно инженерство“, теория, 05.09.2011 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11 и 12 се попълват на този лист,
за 3, 6 и 10, както и пресмятане в 11, се използват допълнителни листа.

1. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число a такова, че за всяко
....

2. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $+\infty$, ако за всяко
....

3. *(3 точки)* Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

4. *(1+1 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се клони към $+\infty$ когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши) ....

(Хайне) ....

5. *(1 точка)* Формулирайте теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция.

6. *(4 точки)* Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Докажете, че $f(x)$ има най-малка стойност в $[0\,, +\infty)$.

7. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11 и 12 се попълват на този лист,
за 3, 6 и 10, както и пресмятане в 11, се използват допълнителни листа.

8. *(1 точка)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания):
....

9. *(1 точка)* Довършете дефиницията: Функцията $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ се нарича изпъкнала в $\mathbb{R}$, ако
....

10. *(6 точки)* Нека $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е навсякъде диференцируема. Докажете, че
$f(x)$ е изпъкнала в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато производната ѝ $f'(x)$ е растяща функция в $\mathbb{R}$.

11. *(4 точки)* Дадено е, че функцията

$$f(x)=\begin{cases} e^x \sin x & , \quad \text{за} \quad 0\le x \\ A\operatorname{arctg} x + B & , \quad \text{за} \quad x<0 \end{cases}$$

има производна в точката $a=0$. Намерете A и B . Има ли $f(x)$ втора производна в точката $a=0$?

Отговор: $A=$ ...... , $B=$ ......

12. *(5 точки)* Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)=\dfrac{3x^4+4}{x^6+x^4+2}$ в $\mathbb{R}$.
Докажете, че $F(x)$ е ограничена в $\mathbb{R}$.

Анализ 1, специалност ‘Софтуерно инженерство“, теория, 05.09.2011 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11 и 12 се попълват на този лист,
за 3, 6 и 10, както и пресмятане в 11, се използват допълнителни листа.

1. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число a такова, че за всяко
....

2. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $-\infty$, ако за всяко
....

3. *(3 точки)* Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

4. *(1+1 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се клони към $-\infty$ когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши) ....

(Хайне) ....

5. *(1 точка)* Формулирайте теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция.

6. *(4 точки)* Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Докажете, че $f(x)$ има най-голяма стойност в $[0\,, +\infty)$.

7. *(1 точка)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11 и 12 се попълват на този лист,
за 3, 6 и 10, както и пресмятане в 11, се използват допълнителни листа.

8. *(1 точка)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания):
....

9. *(1 точка)* Довършете дефиницията: Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се нарича вдлъбната в $\mathbb{R}$, ако
....

10. *(6 точки)* Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е навсякъде диференцируема. Докажете, че $f(x)$ е вдлъбната в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато производната ѝ $f'(x)$ е намаляваща функция в $\mathbb{R}$.

11. *(4 точки)* Дадено е, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cos x & , \quad \text{за} \quad x \leq 0 \\ A\,x\,\sqrt{1+x} + B & , \quad \text{за} \quad x > 0 \end{cases}$$

има производна в точката $a = 0$. Намерете A и B . Има ли $f(x)$ втора производна в точката $a = 0$?

Отговор: $A =$ ...... , $B =$ ......

12. *(5 точки)* Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{4x^4 + 5}{x^6 + x^4 + 5}$ в $\mathbb{R}$.
Докажете, че $F(x)$ е ограничена в $\mathbb{R}$.