Лема 1. Да допуснем, че системата от вектори $a_1, a_2, .., a_s; a$ е линейно зависима и нека $\varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2 + .. + \varphi_s a_s + \varphi a = 0$ където поне един от коефициентите $\varphi_1, \varphi_2 .. \varphi_s; \varphi$ е различен от нула. Ако $\varphi = 0$ получаваме линейна зависимост на векторите $a_1, a_2, .., a_s$ което е противоречие. Ако $\varphi \neq 0$ имаме a=$-\frac{\varphi_1}{\varphi} a_1 - \frac{\varphi_2}{\varphi} a_2 - .. - \frac{\varphi_s}{\varphi} a_s \in l(a_1, a_2, .., a_s)$, което отново е противоречие. Следователно системата от вектори $a_1, a_2, .., a_s; a$ е линейно независима.

Теорема 2. Нека V е крайномерно и dimV=n. Тогава V притежава базис $a_1, a_2, .., a_n$ състоящ се от n на брой вектора. Нека $b_1, b_2, .., b_{n+1}$ е произволна система от n+1 на брой вектора от V. Тези вектори се изразяват синейно 1рез базисните вектори $a_1, a_2, .., a_n$. От основната лема следва, че векторите $b_1, b_2, .., b_{n+1}$ са линейно зависими.

Обратното , нека $a_1, a_2, .., a_n$ са линейно независими вектори от V и всеки n+1 на брой вектора от V са линейно зависими. Нека a е произволен вектор от V . Ако a не принадлежи на $l(a_1, a_2, .., a_n)$ според лема 1 векторите биха били линейно независими-противоречие. Следователно a$\in$ $l(a_1, a_2, .., a_n)$. Така векторите $a_1, a_2, .., a_n$ са линейно независими и всеки вектор a от V е тяхна линейна комбинация. Следователно тези вектори са базис на V и значи V е крайномерно и dimV=n.

Теорема 3.

От V$\neq \{0\}$ следва, че поне един от векторите $b_1, b_2, .., b_k$ е различен от нулевия вектор. Нека например $b_1 \neq 0$ Ако V=$l(b_1)$, то b_1 е базис на V.Нека V$\not\subset l(b_1)$. Тогава поне един от векторите $b_2, .., b_k$, например b_2 не принадлежи на $l(b_1)$(в противен случай V=$l(b_1, b_2, .., b_k) = l(b_1)$ Според лема 1 векторите b_1, b_2 са линейно независими. Ако V=l(b_1, b_2) то b_1, b_2 образуват базис на V. В противен случай например b_3не принадлежи на $l(b_1, b_2)$ и тогава векторите b_1, b_2, b_3 са линейно независими. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки избираме вектори $b_1, b_2, .., b_n$, n$\leq k$, които са линейно независими и V=$l(b_1, b_2, .., b_n)$ Следователно тези вектори образуват базис на V

Теорема 4

Нека f,$g_1, g_2 \in F[x]$ Ако $g_1 | f, g_2 | f$ и $(g_1, g_2) = 1$ то $g_1, g_2 | f$.

Доказателство: Нека f=$g_1 f_1$. Ot $g_2 | g_1 f_1$ и от $(g_1, g_2) = 1$ следва $g_2 | f_1$. Тогава $g_1, g_2 | g_1 f_1$, т.е. g_1, g_2| f.

Теорема 5

Нека char F=0, f$\in F[x], K\ e$ разщрение на F и $\alpha \in$ K.Тогава α е к-кратен корен на f точно когато f(α)=f'(α)=…=$f^{k-1}(\alpha)$=0 и $f^k(\alpha) \neq 0$

Доказателство: Нека първо α е к-кратен корен на f. Искаме да докажем, че f$(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{k-1}(\alpha)$=0 и $f^k(\alpha) \neq 0$. Ще проведем индукция по к. Ако к=1 (т.е. α е прост корен на f), то f=(x- $\alpha)g, g \in K[x]$ и g$(\alpha) \neq 0$.Тогава f'=g+(x- α)g' и f'$(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$. Така f$(\alpha) = 0$,f'$(\alpha) \neq 0$
Нека k> 1 и твърдението е вярно за числа по-малки от к. Имаме
f=$(x - \alpha)^к g, g \in K[x]$ и $g(\alpha) \neq 0$ Тогава f'=k$(x - \alpha)^{к-1} g + (x - \alpha)^к g' = (x - \alpha)^{к-1}(kg + (x - \alpha)\ \ g'$)= $(x - \alpha)^{к-1} g_1$, където $g_1 = kg + (x - \alpha)g'$.При това , $g'(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0$

Следователно α е (к-1)-кратен корена на полинома f'. Сега твърдението следва от инд.предпол.

Обратното, нека f$(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{k-1}(\alpha)$=0 и $= f^k(\alpha) \neq 0$ Нека α е $l -$ кратен

корен на f. Ако $l < k$, то $l \leq k-1$ и значи $f^l = 0 -$ противоречие. Ако $k < l$, то $k \leq l-1$ и от първата част на теоремата следва $f^k = 0$-отнво противоречие. Следователно l=k, т.е. α е k-кратен орен на f. Теоремата е доказана.

Теорема 6.

Нека A е област на f=f$(x_1, x_{2,} .. x_n) \in A[x_1, x_{2,} .. x_n]$е симетричен полином. Тогава същ. Единствен полином g на n променливи с коефициенти от A, такъв че f$(x_1, x_{2,} .. x_n)$=g$(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

Доказателство: Съществуване. Нека a$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ е старшият едночлен на f, тогава $k_{1\geq} k_{2\geq \dots \geq} k_n$ Да разгледаме полинома φ_1=a$\sigma_1^{\text{к}_1 - k_2} \sigma_2^{\text{к}_2 - k_3} \sigma_{n-1}^{\text{к}_{n-1} - k_n} \sigma^{k_n}$Този полином е едночлен на елеметратните симтрични полиноми $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и е симетричен полином на $x_1, x_{2,} .. x_n$

Старщите едночлени на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ са суответно $x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_2 \dots x_n$ Следва, че стваршият едночлен на φ_1 е a$x_1^{\text{к}_1 - k_2} x_1 x_2^{\text{к}_2 - k_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\text{к}_{n-1} - k_n} (x_1 x_2 \dots x_n)^{k_n}$= a$x_1^{\text{к}_1} x_2^{\text{к}_2} \dots x_n^{\text{к}_n}$

Тогава полиномът $f_1 = f - \varphi$ е симчетричен полином с коефициенти от A и старши

Едночлен, по-малък от старшия едночлен на f. Ако $f_1 \neq 0$, по аналогичен налчин получаваме симетричен полином $f_2 = f_1$-φ_2 с коефициенти от A и старши едночлен, по-малък от старшия едночлен на f_1. Този процес не може да бъде безкраен. За старшие едночлен b$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ на кой да е от получените симетрични полиноми $f_1, f_2 \dots$ е изп. $k_1 \geq l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n \geq 0$. Тогава броят на всички различни n-орки $(l_{1,} l_{2 \dots} l_n)$ е не повече от $(k_1 + 1)^n$Следователно след краен брой, например s , стъпки ще получим нулев полином f_s От равенствата $f_1 = f - \varphi$, $f_2 = f_1 - \varphi$,..., $f_{s-1} = f_{s-2} - \varphi_{s-1,}$0=$f_s = f_{s-1} - \varphi_{s,}$ следва f=φ_1+$\varphi_2 + \cdots + \varphi_{s-1} + \varphi_{s,}$ Тъй като $\varphi_1, \dots \varphi_{s,}$ са едночлени на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ с коеф. от А, то f=φ_1+$\cdots + \varphi_s$ е полином на $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ с коеф. от А.