*Лема 1.* Да допуснем, че системата от вектори $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{s};a$ e линейно зависима и нека $φ\_{1}а\_{1}+φ\_{2}а\_{2}+..+φ\_{s}а\_{s}+φa=0$ където поне един от коефициентите $φ\_{1}, φ\_{2}..φ\_{s};φ$ е различен от нула. Ако $φ=0 $получаваме линейна зависимост на векторите $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{s}$ което е противоречие. Ако $φ\ne 0$ имаме а=$-\frac{φ\_{1}}{φ}а\_{1}-\frac{φ\_{2}}{φ}а\_{2}-..-\frac{φ\_{s}}{φ}а\_{s}\in l(а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{s}),$ което отново е противоречие. Следователно системата от вектори $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{s};a$ e линейно независима.

*Теорема 2.* Нека V е крайномерно и dimV=n. Тогава V притежава базис $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n}$ състоящ се от n на брой вектора. Нека $b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{n+1}$ е произволна система от n+1 на брой вектора от V. Тези вектори се изразяват синейно 1рез базисните вектори $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n}.$ От основната лема следва, че векторите $b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{n+1}$ са линейно зависими.

Обратното , нека $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n} са линейно $ независими вектори от V и всеки n+1 на брой вектора от V са линейно зависими. Нека a е произволен вектор от V . Ако а не принадлежи на $l(а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n})$ според лема 1 векторите биха били линейно независими-противоречие. Следователно а$\in l(а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n})$. Така векторите $а\_{1}$,$ а\_{2}$,..,$ а\_{n}$ са линейно независими и всеки вектор a oт V е тяхна линейна комбинация. Следователно тези вектори са базис на V и значи V е крайномерно и dimV=n.

Теорема 3.

От V$\ne \left\{0\right\}$ следва, че поне един от векторите $b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{k}$ е различен от нулевия вектор. Нека например $b\_{1}\ne 0 $Ако V=$l(b\_{1})$, то $b\_{1}$ е базис на V.Нека V$l(b\_{1})$. Тогава поне един от векторите $ b\_{2}$,..,$ b\_{k}$, например $b\_{2}$ не принадлежи на $l(b\_{1})$(в противен случай V=$l(b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{k})=l(b\_{1})$ Според лема 1 векторите $b\_{1}$,$ b\_{2}$ са линейно независими. Ако V=l($b\_{1}$,$ b\_{2}) $то $b\_{1}$,$ b\_{2} $образуват базис на V. В противен случай например $b\_{3}$не принадлежи на $l(b\_{1}$,$ b\_{2})$ и тогава векторите $b\_{1}$,$ b\_{2}, b\_{3}$ са линейно независими. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки избираме вектори $b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{n}$, n$\leq k$, които са линейно независими и V=$l(b\_{1}$,$ b\_{2}$,..,$ b\_{n})$ Следователно тези вектори образуват базис на V

Теорема 4

Нека f,$g\_{1},g\_{2}\in F[x]$ Ако $g\_{1}$l $f$,$ g\_{2}$l $f$ и ($g\_{1}$,$ g\_{2})=1$ то $g\_{1}$,$ g\_{2}$l $f$.

Доказателство: Нека f=$g\_{1}f\_{1} $. Ot $g\_{2}$l $g\_{1}f\_{1}$ и от ($g\_{1}$,$ g\_{2})=1$ следва $g\_{2}$l $f\_{1}$. Тогава $g\_{1}$,$ g\_{2}$l$g\_{1}f\_{1}, $т.е. $g\_{1}$,$ g\_{2}$l f.

Tеорема 5

Нека char F=0, f$\in F\left[x\right], K e разшрение $на F и $α\in К$.Тогава $α е$ к-кратен корен на f точно когато f($α)$=f’($α)$=…=$f^{k-1}\left(α\right)$=0 и $f^{k}\left(α\right)\ne 0$

Доказателство: Нека първо $α е $к-кратен корен на f. Искаме да докажем, че f($α)=f^{'}\left(α\right)=…=f^{k-1}\left(α\right)$=0 и $f^{k}\left(α\right)\ne 0$. Ще проведем индукция по к. Ако к=1 (т.е. $α $е прост корен на f), то f=(x-$ α)g,g\in K[x]$ и g($α) \ne 0.$Tогава f’=g+(x-$ α)$g’ и f’($α)=g(α$)$ \ne 0.$ Така f($α)=0$,f’($α) \ne 0$ Нека k$>1 $ и твърдението е вярно за числа по-малки от к. Имаме f=$\left(x- α\right)^{к}g,g\in K\left[x\right] и g\left(α\right) \ne 0$ Тогава f’=$k\left(x- α\right)^{к-1}g+\left(x- α\right)^{к}g^{'}=\left(x- α\right)^{к-1}(kg+(x- α)^{}g$’)=$ (x- α)^{к-1}g\_{1}, където g\_{1}=kg+\left(x- α\right)g^{'}.$При това , $g^{'}\left( α\right)=kg( α) \ne 0$

Следователно $α$ е (к-1)-кратен корена на полинома f’. Сега твърдението следва от инд.предпол.

Обратното, нека f($α)=f^{'}\left(α\right)=…=f^{k-1}\left(α\right)$=0 и $=f^{k}$($α) \ne 0 $Нека $α $е $l-кратен$

корен на f. Ако $l<k, то l\leq k-1 и значи f^{l}=0-противоречие.Ако k<l, то k\leq l-1$ и от първата част на теоремата следва $f^{k}=0$-отнво противоречие. Следователно l=k, т.е. $α $e k-kратен орен на f. Теоремата е доказана.

Теорема 6.

*Нека А е област на f=f(*$x\_{1},x\_{2,}..x\_{n}) \in A\left[x\_{1},x\_{2,}..x\_{n}\right]$*е симетричен полином. Тогава същ. Единствен полином g на n променливи с коефициенти от А, такъв че f(*$x\_{1},x\_{2,}..x\_{n})$*=g(*$σ\_{1},…,σ\_{n})$

*Доказателство: Съществуване. Нека а*$x\_{1}^{k\_{1}}x\_{2}^{k\_{2}}…x\_{n}^{k\_{n}}$ *е старшият едночлен на f, тогава* $k\_{1\geq }k\_{2\geq ….\geq }k\_{n}$ *Да разгледаме полинома* $φ\_{1}$*=а*$σ\_{1}^{к\_{1}-k\_{2}}σ\_{2}^{к\_{2}-k\_{3}}σ\_{n-1}^{к\_{n-1}-k\_{n}}σ^{k\_{n}}$*Toзи полином е едночлен на елеметратните симтрични полиноми* $σ\_{1},…,σ\_{n}$ *и е симетричен полином на* $x\_{1},x\_{2,}..x\_{n}$

*Старщите едночлени на* $σ\_{1},…,σ\_{n}$ *са суответно* $x\_{1},x\_{1}x\_{2},…,x\_{1}x\_{2}…x\_{n}$ *Следва, че стваршият едночлен на* $φ\_{1} е $*а*$x\_{1}^{к\_{1}-k\_{2}}x\_{1}x\_{2}\_{}^{к\_{2}-k\_{3}}…(x\_{1}x\_{2}…x\_{n-1})\_{}^{к\_{n-1}-k\_{n}}(x\_{1}x\_{2}…x\_{n})^{k\_{n}}$*= а*$x\_{1}^{к\_{1}}x\_{2}^{к\_{2}}…x\_{n}^{к\_{n}}$

*Toгава полиномът* $f\_{1}=f-φ$ *e симчетричен полином с коефициенти от А и старши*

*Едночлен, по-малък от старшия едночлен на f. Ако* $f\_{1}\ne 0$*, по аналогичен налчин получаваме симетричен полином* $f\_{2}=f\_{1}$*-*$φ\_{2}$ *с коефициенти от А и старши едночлен, по-малък от старшия едночлен на* $f\_{1}$*. Този процес не може да бъде безкраен. За старшие едночлен b*$x\_{1}^{l\_{1}}x\_{2}^{l\_{2}}…x\_{n}^{l\_{n}}$ *на кой да е от получените симетрични полиноми* $f\_{1}, f\_{2}… $ *е изп.* $k\_{1}\geq l\_{1}\geq l\_{2}\geq …\geq l\_{n}\geq 0. $*Тогава броят на всички различни n-орки (*$l\_{1,}l\_{2…}l\_{n}$*) e не повече от* $(k\_{1}+1)^{n}$*Следователно след краен брой, например s , стъпки ще получим нулев полином* $f\_{s}$ *Oт равенствата* $f\_{1}=f-φ$*,*$ f\_{2}=f\_{1}-φ$*,…,*$ f\_{s-1}=f\_{s-2}-φ\_{s-1,}$*0=*$f\_{s}=f\_{s-1}-φ\_{s,}$ *следва f=*$φ\_{1}+φ\_{2}+…+φ\_{s-1}+φ\_{s,} Тъй като φ\_{1},…φ\_{s,} са едночлени на σ\_{1},…,σ\_{n} с коеф.от А, то f$*=*$φ\_{1}+…+φ\_{s}$ *e полином на* $σ\_{1},…,σ\_{n} с коеф.от А.$