

Глава 1. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА ЗАДАЧАТА НА КОШИ ЗА ОБИКНОВЕНО ДИФЕРЕНЦИАЛНО УРАВНЕНИЕ ОТ ПЪРВИ РЕД

§ 1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА. МРЕЖОВИ (ДИФЕРЕНЧНИ) МЕТОДИ. МЕТОДИ НА ОЙЛЕР

Постановка на диференциалната задача, съществуване и единственост на решението, устойчивост по начални данни

Търси се диференцируема функция $u = u(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad x_0 < x \leq X,$$

и началното условие

$$(2) \quad u(x_0) = u_0.$$

Тази задача има следната геометрична интерпретация: търси се крива $u = u(x)$, която минава през точката (x_0, u_0) и чиято допирателна във всяка точка (x, u) има ъглов коефициент $f(x, u)$.

В курса по числени методи ще предполагаме винаги, че разглежданата диференциална задача има и то единствено решение. За да бъде изпълнено това предположение, на входните данни на задачата се налагат някакви условия. Тези условия имат съществено значение при конструирането и изследването на методите за приближено решаване на задачата. За задачата на Коши (1), (2) условията за съществуване и единственост на решението се формулират така ([1], стр.43):

Теорема. Нека функцията $f(x, u)$ е дефинирана и непрекъсната в правоъгълника $D = \{(x, u) : |x - x_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$ и удовлетворява в D условието на Липшиц по u :

$$(3) \quad |f(x, u) - f(x, v)| \leq K |u - v| \quad \text{за } \forall (x, u), (x, v) \in D$$

с константа $K > 0$. Тогава задачата (1), (2) има и то единствено решение $u(x)$ за $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, където $\delta = \min(a, b/M)$, а $M = \max_D |f(x, u)|$.

Забележка. Ако $f(x, u)$ е само непрекъсната, задачата (1), (2) може да има повече от едно решение.

От свойствата на функцията f зависи и непрекъснатата зависимост на решението $u(x)$ от дясната страна на началното условие u_0 , т. е. неговата устойчивост.

Наред със задачата (1), (2), да разгледаме и задачата

$$(4) \quad \tilde{u}' = f(x, \tilde{u}),$$

$$(5) \quad \tilde{u}(x_0) = \tilde{u}_0,$$

която се различава от задачата (1), (2) само по дясната страна на началното условие, и следователно ще има друго решение, което означаваме с $\tilde{u}(x)$.

Определение. Решението $u = u(x)$ на уравнението (1), съответстващо на началното условие (2), се нарича *устойчиво по начални данни* (устойчиво по Ляпунов), ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такова че от неравенството

$|\tilde{u}_0 - u_0| < \delta$ да следва $|\tilde{u}(x) - u(x)| < \varepsilon$ за $\forall x \geq x_0$, където $\tilde{u}(x)$ е решението на задачата (4), (5).

Да изследваме как зависи устойчивостта по начални данни от свойствата на f . Въвеждаме функцията $z(x) = \tilde{u}(x) - u(x)$. За $z(x)$ след прилагане на теоремата за крайните нараствания, получаваме задачата

$$z'(x) = [f(x, \tilde{u}) - f(x, u)] = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u + \theta z)z, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad z(x_0) = z_0 = \tilde{u}_0 - u_0,$$

или още

$$(6) \quad z'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u + \theta z)z, \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(7) \quad z(x_0) = z_0.$$

За краткост по-долу ще пропускаме аргументите на функциите z и $\frac{\partial f}{\partial u}$. Да умножим двете страни на уравнението (6) със z :

$$(8) \quad zz' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(z^2) = \frac{\partial f}{\partial u} z^2.$$

Да разгледаме два случая:

а) $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ за всички $x, u, \tilde{u}$. Тогава $\frac{d}{dx}(z^2) \leq 0$, от което следва $z^2(x) \leq z^2(x_0)$ и $|z(x)| \leq |z(x_0)|$, т.е. $|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq |\tilde{u}_0 - u_0|$ за $x \in [x_0, X]$, което означава устойчивост на решението на задачата (1), (2) по начални данни.

б) $\frac{\partial f}{\partial u} \geq c_0 > 0$ за всички $x, u, \tilde{u}$. Тогава от (8) получаваме последователно

$$\frac{dz^2}{z^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} dx, \quad \int_{x_0}^x \frac{dz^2}{z^2} = 2 \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial u} dx \geq 2c_0(x - x_0), \quad \ln z^2 \Big|_{x_0}^x \geq 2c_0(x - x_0),$$

$$\ln \frac{z^2}{z_0^2} \geq 2c_0(x - x_0), \quad \ln \frac{|z|}{|z_0|} \geq c_0(x - x_0),$$

$|z(x)| \geq e^{c_0(x-x_0)} |z(x_0)| = e^{-c_0 x_0} e^{c_0 x} |z(x_0)|$. Следователно $|z(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, т. е. решението не е устойчиво по начални данни.

И така, при $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ решението на задачата (1), (2) е устойчиво, при $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ е неустойчиво по начални данни. Тъй като решението $z(x)$ на задачата (6), (7) при $x \rightarrow \infty$ има поведение, аналогично на поведението на решението на линейното уравнение

$$(9) \quad \begin{cases} u' = \lambda u, & x_0 < x \leq X, \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad \lambda = \text{const},$$

то задачата (9) е приета за *моделна* при изследване устойчивостта на числените методи за решаване на задача (1), (2). Точно решение на задачата (9) е $u(x) = u_0 e^{\lambda(x-x_0)}$ и има следните свойства:

- (10) $|u(x)| \leq |u_0|$ при $\lambda \leq 0$,
 (11) $|u(x)| \geq |u_0|$ при $\lambda \geq 0$,
 (12) $u(x) \geq 0$ при $u_0 \geq 0$, $u(x) \leq 0$ при $u_0 \leq 0$,
 (13) $u(x)$ е монотонна функция при произволни λ и u_0 .

Определение. Ако численият метод за решаване на задачата (1), (2), приложен към моделната задача (9) при $\lambda \leq 0$ дава приближено решение, за което е изпълнено неравенство, аналогично на (10), казваме, че *методът е абсолютно устойчив*.

В случая $\lambda > 0$ разглеждаме друг вид устойчивост (т. н. *относителна устойчивост*), която ще дефинираме по-късно.

Определение. Ако при всяко λ численият метод дава приближено решение, което има свойства, аналогични на (12), (13) (т. е. той запазва знакоопределеността и монотонността на решението), казваме, че *методът е монотонен*.

Приближено решаване на задачата (1), (2)

Преди да систематизираме видовете числени методи, разработени за задачата (1), (2), ще се опитаме с елементарни разсъждения да изведем някои от тях.

1. Като използваме геометричната интерпретация и една от основните идеи на числените методи - в достатъчно малък интервал дадена непрекъсната функция може да се приближи с линейна - идваме до най-стария метод - метода на Ойлер (1768). В точката (x_0, u_0) построяваме допирателната към кривата $u = u(x)$:

$u - u_0 = f(x_0, u_0)(x - x_0)$. В достатъчно малък интервал с дължина $h = x_1 - x_0$ замества кривата $u = u(x)$ с тази допирателна и за приближена стойност на $u(x)$ в точката x_1 приемаме пресечната точка на правата $x = x_1$ с допирателната:

$$(14) \quad \tilde{u}_1 = u_0 + h f(x_0, u_0).$$

Ако продължим този процес, правейки последователно стъпки h , ще получим:

$$(15) \quad \tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_i + h f(x_i, \tilde{u}_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad , \quad n = \frac{X - x_0}{h}.$$

2. В уравнението (1) полагаме $x = x_0$

$$u'_0 = f(x_0, u_0)$$

и апроксимираме производната $u'(x_0)$ с едностранна разлика, използвайки стойността на $u(x)$ в достатъчно близка до x_0 точка x_1 , $x_1 - x_0 = h$

$$u'(x_0) = \frac{u_1 - u_0}{h} + O(h) = f(x_0, u_0).$$

Пренебрегваме остатъчния член $O(h)$ и получаваме

$$\tilde{u}_1 = u_0 + h f(x_0, u_0).$$

3. Интегрираме двете страни на уравнението (1) в интервал (x_0, x_1) с дължина h

$$\int_{x_0}^{x_1} u' dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u(x)) dx$$

и за пресмятане на интеграла вдясно използваме някоя от известните прости формули за числено интегриране [5], [7]:

- формулата на левите правоъгълници
$$u_1 - u_0 = h f(x_0, u_0) + O(h^2),$$

$$\tilde{u}_1 - u_0 = h f(x_0, u_0),$$
- формулата на десните правоъгълници
$$u_1 - u_0 = h f(x_1, u_1) + O(h^2),$$

$$\tilde{u}_1 - u_0 = h f(x_1, \tilde{u}_1),$$
- формулата на трапеците
$$u_1 - u_0 = \frac{h}{2} (f(x_0, u_0) + f(x_1, u_1)) + O(h^3),$$

$$\tilde{u}_1 - u_0 = \frac{h}{2} (f(x_0, u_0) + f(x_1, \tilde{u}_1)).$$

И така, по формулите (15), (16), (17) можем да намерим приближените стойности $\tilde{u}_i$ на решението $u(x)$ в точките $x_i = x_0 + ih$, $h = (X - x_0)/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тези формули са частни случаи на мрежовите (диференчните) методи за решаване на диференциалната задача (1),(2).

Мрежови (диференчни) методи

В интервала $[x_0, X]$ въвеждаме *мрежа от точки*:

- неравномерна: $\hat{\omega} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = X\}$ или
- равномерна: $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n, h = (X - x_0)/n\}$.

Да означим с $u_i = u(x_i)$ стойностите на точното решение на задачата (1), (2) във възлите на мрежата, а с $y_i = \tilde{u}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, съответните приближени стойности, които намираме по някой числен метод (например (15)-(17)).

Дефинираме следните *мрежови функции*:

$$y_h = \{y_i\}_{i=0}^n, \quad u_h = \{u_i\}_{i=0}^n.$$

Това са функции на дискретен аргумент с дефиниционна област $\bar{\omega}_h$ или $\hat{\omega}$.

Да запишем уравнението (1) във вида

$$(18) \quad Lu = f, \quad L = \frac{d}{dx}.$$

Определение. Операторът L_h , преобразуващ мрежовата функция y_h в мрежова функция $Y_h = L_h y_h$, се нарича *мрежов* или *диференчен оператор*.

Диференциалният оператор L , действащ в множеството на функциите на непрекъснат аргумент, може да бъде *апроксимиран* (приближен) с диференчен оператор L_h , действащ върху мрежовите функции.

Определение. Разликата

$$(19) \quad \psi_i = (L_h u_h)_i - (Lu)_i$$

се нарича *грешка на апроксимацията на оператора L с диференчния оператор L_h във възела $x_i \in \bar{\omega}_h$ (локална грешка на апроксимацията)*. Ако $\psi_i = O(h^m)$, казва се, че грешката на апроксимация във възела x_i е от m -ти ред.

Например, ако $Lu = u'$, а

$$(20) \quad (L_h u_h)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

то

$$\begin{aligned} \psi_i &= (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = \frac{1}{h} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''(x_i + \theta h) - u_i \right) - u'_i = \\ &= \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h) = O(h), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Ако $u \in C^2[x_0, X]$, то локалната грешка на апроксимация на оператора $L = \frac{d}{dx}$ с диференчния оператор L_h , дефиниран чрез (20), е от първи ред.

Приближените методи, дефинирани чрез (15)-(17), имат следния общ вид:

$$(21) \quad (L_h y_h)_i = (\theta_h(y_h))_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

където $(\theta_h(y_h))_i$ е някаква апроксимация на дясната част $f(x, u(x))$ във възела x_i .

Уравнението (21) се нарича *диференчно уравнение*. За приближените методи (15), (16) и (17) имаме съответно:

$$(22) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \equiv (\theta_h(y_h))_i,$$

$$(23) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv (\theta_h(y_h))_i,$$

$$(24) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \equiv (\theta_h(y_h))_i.$$

Диференчният метод, дефиниран чрез (22), се нарича *явен метод на Ойлер*, чрез (23) - *неявен метод на Ойлер*, а чрез (24) - *подобрен метод на Ойлер*.

Определение. Разликата

$$(25) \quad \psi_i = (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

се нарича *грешка на апроксимацията* на диференциалното уравнение (1) с диференчното уравнение (21) във възела $x_i \in \bar{\omega}_h$ (*локална грешка на апроксимацията*), пресметната за точното решение на задача (1)-(2).

Дефинираме мрежова С-норма на y_h ,

$$\|y_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i|,$$

аналог на равномерната норма $\|u\| = \max_{x \in [x_0, X]} |u(x)|$, която наричаме *мрежова С-норма*.

Дефинираме *мрежовата функция* $\psi_h = \{\psi_i\}_{i=0}^n$ - *грешка на апроксимацията върху мрежата* и нейната мрежова С-норма

$$\|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i|.$$

Апроксимация, устойчивост по начални данни, монотонност и сходимост на явния метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (25) и (22) имаме

$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

ако $u(x) \in C^2[x_0, X]$. Нека $\max_{x \in [x_0, X]} |u''(x)| = M_2$. Тогава

$$(26) \quad \|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{h}{2} M_2 = O(h).$$

Следователно локалната грешка на апроксимация и C -нормата на грешката на апроксимация върху мрежата са от първи ред по отношение на h .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги върху моделната задача

$$(27) \quad \begin{cases} u' = \lambda u, & \lambda < 0, & x_0 < x \leq X, \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lambda y_i,$$

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda) y_i = (1 + h\lambda)^2 y_{i-1} = \dots = (1 + h\lambda)^{i+1} y_0.$$

За да бъде изпълнено неравенство, аналогично на (10), т.е. неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(28) \quad |1 + h\lambda| \leq 1, \quad -1 \leq 1 + h\lambda \leq 1.$$

Дясното неравенство е изпълнено за всяко h , а лявото - при следното условие за стъпката h :

$$(29) \quad h \leq \frac{2}{-\lambda}.$$

Казва се, че явният метод на Ойлер е *условно абсолютно устойчив* – абсолютно устойчив при изпълнение на условието (29).

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12), а именно

$$y_i \geq 0 \quad \text{при } y_0 \geq 0, \quad y_i \leq 0 \quad \text{при } y_0 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

достатъчно е

$$(30) \quad 1 + h\lambda \geq 0, \quad h \leq \frac{1}{-\lambda}.$$

Казва се, че явният метод на Ойлер е *условно монотонен* - монотонен при изпълнение на условието (30). Да отбележим, че условието за монотонност (30) е по-силно от условието за устойчивост (29).

3. Сходимость и оценка на грешката.

Дефинираме *мрежова функция*:

$$(31) \quad z_h = u_h - y_h, \quad z_i = u_i - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

която се нарича *грешка* на диференчния метод.

Определение. Ако

$$\|z_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |z_i| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

казва се, че диференчният метод е *сходящ* - има сходимост на приближеното решение към точното. Ако $\|z_h\| = O(h^m)$, казва се, че сходимостта (скоростта на сходимост) е от ред m .

Да изследваме сходимостта на явния метод на Ойлер. Приближеното решение удовлетворява (22), а поради грешката на апроксимация ψ_i и *грешките* δ_i от *закръгляванията на всяка стъпка*, мрежовата функция u_h , съответстваща на точното решение $u(x)$, ще удовлетворява диференчните уравнения

$$(32) \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i) + \psi_i + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Изваждаме уравнението (22) от (32) и за грешката z_i получаваме диференчната задача

$$(33) \quad \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, u_i) - f(x_i, y_i) + \psi_i + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$(34) \quad z_0 = u_0 - y_0.$$

Тогава $z_{i+1} = z_i + h[f(x_i, u_i) - f(x_i, y_i)] + h\psi_i + h\delta_i$.

Въвеждаме означението $A_i = h|\psi_i| + h|\delta_i|$. Като използваме условието на Липшиц (3) за f , получаваме

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq |z_i| + hK|z_i| + A_i = (1+hK)|z_i| + A_i = (1+hK)^2|z_{i-1}| + (1+hK)A_{i-1} + A_i \leq \dots \leq \\ &\leq (1+hK)^{i+1}|z_0| + \sum_{j=0}^i (1+hK)^j A_{i-j}. \end{aligned}$$

Нека $|\psi_i| \leq \psi$, $|\delta_i| \leq \delta$, $i = 0, 1, \dots, n$, и да използваме неравенството $1+x \leq e^x$:

$$|z_{i+1}| \leq e^{Kh(i+1)}|z_0| + h(\psi + \delta) \frac{(1+hK)^{i+1} - 1}{1+hK-1} \leq e^{K(x_{i+1}-x_0)}|z_0| + (\psi + \delta) \frac{e^{K(x_{i+1}-x_0)} - 1}{K}.$$

Следователно

$$(35) \quad |u_i - y_i| \leq e^{K(x_i-x_0)}|u_0 - y_0| + (\psi + \delta) \frac{e^{K(x_i-x_0)} - 1}{K}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Нека $u_0 = y_0$ и $\delta = 0$. Тогава при всяко фиксирано $x_i \in \overline{\omega}_h$

$$|u_i - y_i| \leq \psi \frac{e^{K(x_i-x_0)} - 1}{K} = O(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ и следователно}$$

$$(36) \quad \|u_h - y_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |u_i - y_i| \leq \frac{e^{K(X-x_0)} - 1}{K} \frac{M_2}{2} h = Ch.$$

И така, ако функцията $f(x, u)$ удовлетворява условието на Липшиц (3), $u \in C^2[x_0, X]$ и ако предположим, че грешката на началните данни е нула и не се правят грешки от закръгляване, то имаме сходимост на приближеното решение към точното и сходимостта е от първи ред. Да обърнем внимание обаче, че константата C зависи от дължината на интервала $[x_0, X]$, от M_2 и от K .

Нека сега $y_0 \neq u_0$ и $\delta \neq 0$. Както се вижда от (35), при всяко фиксирано $x_i \in \bar{\omega}_h$ грешката $|u_i - y_i|$ остава ограничена, но при $X \rightarrow \infty$ тя расте експоненциално по X .

Както всяка теоретична оценка, оценките (35) и (36) са завишени и съдържат предварително неизвестна информация за търсеното решение. Те обаче дават информация за източниците на реалната грешка в числените резултати. По-нататък ще се запознаем с метода на Рунге за практическа оценка на грешката.

Апроксимация, устойчивост по начални данни и монотонност на неявния метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (25) и (23) имаме

$$\begin{aligned}\psi_i &= (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_{i+1}, u_{i+1}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_{i+1} = \\ &= \frac{1}{h} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''(x_i + \theta_1 h) - u_i \right) - (u'_i + hu''(x_i + \theta_2 h)) = \\ &= \frac{h}{2} u''(x_i + \theta_1 h) - hu''(x_i + \theta_2 h) = O(h), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

ако $u(x) \in C^2[x_0, X]$. Нека $\max_{x \in [x_0, X]} |u''(x)| = M_2$. Тогава

$$\|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{3h}{2} M_2 = O(h).$$

Следователно локалната грешка на апроксимация и C -нормата на грешката на апроксимация върху мрежата на неявния метод на Ойлер са от първи ред по отношение на h .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги върху моделната задача (27). Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lambda y_{i+1}, \quad y_{i+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y_i.$$

За да бъде изпълнено неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(37) \quad \left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| \leq 1.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (37) е изпълнено за всяко h , т. е. неявният метод на Ойлер е *абсолютно устойчив*.

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12) е достатъчно да е изпълнено неравенството

$$(38) \quad \frac{1}{1 - \lambda h} > 0.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (38) е изпълнено за всяко h , т. е. неявният метод на Ойлер е *монотонен* за всяко h .

Апроксимация, устойчивост по начални данни и монотонност на подобрения метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (24) и (25) получаваме:

$$\begin{aligned}\psi_i &= (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u'_{i+1} + u'_i}{2} = \\ &= \frac{1}{h} \left(u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''(x_i + \theta_1 h) - u_i \right) - \frac{1}{2} \left(u'_i + h u''_i + \frac{h^2}{2} u'''(x_i + \theta_2 h) + u'_i \right) = \\ &= \frac{h^2}{6} u'''(x_i + \theta_1 h) - \frac{h^2}{4} u'''(x_i + \theta_2 h) = O(h^2), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

ако $u \in C^3[x_0, X]$. Нека $M_3 = \max_{x \in [x_0, X]} |u'''(x)|$. Тогава

$$\|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{5M_3}{12} h^2.$$

Да отбележим, че и тук, както при явния метод на Ойлер, грешката на апроксимация на диференциалния оператор $\frac{d}{dx}$ с диференциалния е от първи ред по h .

По-високият ред на апроксимация на диференциалното уравнение с диференциалното се постига благодарение на различната апроксимация на дясната част f .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги отново върху моделната задача (27). Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1}), \quad y_{i+1} = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} y_i.$$

За да бъде изпълнено неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(39) \quad \left| \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \right| \leq 1.$$

Неравенството (39) е еквивалентно на неравенствата $-1 \leq \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \leq 1$. Тъй като

$\lambda < 0$, то $2 - \lambda h > 0$ и в последното неравенство можем да се освободим от знаменателя. Получаваме неравенствата

$$-2 + \lambda h \leq 2 + \lambda h \leq 2 - \lambda h.$$

Тези неравенства са изпълнени за всяка стойност на h и следователно подобреният метод на Ойлер е *абсолютно устойчив*.

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12) е достатъчно

$$(40) \quad \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} > 0.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (40) е еквивалентно на неравенството $2 + \lambda h > 0$, което е изпълнено за

$$(41) \quad h \leq -\frac{2}{\lambda},$$

т.е. подобреният метод на Ойлер е *условно монотонен* при условие, че стъпката h удовлетворява неравенството (41).

Методите на Ойлер - явен, неявен и подобрен, се получават и като частни случаи на *двамата основни класа диференчни методи за решаване на задачата* (1), (2) - *едностъпкови и многостъпкови*. Както едните, така и другите биват *явни и неявни*.

Едностъпковите методи имат вида

$$(L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \theta_i(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ще изучим явните методи на Рунге - Кута. Съществуват още неявни и полуявни методи на Рунге - Кута [2], метод на Розенброк [3], които остават извън рамките на този курс.

Линейните многостъпкови методи имат вида

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^k a_j y_{i+j} = \sum_{j=0}^k b_j f(x_{i+j}, y_{i+j}), \quad a_k \neq 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0.$$

За да започне прилагането на k -стъпков метод са необходими k начални стойности - $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$, които трябва да бъдат намерени по друг метод.

При $b_k = 0$ методите са *явни*, а при $b_k \neq 0$ - *неявни*. Съществуват многостъпкови методи, в дясната част на които освен $f = u'$ се съдържат и производните от по-висок ред на u . Те имат вида

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^k a_j y_{i+j} = \sum_{m=1}^l h^m \left(\sum_{j=0}^k b_{mj} y_{i+j}^{(m)} \right)$$

и в литературата са свързани с името на Обрешков [2], [3].

От многостъпковите методи ще изучим явните и неявни линейни методи.

Задачи

1. зад. Чрез интегриране в интервала $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ на уравнението (1) от задачата (1), (2) и прилагане към интеграла вдясно на квадратурната формула на Симпсън, да се получи диференчен метод за решаване на задачата (1), (2) и да се пресметне локалната му грешка на апроксимация.

Решение: Последователно получаваме

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx,$$

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{2h}{6} [f(x_{i+1}, u(x_{i+1})) + 4f(x_i, u(x_i)) + f(x_{i-1}, u(x_{i-1}))] + O(h^5),$$

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6} [f(x_{i+1}, u_{i+1}) + 4f(x_i, u_i) + f(x_{i-1}, u_{i-1})] + O(h^4).$$

Следователно диференчният метод е

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})],$$

а локалната му грешка на апроксимация е $\psi_i = O(h^4)$, ако $u \in C^5[x_0, X]$.

2. зад. Разглеждаме задачата на Коши (1), (2). Ако $f(x, u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)$ са дефинирани, неотрицателни и непрекъснати в цялата равнина, а $\{y_i\}_{i=0}^n$ са приближените стойности на решението съответно в точките $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, получени по явния метод на Ойлер, да се докаже, че $y_i \leq u(x_i)$ за $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Решение: От уравнение (1) чрез диференциране по x получаваме $u'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f$. От условието на задачата следва, че $u'' \geq 0$ за всички стойности на x и u . По-нататък доказателството ще проведем по метода на математическата индукция. При $i = 0$ имаме $y_0 = u_0$ и исканото неравенство е изпълнено. Да допуснем, че неравенството е изпълнено при $i = k$, т. е. $y_k \leq u(x_k)$. Ще докажем, че неравенството е изпълнено и при $i = k + 1$, т. е. ще докажем, че $y_{k+1} \leq u(x_{k+1})$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} y_{k+1} - u(x_{k+1}) &= y_k + hf(x_k, y_k) - u(x_k) - hu'(x_k) - \frac{h^2}{2!} u''(x_k + \theta h) = \\ &= (y_k - u(x_k)) + h(f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)) - \frac{h^2}{2!} u''(x_k + \theta h) \leq \\ &\leq h(f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)) \leq h \frac{\partial f}{\partial u}(x_k, y_k + \theta_1(y_k - u_k))(y_k - u_k) \leq 0, \\ &\theta, \theta_1 \in (0, 1). \end{aligned}$$

§ 2. ЕДНОСТЪПКОВИ МЕТОДИ. ЯВНИ МЕТОДИ НА РУНГЕ-КУТА

Явните методи на Рунге-Кута са едностъпкови мрежови методи за решаване на задачата

$$(1) \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(2) \quad u(x_0) = u_0,$$

$$(3)$$

при които стойността y_{i+1} на приближеното решение в точката $x_{i+1} = x_i + h$ по известна стойност y_i в точката x_i се намира по формулите

$$(3) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^s p_j k_j, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^s p_j k_j,$$

където

$$k_1 = h f(x_i, y_i),$$

$$(4) \quad k_2 = h f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1),$$

$$k_j = h f(x_i + \alpha_j h, y_i + \beta_{j1} k_1 + \beta_{j2} k_2 + \dots + \beta_{j,j-1} k_{j-1}), \quad j = 3, \dots, s.$$

Формулите (3), (4) дефинират s -етапен явен метод на Рунге-Кута. Неизвестните коефициенти $p_j, j = 1, 2, \dots, s; \alpha_j, j = 2, \dots, s; \beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{j,j-1}, j = 2, \dots, s$ се определят така, че локалната грешка на апроксимация на уравнението (1) с диференчното уравнение (3), (4) за решението на задачата (1), (2),

$$\psi_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^s p_j k_j,$$

да е от възможно най-висок ред.

1. Нека $s = 1$. Тогава

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{h} p_1 k_1, \quad y_{i+1} = y_i + p_1 k_1,$$

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{h} p_1 k_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_1 f(x_i, u_i) = \\ &= \frac{1}{h} (u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''(x_i + \theta h) - u_i) - p_1 u'_i = (1 - p_1) u'_i + \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h). \end{aligned}$$

Следователно локалната грешка на апроксимация на едноетапния метод на Рунге-Кута ще бъде $O(h)$, ако $p_1 = 1$ и $u \in C^2[x_0, X]$. Тогава

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i),$$

което отново е (явният) метод на Ойлер.

$$\begin{aligned}
2. \text{ Нека } s = 2. \text{ Тогава } \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \frac{1}{h}(p_1 k_1 + p_2 k_2), \quad y_{i+1} = y_i + p_1 k_1 + p_2 k_2, \\
\psi_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{h}(p_1 k_1 + p_2 k_2) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - p_1 f(x_i, u_i) - p_2 f(x_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} k_1) = \\
&= \frac{1}{h} \left(u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''_i + O(h^4) - u_i \right) - p_1 u'_i - \\
&- p_2 \left[f(x_i, u_i) + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, u_i) + \beta_{21} h f(x_i, u_i) \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i) + O(h^2) \right] = \\
&= (1 - p_1 - p_2) u'_i + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 p_2 \right) h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, u_i) + \left(\frac{1}{2} - \beta_{21} p_2 \right) h \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i) u'_i + O(h^2).
\end{aligned}$$

При извода сме използвали, че от уравнение (1) имаме $u'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u'$. Следователно, за

да имаме $\psi_i = O(h^2)$ за произволна функция f , трябва $1 - p_1 - p_2 = 0$, $\frac{1}{2} - \alpha_2 p_2 = 0$, $\frac{1}{2} - \beta_{21} p_2 = 0$, или още

$$(5) \quad \begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ \alpha_2 p_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_{21} p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

За четирите неизвестни параметъра се получава неопределена система нелинейни алгебрични уравнения, която има безбройно много решения, зависещи от един параметър. Да разгледаме някои възможни решения. Общите съображения за избора им са:

- коефициентите p_j да са неотрицателни (при изваждане на близки числа става голяма загуба на точност);
- по възможност всички коефициенти да се представят точно в двоична система заради компютърната реализация.

$$\begin{aligned}
\text{а) } p_1 = p_2 = 1/2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_{21} = 1: \\
(6) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \frac{k_1 + k_2}{2h}, \quad k_1 = h f(x_i, y_i) \\
&k_2 = h f(x_i + h, y_i + k_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = 1/2: \\
(7) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= \frac{k_2}{h}, \quad k_1 = h f(x_i, y_i) \\
&k_2 = h f(x_i + h/2, y_i + k_1/2).
\end{aligned}$$

$$\text{в) } p_1 = 1/4, \quad p_2 = 3/4, \quad \alpha_2 = \beta_{21} = 2/3:$$

$$(8) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{k_1 + 3k_2}{4h} \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + 2h/3, y_i + 2k_1/3). \end{aligned}$$

3. При $s = 3$ се получават формули с локална грешка на апроксимацията $O(h^3)$. Такива са например формулите

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{6h}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2), \end{aligned}$$

или формулите

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{4h}(k_1 + 3k_3), \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h/3, y_i + k_1/3), \\ k_3 &= hf(x_i + 2h/3, y_i + 2k_2/3). \end{aligned}$$

4. Най-използваните на практика формули на Рунге-Кута са тези при $s = 4$ с локална грешка на апроксимацията $O(h^4)$.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{6h}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned}$$

Да отбележим, че няма двуетапен метод на Рунге-Кута с локална грешка $O(h^3)$. (За да се убедим в това, достатъчно е да разгледаме уравнението $u' = u$). Същото се отнася и за $s = 3, 4$ – няма методи на Рунге-Кута с локална грешка на апроксимация $O(h^{s+1})$. Нещо повече, оказва се, че няма пететапен метод на Рунге-Кута с локална грешка на апроксимация $O(h^5)$.

4. Методите на Рунге-Кута имат тривиално обобщение за случая на задача на Коши за **система ОДУ от I-ви ред**. Например за системата

$$\begin{cases} u' = f(x, u, v) \\ v' = g(x, u, v) \\ u(x_0) = u_0 \\ v(x_0) = v_0 \end{cases}$$

четириетапният метод на Рунге-Кута се записва така:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{6h}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \frac{1}{6h}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, y_i, z_i), & l_1 &= hg(x_i, y_i, z_i), \\
k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), & l_2 &= hg(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\
k_3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), & l_3 &= hg(x_i + h/2, y_i + k_2/2, z_i + l_2/2), \\
k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3), & l_4 &= hg(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3).
\end{aligned}$$

Задачи

1 зад. Да се покаже, че едностъпковите методи

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad y_{i+1} &= y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)), \\
\text{б)} \quad y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))], \\
\text{в)} \quad y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4} \left[f(x_i, y_i) + 3f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}h f(x_i, y_i)) \right]
\end{aligned}$$

са явни методи на Рунге-Кута за решаване на задачата (1), (2) с локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^2)$.

Решение: Всички тези методи могат да се запишат във вида

(9) $y_{i+1} = y_i + p_1 k_1 + p_2 k_2$, $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} k_1)$, където коефициентите p_1, p_2, α_2 и β_{21} за всеки един от методите имат съответно следните стойности:

- за метода а): $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$;
- за метода б): $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$;
- за метода в): $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\beta_{21} = \frac{2}{3}$.

Тъй като тези коефициенти във всеки един от случаите удовлетворяват системата (5), то $\psi_i = O(h^2)$.

2 зад. Да се покаже, че едностъпковите методи а) - в) от зад. 1, приложени към задачата на Коши

$$(10) \quad \begin{cases} u'(x) = x - u + 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

дават едно и също приближение.

Решение: Ще покажем това за методите а) и б). За метода в) разсъжденията са аналогични.

Да приложим метода а) към задача (10) във вида, в който е записан. Получаваме

$$y_{i+1} = y_i + h \left[x_i + \frac{h}{2} + 1 - y_i - \frac{h}{2} (x_i - y_i + 1) \right],$$

или още

$$(11) \quad y_{i+1} = y_i + h(x_i - y_i + 1) + \frac{h^2}{2}(y_i - x_i).$$

Да разгледаме сега метода б), но представен във вида (9), където $p_1 = \frac{1}{2}$,

$p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$. Като го приложим към задача (10), получаваме последователно

$$\begin{aligned} k_1 &= h(x_i - y_i + 1), \\ k_2 &= h(x_i + h - y_i - k_1 + 1) = h(x_i + h - y_i - h(x_i - y_i + 1) + 1) = \\ &= h(x_i - y_i + 1) + h^2(y_i - x_i), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(x_i - y_i + 1) + \frac{h}{2}(x_i - y_i + 1) + \frac{h^2}{2}(y_i - x_i), \end{aligned}$$

или окончателно

$$(12) \quad y_{i+1} = y_i + h(x_i - y_i + 1) + \frac{h^2}{2}(y_i - x_i).$$

Очевидно (11) и (12) съвпадат.

3 зад. Да се докаже, че методът на Рунге-Кута

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{k_1 + 3k_2}{4h}, \quad k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + 2h/3, y_i + 2k_1/3),$$

приложен към задачата

$$(13) \quad u'(x) = f(x), \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(14) \quad u(x_0) = u_0$$

има локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^3)$.

Забележка. От изследванията при $s = 2$ следва, че приложен към задача (1), (2), формулираният метод има локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^2)$. Дясната страна на уравнение (13) обаче, не зависи от търсеното решение u , откъдето и идва повишият ред на локалната грешка на апроксимация на разглеждания метод за тази конкретна задача.

Решение: Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{4}f(x_i) - \frac{3}{4}f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right) = \\ &= \frac{1}{h}\left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + \frac{h^4}{4!}u^{IV}_i + O(h^5) - u_i\right) - \frac{1}{4}f(x_i) - \\ &- \frac{3}{4}\left(f(x_i) + \frac{2}{3}hf'(x_i) + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}f''(x_i) + \left(\frac{2}{3}h\right)^3 \frac{1}{3!}f'''(x_i) + O(h^4)\right) = \\ &= h^3u^{IV}_i\left(\frac{1}{4!} - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3!}\right) + O(h^4) = h^3u^{IV}_i\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{27}\right) + O(h^4) = O(h^3). \end{aligned}$$

4 зад. За задачата

$$(15) \quad \begin{cases} u''(x) = f(x, u(x)), & x \in (x_0, X], \\ u(x_0) = u_0, \\ u'(x_0) = u'_0 \end{cases}$$

да се построи едностъпков мрежов метод, базиращ се на метод на Рунге-Кута с локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^2)$.

Решение: Най-напред ще сведем задачата (15) към система ОДУ от I ред и след това към тази система ще приложим формули на Рунге-Кута с локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^2)$. Ако положим $u'(x) = v(x)$, задача (15) приема вида

$$(16) \quad \begin{cases} u'(x) = v(x), & x \in (x_0, X], \\ v'(x) = f(x, u(x)), \\ u(x_0) = u_0, \\ v(x_0) = u'_0. \end{cases}$$

Нека с $y_h = \{y_i\}_{i=0}^n$ означим мрежовата функция, която е приближение на u , а със $z_h = \{z_i\}_{i=0}^n$ - мрежовата функция, която е приближение на v . Към задача (16) прилагаме аналога на метода на Рунге-Кута (6) и получаваме

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 = h z_i, \\ k_2 = h(z_i + l_1), \end{cases} \quad \begin{cases} z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}(l_1 + l_2), \\ l_1 = h f(x_i, y_i), \\ l_2 = h f(x_i + h, y_i + k_1), \end{cases}$$

или още

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(2z_i + h f(x_i, y_i)), \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h z_i)) \\ y_0 = u_0, \\ z_0 = u'_0. \end{cases}$$

§ 3. ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА НА ЕДНОСТЪПКОВИТЕ МЕТОДИ

Нека

$$(1) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \theta_i(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{X - x_0}{n}$$

е едностъпков метод за решаване на задачата на Коши

$$(2) \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(3) \quad u(x_0) = u_0.$$

Ще искаме да оценим разликата $z_n = u_n - y_n$.

Записваме (1) във вида

$$(4) \quad y_{i+1} = y_i + h \theta_i(x_i, y_i).$$

Разглеждаме следните спомагателни задачи, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$(5) \quad Y'_i = f(x_i, Y_i)$$

$$(6) \quad Y_i(x_i) = y_i, \quad Y_0 = u_0,$$

т.е. това са задачи на Коши, чиито решения удовлетворяват едно и също уравнение (2), но различни начални условия.

Точните решения на тези задачи ще удовлетворяват следните равенства в точките от мрежата $\bar{\omega}_h$:

$$(7) \quad \frac{Y_i(x_{i+1}) - Y_i(x_i)}{h} = \theta_i(x_i, Y_i(x_i)) + \psi_i + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

където ψ_i и δ_i са съответно локалната грешка на апроксимация и грешката от закръгляването. Като използваме (7), (6) и (4), последователно получаваме:

$$Y_i(x_{i+1}) = y_i + h \theta_i(x_i, y_i) + h \psi_i + h \delta_i = y_{i+1} + h \psi_i + h \delta_i,$$

$$Y_i(x_{i+1}) - y_{i+1} = h \psi_i + h \delta_i, \quad Y_i(x_{i+1}) - Y_{i+1}(x_{i+1}) = h \psi_i + h \delta_i.$$

Записваме последното равенство за $x = x_i$:

$$(8) \quad Y_{i-1}(x_i) - Y_i(x_i) = h \psi_{i-1} + h \delta_{i-1}.$$

Тогава

$$(9) \quad z_n = u_n - y_n = Y_0(x_n) - Y_n(x_n) = \sum_{i=1}^n (Y_{i-1}(x_n) - Y_i(x_n)).$$

За да оценим разликата $Y_{i-1}(x_n) - Y_i(x_n)$ ще използваме следната

Лема. Нека $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ са две различни решения на уравнението (2) в интервала $[a, b]$. Тогава

$$Y_1(b) - Y_2(b) = (Y_1(a) - Y_2(a)) e^{\int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x)) dx}, \quad Y_1(x) \leq \bar{u}(x) \leq Y_2(x).$$

Доказателство. Имаме

$$Y'_1 = f(x, Y_1),$$

$$Y'_2 = f(x, Y_2).$$

Изваждаме второто равенство от първото, прилагаме теоремата за крайните нараствания и интегрираме по x в интервала $[a, b]$

$$Y_1' - Y_2' = f(x, Y_1) - f(x, Y_2) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x))(Y_1 - Y_2),$$

$$(\ln(Y_1 - Y_2))' = \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x)), \quad \ln(Y_1 - Y_2) \Big|_a^b = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}(x)) dx.$$

Твърдението на лемата следва от последното равенство.

Да приложим лемата към разликите в сумата в (9)

$$(10) \quad z_n = u_n - y_n = \sum_{i=1}^n (Y_{i-1}(x_i) - Y_i(x_i)) e^{\int_{x_i}^{x_n} \frac{\partial f}{\partial u}(x, \bar{u}_i(x)) dx}, \quad Y_{i-1}(x) \leq \bar{u}_i(x) \leq Y_i(x).$$

Ако предположим, че

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq K,$$

и използваме (8), от (10) получаваме

$$(11) \quad |z_n| = |u_n - y_n| \leq e^{K(x_n - x_1)} \sum_{i=1}^n h (|\psi_{i-1}| + |\delta_{i-1}|).$$

Да предположим, че за локалната грешка на апроксимация имаме

$$|\psi_i| \leq ch^s, \quad s \geq 1,$$

както е например за s -етапния метод на Рунге-Кута при $s \leq 4$, ако $u(x) \in C^{s+1}[x_0, X]$.

Нека още $\max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i| = \delta$. Тогава от (11) получаваме:

$$\begin{aligned} |z_n| = |u_n - y_n| &\leq e^{K(x_n - x_0)} h \left[\sum_{i=1}^n |\psi_{i-1}| + n\delta \right] \leq e^{K(x_n - x_0)} n h (Ch^s + \delta) \leq \\ &\leq e^{K(x_n - x_0)} (x_n - x_0) (Ch^s + \delta). \end{aligned}$$

Ако $\delta = 0$, то за фиксирано $x \in \bar{\omega}_h$ имаме

$$|z(x)| = |u(x) - y(x)| = O(h^s) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

при това *скоростта на сходимост е от ред s , равен на реда на апроксимация*.
Коментарът, който направихме при метода на Ойлер, е в сила и тук - грешката от закръгляване расте експоненциално с x .

§ 4. МЕТОД НА РУНГЕ ЗА ПРАКТИЧЕСКА ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА

Нека $y_h(x)$ и $y_{h/2}(x)$ са приближените стойности на решението $u(x)$ в точката x , пресметнати съответно със стъпки h и $h/2$ по някакъв метод, чиято скорост на сходимост е от ред s :

$$(1) \quad u(x) = y_h(x) + ch^s.$$

Ако предположим, че c се мени слабо при промяна на стъпката h , то можем да напишем

$$(2) \quad u(x) = y_{h/2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^s.$$

От (2) изваждаме (1) и последователно получаваме:

$$y_{h/2} - y_h = ch^s \left(1 - \frac{1}{2^s}\right), \quad ch^s = \frac{(y_{h/2} - y_h)2^s}{2^s - 1}.$$

Тогава от (1) получаваме

$$u(x) = y_h + \frac{2^s(y_{h/2} - y_h)}{2^s - 1} = y_h + r(h).$$

Следователно, числото

$$r(h) = \frac{2^s(y_{h/2} - y_h)}{2^s - 1}$$

ни дава приблизително грешката в точката x . Тази идея може да се използва за пресмятане (приближено) на реда на сходимост α на който да е метод за приближено решаване на дадена задача върху мрежа $\bar{\omega}_h$.

Да разгледаме първо случая, когато знаем точното решение $u(x)$ (на някаква моделна задача) и да пресметнем приближеното решение в точките на две вложени мрежи със стъпки h и $h/2$. Нека $y_h(x)$ и $y_{h/2}(x)$ са стойности на $u(x)$ в точката $x \in \bar{\omega}_h$ и $x \in \bar{\omega}_{h/2}$. Тогава от (1) и (2) получаваме

$$\left| \frac{u(x) - y_h(x)}{u(x) - y_{h/2}(x)} \right| = 2^\alpha, \quad \alpha = \ln \left| \frac{u(x) - y_h(x)}{u(x) - y_{h/2}(x)} \right| / \ln 2.$$

Ако точното решение на задачата не е известно, пресмятаме приближеното решение върху още една мрежа със стъпка $h/4$:

$$(3) \quad u(x) = y_{h/4} + c\left(\frac{h}{4}\right)^\alpha.$$

Чрез изваждане на (2) от (1) и (3) от (2) получаваме

$$y_h - y_{h/2} = c h^\alpha \left(\frac{1}{2^\alpha} - 1\right), \quad y_{h/2} - y_{h/4} = c \frac{h^\alpha}{2^\alpha} \left(\frac{1}{2^\alpha} - 1\right),$$

следователно

$$\left| \frac{y_h - y_{h/2}}{y_{h/2} - y_{h/4}} \right| = 2^\alpha, \quad \alpha = \ln \left| \frac{y_h - y_{h/2}}{y_{h/2} - y_{h/4}} \right| / \ln 2.$$

Ако за пресметнатите $\alpha = \alpha(x)$ във всички (или в достатъчно много) общи точки на мрежите $\bar{\omega}_h$, $\bar{\omega}_{h/2}$ и $\bar{\omega}_{h/4}$ имаме

$$\alpha(x) \approx \alpha,$$

то можем да считаме, че α е *реалният ред на сходимост на числения метод*.

§ 5. МНОГОСТЪПКОВИ ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ. МЕТОДИ ОТ ТИП АДАМС

Идеята на многостъпковите методи за решаване на задачата

$$(1) \quad u'(x) = f(x, u(x)) \quad , \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(2) \quad u(x_0) = u_0$$

е следната. Предполагаме, че освен $u(x_0)$ са известни и стойностите на решението $u(x)$ в точките $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \dots, k$. За пресмятане на $u(x_k + h)$ се използват стойностите $u(x_i)$ и $u'(x_i) = f(x_i, u_i)$ във всички тези точки.

И така, нека $\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{X - x_0}{n} \right\}$. За по-голяма общност ще предположим, че известните $k+1$ стойности на $u(x)$ са: $u_{m-k}, u_{m-k+1}, \dots, u_{m-1}, u_m$. Търсим стойността $u_{m+1} = u(x_m + h)$.

Явни (екстраполационни) методи от тип Адамс

Интегрираме двете страни на уравнение (1) по x в граници от x_{m-j} до x_{m+1} , $j \leq k$:

$$\int_{x_{m-j}}^{x_{m+1}} u'(x) dx = \int_{x_{m-j}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx,$$

$$u_{m+1} - u_{m-j} = \int_{x_{m-j}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx.$$

В интеграла правим смяната $x = x_m + th$ и заместваем $f(x, u)$ с $u'(x)$:

$$(3) \quad u_{m+1} - u_{m-j} = h \int_{-j}^1 u'(x_m + th) dt.$$

По формулата на Нютон за интерполиране назад с начална точка x_m имаме:

$$u'(x_m + th) = u'_m + \frac{t}{1!} \Delta u'_{m-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 u'_{m-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k u'_{m-k} + R_k(t),$$

където

$$(4) \quad \Delta^i u'_{m-i} = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} u'_{m-i+j}$$

са крайните разлики напред на $u'(x)$, а

$$R_k(t) = h^{k+1} \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!} u^{(k+2)}(\xi), \quad \xi \in [\min(x, x_{m-k}, \dots, x_m), \max(x, x_{m-k}, \dots, x_m)].$$

Заместваме в (3) и получаваме

$$\frac{u_{m+1} - u_{m-j}}{h} = \int_{-j}^1 \left(u'_m + \frac{t}{1!} \Delta u'_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} \Delta^k u'_{m-k} \right) dt + \int_{-j}^1 R_k(t) dt ,$$

$$\frac{u_{m+1} - u_{m-j}}{h} = (1+j) u'_m + \sum_{i=1}^k a_{ij} \Delta^i u'_{m-i} + r_k ,$$

където

$$a_{ij} = \int_{-j}^1 \frac{t(t+1)\dots(t+i-1)}{i!} dt , \quad |r_k| \leq h^{k+1} \quad M_{k+2} \left| \int_{-j}^1 \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!} dt \right| ,$$

(5)

$$M_{k+2} = \max_{x \in [x_0, X]} \left| u^{(k+2)}(x) \right| .$$

Като пренебрегнем остатъчния член $r_k = O(h^{k+1})$, получаваме явните (екстраполационни) формули на Адамс ($j=0$) и Адамс-Баишфорт ($j=1, 2, \dots, k$):

$$(6) \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-j}}{h} = (1+j) y'_m + \sum_{i=1}^k a_{ij} \Delta^i y'_{m-i} ,$$

където е използвано означението $y'_l = f(x_l, y_l)$.

Да изведем някои конкретни формули, като използваме (6), (4) и (5).

При $j=0$ имаме:

$$a_{10} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} , \quad a_{20} = \int_0^1 \frac{t(t+1)}{2} dt = \frac{5}{12} , \quad a_{30} = \frac{3}{8} , \quad a_{40} = \frac{251}{720} , \dots$$

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{h} = y'_m + \frac{1}{2} \Delta y'_{m-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{m-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{m-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 y'_{m-4} + \dots$$

$$k=0: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = y'_m , \quad r_0 = O(h) ,$$

$$k=1: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = y'_m + \frac{1}{2} (y'_m - y'_{m-1}) = \frac{1}{2} (3y'_m - y'_{m-1}) , \quad r_1 = O(h^2) ,$$

$$k=2: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = \frac{1}{12} (23y'_m - 16y'_{m-1} + 5y'_{m-2}) , \quad r_2 = O(h^3) .$$

При $j=1$ имаме:

$$a_{11} = \int_{-1}^1 t dt = 0 , \quad a_{21} = \frac{1}{3} , \quad a_{31} = \frac{1}{3} , \quad a_{41} = \frac{29}{180} , \dots$$

$$\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = 2y'_m + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{m-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y'_{m-3} + \frac{29}{180} \Delta^4 y'_{m-4} + \dots$$

$$k = 0; 1: \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = 2y'_m, \quad r_1 = O(h^2),$$

$$k = 2: \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = \frac{1}{3}(7y'_m - 2y'_{m-1} + y'_{m-2}) \quad , \quad r_2 = O(h^3).$$

Неявни (интерполационни) методи от тип Адамс

Интегрираме двете страни на уравнение (1) в граници от x_{m+1-j} до x_{m+1} , $j \leq k$:

$$\int_{x_{m+1-j}}^{x_{m+1}} u'(x) dx = \int_{x_{m+1-j}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx,$$

$$u_{m+1} - u_{m+1-j} = \int_{x_{m+1-j}}^{x_{m+1}} f(x, u(x)) dx.$$

Правим смяната $x = x_{m+1} + th$:

$$u_{m+1} - u_{m+1-j} = h \int_{-j}^0 u'(x_{m+1} + th) dt.$$

Използваме формулата на Нютон за интерполиране назад с начална точка x_{m+1} :

$$u'(x_{m+1} + th) = u'_{m+1} + t \Delta u'_m + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 u'_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+k-1)}{k!} \Delta^k u'_{m+1-k} + R_k^{(1)}(t),$$

и получаваме

$$\frac{u_{m+1} - u_{m+1-j}}{h} = j u'_{m+1} + \sum_{i=1}^k b_{ij} \Delta^i u'_{m+1-i} + r_k^{(1)},$$

където

$$b_{ij} = \int_{-j}^0 \frac{t(t+1) \dots (t+i-1)}{i!} dt, \quad |r_k^{(1)}| \leq h^{k+1} M_{k+2} \left| \int_{-j}^0 \frac{t(t+1) \dots (t+k)}{(k+1)!} dt \right|.$$

Като пренебрегнем остатъчния член $r_k^{(1)} = O(h^{k+1})$, получаваме *неявните (интерполационни) формули на Адамс* ($j = 1$) и *Адамс-Мултон* ($j = 2, 3, \dots, k$):

$$(7) \quad \frac{y_{m+1} - y_{m+1-j}}{h} = j y'_{m+1} + \sum_{i=1}^k b_{ij} \Delta^i y'_{m+1-i}.$$

При $j = 1$ имаме:

$$b_{11} = \int_{-1}^0 t \, dt = -\frac{1}{2}, \quad b_{21} = \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)}{2} \, dt = -\frac{1}{12}, \quad b_{31} = -\frac{1}{24}, \dots$$

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{h} = y'_{m+1} - \frac{1}{2} \Delta y'_m - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{m-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{m-2} - \dots,$$

$$k=0: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = y'_{m+1}, \quad r_0 = O(h), \quad (\text{неявен метод на Ойлер})$$

$$k=1: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = \frac{1}{2}(y'_{m+1} + y'_m), \quad r_1 = O(h^2), \quad (\text{подобрен метод на Ойлер})$$

$$k=2: \quad \frac{y_{m+1} - y_m}{h} = \frac{1}{12}(5y'_{m+1} + 8y'_m - y'_{m-1}), \quad r_2 = O(h^3).$$

При $j=2$:

$$b_{12} = \int_{-2}^0 t \, dt = -2, \quad b_{22} = \frac{1}{3}, \dots$$

$$\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = 2y'_{m+1} - 2\Delta y'_m + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{m-1} + \dots,$$

$$k=0: \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = 2y'_{m+1}, \quad r_0 = O(h),$$

$$k=1: \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = 2y'_m, \quad r_1 = O(h^2),$$

$$k=2: \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{h} = \frac{1}{3}(y'_{m+1} + 4y'_m + y'_{m-1}), \quad r_2 = O(h^3).$$

Общ k -стъпков диференчен метод. Методи от тип предиктор-коректор

Както явните, така и неявните многостъпкови методи от тип Адамс могат да се запишат в следния общ вид

$$(8) \quad \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i y_{m+i} = \sum_{i=0}^k b_i y'_{m+i}.$$

Формула (8) дефинира общ k -стъпков диференчен метод, ако $a_k \neq 0$ и поне едно от a_0 и b_0 е различно от нула. Ако $b_k \neq 0$, методът е *неявен*, при $b_k = 0$ – *явен*. В тези означения явните методи на Адамс (6) (при $j=0$) са $k+1$ -стъпкови диференчни методи с локална грешка на апроксимация $O(h^{k+1})$, а неявните методи на Адамс (7)

(при $j=1$) са k -стъпкови диференчни методи с локална грешка на апроксимация $O(h^{k+1})$.

Ясно е, че когато функцията $f(x,u)$ е нелинейна по u , неявните методи дават нелинейно уравнение за определяне на y_{m+k} . Това уравнение може да бъде решено по някой от известните итерационни методи, например по метода на Нютон, като началното приближение за y_{m+k} се пресметне по някой явен метод. Друга възможност, която води до методите от тип *предиктор-коректор*, е да се използва комбинация от явен и неявен метод (най-често с локална грешка на апроксимация от един и същи ред). Тази идея, приложена към явния и неявния методи на Ойлер, дава следната итерационна процедура:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{(0)} &= y_i + h f(x_i, y_i) && \text{– предиктор,} \\ y_{i+1}^{(j+1)} &= y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(j)}) \quad , \quad j = 0, 1, \dots && \text{– коректор.} \end{aligned}$$

Итерациите по коректора могат да се извършват, докато се получи желаната точност ε

$$\left| y_{i+1}^{(j+1)} - y_{i+1}^{(j)} \right| < \varepsilon .$$

От това обаче не следва, че

$$\left| y_{i+1}^{(j+1)} - u_{i+1} \right| < \varepsilon .$$

На практика по формулата коректор се правят 1-2 итерации.

§ 6. ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЧНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ. СВОЙСТВА, УСТОЙЧИВОСТ

За да изследваме устойчивостта на диференчните методи ще са ни необходими някои свойства на линейните диференчни уравнения с постоянни коефициенти.

Линейно диференчно уравнение с постоянни коефициенти от k -ред е уравнение от вида

$$(1) \quad a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_0 y_n = b, \quad a_0, a_k \neq 0.$$

Ако $b \neq 0$, уравнението е *нехомогенно*, при $b = 0$ то е *хомогенно*:

$$(2) \quad a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_0 y_n = 0, \quad a_0, a_k \neq 0.$$

Решение на уравненията (1) или (2) е всяка редица от числа $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ такава, че каквито и последователни $k+1$ члена $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ от нея да заместим в (1) или (2), те се превръщат в равенства.

Решението $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определено, ако са зададени първите k члена $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ на редицата (*начални данни* за уравнението (1) или (2)).

Свойства на хомогенното уравнение

Свойство 1. Ако $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, m$ са m решения на уравнение (2), то редицата $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $y_n = \sum_{i=1}^m c_i y_n^{(i)}$ също е решение на (2).

Определение. Казваме, че решенията $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, m$ са *линейно независими*, ако са линейно независими съответните редици, т.е. ако от $\sum_{i=1}^m c_i y_n^{(i)} = 0$, $n = 0, 1, \dots$, следва $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Свойство 2. Решенията $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots, k$ са линейно независими тогава и само тогава, когато детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \dots & y_0^{(k)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{k-1}^{(1)} & y_{k-1}^{(2)} & \dots & y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

е различна от нула.

Доказателство. Достатъчност. Нека $D \neq 0$. Да си образуваме системата линейни алгебрични уравнения

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k c_i y_n^{(i)} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, k-1,$$

където $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \dots, k$ са решения на (2). Тогава $c_i = 0$, $i=1, 2, \dots, k$, и следователно решенията са линейно независими.

Необходимост. Нека $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \dots, k$ са линейно независими решения на (2) и да допуснем, че $D = 0$. Тогава системата линейни алгебрични уравнения (3) има ненулево решение c_i , $i=1, 2, \dots, k$. Ще докажем, че равенствата (3) са в сила и за $n = k, k+1, \dots$. За $n = k$ имаме

$$\sum_{i=1}^k c_i y_k^{(i)} = \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j y_j^{(i)} = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \sum_{i=1}^k c_i y_j^{(i)} = 0,$$

като сме използвали, че $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$ са решения на (2). Следователно тези решения са линейно зависими, което противоречи на предположението.

Свойство 3. Ако $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \dots, k$ са k линейно независими решения на (2), то всяко друго решение $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на (2) може да се представи като тяхна линейна комбинация, т.е. $y_n = \sum_{i=1}^k c_i y_n^{(i)}$, $n=0, 1, \dots$.

Доказателство. Щом $\{y_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \dots, k$ са линейно независими, то $D \neq 0$. Тогава системата линейни алгебрични уравнения

$$(4) \quad y_n = \sum_{i=1}^k c_i y_n^{(i)}, \quad n=0, 1, \dots, k-1,$$

има и то единствено ненулево решение c_i , $i=1, 2, \dots, k$. Ще покажем, че равенствата (4) са в сила и за $n = k, k+1, \dots$. Като използваме, че $\{y_n\}, \{y_n^{(i)}\}$ са решения на (2), получаваме

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j y_j = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \sum_{i=1}^k c_i y_j^{(i)} = \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j y_j^{(i)} = \sum_{i=1}^k c_i y_k^{(i)},$$

и аналогично за $n = k+1, k+2, \dots$.

Свойство (3) ни гарантира, че ако намерим k линейно независими частни решения на (1), ще знаем и *общото му решение*. Частните решения на (2) ще търсим във вида $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Заместваме $y_n = z^n$ в (2)

$$a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \dots + a_0 z^n = 0,$$

и като разделим на z^n (търсим нетривиални решения), получаваме *характеристичното уравнение* на уравнение (2)

$$(5) \quad f(z) \equiv a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Да разгледаме различните възможности за корените на (5).

а) Уравнението (5) има реални различни корени $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_k$. Образуваме

детерминантата D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{k-1} & z_2^{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Тя е различна от нула като детерминанта на Вандермонд. Следователно $\{z_i^n\}_{n=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \dots, k$ са линейно независими решения и общото решение на (2) е $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $y_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_k z_k^n$.

б) Уравнението (5) има комплексен корен $z_1 = \rho e^{i\theta}$. Тъй като (5) е с реални коефициенти, то има и корен $z_2 = \bar{z}_1 = \rho e^{-i\theta}$. На тази двойка комплексно-спрегнати корени съответстват две частни решения: $z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ и $\bar{z}^n = \rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$. Тогава в общото решение ще участва сумата

$$c_1 z^n + c_2 \bar{z}^n = (c_1 + c_2) \rho^n \cos n\theta + i(c_1 - c_2) \rho^n \sin n\theta = \tilde{c}_1 \rho^n \cos n\theta + \tilde{c}_2 \rho^n \sin n\theta.$$

И така, на двойката комплексни корени можем да поставим в съответствие две частни реални решения:

$$\{\rho^n \cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{\rho^n \sin n\theta\}_{n=0}^{\infty}.$$

в) Уравнението (5) има s -кратен корен z_1 , следователно

$$f(z_1) = f'(z_1) = \dots = f^{(s-1)}(z_1) = 0.$$

Да заместим $y_n = z_1^n$ в уравнение (2):

$$a_k z_1^{n+k} + a_{k-1} z_1^{n+k-1} + \dots + a_1 z_1^{n+1} + a_0 z_1^n = z_1^n f(z_1) = 0.$$

Диференцираме горното равенство и преобразуваме

$$\begin{aligned} (n+k)a_k z_1^{n+k-1} + (n+k-1)a_{k-1} z_1^{n+k-2} + \dots + (n+1)a_1 z_1^n + n a_0 z_1^{n-1} = \\ = n z_1^{n-1} f(z_1) + z_1^n f'(z_1) = 0. \end{aligned}$$

Умножаваме по $z_1 \neq 0$ и установяваме, че $\{n z_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ също е решение на (2):

$$(n+k)a_k z_1^{n+k} + (n+k-1)a_{k-1} z_1^{n+k-1} + \dots + (n+1)a_1 z_1^n + n a_0 z_1^n = 0.$$

По същия начин установяваме, че на s -кратния корен $z_1 \neq 0$ съответстват s частни решения

$$\{z_1^n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{n z_1^n\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{n^{s-1} z_1^n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Общо решение на нехомогенното уравнение

Общото решение $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на нехомогенното уравнение (1) е сума от общото решение на хомогенното уравнение (2) и едно частно решение $\{y_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ на нехомогенното:

$$y_n = \sum_{i=1}^k c_i y_n^{(i)} + y_n^*, \quad n = 0, 1, \dots$$

Частно решение на нехомогенното уравнение може да се намери например, ако дясната част b на уравнението е от вида

$$(6) \quad b \equiv b_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_m n^m) \sigma^n.$$

(7)

Тогава частното решение е

$$(7) \quad \left\{ (\beta_0 n^s + \beta_1 n^{s+1} + \dots + \beta_m n^{s+m}) \sigma^n \right\}_{n=0}^{\infty},$$

ако σ е s -кратен корен на характеристичното уравнение ($s = 0$, ако σ не е корен на характеристичното уравнение).

Устойчивост на диференчните уравнения

Когато използваме диференчните уравнения за числено решаване на диференциални уравнения, ние пресмятаме всеки член на редицата $\{y_n\}$ директно от уравнението

$$y_{n+k} = \sum_{j=1}^k \beta_j y_{n+k-j}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Началните стойности $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ са входни данни в тази процедура. В такъв случай е важно да изследваме устойчивостта на тази процедура, а именно, дали малки грешки във входните данни ще доведат до малки грешки в членовете на редицата, или напротив, грешките ще се увеличават многократно.

Пример. Диференчното уравнение

$$y_{n+2} - 2.5y_{n+1} + y_n = 0$$

има общо решение

$$y_n = c_1 2^{-n} + c_2 2^n.$$

При начални данни

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 1$$

решението е $y_n = 2^{-n+1}$ и членовете на редицата $\{y_n\}$ намаляват с нарастването на n .

Ако началните данни са

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 1 + \varepsilon,$$

решението е

$$y_n = \left(2 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) 2^{-n} + \frac{2\varepsilon}{3} 2^n$$

и при достатъчно големи n редицата $\{y_n\}$ става растяща, колкото и малко да е ε . Да отбележим, че растенето на y_n се дължи на компонентата, съответстваща на корена $z = 2$ на характеристичното уравнение.

Хомогенното диференчно уравнение (2) е *устойчиво (по начални данни)*, ако съществува константа c , независеща от решението $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, така че за всяко n е изпълнено

$$(8) \quad |y_n| \leq c \max_{0 \leq i \leq k-1} |y_i|.$$

В сила е следната

Теорема. Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на хомогенното диференчно уравнение е простите корени на характеристичното му уравнение да са по модул по-малки или равни на единица, а кратните да са по модул по-малки от единица.

Доказателство. **Необходимостта** е очевидна. Ако характеристичното уравнение има прост корен z_1 с $|z_1| > 1$, то съответната компонента $c_1 z_1^n$ в общото решение ще расте с нарастването на n . Ако коренът z_1 е с модул единица, $|z_1| = 1$, но е многократен (например s – кратен), то компонентите $c_1 n z_1^n, c_2 n^2 z_1^n, \dots, c_{s-1} n^{s-1} z_1^n$ ще растат неограничено с нарастването на n . И в двата случая оценка от вида (8) е невъзможна за всяко n .

Достатъчност. Ще докажем достатъчността само за прости корени $z_i, i = 1, 2, \dots, k$ на характеристичното уравнение. Нека $|z_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$. От това условие и от вида на общото решение на диференчното уравнение имаме:

$$(9) \quad |y_n| \leq \sum_{i=1}^k |c_i| |z_i|^n \leq \sum_{i=1}^k |c_i|.$$

Ако z_s и z_{s+1} са комплексно спрегнати корени, вместо z_s^n и z_{s+1}^n ще използваме $\rho^n \cos n\varphi$ и $\rho^n \sin n\varphi$ и това не променя неравенството.

Да разгледаме системата от k уравнения относно коефициентите c_i .

$$\sum_{i=1}^k c_i z_i^n = y_n, \quad n = 0, 1, \dots, k-1.$$

По формулите на Крамер $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,

$$\Delta = D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-1} & z_2^{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \dots & y_0 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & y_1 & \dots & z_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-1} & \dots & y_{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Ако развием Δ_i по i -тия стълб, за c_i получаваме

$$c_i = A_0^{(i)} y_0 + A_1^{(i)} y_1 + \dots + A_{k-1}^{(i)} y_{k-1},$$

където $A_j^{(i)}$ зависят само от корените $z_1, z_2, \dots, z_k$.

Следователно

$$(10) \quad |c_i| \leq c \max_{0 \leq j \leq k-1} |y_j|, \quad c = \text{const.}$$

От (9) и (10) получаваме

$$|y_n| \leq c k \max_{0 \leq j \leq k-1} |y_j|,$$

което означава, че уравнението (2) е устойчиво.

Оценка от вида (8) се нарича *априорна оценка* (оценка за решението чрез началните данни). Ще покажем, че от априорната оценка (8) следва, че на малки изменения на началните данни съответстват малки изменения на решението на диференчното уравнение (2). По-точно, нека $\{y_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ са две решения на уравнението (2) при начални данни $y_0^{(s)}, y_1^{(s)}, \dots, y_{k-1}^{(s)}$, $s=1, 2$, съответно. За разликата $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\varepsilon_n = y_n^{(2)} - y_n^{(1)}$ получаваме диференчното уравнение

$$\sum_{i=0}^k a_i \varepsilon_{n+i} = 0.$$

Това е диференчно уравнение с коефициенти, равни на коефициентите на уравнението (2). Следователно за решението му $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ съгласно (8) имаме

$$|\varepsilon_n| \leq c \max_{0 \leq i \leq k-1} |\varepsilon_i|$$

за всяко n , т.е. на малки изменения $\varepsilon_i = y_i^{(2)} - y_i^{(1)}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ на началните данни съответстват малки изменения на решението на (2).

Задачи

1 зад. Да се намери общото решение и се изследва устойчивостта на следните хомогенни диференчни уравнения:

- а) $6y_{n+2} - 5y_{n+1} + y_n = 0$;
- б) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$;
- в) $9y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0$;
- г) $y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$;
- д) $y_{n+3} - y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0$;
- е) $y_{n+4} - 2y_{n+3} + 3y_{n+2} + 2y_{n+1} - 4y_n = 0$;
- ж) $y_{n+4} - 7y_{n+3} + 18y_{n+2} - 20y_{n+1} + 8y_n = 0$;
- з) $y_{n+4} + 8y_{n+2} + 16y_n = 0$.

Решение: а) Характеристичното уравнение на даденото диференчно

уравнение е $6z^2 - 5z + 1 = 0$. Неговите корени са $z_1 = \frac{1}{2}$ и $z_2 = \frac{1}{3}$. Тогава общото

решение на диференчното уравнение е $y = \left\{ C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$. Тъй като корените

на характеристичното уравнение по модул са по-малки от единица, диференчното уравнение (респективно решението му) е устойчиво.

б) Корените на съответното характеристично уравнение са $z_1 = 2$ и $z_2 = 1$.

Тогава общото решение на даденото диференчно уравнение е $y = \{C_1 2^n + C_2 1^n\}_{n=0}^{\infty}$. То

е неустойчиво, защото z_1 не удовлетворява условието $|z| \leq 1$.

в) Корените на съответното характеристично уравнение са $z_{1,2} = \frac{1}{3}$. Тогава общото решение на даденото диференчно уравнение е $y = \left\{ C_1 \left(\frac{1}{3} \right)^n + C_2 n \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$.

То е устойчиво, защото двойният корен $z_{1,2} = \frac{1}{3}$ удовлетворява условието $|z| < 1$.

г) Корените на характеристичното уравнение са $z_{1,2} = 1$ и $z_3 = -1$. Общото решение на диференчното уравнение е $y = \left\{ C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n + C_3 \cdot (-1)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$. То е неустойчиво, защото двойният корен $z_{1,2}$ не удовлетворява условието $|z| < 1$.

д) Корените на характеристичното уравнение са $z_1 = 1$ и $z_{2,3} = \pm i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2} \right)$. Общото решение е устойчиво и има вида

$$y = \left\{ C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 1^n \cos \frac{n\pi}{2} + C_3 \cdot 1^n \sin \frac{n\pi}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

е) Корените на характеристичното уравнение са $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ и $z_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Общото решение, което е неустойчиво, има вида

$$y = \left\{ C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{3} + C_4 \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{3} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

ж) Корените на характеристичното уравнение са $z_1 = 1$, $z_{2,3,4} = 2$. Общото решение е неустойчиво и има вида $y = \left\{ C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot n \cdot 2^n + C_4 \cdot n^2 \cdot 2^n \right\}_{n=0}^{\infty}$.

з) Корените на характеристичното уравнение са $z_{1,2} = 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ и $z_{3,4} = -2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right)$. Общото решение не е устойчиво и има вида

$$y = \left\{ C_1 \cdot 2^n \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot n \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2} + C_3 \cdot 2^n \cdot \sin \frac{n\pi}{2} + C_4 \cdot n \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

2 зад. Да се намери общото решение на нехомогенното диференчно уравнение

а) $-y_{n+1} + 2y_n = 1 + 2n + n^2$;

б) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$.

Решение: а) Съответното хомогенно уравнение $-\bar{y}_{n+1} + 2\bar{y}_n = 0$ има за общо решение $\bar{y} = \left\{ C \cdot 2^n \right\}_{n=0}^{\infty}$. В случая $m = 2$ и $\sigma = 1$ не е корен на характеристичното уравнение, т. е. в (7) $s = 0$ и частното решение на нехомогенното уравнение търсим във вида $y_n^* = \beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2$. Като заместим в нехомогенното уравнение, получаваме

$$2(\beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 n^2) - (\beta_0 + \beta_1(n+1) + \beta_2(n+1)^2) = 1 + 2n + n^2.$$

Като приравним коефициентите пред съответните степени на n , получаваме следната система линейни алгебрични уравнения

$$\begin{cases} 2\beta_0 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 1 \\ 2\beta_1 - \beta_1 - 2\beta_2 = 2 \\ 2\beta_2 - \beta_2 = 1 \end{cases},$$

която има решение $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 6$ и следователно общото решение на нехомогенното диференчно уравнение е $y = \left\{ C \cdot 2^n + 6 + 4n + n^2 \right\}_{n=0}^{\infty}$.

б) Съответното хомогенно уравнение има вида $\bar{y}_{n+2} - 4\bar{y}_{n+1} + 4\bar{y}_n = 0$. Неговото характеристично уравнение $z^2 - 2z + 4 = 0$ има корени $z_{1,2} = 2$. Тогава общото решение на хомогенното уравнение е $\bar{y} = \left\{ C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n \right\}_{n=0}^{\infty}$. Да намерим сега едно частно решение на нехомогенното уравнение. В случая $m = 0$, $\sigma = 2$. Тогава съгласно общата теория, частното решение търсим във вида $y_n^* = \beta_0 \cdot n^2 \cdot 2^n$. Отново заместваме в нехомогенното уравнение и получаваме

$$\beta_0(n+2)^2 2^{n+2} - 4\beta_0(n+1)^2 2^{n+1} + 4\beta_0 n^2 2^n = 2^n.$$

Оттук $\beta_0 = \frac{1}{8}$ и общото решение на нехомогенното уравнение е

$$y = \left\{ C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

§ 7. УСТОЙЧИВОСТ И МОНОТОННОСТ НА k – СТЬПКОВИТЕ ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ

Нека

$$(1) \quad \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^k b_i y'_{n+i}, \quad y'_{n+i} = f(x_{n+i}, y_{n+i}),$$

е k – стъпков диференчен метод за решаване на задачата

$$(2) \quad u'(x) = f(x, u), \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(3) \quad u(x_0) = u_0.$$

Уравнението (1) е нехомогенно диференчно уравнение със специална дясна част

$b = \sum_{i=0}^k b_i y'_{n+i}$, зависеща от дясната част на диференциалната задача (2), (3). Стъпката

$$h \text{ в (1) е } h = \frac{X - x_0}{N}, \quad x_i = x_0 + ih.$$

Определение. Решението $\{y_n\}_{n=0}^N$ на диференчното уравнение (1), съответстващо на началните данни $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ се нарича *абсолютно устойчиво* по начални данни, ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че от неравенствата $|y_i - \tilde{y}_i| < \delta, i = 0, 1, \dots, k-1$, следва $|y_i - \tilde{y}_i| < \varepsilon, i = k, k+1, \dots, N$, където $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^N$ е решение на (1) при начални данни $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{k-1}$.

Забележка. Сравнете с дефиницията за устойчивост на решението на задачата (2), (3)!

Както и за диференциалната задача (2), (3), устойчивостта на решенията на нехомогенното диференчно уравнение (1) зависи от свойствата на функцията $f(x, u)$ и от началните данни. В литературата по числени методи за ОДУ понятието устойчивост на диференчния метод (1) е въведено по различни начини. Ние ще се спрем на две от тези понятия: *абсолютна устойчивост* (условна и безусловна) и *относителна устойчивост*.

Абсолютна устойчивост

Свойството непрекъсната зависимост на решението на диференчното уравнение (1) относно началните данни се нарича *абсолютна устойчивост* на диференчния метод. Ако липсва такава непрекъсната зависимост, методът се нарича *абсолютно неустойчив*.

По-нататък, когато говорим за *устойчивост* на метода (1), винаги ще подразбираме *абсолютна устойчивост*. Ако диференчният метод е устойчив за всяко h , казва се, че методът е *безусловно устойчив*. Ако диференчният метод е устойчив при някакво ограничение за h , казва се, че методът е *условно устойчив*. Има случаи, когато диференчният метод (1) не е устойчив за произволна задача (2), (3). Следните две теореми дават достатъчни условия за това.

Теорема 1. Ако хомогенното диференчно уравнение

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} = 0$$

не е устойчиво, то и диференчният метод (1) не е устойчив за произволна задача (2), (3).

Теорема 2. Нека диференчният метод (1) има ред на апроксимация p за произволна достатъчно гладка функция $u(x)$:

$$\Psi_n = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i u_{n+i} - \sum_{i=0}^k b_i u'_{n+i} = O(h^p).$$

Ако методът (1) е :

а) явен и $p > k$,

б) неявен, а $p > k + 1$ при k нечетно и $p > k + 2$ при k четно,

то измежду корените на характеристичното уравнение

$$\sum_{i=0}^k a_i z^i = 0$$

има корен, по модул по-голям от 1.

Това твърдение означава, че хомогенното уравнение не е устойчиво, а следователно и диференчният метод (1) не е устойчив.

Формулираните теореми ни дават възможност да заключим, че даден диференчен метод не е устойчив за произволна задача от вида (2), (3). Проверката на устойчивостта е много по-сложна и би трябвало да се прави за всяка конкретна задача (2), (3).

Нека $\{y_n^{(s)}\}_{n=0}^N$, $s = 1, 2$ са две решения на уравнението (1) при начални данни съответно $y_0^{(s)}, y_1^{(s)}, \dots, y_{k-1}^{(s)}$:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i y_{n+i}^{(s)} = \sum_{i=0}^k b_i y'_{n+i}{}^{(s)}, \quad y'_{n+i} = f(x_{n+i}, y_{n+i}), \quad s = 1, 2.$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, за разликата им $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^N$, $\varepsilon_n = y_n^{(2)} - y_n^{(1)}$ получаваме диференчното уравнение

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i \varepsilon_{n+i} = \sum_{i=0}^k b_i [f(x_{n+i}, y_{n+i}^{(2)}) - f(x_{n+i}, y_{n+i}^{(1)})] = \sum_{i=0}^k b_i \frac{\partial f}{\partial u}(x_{n+i}, \bar{y}_{n+i}) \varepsilon_{n+i}.$$

Да означим

$$l_{n+i} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{n+i}, \bar{y}_{n+i}).$$

За $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^N$ получаваме хомогенно диференчно уравнение

$$(4) \quad \sum_{i=0}^k (a_i - h l_{n+i} b_i) \varepsilon_{n+i} = 0,$$

чиито коефициенти обаче не са постоянни. Както и в непрекъснатия случай, устойчивостта на уравнението (4) ще зависи от свойствата на $\frac{\partial f}{\partial u}$. В случая, когато

$f(x, u) = \lambda u$, уравнението (4) добива вида

$$(5) \quad \sum_{i=0}^k (a_i - h \lambda b_i) \varepsilon_{n+i} = 0.$$

Това е хомогенно диференчно уравнение с постоянни коефициенти и неговата устойчивост зависи от корените на характеристичното му уравнение

$$(6) \quad \sum_{i=0}^k (a_i - h \lambda b_i) z^i = 0.$$

Уравненията (5) и (6) съдържат информация както за дясната част на уравнението (1) чрез коефициентите b_i , така и за функцията $f(x, u)$ чрез параметъра λ . Затова устойчивостта на метода (1) се изследва върху моделната задача

$$(7) \quad u'(x) = \lambda u(x), \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(8) \quad u(x_0) = u_0.$$

Ако методът (1) е устойчив за задачата (7), (8), счита се, че той може да бъде прилаган и за по-общата задача (2), (3).

Относителна устойчивост

Определение. Диференциалният метод (1) е *относително устойчив по начални данни за дадена диференциална задача* (2), (3), ако съществува константа c , независеща от h и такава, че за всяко $n \leq N$ да имаме

$$\frac{|u_n - y_n|}{|u_n|} \leq c \varepsilon, \quad \varepsilon = \max_{0 \leq i \leq k-1} |u_i - y_i|, \quad \text{където } u_n = u(x_n).$$

Монотонност на диференциалния метод

Определение. Явната хомогенна схема

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i}$$

се нарича *монотонна*, ако $\alpha_i > 0$, $i = 0, k-1$.

Определение. Ако явната хомогенна диференциална схема, получена при прилагане на диференциалния метод (1) към моделната задача (7), (8), е монотонна, казва се, че и *диференциалният метод (1) е монотонен*.

Определение. Ако методът е монотонен при някакво условие за h , казва се, че методът е *условно монотонен*.

Задачи

1 зад. Дадена е задачата на Коши (2), (3). Ще се получи ли устойчиво решение, ако за нея се приложи диференциалният метод

$$\frac{1}{h} [ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n] = y'_{n+2} + dy'_n,$$

където a, b, c и d са определени така, че $\psi_n = O(h^3)$.

Решение: За локалната грешка на апроксимация имаме

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{h} [au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n] - u'_{n+2} - du'_n = \\ &= \frac{1}{h} a \left(u_n + \frac{2h}{1!} u'_n + \frac{(2h)^2}{2!} u''_n + \frac{(2h)^3}{3!} u'''_n + \frac{(2h)^4}{4!} u^{IV}_n + O(h^5) \right) + \\ &+ \frac{1}{h} b \left(u_n + \frac{h}{1!} u'_n + \frac{h^2}{2!} u''_n + \frac{h^3}{3!} u'''_n + \frac{h^4}{4!} u^{IV}_n + O(h^5) \right) + \frac{1}{h} cu_n - \\ &- \left(u'_n + \frac{2h}{1!} u''_n + \frac{(2h)^2}{2!} u'''_n + \frac{(2h)^3}{3!} u^{IV}_n + O(h^4) \right) - du'_n. \end{aligned}$$

Тогава като приравним на нула коефициентите пред съответните степени на h , получаваме следната система линейни алгебрични уравнения:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b - 1 - d = 0 \\ 2a + \frac{b}{2} - 2 = 0 \\ \frac{4a}{3} + \frac{b}{6} - 2 = 0 \end{cases}.$$

Тази система има за решение числата $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$, $d = -1$. Следователно диференчният метод е

$$2y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = h(y'_{n+2} - y'_n)$$

Съответното хомогенно уравнение

$$2y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = 0$$

е неустойчиво, защото има двоен корен $z_{1,2} = 1$. Следователно и диференчният метод е неустойчив.

2 зад. Да се изследва устойчивостта на дадения диференчен метод върху моделната задача (7), (8) при $\lambda < 0$:

$$\text{а) } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1});$$

$$\text{б) } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}).$$

Решение: Ще използваме следната

Теорема. Необходимото и достатъчно условие корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ да удовлетворяват неравенството $|x_{1,2}| \leq 1$ е

$$\begin{cases} |b| \leq a + c \\ c \leq a \end{cases}.$$

а) В този случай необходимото и достатъчно условие от теоремата има вида

$$\begin{cases} \left| 1 + \frac{3\lambda h}{2} \right| \leq 1 + \frac{\lambda h}{2} \\ \frac{\lambda h}{2} \leq 1 \end{cases}.$$

След решаване на тази система неравенства относно h , получаваме $h \leq -\frac{1}{\lambda}$, т.е. даденият диференчен метод е условно абсолютно устойчив.

б) Аналогично получаваме, че даденият диференчен метод е условно абсолютно устойчив при условие $h \leq -\frac{6}{\lambda}$.

Глава 2. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ II РЕД

В природата се различават два типа процеси: стационарни (които не се изменят във времето) и нестационарни (които се изменят във времето). Погледнато в по-широк план, в природата всичко се мени, но с различна скорост. Ако разглежданият процес в даден интервал от време се мени много бавно, то може да се приеме, че той е неизменен. В курса по числени методи за диференциални уравнения ще разглеждаме диференциални уравнения, описващи както стационарни, така и нестационарни процеси. Ще започнем с най-простото – едномерното стационарно уравнение на топлопроводността.

§ 8. ИЗВОД НА ЕДНОМЕРНОТО СТАЦИОНАРНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА. ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ

Нека имаме прът с дължина l , който е толкова тънък, че температурата във всички точки от дадено напречно сечение да е една и съща. Нека в краищата му се поддържат постоянни температури: $u|_{x=0} = \mu_1$, $u|_{x=l} = \mu_2$, $\mu_1 > \mu_2$. Интересуваме се от разпределението на температурата в пръта. Това разпределение може да бъде описано с функцията $u(x)$, която представлява температурата на пръта в сечение x . Нашата цел ще бъде да намерим уравнението, което функцията $u(x)$ удовлетворява.

Основна характеристика на средата, която се използва при математическото описание на разпространението на топлина, е коефициентът на топлопроводност, който ще означаваме с k . Той отразява различната способност на телата да провеждат топлината навътре в своята маса. В най-простия случай, т.е. когато средата е хомогенна, $k = \text{const}$. Ако средата не е хомогенна, коефициентът на топлопроводност зависи от пространствената променлива x , т.е. $k = k(x)$. При високи температури коефициентът k може да зависи от температурата на средата u , $k = k(u)$, а в някои случаи и от u' . Следователно в най-общия случай $k = k(x, u, u')$. Ние ще разглеждаме само случая $k = k(x)$.

Да формулираме най-напред физическите закономерности, които са свързани с разпространението на топлината.

1) Закон на Фурие. Ако едно тяло е нагрето неравномерно, в него възникват топлинни потоци, насочени от местата с по-висока температура към местата с по-ниска температура. Количеството топлина $Q(x)$, която протича през единица площ, се дава с експерименталната формула

$$Q(x) = -k(x)u'(x).$$

Величината $Q(x)$ се нарича плътност на топлинния поток. Счита се, че потокът е положителен, ако топлината тече в посоката на нарастване на x . Тогава количеството топлина, което протича през сечение на пръта с площ $S(x)$, се дава с формулата

$$Q_1(x) = -k(x)u'(x)S(x).$$

2) Нека вътре в пръта се отделя топлина от някакви топлинни източници, външни по отношение на процеса. Отделянето на топлина в точката x може да се характеризира с плътността на топлинните източници $g(x)$. В резултат от действието на тези източници, в участъка от пръта (x_1, x_2) се отделя количество топлина, което се дава с формулата

$$Q_2 = \int_{x_1}^{x_2} g(x) S(x) dx .$$

3) Ако процесът се характеризира с консуматори на топлина, чиято мощност е пропорционална на температурата на пръта с коефициент на пропорционалност $r(x)$ (при отделяне на топлина чрез околната повърхност на пръта, например), то количеството топлина, което се отделя в участъка от пръта (x_1, x_2) , се дава с формулата

$$Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} r(x) u(x) l(x) dx ,$$

където $l(x)$ е обиколката на сечението на пръта в точката x .

Уравненията на математическата физика обикновено изразяват някакъв закон за запазване на топлина, маса или някаква друга физическа величина. Уравнението на топлопроводността се получава като се направи баланс на топлината в някакъв участък от пръта (x_1, x_2) . Като приложим закона за запазване на енергията, можем да запишем равенството

$$-S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} g(x)S(x)dx = -S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_2} + \int_{x_1}^{x_2} r(x)u(x)l(x)dx ,$$

т.е. количеството топлина, което влиза през сечение $x = x_1$ и количеството топлина, което се отделя от източниците с плътност $g(x)$, излиза през сечение $x = x_2$ или се отделя чрез околната повърхнина на пръта в участъка (x_1, x_2) . Като преработим последното равенство, получаваме уравнението на топлопроводността в интегрална форма

$$S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_2} - S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_1} - \int_{x_1}^{x_2} r(x)u(x)l(x)dx = - \int_{x_1}^{x_2} g(x)S(x)dx .$$

Да приложим сега теоремата за средните стойности при интегрални. Получаваме

$$S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_2} - S(x)k(x)u'(x)|_{x=x_1} - l(x)r(x)u(x)|_{x=x_3} \Delta x = -S(x)g(x)|_{x=x_4} \Delta x ,$$

$$x_3, x_4 \in [x_1, x_2], \Delta x = x_2 - x_1 .$$

Като използваме теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(S(x)k(x)u'(x))' \Big|_{x=x_5} \Delta x - l(x)r(x)u(x)|_{x=x_3} \Delta x = -S(x)g(x)|_{x=x_4} \Delta x ,$$

$$x_5 \in [x_1, x_2] .$$

В последното равенство разделяме на Δx и правим граничен преход при $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow x$:

$$(S(x)k(x)u'(x))' - l(x)r(x)u(x) = -S(x)g(x), \quad x \in (0, l) .$$

Въвеждаме означенията $p(x) = S(x)k(x)$, $q(x) = l(x)r(x)$, $f(x) = -S(x)g(x)$.
В резултат, от последното уравнение получаваме уравнението

$$(1) \quad (p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x),$$

където $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$.

Уравнение (1) е едномерно стационарно уравнение на топлопроводността. То има безбройно много решения. За отделяне на единствено решение, към него трябва да се присъединят допълнителни условия – в случая гранични условия при $x = 0$ и $x = l$. Те могат да бъдат различни в зависимост от температурните режими в двата края на пръта. Най-често се разглеждат следните три основни типа гранични условия:

а) на краищата на пръта е зададена температурата, която се поддържа. В този случай говорим за гранични условия от първи род:

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2.$$

б) на единия край, например при $x = l$, е зададена стойността на топлинния поток (гранично условие от втори род):

$$-p(x)u'(x)|_{x=l} = Q, \quad \text{т.е. } u'(l) = \mu_2, \quad \text{където } \mu_2 = -\frac{Q}{p}|_{x=l}.$$

Ако $Q = 0$, то десният край на пръта се нарича топлоизолиран.

в) на единия край на пръта, например при $x = l$, е зададен топлообмен по закона на Нютон (гранично условие от трети род):

$$-p(x)u'(x)|_{x=l} = \beta_2(u|_{x=l} - u_{cp}),$$

където u_{cp} е температурата на околната среда, а $\beta_2 > 0$ е коефициентът на конвективен топлообмен. Последното условие може да се запише още във вида

$$-p(l)u'(l) = \beta_2 u(l) - \mu_2, \quad \mu_2 = \beta_2 u_{cp}.$$

Граничното условие при $x = 0$ се поставя така

$$-p(x)u'(x)|_{x=0} = -\beta_1(u|_{x=0} - u_{cp}), \quad \beta_1 > 0 \quad \text{или още във вида}$$

$$p(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, \quad \mu_1 = \beta_1 u_{cp}.$$

§ 9. КОНСТРУИРАНЕ НА ДИФЕРЕНЧНИ СХЕМИ. МЕТОД НА БАЛАНСА

Постановка на задачата

Най-общата задача за ОДУ от втори ред, която ще разгледаме е

$$(1) \quad \begin{cases} (p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ p(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, \\ -p(1)u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \end{cases}$$

при

$$(2) \quad 0 < p_0 \leq p(x) < p_1 < \infty, \quad q(x) \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0.$$

Условията (2), заедно с определени изисквания за гладкост на коефициентите, гарантират съществуване, единственост и устойчивост на решението на задача (1). Например, при гранични условия от първи род, ако $p(x) \in C^1[0,1]$,

$q(x), f(x) \in C[0,1]$, то $u(x) \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$. При разглеждане на гранични условия от III род ще искаме $u(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$.

Да означим с

$$Lu \equiv (p(x)u'(x))' - q(x)u(x),$$

$$l_1 u \equiv p(0)u'(0) - \beta_1 u(0),$$

$$l_2 u \equiv -p(1)u'(1) - \beta_2 u(1),$$

$$f(x) = F(x),$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix}, \quad lu = \begin{pmatrix} l_1 u \\ l_2 u \end{pmatrix}.$$

Тогава задача (1) се записва във вида

$$(3) \quad \begin{cases} Lu = F \\ lu = \varphi \end{cases}.$$

Задача (1), респективно задача (3), ще решаваме с помощта на диференчни методи. Както и при разглежданите до тук диференчни методи за решаване на задачата на Коши за ОДУ от първи ред, условно разграничаваме три етапа:

1) Съставяне на диференчната схема, която съответства на задача (3). За целта в дефиниционната област на решението u се въвежда равномерна или неравномерна мрежа от точки. Диференциалните оператори L и l се апроксимират съответно с диференчните оператори L_h и l_h върху подходящо избрано множество от точки, наречено *шаблон*. Така получаваме диференчната схема:

$$(4) \quad \begin{cases} L_h y_h = F_h \\ l_h y_h = \varphi_h \end{cases},$$

където F_h и φ_h апроксимират десните страни на диференциалното уравнение и на граничните условия.

2) Изследване на получената диференчна схема за апроксимация, сходимост и точност. Във връзка с изследването на сходимостта, основна роля играе локалната грешка на апроксимация ψ_i , която за диференциалното уравнение е

$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (F_h)_i,$$

а за граничните условия

$$\psi_i = (l_h u_h)_i - (\varphi_h)_i.$$

3) Прилагане на подходящ числен метод за решаване на получената система линейни алгебрични уравнения.

Видове записи на диференциалното уравнение

Преди да се спрем на всички тези етапи за задача (1), ще видим най-напред как най-общото линейно ОДУ от втори ред може да се сведе до уравнение от вида $(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x)$, наречен дивергентен. И така, нека е дадено уравнението

$$(5) \quad a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = a_3(x),$$

където $a_2(x) \neq 0$ за всяко x от разглежданата област. Като разделим (5) с $a_2(x)$, получаваме уравнението

$$(6) \quad u''(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} u'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} u(x) = \frac{a_3(x)}{a_2(x)}.$$

Да умножим (6) с $p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$ и да отчетем, че $p'(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} p(x)$. Тогава

$$p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}u(x) = \frac{a_3(x)}{a_2(x)}p(x),$$

или

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x),$$

$$\text{където } q(x) = -p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \quad f(x) = \frac{a_3(x)}{a_2(x)}p(x).$$

Уравнението (5) може да се сведе и до уравнение $u''(x) - q(x)u(x) = f(x)$ по следния начин. В уравнение (6) полагаме

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = P(x), \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = Q(x), \quad \frac{a_3(x)}{a_2(x)} = R(x).$$

В резултат получаваме уравнението

$$(7) \quad u''(x) + P(x)u'(x) + Q(x)u(x) = R(x).$$

Въвеждаме функцията $\alpha(x) = e^{-\int \frac{P(x)}{2} dx}$. Тогава $\alpha'(x) = -\frac{1}{2}\alpha(x)P(x)$. Полагаме $u(x) = \alpha(x)z(x)$ и за $u'(x)$ и $u''(x)$ имаме съответно

$$\begin{aligned} u'(x) &= \alpha(x)z'(x) + \alpha'(x)z(x) \\ u''(x) &= \alpha(x)z''(x) + 2\alpha'(x)z'(x) + \alpha''(x)z(x). \end{aligned}$$

Заместваме в уравнението (7) и получаваме последователно

$$\alpha(x)z''(x) + 2\alpha'(x)z'(x) + \alpha''(x)z(x) + P(x)\alpha(x)z'(x) + P(x)\alpha'(x)z(x) + Q(x)\alpha(x)z(x) = R(x)$$

$$(8) \quad \alpha(x)z''(x) + (2\alpha'(x) + P(x)\alpha(x))z'(x) + (\alpha''(x) + P(x)\alpha'(x) + Q(x)\alpha(x))z(x) = R(x).$$

Но $2\alpha'(x) = -P(x)\alpha(x)$ и тъй като $\alpha(x) \neq 0$, то уравнение (8) може да се запише във вида

$$(9) \quad z''(x) - q(x)z(x) = f(x),$$

където

$$q(x) = -(\alpha''(x) + P(x)\alpha'(x) + Q(x)\alpha(x))/\alpha(x), \quad f(x) = R(x)/\alpha(x).$$

Построяване на диференчна схема чрез непосредствено апроксимиране на производните

Да разгледаме най-напред задачата

$$(10) \quad \begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \quad q(x) \geq 0, \\ u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, \quad \beta_1 \geq 0, \\ u(1) = \mu_2. \end{cases}$$

В интервала $[0,1]$ въвеждаме равномерна мрежа със стъпка h

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = i h, h = \frac{1}{N}, i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Множеството от точките, които ще използваме при апроксимирането на производните в точката x_i , т.е. шаблона на точката x_i , ще означаваме с $\mathcal{I}(x_i)$. В зависимост от шаблона, който се избира, за апроксимирането на $u'(x_i)$ има три възможности:

$$a) \quad \mathcal{I}(x_i) = \{x_i, x_{i+1}\}: \quad u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \equiv u_{x,i};$$

$$б) \quad \mathcal{I}(x_i) = \{x_{i-1}, x_i\}: \quad u'(x_i) \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \equiv u_{\bar{x},i};$$

$$в) \quad \mathcal{I}(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}: \quad u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \equiv u_{0,x,i},$$

където $u_k = u(x_k)$. Първата апроксимация използва крайна разлика напред, втората - крайна разлика назад, а третата - централна разлика.

От едностъпковите методи знаем, че за първата апроксимация

$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = O(h).$$

Аналогично за втората апроксимация получаваме

$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u'_i = O(h).$$

Да намерим локалната грешка на апроксимация на третото приближение. Имаме

$$\begin{aligned} \psi_i &= (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u'_i = \\ &= \frac{1}{2h} \left[u_i + \frac{h}{1!} u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''(x_i + \theta_1 h) - u_i + \frac{h}{1!} u'_i - \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''(x_i + \theta_2 h) \right] - u'_i = O(h^2), \end{aligned}$$

при предположение, че $u(x)$ има непрекъсната трета производна.

Стойността на $u''(x_i)$ ще апроксимираме с крайна разлика от втори ред по шаблона $\mathcal{I}(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \equiv u_{\bar{x}x,i}.$$

За локалната грешка на апроксимацията имаме

$$\begin{aligned}\psi_i &= (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i'' = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(u_i + \frac{h}{1!} u_i' + \frac{h^2}{2!} u_i'' + \frac{h^3}{3!} u_i''' + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i + \theta_1 h) - 2u_i + u_i - \frac{h}{1!} u_i' + \frac{h^2}{2!} u_i'' - \frac{h^3}{3!} u_i''' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^4}{4!} u^{IV}(x_i + \theta_2 h) \right) - u_i'' = \frac{h^2}{12} u^{IV}(\xi_i) = O(h^2),\end{aligned}$$

при предположение, че $u \in C^4(0, 1)$.

Тогава за диференциалното уравнение от задача (10) получаваме следната диференчна апроксимация с локална грешка на апроксимацията $\psi_i = O(h^2)$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = f_i, \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Второто гранично условие се апроксимира точно

$$y_N = \mu_2.$$

Първото условие можем да апроксимираме веднага с грешка $O(h)$, като заместим $u'(0)$ с разлика напред, но нашата цел ще бъде да апроксимираме и него с грешка $O(h^2)$. Можем да постъпим по два начина, които на практика водят до една и съща апроксимация.

1) Правим апроксимацията

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \beta_1 y_0 - \mu_1.$$

За локалната грешка на апроксимацията имаме:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{u_1 - u_0}{h} - \beta_1 u_0 + \mu_1 = \frac{1}{h} \left(u_0 + \frac{h}{1!} u_0' + \frac{h^2}{2!} u_0'' + \frac{h^3}{3!} u'''(\theta h) - u_0 \right) - \beta_1 u_0 + \mu_1 = \\ &= \frac{h}{2} u_0'' + O(h^2),\end{aligned}$$

при предположение, че $u \in C^3(0, 1)$. Ако допуснем, че уравнението се удовлетворява и при $x = 0$, то $u_0'' = q_0 u_0 + f_0$ и за ψ_0 получаваме

$$\psi_0 = \frac{h}{2} (q_0 u_0 + f_0) + O(h^2).$$

От тук следва, че ако направим апроксимацията

$$(11) \quad \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} (q_0 y_0 + f_0) = \beta_1 y_0 - \mu_1,$$

то $\psi_0 = O(h^2)$.

2) Да въведем извънконтурната точка $x_{-1} = -h$ и да допуснем, че уравнението се удовлетворява в малко по-широк интервал $[-h, 1]$. Да направим диференчна апроксимация на уравнението при $i = 0$ и на първото гранично условие, като за $u'(0)$ използваме централна разлика. Ще имаме

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - q_0 y_0 = f_0,$$

$$\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \beta_1 y_0 - \mu_1.$$

Да изключим от тези две уравнения y_{-1} . От първото имаме

$$y_{-1} = (q_0 y_0 + f_0) h^2 + 2y_0 - y_1.$$

Заместваме във второто и получаваме

$$\frac{2y_1 - 2y_0 - h^2(q_0 y_0 + f_0)}{2h} = \beta_1 y_0 - \mu_1,$$

или

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(q_0 y_0 + f_0) = \beta_1 y_0 - \mu_1.$$

Метод на баланса

Да се върнем сега към задача (1). Тя е типичен представител на задачите на математическата физика, които се формулират с помощта на основно диференциално уравнение и допълнителни условия (в случая – гранични), които осигуряват съществуване и единственост на решението. Както казахме, задачите на математическата физика отразяват някакъв закон за запазване (в случая закона за запазване на топлината). Естествено е да искаме съответните закони да останат в сила и за диференчните схеми, които апроксимират разглежданите диференциални задачи, т.е. тези закони да са в сила и върху мрежата. Диференчни схеми, които отразяват законите за запазване върху мрежата, се наричат *консервативни*.

На пръв поглед изглежда естествено да представим уравнението от задача (1) във вида

$$p u'' + p' u' - q u = f$$

и да използваме следната апроксимация за него, която има локална грешка $O(h^2)$:

$$(12) \quad p_i y_{\bar{x},i} + \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} y_{x,i} - q_i y_i = f_i.$$

Оказва се обаче, че така получената диференчна схема не е консервативна в класа на прекъснатите коефициенти (като се направи баланс на топлината върху мрежата се оказва, че в уравнение (12) има допълнителен източник или консуматор на топлина).

За получаване на консервативни диференчни схеми се използва *интегро – интерполационен метод* или *метод на баланса*. Използването му е наложително при променливи и особено при прекъснати коефициенти. Ще илюстрираме използването на метода на баланса за построяване на консервативна диференчна схема за задача (1).

В интервала $[0,1]$ въвеждаме равномерна мрежа със стъпка h

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = i h, \quad h = \frac{1}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Освен точките от мрежата, които ще наричаме цели възли на мрежата, да въведем и т.н. полуцели възли $x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

При метода на баланса диференциалното уравнение (1) се интегрира в интервала $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (p(x) u'(x))' dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx.$$

Да означим с $W(x) = -p(x) u'(x)$ потока в точката x . Тогава получаваме

$$(13) \quad W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx,$$

което представлява *уравнението на баланса* на топлината за интервала $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

За интеграла в дясната част на (13) имаме

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = h \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = h \overset{\circ}{\varphi}_i, \text{ където } \overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx.$$

За интеграла в лявата част на (13) получаваме последователно

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx \approx u(x_i) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = u_i h \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx = h u_i \overset{\circ}{d}_i,$$

$$\text{където } \overset{\circ}{d}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

Сега ще получим приближения за стойностите на потока в точките $x_{i-1/2}$ и $x_{i+1/2}$. От израза за потока имаме $\frac{W(x)}{p(x)} = -u'(x)$. Да интегрираме това равенство в интервала $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{p(x)} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx.$$

При предположение, че в интервала $[x_{i-1}, x_i]$ потокът W е равен приблизително на $W(x_{i-1/2})$, от последното равенство получаваме

$$W_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)} dx \approx -(u_i - u_{i-1}), \quad W_{i-1/2} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)} dx \approx -\frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

$$W_{i-1/2} \approx -\overset{\circ}{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -\overset{\circ}{a}_i u_{\bar{x},i}, \quad \overset{\circ}{a}_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{p(x)} dx \right)^{-1}.$$

Тогава за мрежовата функция y , която е приближено решение на задача (1), от уравнението на баланса (13) получаваме

$$\overset{\circ}{a}_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \overset{\circ}{a}_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - h \overset{\circ}{d}_i y_i = h \overset{\circ}{\varphi}_i,$$

$$\frac{1}{h} \left[\overset{\circ}{a}_{i+1} y_{\bar{x},i+1} - \overset{\circ}{a}_i y_{\bar{x},i} \right] - \overset{\circ}{d}_i y_i = \overset{\circ}{\varphi}_i,$$

или в съкратен запис

$$(14) \quad (\overset{\circ}{a} y_{\bar{x}})_{x,i} - \overset{\circ}{d}_i y_i = \overset{\circ}{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Диференчното уравнение (14) е диференчен аналог на диференциалното уравнение от задача (1).

Да получим сега по метода на баланса диференчна апроксимация на първото гранично условие. Диференчната апроксимация на второто гранично условие се получава аналогично.

Уравнението на баланса на топлината за интервала $[0, x_{1/2}]$ има вида

$$W_0 - W_{1/2} - \int_0^{h/2} q(x) u(x) dx = \int_0^{h/2} f(x) dx.$$

От първото гранично условие $W_0 = -\beta_1 y_0 + \mu_1$, а за $W_{\frac{1}{2}}$ имаме $W_{\frac{1}{2}} \approx -a_1 \overset{\circ}{u}_{\bar{x},1}$.
 Като отчетем, че $\int_0^{h/2} q(x)u(x)dx \approx u_0 \frac{h}{2} \frac{1}{0.5h} \int_0^{h/2} q(x)dx = \frac{h}{2} u_0 \overset{\circ}{d}_0$, където $\overset{\circ}{d}_0 = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} q(x)dx$
 и $\overset{\circ}{\varphi}_0 = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} f(x)dx$, за диференчната апроксимация на граничното условие от
 уравнението на баланса получаваме

$$-\beta_1 y_0 + \mu_1 + a_1 \overset{\circ}{y}_{\bar{x},1} - \frac{h}{2} y_0 \overset{\circ}{d}_0 = \frac{h}{2} \overset{\circ}{\varphi}_0, \quad a_1 = \left[\frac{1}{h} \int_0^{x_1} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1},$$

или още

$$a_1 \overset{\circ}{y}_{x,0} = (\beta_1 + \frac{h}{2} \overset{\circ}{d}_0) y_0 - (\mu_1 - \frac{h}{2} \overset{\circ}{\varphi}_0).$$

За второто гранично условие диференчната апроксимация има вида

$$-a_N \overset{\circ}{y}_{\bar{x},N} = (\beta_2 + \frac{h}{2} \overset{\circ}{d}_N) y_N - (\mu_2 - \frac{h}{2} \overset{\circ}{\varphi}_N),$$

$$\text{където } a_N = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{N-1}}^{x_N} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}, \quad \overset{\circ}{d}_N = \frac{2}{h} \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} q(x)dx, \quad \overset{\circ}{\varphi}_N = \frac{2}{h} \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} f(x)dx.$$

Условия за втори ред на апроксимация

Да разгледаме сега диференчното уравнение

$$(15) \quad (a y_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = \varphi_i,$$

където коефициентите $a_i > 0$, $d_i \geq 0$, φ_i за сега не са определени. Искаме да намерим условията, които трябва да удовлетворяват тези коефициенти, така че диференчното уравнение (15) да апроксимира диференциалното уравнение от (1) с грешка $O(h^2)$ върху равномерната мрежа $\bar{\omega}_h$, въведена в интервала $[0, 1]$. За локалната грешка на апроксимация имаме:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] - d_i u_i - \varphi_i = \\ &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \left(u'_i + \frac{h}{2!} u''_i + \frac{h^2}{3!} u'''_i + O(h^3) \right) - a_i \left(u'_i - \frac{h}{2!} u''_i + \frac{h^2}{3!} u'''_i + O(h^3) \right) \right] - \\ &\quad - d_i u_i - \varphi_i - p'_i u'_i - p_i u''_i + q_i u_i + f_i = \\ &= \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - p'_i \right) u'_i + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - p_i \right) u''_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{6} h u'''_i + O(h^2) - (d_i - q_i) u_i - (\varphi_i - f_i). \end{aligned}$$

Оттук се вижда, че ако

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{a_{i+1} - a_i}{h} &= p'_i + O(h^2), & d_i &= q_i + O(h^2), \\ \frac{a_{i+1} + a_i}{2} &= p_i + O(h^2), & \varphi_i &= f_i + O(h^2), \end{aligned}$$

то $\psi_i = O(h^2)$.

Следователно условията (16) са достатъчни за втори ред на апроксимация.

Да разгледаме сега някои възможности за пресмятане на коефициентите a_i на диференчната схема, които осигуряват втори ред на апроксимация:

$$a_i = p_{i-\frac{1}{2}}, \quad a_i = \frac{p_{i-1} + p_i}{2}, \quad a_i = \frac{2p_i p_{i-1}}{p_i + p_{i-1}}, \quad a_i = \sqrt{p_{i-1} p_i}.$$

Може лесно да се провери, че ако $a_i = p_i$, то $\psi_i = O(h)$.

За останалите коефициенти на диференчната схема могат да се използват например формулите

$$d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad \text{или} \quad d_i = \frac{1}{2}(q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}), \quad \varphi_i = \frac{1}{2}(f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}),$$

които също са с втори ред на апроксимация.

Задачи

1 зад. Да се покаже, че диференчното уравнение

$$p_{\frac{1}{2}} \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(q_0 y_0 + f_0) - \beta_1 y_0 = \mu_1$$

апроксимира граничното условие

$$p(0)u'(0) = \beta_1 u(0) + \mu_1$$

за уравнението

$$(pu')' - qu = f$$

с локална грешка на апроксимацията $O(h^2)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= p_{\frac{1}{2}} \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(q_0 u_0 + f_0) - \beta_1 u_0 - \mu_1 = \\ &= \left[p_0 + \frac{h}{2} p'_0 + \frac{h^2}{8} p''_0 + O(h^3) \right] \left[u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + \frac{h^2}{6} u'''_0 + O(h^3) \right] - \frac{h}{2}(q_0 u_0 + f_0) - \beta_1 u_0 - \mu_1 = \\ &= p_0 u'_0 + \frac{h}{2} p_0 u''_0 + \frac{h^2}{6} p_0 u'''_0 + O(h^3) + \frac{h}{2} p'_0 u'_0 + \frac{h^2}{4} p'_0 u''_0 + \frac{h^2}{8} p''_0 u'_0 - \frac{h}{2}(q_0 u_0 + f_0) - \beta_1 u_0 - \mu_1 = \\ &= \frac{h}{2}(p_0 u''_0 + p'_0 u'_0 - q_0 u_0 - f_0) + O(h^2) = O(h^2). \end{aligned}$$

§ 10. МЕТОД НА ПРОГОНКАТА ЗА ТРИДИАГОНАЛНИ СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ. РЕАЛИЗУЕМОСТ, УСТОЙЧИВОСТ

Алгоритъм

Диференчните схеми за задача (1) от § 9 или нейните частни случаи представляват системи линейни алгебрични уравнения, които съдържат толкова на брой уравнения, колкото и неизвестни. Освен това матриците на тези системи са от специален вид – те имат тридиагонална структура. Тази структура дава възможност да се разработват *икономични методи* за решаване на получените системи, т. е. методи, при които броят на аритметичните операции е пропорционален на броя на неизвестните. Един такъв метод е *методът на прогонката*, който представлява метод на Гаус, отчитащ лентовата структура на матрицата. Разработени са различни модификации на метода на прогонката. Ние ще се спрем на метода на *дясната прогонка*.

Най-общо, една система с тридиагонална матрица може да се запише във вида

$$(1) \quad \begin{cases} -C_0 y_0 + B_0 y_1 = F_0 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \\ A_N y_{N-1} - C_N y_N = F_N. \end{cases}$$

Представяме първото уравнение на системата (1) във вида

$$y_0 = \frac{B_0}{C_0} y_1 - \frac{F_0}{C_0}.$$

Полагаме

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_1 = -\frac{F_0}{C_0}$$

и получаваме представянето

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1.$$

Решението на системата (1) ще търсим във вида

$$(2) \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогава $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ и като заместим в i -тото уравнение, получаваме последователно

$$A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} y_{i+1} + \frac{A_i \beta_i - F_i}{C_i - A_i \alpha_i}.$$

Като сравним с представянето (2), получаваме

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i - F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

От последното уравнение на системата (1) и представянето (2) при $i = N-1$ имаме

$$\begin{cases} A_N y_{N-1} - C_N y_N = F_N \\ y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \end{cases},$$

откъдето

$$y_N = \frac{A_N \beta_N - F_N}{C_N - A_N \alpha_N} = \beta_{N+1}.$$

И така, алгоритъмът на дясната прогонка е следният:

$$1) \alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_1 = -\frac{F_0}{C_0};$$

$$2) \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i - F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N;$$

$$3) y_N = \beta_{N+1};$$

$$4) y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Ще отбележим, че броят на аритметичните операции при метода на прогонката е от порядъка на $8N$, докато при метода на Гаус е от порядъка на N^3 .

Реализуемост, устойчивост

До тук формулите на прогонката са получени формално, без каквито и да било предположения за коефициентите на системата (1). Сега ще разгледаме условията, на които трябва да отговарят коефициентите, за да бъде методът на прогонката реализуем и да позволява получаването на решението на задачата с достатъчна точност.

За какво точно става въпрос:

- Трябва да гарантираме изпълнението на условието $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$ за $\forall i = 1, 2, \dots, N$, което ще осигури коректност на формулите.

- Решението y_i се намира по формулата $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$. Тази формула може да поражда натрупване на грешки от закръгляванията. Наистина, ако α_i и β_i са пресметнати точно, а при пресмятането на y_N е допусната грешка ε_N , т. е. $\tilde{y}_N = y_N + \varepsilon_N$, то тъй като за $\tilde{y}_i$ имаме $\tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1}$, $i = N-1, N-2, \dots, 1, 0$, то грешката $\varepsilon_i = \tilde{y}_i - y_i$ ще удовлетворява хомогенното уравнение $\varepsilon_i = \alpha_{i+1} \varepsilon_{i+1}$, $i = N-1, N-2, \dots, 1, 0$, ε_N - дадено. От тук следва, че ако $|\alpha_i| \leq 1$, грешката няма да нараства. Следващата теорема дава достатъчни условия за коректност и устойчивост на алгоритъма на дясната прогонка.

Теорема. Нека коефициентите на системата (1) са реални числа и удовлетворяват условията

$$C_0 \neq 0, \quad C_N \neq 0,$$

$$A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$(3) \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$(4) \quad |C_0| \geq |B_0|, \quad |C_N| \geq |A_N|,$$

като поне едно от неравенствата (3) и (4) е строго, т. е. матрицата A има диагонално преобладаване. Тогав за алгоритъма на дясната прогонка са в сила съотношенията $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$, $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, гарантиращи коректност и устойчивост на метода.

Доказателство. Доказателството ще проведем по индукция. За $|\alpha_1|$ имаме

$$|\alpha_1| = \frac{|B_0|}{|C_0|} \leq 1.$$

Да допуснем, че

$|\alpha_i| \leq 1$ за някое $i \leq N-1$.

Ще докажем, че от това неравенство и от условията на теоремата следват неравенствата

$$|\alpha_{i+1}| \leq 1, \quad C_i - A_i \alpha_i \neq 0, \quad i \leq N-1.$$

Щом $|\alpha_i| \leq 1$, то

$$|C_i - A_i \alpha_i| \geq |C_i| - |A_i| |\alpha_i| \geq |A_i| + |B_i| - |A_i| |\alpha_i| = |B_i| + |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq |B_i| > 0.$$

Следователно $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$ при $i \leq N-1$.

Освен това

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - A_i \alpha_i|} \leq \frac{|B_i|}{|B_i|} = 1, \quad i \leq N-1.$$

За да покажем, че $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$, ще използваме изискването поне едно от неравенствата (3), (4) да е строго.

а) Ако $|C_N| > |A_N|$, то

$$|C_N - A_N \alpha_N| \geq |C_N| - |A_N| |\alpha_N| > |A_N| - |A_N| |\alpha_N| = |A_N| (1 - |\alpha_N|) \geq 0,$$

т. е. $|C_N - A_N \alpha_N| > 0$ и следователно $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$.

б) Ако $|C_0| > |B_0|$, то $|\alpha_1| < 1$ и тогава последователно получаваме $|\alpha_i| < 1, \quad \forall i = 2, 3, \dots, N$, $|C_N - A_N \alpha_N| \geq (1 - |\alpha_N|) |A_N| > 0$, ако $A_N \neq 0$.

Ако $A_N = 0$, то $|C_N| > 0$ и тогава попадаме в случая а).

в) Ако за някое $i_0, 1 \leq i_0 \leq N-1$ е в сила $|C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|$, то както и по-горе ще получим $|C_{i_0} - A_{i_0} \alpha_{i_0}| > |B_{i_0}|$, откъдето ще следва, че $|\alpha_{i_0+1}| < 1$. По-нататък по индукция $|\alpha_i| < 1$ за $i > i_0 + 1$ и следователно $|\alpha_N| < 1$, а от тук $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$.

§ 11. СЪЩЕСТВУВАНЕ И ЕДИНСТВЕНОСТ НА РЕШЕНИЕТО НА ДИФЕРЕНЧНА СХЕМА ЗА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ЗА ОДУ ОТ II РЕД. СХОДИМОСТ

Съществуване и единственост на решението

Диференчната схема, която апроксимира с грешка $O(h^2)$ задача (1) от § 9, записана подробно изглежда по следния начин:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = \varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ a_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = (\beta_1 + \frac{h}{2} d_0) y_0 - (\mu_1 - \frac{h}{2} \varphi_0), \\ -a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = (\beta_2 + \frac{h}{2} d_N) y_N - (\mu_2 - \frac{h}{2} \varphi_N), \end{cases}$$

където коефициентите a_i, d_i, φ_i удовлетворяват условията (16) от § 9 и освен това $a_i \geq p_0 > 0, d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$.

Записана във вид, удобен за прилагане на метода на прогонката, тя става

$$\begin{cases} - \left(\frac{a_1}{h} + \beta_1 + \frac{h}{2} d_0 \right) y_0 + \frac{a_1}{h} y_1 = -\mu_1 + \frac{h}{2} \varphi_0, \\ \frac{a_i}{h^2} y_{i-1} - \left(\frac{a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i}{h^2} + d_i \right) y_i + \frac{a_{i+1}}{h^2} y_{i+1} = \varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{a_N}{h} y_{N-1} - \left(\frac{a_N}{h} + \beta_2 + \frac{h}{2} d_N \right) y_N = -\mu_2 + \frac{h}{2} \varphi_N. \end{cases}$$

Да проверим условията на теоремата от § 10. За разглежданата диференчна схема имаме

$$C_0 = \frac{a_1}{h} + \beta_1 + \frac{h}{2} d_0 > 0, \quad B_0 = \frac{a_1}{h} > 0;$$

$$A_i = \frac{a_i}{h^2} > 0, \quad B_i = \frac{a_{i+1}}{h^2} > 0, \quad C_i = \frac{a_i}{h^2} + \frac{a_{i+1}}{h^2} + d_i > 0$$

и следователно $C_i \geq A_i + B_i$;

$$A_N = \frac{a_N}{h^2} > 0, \quad C_N = \frac{a_N}{h} + \beta_2 + \frac{h}{2} d_N > 0.$$

Тъй като или β_1 , или β_2 е положително число, то съответно $C_0 > B_0$ или $C_N > A_N$. Следователно диференчната схема (1) има, при това единствено решение.

Сходимость

Ще докажем сходимост на решението на диференчната схема за задача (10) от § 9, но при хомогенни гранични условия от първи род, т. е. за схемата

$$(2) \quad \begin{cases} y_{i-1} - (2 + q_i h^2) y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = y_N = 0, \end{cases}$$

като използваме формулите на прогонката.

За системата (2) те имат вида:

- 1) $\alpha_1 = \beta_1 = 0$,
- 2) $\alpha_{i+1} = \frac{1}{C_i - \alpha_i}$, $\beta_{i+1} = \frac{\beta_i - h^2 f_i}{C_i - \alpha_i} = (\beta_i - h^2 f_i) \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$,
- където $C_i = 2 + q_i h^2$,
- 3) $y_N = 0$,
- 4) $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$, $i = N-1, N-2, \dots, 1$.

Тъй като $|\alpha_i| \leq 1$, то имаме последователно

$$\begin{aligned}
 |y_i| &= |\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}| \leq |y_{i+1}| |\alpha_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq |y_{i+1}| + |\beta_{i+1}| \leq |y_{i+2}| + |\beta_{i+2}| + |\beta_{i+1}| \leq \dots \\
 &\leq |y_N| + \sum_{s=i+1}^N |\beta_s| = \sum_{s=i+1}^N |\beta_s| \leq \sum_{s=2}^N |\beta_s|,
 \end{aligned}$$

защото $|y_N| = 0$.

За $|\beta_s|$ имаме

$$\begin{aligned}
 |\beta_s| &= \left| \frac{\beta_{s-1} - h^2 f_{s-1}}{C_{s-1} - \alpha_{s-1}} \right| = |\beta_{s-1} - h^2 f_{s-1}| |\alpha_s| \leq (|\beta_{s-1}| + h^2 |f_{s-1}|) |\alpha_s| \leq \\
 &\leq |\beta_{s-2}| + h^2 |f_{s-2}| + h^2 |f_{s-1}| \leq \dots \leq |\beta_1| + h^2 \sum_{k=1}^{s-1} |f_k| = h^2 \sum_{k=1}^{s-1} |f_k|,
 \end{aligned}$$

защото $\beta_1 = 0$. Тогава

$$|y_i| \leq \sum_{s=2}^N |\beta_s| \leq \sum_{s=2}^N h^2 \sum_{k=1}^{s-1} |f_k| \leq \|f\|_C \sum_{s=2}^N (s-1) h^2 = \frac{\|f\|_C h^2 N(N-1)}{2} \leq \frac{\|f\|_C h^2 N^2}{2} \leq \frac{1}{2} \|f\|_C,$$

защото $hN = 1$. Следователно

$$(3) \quad \|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|f\|_C.$$

Да означим $z_i = u_i - y_i$. Мрежовата функция $z_h = \{z_i\}_{i=0}^N$ удовлетворява задачата

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} - q_i = \psi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ z_0 = z_N = 0. \end{cases}$$

Знаем, че $\psi_i = O(h^2)$ за $\forall i = 1, 2, \dots, N-1$. Като приложим към задача (4) оценката (3), получаваме

$$\|z\|_C = \|u - y\|_C \leq \frac{1}{2} \|\psi\|_C \leq \frac{1}{2} C_1 h^2,$$

т.е. сходимостта е от втори ред.

Глава 3. ВАРИАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ОПЕРАТОРНИ УРАВНЕНИЯ

§ 12. ПОСТАНОВКА НА ВАРИАЦИОННАТА ЗАДАЧА. МЕТОД НА РИТЦ. СХОДИМОСТ

Същността на вариационните методи за решаване на уравнения се състои в заменянето на задачата за намиране на решение на дадено уравнение със задачата за минимизиране на някакъв функционал.

Преди да изложим метода на Ритц, ще припомним някои основни понятия и факти от линейната алгебра и математическия анализ.

Нека H е непразно множество. Елементите му ще означаваме с малките букви на латинската азбука, а реалните числа – с малките букви от гръцката азбука.

Определение. Казваме, че H е **реално линейно векторно пространство**, ако на всеки два елемента $u, v \in H$ е съпоставен трети, наречен тяхна сума $u+v \in H$ и на всеки елемент u и всяко реално число λ е съпоставен елемент $\lambda u \in H$, така, че са изпълнени следните равенства:

- 1) $u + v = v + u$ (комутативност);
- 2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (асоциативност);
- 3) $\exists \vartheta \in H: u + \vartheta = \vartheta + u = u, \forall u \in H$ (съществуване на нулев елемент);
- 4) $\forall u \in H \quad \exists (-u) \in H: u + (-u) = (-u) + u = \vartheta$ (съществуване на противоположен елемент за всеки елемент от пространството);
- 5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (дистрибутивност);
- 6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ (дистрибутивност);
- 7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
- 8) $1 \cdot u = u$.

Определение. Казваме, че H е дефинирано **скаларно произведение** $(\cdot, \cdot)$, ако на всеки два елемента $u, v \in H$ е съпоставено реално число $(u, v) \in R$, такова че

- 1) $(u, v) = (v, u)$;
- 2) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$;
- 3) $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$;
- 4) $(u, u) \geq 0$, като равенството на нула е изпълнено само ако $u = \vartheta$.

Всяко скаларно произведение поражда **норма**, която се задава с формулата $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ и притежава следните свойства:

- 1) $\|u\| \geq 0$, като равенството на нула е изпълнено само ако $u = \vartheta$;
- 2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$;
- 3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Всяка норма поражда метрика (разстояние):

$$\rho(u, v) = \|u - v\|.$$

В сила е **неравенството на Коши-Буняковски-Шварц**:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Определение. Казваме, че пространството H е **безкрайномерно**, ако за всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ в H могат да се намерят n линейно независими елемента.

Определение. Казваме, че редицата $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ е **фундаментална**, ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ може да се намери число ν , такова, че щом $n, m > \nu$ да следва неравенството $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Както е известно, всяка сходяща редица е фундаментална. Обратното не винаги е вярно.

Определение. Казваме, че пространството H е **пълно**, ако всяка фундаментална редица от негови елементи е сходяща и границата ѝ е елемент от H .

Определение. Казваме, че H е **хилбертово пространство**, ако H е:

- 1) реално линейно векторно пространство с въведено в него скалярно произведение;
- 2) безкрайномерно;
- 3) пълно, относно метриката, породена от въведеното скалярно произведение.

Нека H е хилбертово пространство, а L е оператор, дефиниран в него:
 $L: H \rightarrow H$.

Определение. Казваме, че операторът L е **линеен**, ако:

- 1) $L(u + v) = Lu + Lv, \quad \forall u, v \in H$;
- 2) $L(\lambda u) = \lambda Lu, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ и } \forall u \in H$.

Определение. Казваме, че операторът L е **симетричен**, ако
 $(Lu, v) = (u, Lv)$ за $\forall u, v \in H$.

Определение. Казваме, че операторът L е **положителен**, ако
 $(Lu, u) \geq 0$ за $\forall u \in H$ и $(Lu, u) = 0$ само ако $u = 0$.

Определение. Казваме, че операторът L е **положително определен**, ако съществува константа $\gamma > 0$ такава, че

$$L(u, u) \geq \gamma(u, u), \text{ за } \forall u \in H.$$

Ще отбележим, че всеки положително определен оператор е положителен, но обратното не винаги е вярно.

Постановка на вариационната задача

Нека u и f са елементи на хилбертовото пространство H , а L е линеен оператор в H . Задачата за решаване на уравнението

$$(1) \quad Lu = f$$

е еквивалентна на задачата за намиране минимума на функционала $I(u)$, дефиниран в H , ако са изпълнени условията:

а) ако u_0 е решение на уравнение (1), т.е. $Lu_0 = f$, то

$$(2) \quad I(u_0) = \min_{u \in H} I(u);$$

б) ако u_0 минимизира $I(u)$ в H , т. е., изпълнено е (2), то $Lu_0 = f$.

На уравнението (1) могат да се съпоставят различни функционали.

Да разгледаме един елементарен пример. Нека u и f са реални числа, а L е умножение с реално число l , т.е. уравнението (1) е

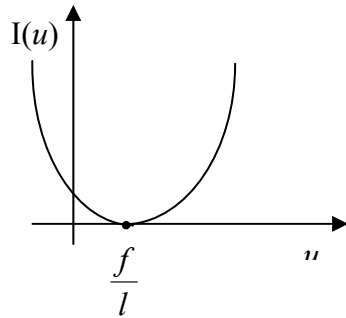
$$lu = f$$

с решение $u = \frac{f}{l}$. Възможни функционали са:

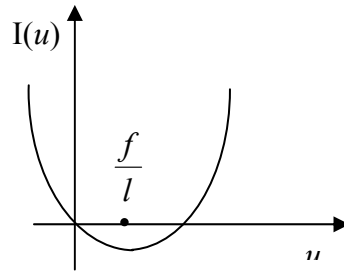
$$\text{а) } I(u) = |lu - f|^2 = l^2 u^2 - 2lu f + f^2$$

$$\text{б) } I(u) = lu^2 - 2fu, \text{ ако } l > 0.$$

Графики на (квадратните функции) $I(u)$ са показани на фиг.1, а), б).



фиг. 1 а)



фиг. 1 б)

В първия случай вариационният метод е методът на най-малките квадрати, във втория – методът на Ритц. Избирайки различни функционали и различни методи за приближеното им минимизиране (когато H е безкрайномерно, най-често минимумът може да се намери само приближено), получаваме различни вариационни методи.

Метод на Ритц

При метода на Ритц се минимизира функционала

$$(3) \quad I(u) = (Lu, u) - 2(f, u).$$

Теорема 1. Ако L е симетричен и положителен в H , то задача (1) е еквивалентна на задачата за минимизиране на функционала (3) в H .

Доказателство. Нека $Lu_0 = f$, т.е. u_0 е решение на (1). Ще покажем, че $I(u_0) \leq I(u)$ за $\forall u \in H$. Имаме

$$I(u_0) = (Lu_0, u_0) - 2(f, u_0) = (Lu_0, u_0) - 2(Lu_0, u_0) = -(Lu_0, u_0), \quad (\text{сравнете с фиг.1 б}).$$

$$\begin{aligned} I(u) &= (Lu, u) - 2(f, u) = (Lu, u) - 2(Lu_0, u) + (Lu_0, u_0) - (Lu_0, u_0) = \\ &= (Lu, u) - (Lu_0, u) - (Lu_0, u) + (Lu_0, u_0) + I(u_0) = \\ &= (L(u - u_0), u) - (Lu_0, u - u_0) + I(u_0) = (L(u - u_0), u - u_0) + I(u_0) \end{aligned}$$

$$(4) \quad I(u) - I(u_0) = (L(u - u_0), u - u_0) \geq 0,$$

понеже операторът L е положителен. Следователно, u_0 минимизира $I(u)$.

Обратно, нека $u_0 \in H$ и дава минимум на $I(u)$: $I(u_0) \leq I(u)$ за $\forall u \in H$. Нека α е произволно реално число, z е произволен елемент на H и нека $u = u_0 + \alpha z \in H$. Тогава $I(u) = I(u_0 + \alpha z) \geq I(u_0)$ за $\forall z \in H$ и произволно α . Но

$$I(u) = (L(u_0 + \alpha z), u_0 + \alpha z) - 2(f, u_0 + \alpha z) =$$

$$(Lu_0, u_0) + 2\alpha(Lu_0, z) + \alpha^2(Lz, z) - 2(f, u_0) - 2\alpha(f, z) = \\ I(u_0) + 2\alpha[(Lu_0, z) - (f, z)] + \alpha^2(Lz, z).$$

За да имаме $I(u) \geq I(u_0)$, трябва

$$\alpha^2(Lz, z) + 2\alpha[(Lu_0, z) - (f, z)] \geq 0, \text{ за } \forall \alpha \in R, \forall z \in H.$$

Поради произволността на α (положително, отрицателно, голямо, малко) това неравенство е изпълнено само ако

$$(5) \quad (Lu_0, z) = (f, z), \quad \forall z \in H.$$

Действително, нека:

а) $\alpha > 0$. Като разделим на α , получаваме

$$\alpha(Lz, z) + 2(Lu_0 - f, z) \geq 0, \text{ за } \forall \alpha > 0.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ имаме $(Lu_0 - f, z) \geq 0$.

б) $\alpha < 0$. Делим на α :

$$\alpha(Lz, z) + 2(Lu_0 - f, z) \leq 0, \text{ за } \forall \alpha < 0.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ имаме $(Lu_0 - f, z) \leq 0$.

Следователно $(Lu_0 - f, z) = 0$ за $\forall z \in H$, а значи и за $z = Lu_0 - f \in H$:

$$(Lu_0 - f, Lu_0 - f) = 0, \text{ т.е. } Lu_0 - f = 0.$$

Уравнение (5) се нарича уравнение на Галъоркин.

Метод на Ритц за приближено минимизиране на функционала на Ритц

Използвайки симетричността и положителността на оператора L , да дефинираме нови скалярно произведение и норма:

$$(u, v)_L = (Lu, v), \quad \|u\|_L = \sqrt{(Lu, u)}.$$

Хилбертовото пространство с така дефинираните скалярно произведение и норма се нарича *енергетично пространство* и се бележи с H_L . Наименованието идва от вариационното смятане, където (Lu, u) се нарича енергия на оператора L , а съответните скалярно произведение и норма – *енергетично скалярно произведение* и *енергетична норма*.

Нека в H_L е дадена линейно независима пълна система от функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$. Системата $\{\varphi_i\}$ се нарича пълна в H_L , ако за $\forall v \in H_L$ и за $\forall \varepsilon > 0$, съществува $n = n(\varepsilon)$ и числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такива, че

$$(L(v - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i), (v - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i)) = \left\| v - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_L^2 < \varepsilon,$$

т.е. ако всеки елемент v може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация на функциите от тази система.

Да означим с H_n крайномерното подпространство на H_L , породено от линейно независимите функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

$$H_n = \left\{ v_n : v_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\} \subset H_L.$$

Функциите $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ се наричат *базисни (координатни) функции*.

Методът на Ритц за приближено минимизиране на функционала на Ритц (3) се състои в това, че минимумът се търси в H_n вместо в H . Именно, функцията u_n , минимизираща $I(u)$ в H_n , се търси във вида

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i.$$

За определяне на коефициентите $a_i, i = \overline{1, n}$, пресмятаме $I(u_n)$:

$$\begin{aligned} I(u_n) &= (L \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i) - 2(f, \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j (L \varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=1}^n a_i (f, \varphi_i) = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Необходимото условие за минимум на $I(u_n)$ като функция на n променливи $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

т. е.

$$(6) \quad \sum_{j=1}^n a_j (L \varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Системата уравнения (6) (*система на Ритц*) има симетрична неособена матрица. Нейната детерминанта е детерминанта на Грам на линейно независимите функции $\varphi_i \in H_L, i = \overline{1, n}$. Следователно системата на Ритц има единствено решение $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$. Тогава

$$u_n^* = \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi_i$$

е такова, че

$$(7) \quad I(u_n^*) = \min_{u_n \in H_n} I(u_n).$$

Възниква въпросът – колко близко е u_n^* до u_0 ?

Сходимость на метода на Ритц

Сходимость в H_L . Ще получим оценка за $\|u_n^* - u_0\|_L$. За целта ще пресметнем първо $I(u_n^*) - I(u_0)$.

Нека $\varepsilon > 0$. Щом $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ е пълна система в H_L , то $\exists n = n(\varepsilon)$ и елемент $\bar{u}_n \in H_n$, приближаващ решението u_0 на уравнение (1) в H_n . По формула (4)

$$(8) \quad I(\bar{u}_n) - I(u_0) = (L(\bar{u}_n - u_0), \bar{u}_n - u_0) < \varepsilon.$$

Понеже u_n^* минимизира $I(u)$ в H_n , то

$$(9) \quad I(u_n^*) \leq I(\bar{u}_n).$$

От (9) и (8) получаваме

$$I(u_n^*) \leq I(\bar{u}_n) < I(u_0) + \varepsilon$$

т. е.,

$$I(u_n^*) - I(u_0) < \varepsilon,$$

и пак по (4)

$$(10) \quad I(u_n^*) - I(u_0) = (L(u_n^* - u_0), u_n^* - u_0) = \|u_n^* - u_0\|_L^2 < \varepsilon.$$

Следователно u_n^* клони към u_0 при $n \rightarrow \infty$ по норма на енергетичното пространство H_L .

Сходимость в H . За да докажем сходимость на метода на Ритц и в H , ще поставим още едно изискване към оператора L , а именно – да е положително определен. От (10) и положителната определеност на оператора L имаме:

$$I(u_n^*) - I(u_0) = (L(u_n^* - u_0), u_n^* - u_0) \geq \gamma \|u_n^* - u_0\|^2.$$

Следователно

$$\|u_n^* - u_0\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|u_n^* - u_0\|_L^2 < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Така доказахме следната:

Теорема 2. Нека редицата $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ от линейно независими функции е пълна система в H_L , а операторът L е симетричен и положително определен. Тогава методът на Ритц дава редица $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, която е сходяща в H към решението u_0 на уравнението (1):

$$\|u_n^* - u_0\| \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Разглежданията, които направихме, са за случая, когато дефиниционната област на оператора L е цялото хилбертово пространство H , т. е. $D(L) = H$. Обикновено обаче $D(L) \subset H$, $D(L) \neq H$. Понякога в $D(L)$ може да няма елемент, за който $I(u)$ достига минимума си, понеже често $D(L)$ не е затворено. Да се върнем на примера, който разгледахме.

Нека сега l и f са рационални числа, $l \in Q$, $l > 0$, $f \in Q$. Тогава решението $u = \frac{f}{l}$ също е рационално число: $u \in Q$. Обаче $I(u) = lu^2 - 2fu$ и за да търсим минимума на тази квадратна функция, трябва да я дефинираме в множеството R на реалните числа. Нещо повече, ако търсим минимума приближено, то приближената стойност на u може да не е рационално число. Затова в този случай трябва предварително да попълним множеството Q на рационалните числа до множеството R на реалните числа чрез границите на всевъзможните редици от рационални числа и тогава да търсим елемента u_n^* , който минимизира $I(u)$ в R ; ако $u_n^* \notin Q$, то той, съгласно теорията, ще бъде реално число, близко до рационалното число $\frac{f}{l}$. За случая на общото уравнение (1) схемата на разсъждения е следната:

- в $D(L) \subset H$ въвеждаме скалярно произведение $(u, v)_L = (Lu, v)$ и норма $\|u\|_L = \sqrt{(Lu, u)}$;
- попълваме $D(L)$ относно нормата $\|u\|_L$, т. е. получаваме H_L : $u \in H_L$, ако съществува редица $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $u_n \in D(L)$ за $\forall n$, такава, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_L = 0$;

Ако L е положително определен в $D(L)$, то

$$\|u\|^2 = (u, u) \leq \frac{1}{\gamma} (Lu, u) = \frac{1}{\gamma} \|u\|_L^2$$

и следователно $H_L \subset H$.

- в така полученото *енергетично пространство* H_L (по метода на Ритц в $H_n \subset H_L$) минимизираме функционала $I(u)$. Ако минимизиращата функция $u_n^* \notin D(L)$, то тя все пак ще бъде достатъчно близко до $u_0 \in D(L)$.

§ 13. МЕТОД НА РИТЦ ЗА ГРАНИЧНАТА ЗАДАЧА ЗА ОДУ ОТ II РЕД

Еквивалентна вариационна задача

Търси се функция $u = u(x) \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad Lu \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

и следните гранични условия

$$(2) \quad u(0) = \gamma_1, \quad p(1)u'(1) + \beta u(1) = \gamma_2.$$

Нека $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ в $[0, 1]$, $\beta \geq 0$, $p(x) \in C^1[0, 1]$, $q(x)$, $f(x) \in C[0, 1]$. Следователно операторът L е дефиниран в областта

$$D(L) = \{v \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1], v(0) = \gamma_1, p(1)v'(1) + \beta v(1) = \gamma_2\}.$$

$$\text{Нека } H = L_2(0, 1) = \left\{ v : \int_0^1 v^2 dx < \infty \right\}, \quad (u, v) = \int_0^1 uv dx, \quad \|u\|^2 = \int_0^1 u^2 dx.$$

Нека $u, v \in D(L)$ и да проверим дали L е симетричен:

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_0^1 (-(pu')' + qu)v dx = \int_0^1 (pu'v' + quv) dx - pu'v|_0^1 = \\ &= a(u, v) - p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0) = \\ &= a(u, v) - v(1)[- \beta u(1) + \gamma_2] + p(0)u'(0)v(0) = \\ &= a(u, v) + \beta u(1)v(1) - \gamma_2 v(1) + p(0)u'(0)\gamma_1, \end{aligned}$$

$$\text{където } a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv) dx.$$

Ясно е, че (Lu, v) може да бъде равно на (u, Lv) само ако $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Следователно операторът L е симетричен в областта

$$(3) \quad \tilde{D}(L) = \{v \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1], v(0) = 0, p(1)v'(1) + \beta v(1) = 0\}.$$

В $\tilde{D}(L)$ имаме

$$(4) \quad (Lu, v) = a(u, v) + \beta u(1)v(1) = (u, Lv),$$

$$(5) \quad (Lu, u) = a(u, u) + \beta u^2(1) = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2) dx + \beta u^2(1) \geq 0,$$

при това $(Lu, u) = 0$ само ако $u' \equiv 0$ (понеже $q(x) \geq 0$, $\beta \geq 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$). Тогава $u \equiv \text{const}$ и понеже в $\tilde{D}(L)$ имаме $u(0) = 0$, то $u \equiv 0$. Следователно операторът L е и положителен в $\tilde{D}(L)$.

Съгласно теорията задачата (1), (2'):

$$(2') \quad u(0) = 0, \quad p(1)u'(1) + \beta u(1) = 0$$

е еквивалентна на задачата за минимизиране на *функционала на Ритц*

$$(6) \quad I(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2) dx + \beta u^2(1) - 2 \int_0^1 f u dx.$$

Аналогично се доказва, че операторът L е симетричен и положителен и в $\tilde{D}_1(L) = \{v \in C^2(0,1) \cap C[0,1], v(0) = 0, v(1) = 0\}$.

Къде ще търсим минимума на функционала (6)?

Очевидно $\tilde{D}(L) \subset L_2(0,1) = H$. Ще следваме схемата, описана в § 12, като за простота ще разгледаме случая $\beta = 0$. Тогава:

1) В $\tilde{D}(L)$ въвеждаме скалярно произведение $(u, v)_L = (Lu, v) = a(u, v)$ и норма $\|u\|_L^2 = (Lu, u) = a(u, u)$,

$$(7) \quad \|u\|_L^2 = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2) dx.$$

2) Попълваме $\tilde{D}(L)$ с границите (в смисъла на (7)) на всевъзможните редици $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ от функции $u_n \in \tilde{D}(L)$. Така получаваме пространството H_L .

3) Търсим минимума на $I(u)$ в $H_n \subset H_L$. За да конструираме H_n , да изясним най-напред структурата на H_L .

а) Нормата (7) е дефинирана за функции, които заедно с първите си (обобщени) производни са сумируеми в квадрат. Следователно при избора на $\varphi_i(x) \in H_L$ можем да се възползваме от тези по-ниски изисквания за гладкост в H_L : $v(x) \in L_2(0,1)$, $v'(x) \in L_2(0,1)$.

б) Какви гранични условия удовлетворяват функциите $v \in H_L$?

б*) Ще покажем, че ако $v \in H_L$, то $v(0) = 0$. Действително, щом $v \in H_L$, то съществува редица $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $v_k(x) \in \tilde{D}(L)$, че $\|v - v_k\|_L \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Нека $v_m(x)$ и $v_n(x)$ са елементи на тази редица: $v_m(x), v_n(x) \in \tilde{D}(L)$, следователно $v_m(0) = v_n(0) = 0$. Образуваме разликата $v_n(x) - v_m(x)$. За нея имаме

$$(8) \quad |v_n(x) - v_m(x)|^2 = \left| \int_0^x (v'_n(t) - v'_m(t)) dt \right|^2 \leq \int_0^x |v'_n(t) - v'_m(t)|^2 dt \leq \\ \leq \frac{1}{p_0} \int_0^1 [p(t)|v'_n(t) - v'_m(t)|^2 + q(t)(v_n(t) - v_m(t))^2] dt = \frac{1}{p_0} \|v_n(t) - v_m(t)\|_L^2.$$

Тъй като редицата $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ е сходяща в H_L , то $\|v_n(t) - v_m(t)\|_L^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, което означава и равномерна сходимост на $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ съгласно (8). Следователно нейната границата $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x)$ е непрекъсната функция и $v(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(0) = 0$.

б**) Ако $v \in H_L$, то не винаги $v'(1) = 0$. Ще го покажем с пример. Да разгледаме редицата

$$v_k(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{k}, \\ \frac{k^2}{3}(1-x)^3 - k(1-x)^2 + 1 - \frac{1}{3k}, & 1 - \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно $v_k(x) \in \tilde{D}(L)$, границата на $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в H_L е $v(x) = x$:

$$\|v_k(x) - v(x)\|_L^2 = \int_0^1 [(v'_k(x) - v'(x))^2 + (v_k(x) - v(x))^2] dx \leq \frac{M}{k}, \quad M = \text{const},$$

но $v'(1) = 1 \neq v'_k(1) = 0$.

И така, при граничен преход в H_L граничното условие от първи ред се запазва, а това от втори ред – не.

Гранични условия, които се запазват при граничния преход в H_L , се наричат **главни гранични условия**, тези, които не се запазват – **естествени**.

Ще покажем, че ако минимизиращата функция $u(x) \in C^2(0, 1) \cap C^1[0, 1]$, тя удовлетворява и естественото гранично условие.

Нека ε е произволно число, $v(x) \in H_L$. Тогава

$$\begin{aligned} I(u) &\leq I(u + \varepsilon v) = \int_0^1 (p(u' + \varepsilon v')^2 + q(u + \varepsilon v)^2) dx - 2 \int_0^1 f(u + \varepsilon v) dx = \\ &= I(u) + 2\varepsilon \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx + \varepsilon^2 \int_0^1 (pv^2 + qv^2) dx. \end{aligned}$$

Но ε е произволно, следователно

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx = \int_0^1 (-(pu')' + qu - f)v dx + p(1)u'(1)v(1) - p(0)u'(0)v(0) = \\ &= p(1)u'(1)v(1). \end{aligned}$$

Понеже $p(1) > 0$, а на $v(1)$ не се налагат никакви условия, то остава $u'(1) = 0$, т.е. минимизиращата функция удовлетворява и естественото гранично условие.

Вече е ясно как да избираме функциите $\varphi_i(x) \in H_n \subset H_L$:

- $\varphi_i(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi'_i(x) \in L_2(0, 1)$;
- $\varphi_i(x)$ трябва да удовлетворяват само главните гранични условия.

Същите свойства ще имат и елементите $u_n \in H_n$

$$(9) \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x).$$

Определяне на коефициентите a_i

Заместваме (9) във функционала (6)

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_0^1 \left[p(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi'_i(x) \right)^2 + q(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \right)^2 \right] dx - 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) dx = \\ &= \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

От условията $\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$ получаваме системата на Ритц:

$$(10) \quad \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 (p(x) \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) + q(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x)) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, n},$$

или записано компактно

$$(11) \quad K a = F,$$

където

$$(12) \quad K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad k_{ij} = \int_0^1 (p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)) dx,$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T,$$

$$(13) \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad f_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) dx.$$

Избор на функциите $\varphi_i(x)$

1. В класическия метод на Ритц функциите $\varphi_i(x)$ са алгебрични или тригонометрични полиноми. Ако операторът L е с дефиниционна област $\tilde{D}(L)$, то можем да изберем $\varphi_i(x) = x^i, i = \overline{1, n}$. Нека в уравнението (1) имаме $p(x) = \text{const} = p > 0, q(x) = \text{const}, q \geq 0$.

Тогава

$$k_{ij} = \int_0^1 (pix^{i-1}jx^{j-1} + qx^i x^j) dx = \frac{pij}{i+j-1} + \frac{q}{i+j+1}.$$

Матрицата $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$ на системата на Ритц е известната матрица на Хилберт, която е лошо обусловена. Причината е, че макар и теоретично линейно независими, функциите $\varphi_i(x) = x^i, i = \overline{1, n}$ практически са почти линейно зависими при големи n . Затова този избор е неудачен.

Ако операторът L е с дефиниционна област $\tilde{D}_1(L)$, то можем да изберем $\varphi_i(x) = x^i(1-x), i = \overline{1, n}$.

Забележка. Ако интервалът, в който разглеждаме задачата (1), (2), е $[a, b]$, то $\varphi_i(x) = (x-a)^i$ за $\tilde{D}(L)$ и $\varphi_i(x) = (x-a)^i(b-x)$ за $\tilde{D}_1(L)$.

2. Нека $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$ са първите n собствени функции на оператора L , а λ_i - съответните им собствени стойности:

$$L\varphi_i(x) = \lambda_i\varphi_i(x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\text{при това нека } (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\text{Тогава } (L\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Следователно системата на Ритц е:

$$\lambda_i a_i = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, n},$$

$$a_i = \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Задачата за намиране на собствени стойности и собствени функции на оператора L обаче е поне толкова трудна, колкото и задачата за решаване на уравнението $Lu = f$.

Разгледаните два случая са в известен смисъл крайни – най-лошият и най-добрият. В следващия параграф е изложен трети начин за избор на *базисните* функции, който съчетава добрите страни на тези два подхода.

Задачи

1. зад. Да се реши по метода на Ритц с две координатни функции, които са алгебрични полиноми, задачата

$$\begin{cases} u''(x) = -6x, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. За тази задача

$$Lu \equiv -u''(x) = 6x, \quad D(L) = \{ u \in C^2(0,1) \cap C[0,1], u(0) = 0, u(1) = 0 \} \subset L_2(0,1).$$

Тъй като в случая $p(x) \equiv 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$, то съгласно теорията, операторът L е симетричен, положителен и положително определен в $D(L)$ и

$$(Lu, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Тогава задачата се свежда до минимизирането на функционала

$$I(u) = \int_0^1 \left[(u'(x))^2 - 12xu(x) \right] dx$$

в

$$H_L = \{ u : u, u' \in L_2(0,1), u(0) = u(1) = 0 \}.$$

Приближено решение на тази минимизационна задача се търси в

$$H_2 = \{ u_2 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, a_i \in R \},$$

където

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \quad \varphi_2(x) = x^2(1-x) \quad \text{и} \quad \varphi_1'(x) = 1-2x, \quad \varphi_2'(x) = 2x-3x^2.$$

Коефициентите a_1 и a_2 се намират от системата

$$\begin{cases} a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_2) = (f, \varphi_2) \end{cases}.$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (\varphi_1'(x))^2 dx = \int_0^1 (1-2x)^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$(L\varphi_2, \varphi_1) = (L\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 (1-2x)(2x-3x^2)dx = \frac{1}{6};$$

$$(L\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 (\varphi_2'(x))^2 dx = \int_0^1 (2x-3x^2)^2 dx = \frac{2}{15};$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 6x \cdot x(1-x)dx = \frac{1}{2};$$

$$(f, \varphi_2) = \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 6x \cdot x^2(1-x)dx = \frac{3}{10};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{6}a_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}a_1 + \frac{2}{15}a_2 = \frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$$

и следователно $u_2 = 1 \cdot x(1-x) + 1 \cdot x^2(1-x) = x - x^3$.

2. зад. Да се реши по метода на Ритц с три координатни функции, които са алгебрични полиноми, задачата

$$\begin{cases} u''(x) = -(1+x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. За тази задача

$$Lu \equiv -u''(x) = (1+x), \quad D(L) = \left\{ u \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1], u(0) = 0, u'(1) = 0 \right\} \subset L_2(0,1).$$

Тъй като и в този случай $p(x) \equiv 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$, то съгласно теорията, операторът L е симетричен, положителен и положително определен в $D(L)$ и

$$(Lu, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Тогава задачата се свежда до минимизирането на функционала

$$I(u) = \int_0^1 \left[(u'(x))^2 - 2(1+x)u(x) \right] dx$$

в

$$H_L = \{u : u, u' \in L_2(0,1), u(0) = 0\}.$$

Приближено решение на минимизационната задача се търси в

$$H_3 = \{u_3 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3, a_i \in R\},$$

където

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3 \quad \text{и} \quad \varphi_1'(x) = 1, \quad \varphi_2'(x) = 2x, \quad \varphi_3'(x) = 3x^2.$$

Коефициентите a_1, a_2 и a_3 се намират от системата

$$\begin{cases} a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) + a_3(L\varphi_3, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_2) + a_3(L\varphi_3, \varphi_2) = (f, \varphi_2) \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_3) + a_2(L\varphi_2, \varphi_3) + a_3(L\varphi_3, \varphi_3) = (f, \varphi_3) \end{cases}$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (\varphi_1'(x))^2 dx = \int_0^1 1 dx = 1;$$

$$(L\varphi_2, \varphi_1) = (L\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 1 \cdot 2x dx = 1/3;$$

$$(L\varphi_3, \varphi_1) = (L\varphi_1, \varphi_3) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_3'(x)dx = \int_0^1 1 \cdot 3x^2 dx = 1;$$

$$(L\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 (\varphi_2'(x))^2 dx = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3};$$

$$(L\varphi_3, \varphi_2) = (L\varphi_2, \varphi_3) = \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_3'(x)dx = \int_0^1 2x \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{2};$$

$$(L\varphi_3, \varphi_3) = \int_0^1 (\varphi_3'(x))^2 dx = \int_0^1 9x^4 dx = \frac{9}{5};$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x) \varphi_1(x) dx = \int_0^1 (1+x).x dx = \frac{5}{6};$$

$$(f, \varphi_2) = \int_0^1 f(x) \varphi_2(x) dx = \int_0^1 (1+x).x^2 dx = \frac{7}{12};$$

$$(f, \varphi_3) = \int_0^1 f(x) \varphi_3(x) dx = \int_0^1 (1+x).x^3 dx = \frac{9}{20};$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{5}{6} \\ a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{3}{2}a_3 = \frac{7}{12} \\ a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{9}{5}a_3 = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}$$

и следователно $u_2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

3 зад. Задачата

$$\begin{cases} -p(x)u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = 0, & u(b) = 0, \end{cases}$$

където $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, дефинира оператора

$$Lu \equiv -p(x)u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x)$$

с дефиниционна област множеството

$$D(L) = \{ u \in C^2(a, b) \cap C[a, b], u(a) = 0, u(b) = 0 \} \subset L_2(0, 1).$$

Да се покаже, че в $D(L)$ операторът L не е симетричен.

Забележка. Ако умножим диференциалното уравнение от зад. 3 с функцията

$$R(x) = \frac{1}{p(x)} e^{\int \frac{r(x)}{p(x)} dx} > 0,$$

ще получим оператор, който е симетричен и освен това положително определен. Наистина, след умножаване на диференциалното уравнение с функцията $R(x)$, получаваме

$$-R(x)p(x)u''(x) + R(x)r(x)u'(x) + R(x)q(x)u(x) = R(x)f(x).$$

Като отчетем, че

$$R(x)p(x) = e^{\int \frac{r(x)}{p(x)} dx}$$

и следователно

$$(R(x)p(x))' = -e^{\int \frac{r(x)}{p(x)} dx} \frac{r(x)}{p(x)} = -R(x)r(x),$$

получаваме

$$-R(x)p(x)u''(x) - (R(x)p(x))' u'(x) + R(x)q(x)u(x) = R(x)f(x),$$

или още

$$-\left(R(x)p(x)u'(x)\right)' + R(x)q(x)u(x) = R(x)f(x).$$

Последното уравнение дефинира оператора

$$\bar{L}u \equiv -\left(R(x)p(x)u'(x)\right)' + R(x)q(x)u(x),$$

който е симетричен и положително определен.

4 зад. Задачата

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = x, & x \in (1, 2), \\ u(1) = 1, & u(2) = 2 \end{cases}$$

да се приведе във вид, удобен за прилагане на метода на Ритц.

Решение. 1) Граничните условия не са хомогенни. Можем да ги направим хомогенни по следния начин. Търсим линейна функция $u^*(x) = ax + b$, която да удовлетворява граничните условия. Тази функция очевидно е $u^*(x) = x$. Правим смяната $\bar{u}(x) = u(x) - u^*(x) = u(x) - x$ и тогава функцията $\bar{u}(x)$ ще удовлетворява хомогенни гранични условия. След смяната на функциите получаваме задачата

$$\begin{cases} \bar{u}''(x) + \bar{u}'(x) = x - 1, & x \in (1, 2), \\ \bar{u}(1) = 0, & \bar{u}(2) = 0 \end{cases}$$

или още

$$\begin{cases} -\bar{u}''(x) - \bar{u}'(x) = 1 - x, & x \in (1, 2), \\ \bar{u}(1) = 0, & \bar{u}(2) = 0. \end{cases}$$

2) Последната задача не дефинира симетричен оператор. Ако умножим диференциалното уравнение с функцията $R(x) = \frac{1}{1} e^{-\int \frac{1}{1} dx} = e^x$ ще получим задачата

$$\begin{cases} -\left(e^x \bar{u}'(x)\right)' = e^x(1 - x), & x \in (1, 2), \\ \bar{u}(1) = 0, & \bar{u}(2) = 0, \end{cases}$$

която вече дефинира симетричен и положително определен оператор и към която можем да приложим метода на Ритц.

5 зад. Да се реши по метода на Ритц с една координатна функция, която е алгебричен полином задачата

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) - u(x) = -1, & x \in (0, 1), \\ u(0) = -1, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. Като следваме зад. 4, най-напред ще приведем задачата във вид, удобен за прилагане на метода на Ритц. За функцията $u^*(x)$ получаваме

$$u^*(x) = x - 1.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u(x) - x + 1, \\ u(x) &= \bar{u}(x) + x - 1, \end{aligned}$$

и след смяната на функциите получаваме задачата

$$\begin{cases} -\bar{u}''(x) + \bar{u}'(x) + \bar{u}(x) = 1 - x, & x \in (0, 1), \\ \bar{u}(0) = 0, & \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Функцията $R(x)$ в случая има вида $R(x) = \frac{1}{1} e^{-\int \frac{1}{1} dx} = e^{-x}$ и задачата, към която методът на Ритц е приложим, приема вида

$$\begin{cases} -\left(e^{-x}\bar{u}'(x)\right)' + e^{-x}\bar{u}(x) = e^{-x}(1-x), & x \in (0,1), \\ \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

За тази задача

$$L\bar{u} \equiv -\left(e^{-x}\bar{u}'(x)\right)' + e^{-x}\bar{u}(x), \quad D(L) = \left\{ \bar{u} \in C^2(0,1) \cap C[0,1], \bar{u}(0) = 0, \bar{u}(1) = 0 \right\}.$$

В случая $p(x) = e^{-x} > 0$, $q(x) = e^{-x} > 0$, операторът L е симетричен и положително определен в $D(L)$ и

$$(L\bar{u}, \bar{v}) = \int_0^1 \left[e^{-x}\bar{u}'(x)\bar{v}'(x) + e^{-x}\bar{u}(x)\bar{v}(x) \right] dx.$$

Функционалът $I(\bar{u})$ е

$$I(\bar{u}) = \int_0^1 \left[e^{-x}(\bar{u}'(x))^2 + e^{-x}(\bar{u}(x))^2 - 2e^{-x}(1-x)\bar{u}(x) \right] dx,$$

а

$$H_L = \{ \bar{u} : \bar{u}, \bar{u}' \in L_2(0,1), \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0 \}.$$

Приближено решение на минимизационната задача се търси в

$$H_1 = \{ \bar{u}_1 = a_1 \varphi_1, a_1 \in R \},$$

където

$$\varphi_1(x) = x(1-x) \quad \text{и} \quad \varphi_1'(x) = 1-2x.$$

Коефициентът a_1 се намира от уравнението

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_1) = (f, \varphi_1).$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 \left[e^{-x}(\varphi_1'(x))^2 + e^{-x}(\varphi_1(x))^2 \right] dx = \int_0^1 \left[e^{-x}(1-2x)^2 + e^{-x}(x-x^2)^2 \right] dx = -51e^{-1} + 19;$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 e^{-x}(1-x).x(1-x)dx = -8e^{-1} + 3.$$

Тогава

$$a_1 = \frac{3e-8}{19e-51}$$

и

$$\bar{u}_1 = \frac{3e-8}{19e-51} \varphi_1(x) = \frac{3e-8}{19e-51} x(1-x).$$

Като отчетем смяната на функциите получаваме, че

$$u_1 = \bar{u}_1 + u^* = \bar{u}_1 + x - 1 = \frac{3e-8}{19e-51} x(1-x) + x - 1.$$

§ 14. МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ. ЛИНЕЙНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

Методът на крайните елементи (МКЕ) предполага специален избор на функциите $\varphi_i(x)$ от пълната система линейно независими функции в H_L . В зависимост от този избор се дискретизира и областта, в която се търси решението на изходната задача $Lu = f$. Изборът на функциите $\varphi_i(x)$ съчетава достоинства на двата разгледани подхода: $\varphi_i(x)$ са по части *полиноми*, при това от *ниска степен*, с носители, които са много по-малки от областта, в която се търси решението. Това осигурява матрица на метода на Ритц, която има много нулеви елементи, специална структура и е по-добре обусловена.

Най-общата идея на МКЕ е следната.

Разделяме областта, в която търсим решението, на достатъчно малки подобласти, така че във всяка от тях решението да се апроксимира достатъчно добре с полиноми от ниска степен (първа, втора, трета). Глобалната апроксимираща функция се търси като минимизираща функция на функционала на Ритц.

Ще изложим идеята на МКЕ върху граничната задача

$$(1) \quad Lu \equiv -(p u')' + q u = f, \quad 0 < x < 1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0,$$

$$(2) \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

За да можем да извършим пресмятанията точно и да получим системата на Ритц в явен вид, ще положим $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 1$:

$$(3) \quad Lu \equiv -u'' + u = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

1. Разделяме интервала $[0,1]$ на подинтервали (елементи) с дължина h :

$e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $x_i - x_{i-1} = h$, $h = 1/n$. В общия случай елементите могат да бъдат с различни дължини $h_i = x_i - x_{i-1}$.

2. В случая на линейни *елементи* избираме функциите $\varphi_i(x)$ по следния начин (вж. рис. 1):

$$(4) \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in e_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in e_{i+1}, \\ 0, & x \notin e_i \cup e_{i+1} \end{cases}, \quad \varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in e_i \\ -\frac{1}{h}, & x \in e_{i+1} \\ 0, & x \notin e_i \cup e_{i+1} \end{cases}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$(5) \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h}, & x \in e_n \\ 0, & x \notin e_n \end{cases}.$$

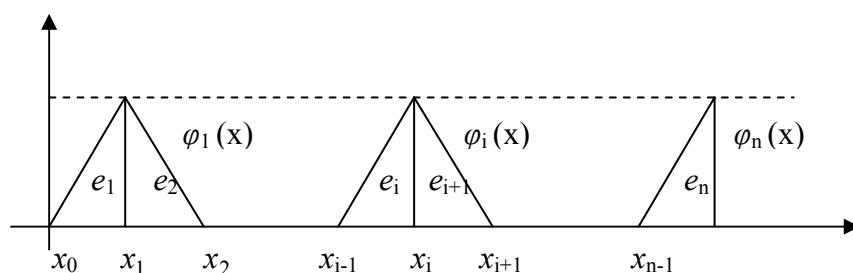


Рис. 1

Функциите $\varphi_i(x)$ са *линейни* там, където са различни от нула. Те са *непрекъснати* функции: $\varphi_i(x) \in C[0,1]$ и всички те удовлетворяват *главното гранично условие* $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. За $i = 1, 2, \dots, n-1$ функциите $\varphi_i(x)$ са различни от нула в интервал с дължина $2h$, само $\varphi_n(x)$ е различна от нула в интервал с дължина h . Освен това:

$$(6) \quad \text{а) } \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\text{б) } \varphi_i(x) \in L_2(0,1), \varphi'_i(x) \in L_2(0,1).$$

Следователно функциите $\varphi_i(x) \in H_L(0,1)$. Ще покажем, че те са *линейно независими*.

Ако допуснем противното, т. е., че $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x) = 0$ за $\forall x \in [0,1]$ и поне един от коефициентите α_j , например α_i е различен от нула, то получаваме очевидно противоречие (вж.(6)):

$$1 = \varphi_i(x_i) = \sum_{j \neq i} \beta_j \varphi_j(x_i) = 0, \quad \beta_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}.$$

Може да се докаже, че системата $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ е и пълна в $H_L(0,1)$.

3. Съгласно метода на Ритц ще търсим приближеното решение на задача (3) във вида

$$(7) \quad u^h(x) \equiv u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x).$$

В (7) сме използвали обичайното за МКЕ означение $u^h(x)$ за приближеното решение. От свойство (6) на $\varphi_i(x)$ следва

$$(8) \quad u^h(x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = a_j, \quad j = \overline{1, n},$$

т.е. коефициентите a_j са *стойностите на търсеното приближение във възлите x_j* на крайните елементи.

4. Съгласно формула (10) от § 13 системата уравнения на метода на Ритц е

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 (\varphi'_j \varphi'_i + \varphi_j \varphi_i) dx = \int_0^1 f \varphi_i dx, \quad i = \overline{1, n}$$

(положили сме $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 1$)

или още

$$(10) \quad \sum_{j=1}^n k_{ij} a_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad Ka = F.$$

Да отбележим, че съгласно дефиницията (4), (5) на $\varphi_i(x)$ ще имаме

$$(11) \quad k_{ij} = 0 \quad \text{за } |i - j| > 1.$$

Следователно, ще трябва да пресметнем само $k_{ii}, k_{i,i+1}$ (за $i = \overline{1, n-1}$) и k_{nn} :

$$(12) \quad k_{ii} = \int_0^1 (\varphi_i'^2 + \varphi_i^2) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h} dx =$$

$$= \frac{2h}{h^2} + \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right) = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3},$$

$$(13) \quad k_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)}{h} \frac{(x - x_i)}{h} dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6},$$

$$(14) \quad k_{nn} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{(x - x_{n-1})^2}{h^2} dx = \frac{1}{h} + \frac{h}{3}.$$

За пресмятането на $\int_0^1 f \varphi_i dx$ при произволна функция $f(x)$ могат да се използват квадратурни формули – съставната формула на трапеците, на средните правоъгълници и т. н. По формулата на трапеците получаваме

$$(15) \quad \int_0^1 f \varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx = \frac{f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1}) + f(x_i)\varphi_i(x_i)}{2} h +$$

$$+ \frac{f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1})}{2} h = f(x_i)h, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \int_0^1 f \varphi_n dx = \frac{h}{2} f(x_n).$$

Системата на Ритц в този случай е:

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\frac{2}{h} + \frac{2h}{3} \right) a_1 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) a_2 = h f(x_1) \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) a_{i-1} + \left(\frac{2}{h} + \frac{2h}{3} \right) a_i + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) a_{i+1} = h f(x_i), \quad i = \overline{2, n-1} \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) a_{n-1} + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) a_n = \frac{h}{2} f(x_n) \end{cases}$$

Ще я запишем в следния вид (въвели сме означенията : $a_i = u^h(x_i) = y_i, i = \overline{1, n}$, $a_0 = u^h(x_0) = y_0 = u(x_0) = 0$):

$$\begin{cases} -\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + \frac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = f(x_1), \\ -\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{1}{6}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = f(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{6}(2y_n + y_{n-1}) = f(x_n) \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Това е система диференчни уравнения, апроксимираща задачата (3) с грешка $O(h^2)$. Покажете го!

Задачи

1 зад. За задачата

$$\begin{cases} -u''(x) = x, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0, & u(1) = 0 \end{cases},$$

като се използват линейни крайни елементи, да се построи системата на Ритц.

Решение. Тъй като в случая и двете условия са главни и функциите от H_L трябва да ги удовлетворяват, координатните функции (виж рис. 1) ще бъдат $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$, а $u^h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varphi_i(x)$. Освен това, $a_0 = 0, a_n = 0$. Системата на метода на Ритц ще бъде

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \int_0^1 (\varphi_j' \varphi_i') dx = \int_0^1 f \varphi_i dx, \quad i = \overline{1, n-1}$$

или още

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} a_j = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Като вземем предвид пресмятанията от (12)-(13), получаваме :

$$\begin{aligned} k_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i'^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{2}{h}; \\ k_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Ще пресметнем точно $f_i = \int_0^1 f \varphi_i dx, i = \overline{1, n-1}$. Имаме

$$\begin{aligned} (f, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x \frac{x - x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \frac{x_{i+1} - x}{h} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x(x - x_{i-1}) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x(x_{i+1} - x) dx = \\ &= \frac{1}{2h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} x d(x - x_{i-1})^2 - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x d(x_{i+1} - x)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2h} \left[x(x - x_{i-1})^2 \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 dx - x(x_{i+1} - x)^2 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 dx \right] = hx_i. \end{aligned}$$

Тогава системата на Ритц приема вида

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ -\frac{1}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) = x_i, \quad 1, 2, \dots, n-1. \\ a_n = 0 \end{cases}$$

§ 15. ЕДНОМЕРНИ ЛАГРАНЖЕВИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ. ТЕХНИКА НА ПРЕСМЯТАНИЯТА

Търсим функция $u = u(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$, която удовлетворява задачата

$$(1) \quad Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$(2) \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

при предположение, че $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $p(x) \in C^1[0,1]$, $q(x), f(x) \in C[0,1]$.

Както вече показахме, в областта

$$D(L) = \{v \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1], \quad v(0) = 0, \quad v'(1) = 0\}$$

операторът L е симетричен и положително определен и следователно задачата (1), (2) се свежда до задачата за минимизиране на функционала на Ритц

$$I(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2) dx - 2 \int_0^1 fu dx.$$

1. Лагранжеви елементи от ред m .

Търсим минимума на функционала $I(u)$ в крайномерното пространство S^h , чиито елементи v^h са на части полиноми от степен m , $m = 1, 2, 3, \dots, p$.

Разделяме интервала $[0,1]$ на елементи (подинтервали) $e_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, като $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ са възлите на разделянето, а $h = x_i - x_{i-1}$ е размерът на елементите. Представяме интегралите, участващи във функционала на Ритц, като сума от интеграли върху всеки елемент e_i :

$$\begin{aligned} I(v^h) &= \int_0^1 \left[p(x) (v^h(x))'^2 + q(x) (v^h(x))^2 \right] dx - 2 \int_0^1 f(x) v^h(x) dx = \\ &= \sum_{e_i} \int_{e_i} \left[p(x) (v^h(x))'^2 + q(x) (v^h(x))^2 \right] dx - 2 \sum_{e_i} \int_{e_i} f(x) v^h(x) dx. \end{aligned}$$

Във всеки елемент e_i функциите v^h са полиноми от степен m , следователно $v_{e_i}^h \in P_m(x)$. При $m = 1$ говорим за линейни елементи, при $m = 2$ – за квадратични, при $m = 3$ – за кубични и т. н. Двата възела (краищата) на елемента са достатъчни за еднозначното определяне на полином от първа степен по стойностите му в тези възли. За еднозначно определяне на полином от втора степен са необходими стойностите му в три точки, затова при квадратичните елементи добавяме по един възел в средата на всеки елемент. Аналогично при кубичните елементи добавяме по два възела във всеки елемент (на разстояния $h/3$ и $2h/3$ от левия му край).

Да означим с $q_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ търсените приближени стойности на решението във възлите на един елемент, а с $Q_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$, търсените приближени стойности на решението в целия интервал $[0,1]$ – това са така наречените глобални възлови неизвестни. Ясно е, че $N = nm$.

Забележка. Условието $u(0) = 0$ означава, че $Q_0 = 0$. При алгоритмичната реализация на МКЕ забравяме за това условие и причисляваме Q_0 към неизвестните. В получената глобална система уравнения налагаме допълнително това условие (виж 3.2). Тази процедура е абсолютно наложителна в многомерния случай (защо?).

За да унифицираме пресмятанията, преобразуваме всеки елемент e_i в стандартния елемент $E = [0,1]$ чрез преобразованието $x(t) = x_{i-1} + th$, $0 \leq t \leq 1$.

Разглеждаме $v^h(x)$ като функция на t : $v^h = v^h(x(t)) = \tilde{v}^h(t)$. Понеже във всеки елемент тя е полином от степен m , можем да я представим във вида

$$\tilde{v}_{e_i}^h(t) = P(t)b,$$

където

$$P(t) = (1, t, t^2, \dots, t^m), \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_m)^T.$$

За да определим неизвестните коефициенти b_i , използваме интерполационните условия:

$$\begin{aligned} q_0 &= \tilde{v}_{e_i}^h(0) = b_0 \\ q_1 &= \tilde{v}_{e_i}^h(t_1) = b_0 + b_1 t_1 + \dots + b_m t_1^m \\ &\dots \dots \dots \\ q_m &= \tilde{v}_{e_i}^h(t_m) = b_0 + b_1 t_m + \dots + b_m t_m^m \end{aligned}$$

Въвеждаме означението $q_{e_i} = (q_0, q_1, \dots, q_m)^T$ и дефинираме матрицата

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_m & \dots & t_m^m \end{pmatrix}.$$

При тези означения интерполационните условия могат да се запишат във вида

$$q_{e_i} = H^{-1}b, \quad b = Hq_{e_i}$$

и следователно

$$\tilde{v}_{e_i}^h(t) = P(t)Hq_{e_i} = \psi(t)q_{e_i}.$$

Векторът-ред $\psi(t)$ се нарича вектор на функциите на формата за стандартния елемент E .

При пресмятане на интегралите върху всеки елемент ще използваме следните представяния и означения:

$$\left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)^T = q_{e_i}^T H^T P(t)^T; \quad \left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)' = P'(t)Hq_{e_i} = \psi'(t)q_{e_i}; \quad \left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)'^T = q_{e_i}^T H^T (P'(t))^T;$$

$$\frac{d\tilde{v}_{e_i}^h}{dx} = \frac{d\tilde{v}_{e_i}^h}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d\tilde{v}_{e_i}^h}{dt}; \quad x = x(t) = x_{i-1} + th \Rightarrow dx = hdt;$$

$$p(x) = p(x(t)) = \bar{p}(t); \quad q(x) = q(x(t)) = \bar{q}(t); \quad f(x) = f(x(t)) = \bar{f}(t).$$

Преобразуваме последователно трите интеграла в представянето на функционала. Целта е да ги представим във векторно-матрична форма. За първия интеграл последователно получаваме

$$\begin{aligned} \int_{e_i} p(x) \left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)'^2 dx &= h \int_0^1 p(x(t)) \frac{1}{h^2} \left(\frac{d\tilde{v}_{e_i}^h}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{h} \int_0^1 \bar{p}(t) \left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)'^T \left(\tilde{v}_{e_i}^h\right)' dt = \\ &= q_{e_i}^T H^T \frac{1}{h} \int_0^1 \bar{p}(t) (P'(t))^T P'(t) dt. Hq_{e_i} = q_{e_i}^T k_{e_i}^{(1)} q_{e_i}, \end{aligned}$$

като сме въвели означението

$$k_{e_i}^{(1)} = H^T \frac{1}{h} \int_0^1 \bar{p}(t) (P'(t))^T P'(t) dt . H .$$

Тази матрица се нарича **елементна матрица на коравина**.

За втория интеграл последователно получаваме

$$\int_{e_i} q(x) (\tilde{v}_{e_i}^h)^2 dx = h \int_0^1 \bar{q}(t) (\tilde{v}_{e_i}^h)^T \tilde{v}_{e_i}^h dt = q_{e_i}^T H^T h \int_0^1 \bar{q}(t) (P(t))^T P(t) dt . H q_{e_i} = q_{e_i}^T k_{e_i}^{(0)} q_{e_i} ,$$

където

$$k_{e_i}^{(0)} = H^T h \int_0^1 \bar{q}(t) (P(t))^T P(t) dt . H$$

е **елементната матрица на маса**.

За третия интеграл получаваме

$$\int_{e_i} f(x) \tilde{v}_{e_i}^h dx = h \int_0^1 \bar{f}(t) P(t) dt . H q_{e_i} = f_{e_i}^T q_{e_i} ,$$

където

$$f_{e_i}^T = h \int_0^1 \bar{f}(t) P(t) dt . H .$$

Като използваме горните резултати, получаваме

$$I(v^h) = \sum_{e_i} \left[q_{e_i}^T k_{e_i}^{(1)} q_{e_i} + q_{e_i}^T k_{e_i}^{(0)} q_{e_i} \right] - 2 \sum_{e_i} f_{e_i}^T q_{e_i} = \sum_{e_i} q_{e_i} (k_{e_i}^{(1)} + k_{e_i}^{(0)}) q_{e_i} - 2 \sum_{e_i} f_{e_i}^T q_{e_i} .$$

Въвеждаме означенията

$$Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_N)^T ; \quad K^{(1)} = \sum_{e_i} k_{e_i}^{(1)} ; \quad K^{(0)} = \sum_{e_i} k_{e_i}^{(0)} ; \quad F = (f_0, f_1, \dots, f_N)^T ,$$

където Q е глобалният вектор на възловите неизвестни, F е глобалният вектор на десните части, $K^{(1)}$ и $K^{(0)}$ са съответно глобалните матрици на коравина и маса. В тези означения

$$I(v^h) = Q^T (K^{(1)} + K^{(0)}) Q - 2 F^T Q = Q^T K Q - 2 F^T Q = \Phi(Q_0, Q_1, \dots, Q_N) .$$

Необходимо условие за минимум на функцията $\Phi(Q_0, Q_1, \dots, Q_N)$ е

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N .$$

Така получаваме системата уравнения на метода на Ритц

$$KQ = F .$$

В тази ситема трябва да наложим условието $Q_0 = 0$ (виж 3.1). Да припомним, че за линейни елементи $N = n$, за квадратични – $N = 2n$ и за кубични – $N = 3n$.

2. Числена реализация

2.1 Линейни КЕ

В този случай приближаващата функция за елемента E е полином от първа степен:

$$\tilde{v}_{e_i}^h = \tilde{v}_{e_i}^h(t) = b_0 + b_1 t = (1 \quad t) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} .$$

Решаваме интерполационната задача

$$\begin{aligned} q_0 &= b_0, \\ q_1 &= b_0 + b_1 t_1 = b_0 + b_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\psi}(t) = (\psi_0, \psi_1) = (1 \quad t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1-t \quad t).$$

Ще пресметнем елементните матрици на коравина и маса за случая $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 1$. Ще приложим изчислителната схема, в която пресмятанията се извършват с матрицата H . Да положим и $f(x) \equiv 1$. В разглеждания случай

$$P(t) = (1 \quad t); \quad P'(t) = (0 \quad 1); \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елементната матрица на масата е

$$k_{e_i}^{(0)} = H^T h \int_0^1 (P(t))^T P(t) dt . H .$$

Имаме последователно

$$\int_0^1 (P(t))^T P(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} (1 \quad t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$k_{e_i}^{(0)} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Елементната матрица на коравина е

$$k_{e_i}^{(1)} = H^T \frac{1}{h} \int_0^1 (P'(t))^T P'(t) dt . H .$$

За нея получаваме последователно

$$\int_0^1 (P'(t))^T P'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad 1) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$k_{e_i}^{(1)} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За дясната част получаваме

$$f_{e_i}^T = h \int_0^1 P(t) dt . H = h \int_0^1 (0 \quad 1) dt . H = h \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{h}{2} (1 \quad 1).$$

Глобалните матрици на маса и коравина са

$$K^{(0)} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2+2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2+2 & 1 & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & 2+2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & & \end{pmatrix} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & 1 & \dots & \dots & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & & \end{pmatrix},$$

$$K^{(1)} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & -1 & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1+1 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ще отбележим, че при матрицата на коравина сумата от елементите по редове и стълбове е равна на нула.

2.2 Квадратични КЕ

В този случай приближаващата функция за елемента E е полином от втора степен:

$$\tilde{v}_{e_i}^h = \tilde{v}_{e_i}^h(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 = P(t)b,$$

където

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Решаваме интерполационната задача

$$q_0 = \tilde{v}_{e_i}^h(0) = b_0$$

$$q_1 = \tilde{v}_{e_i}^h\left(\frac{1}{2}\right) = b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}b_2,$$

$$q_2 = \tilde{v}_{e_i}^h(1) = b_0 + b_1 + b_2$$

т. е.

$$q_{e_i} \equiv \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = H^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = Hq_{e_i}, \quad \tilde{v}_{e_i}^h(t) = P(t)Hq_{e_i} = \psi(t)q_{e_i},$$

където

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)), \quad \psi_0(t) = 1 - 3t + 2t^2, \quad \psi_1(t) = 4t - 4t^2, \quad \psi_2(t) = -t + 2t^2.$$

За функциите на формата имаме

$$\psi_i(t_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Нека пак $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 1$. Ще приложим изчислителната схема, в която пресмятанията се извършват с матрицата H . В разглеждания случай

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}; \quad P'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2t \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Елементната матрица на масата е

$$k_{e_i}^{(0)} = H^T h \int_0^1 (P(t))^T P(t) dt . H .$$

Имаме последователно (проверете!)

$$\int_0^1 (P(t))^T P(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow k_{e_i}^{(0)} = \frac{h}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Елементната матрица на коравина е

$$k_{e_i}^{(1)} = H^T \frac{1}{h} \int_0^1 (P'(t))^T P'(t) dt . H .$$

За нея последователно получаваме

$$\int_0^1 (P'(t))^T P'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 2t & 4t^2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow k_{e_i}^{(1)} = \frac{1}{3h} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Кубични КЕ

Приближаващата функция за елемента E е полином от трета степен:

$$\tilde{v}_{e_i}^h = \tilde{v}_{e_i}^h(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 = P(t)b ,$$

където

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Интерполационната задача е

$$q_0 = \tilde{v}_{e_i}^h(0) = b_0$$

$$q_1 = \tilde{v}_{e_i}^h\left(\frac{1}{3}\right) = b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{9}b_2 + \frac{1}{27}b_3$$

$$q_2 = \tilde{v}_{e_i}^h\left(\frac{2}{3}\right) = b_0 + \frac{2}{3}b_1 + \frac{4}{9}b_2 + \frac{8}{27}b_3$$

$$q_3 = \tilde{v}_{e_i}^h(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3$$

Следователно

$$H^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 18 & -45 & 36 & -9 \\ -9 & 27 & -27 & 9 \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{v}_{e_i}^h(t) = P(t)Hq_{e_i} = \psi(t)q_{e_i}, \quad \psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)),$$

където

$$\psi_0(t) = 1 - \frac{11}{2}t + 9t^2 - \frac{9}{2}t^3,$$

$$\psi_1(t) = 9t - \frac{45}{2}t^2 + \frac{27}{2}t^3,$$

$$\psi_2(t) = -\frac{9}{2}t + 18t^2 - \frac{27}{2}t^3,$$

$$\psi_3(t) = t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t^3.$$

Тук глобалните матрици имат 7-диагонална структура и изглеждат по следния начин:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & & & \\ x & x & x & x & & & \\ x & x & x & x & & & \\ x & x & x & x+x & & & \\ & & & x & x & x & x \\ & & & x & x & x & x \\ & & & x & x & x & x+x \\ & & & & & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

3. Нехомогенни гранични условия

3.1 Нехомогенни гранични условия от III род

Разглеждаме задачата

$$(3) \quad Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$(4) \quad p(0)u'(0) - \alpha_0 u(0) = \beta_0,$$

$$(5) \quad p(1)u'(1) + \alpha_1 u(1) = \beta_1$$

при предположение, че $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$ и $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$. Може да се покаже, че ако функцията $u(x)$ е достатъчно гладка и минимизира модифицирания функционал

$$(6) \quad I(u) = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2)dx + \alpha_0 u^2(0) + \alpha_1 u^2(1) - 2 \left[\int_0^1 f u dx - \beta_0 u(0) + \beta_1 u(1) \right],$$

тя удовлетворява граничните условия (4), (5). Следователно за модифицираната вариационна задача условията (4), (5) са **естествени гранични условия**.

Как ще се промени системата на Ритц при минимизиране на функционала (6)? Ясно е, че квадратичните членове $\alpha_0 u^2(0)$ и $\alpha_1 u^2(1)$ ще дадат принос към матрицата на масата: към елемента $k_{0,0}^{(0)}$ на глобалната матрица на масата $K^{(0)}$ трябва да се добави α_0 , а към елемента $k_{N,N}^{(0)}$ трябва да се добави α_1 .

Линейните членове $\beta_0 u(0)$ и $\beta_1 u(1)$ ще дадат принос към вектора на десните части: от елемента f_0 на глобалния вектор F трябва да се извади β_0 , а към елемента f_N трябва да се добави β_1 .

3.2 Нехомогенни гранични условия от I род

Нека задачата е

$$(7) \quad Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$(8) \quad u(0) = g_0,$$

$$(9) \quad u(1) = g_1.$$

Условията (8), (9) се налагат в глобалната система $KQ = F$.

За налагане на условие (8) се прави следното:

- на елемента $k_{0,0}$ в глобалната матрица K се дава стойност 1, а всички останали елементи от първия ред на матрицата се анулират – $k_{0,1} = k_{0,2} = \dots = k_{0,N} = 0$;
- на f_0 се дава стойност g_0 ;
- за да се запази симетрията на матрицата K , елементите от първия й стълб се анулират – $k_{1,0} = k_{2,0} = \dots = k_{N,0} = 0$ и от компонентите $f_i, i = 1, 2, \dots, N$ на глобалния вектор F се изваждат величините $k_{i,0}g_0$.

Аналогично се постъпва и с условието (9), но преобразованията се правят върху последния ред и последния стълб на матрицата K и отново върху вектора F .

§ 16. МЕТОД НА РИТЦ И МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЧДУ

Постановка на задачата

Търси се решението $u(x_1, x_2)$ на задачата

$$(1) \quad Lu \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + q(x_1, x_2)u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G \subset R^2, \quad q(x_1, x_2) \geq 0,$$

$$(2) \quad u(x_1, x_2)|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial G.$$

Дефиниционната област на оператора L е $D(L) = \{u \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), u|_{\Gamma} = 0\}$, като предполагаме, че $\Gamma = \partial G$ е достатъчно гладка.

Ще отбележим, че при $q \equiv 0$ уравнението (1) моделира задачата за намиране на равновесното положение на еластична мембрана с маса m , закрепена неподвижно по краищата си и подложена на действието на повърхностни сили с плътност $F = mf$

1. Метод на Ритц

Нека $H = L_2(G)$ със скалярно произведение и норма съответно:

$$(3) \quad (u, v) = \iint_G uv \, dx_1 dx_2, \quad \|u\| = \left(\iint_G u^2 \, dx_1 dx_2 \right)^{1/2}.$$

Ще покажем, че операторът L е симетричен и положителен в $D(L)$. Нека $u \in D(L)$, $v \in D(L)$:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (Lu, v) &= \iint_G \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + qu \right) v \, dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_G \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + quv \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + quv \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \right) ds = \\ &= a(u, v) - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = a(u, v) = (u, Lv). \end{aligned}$$

Тук сме използвали формулата на Остроградски-Гаус

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} (P \cos(n, x_1) + Q \cos(n, x_2)) ds,$$

където n е външната нормала към границата $\Gamma = \partial G$, $P = v \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $Q = v \frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Следователно операторът L е симетричен в $D(L)$.

$$\text{б) } (Lu, u) = a(u, u) = \iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + qu^2 \right) dx_1 dx_2 \geq 0,$$

при това $(Lu, u) = 0$, ако $\frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2} \equiv 0$, т. е. ако $u(x_1, x_2) = \text{const}$. Но понеже $u|_r = 0$, то следва, че $u(x_1, x_2) \equiv 0$. Следователно операторът L е и положителен в $D(L)$. Тогава задачата (1), (2) е еквивалентна на задачата за минимизиране на функционала на Ритц:

$$(4) \quad I(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + qu^2 \right] dx_1 dx_2 - 2 \iint_G f u dx_1 dx_2.$$

Може да се докаже, че операторът L е и положително определен в $D(L)$.

От тук нататък схемата на разсъждения е съгласно общата теория.

- Попълваме $D(L)$ до H_L с границите на всевъзможните редици $\{u_n(x_1, x_2)\}$ от функции от $D(L)$ в смисъла на нормата на H_L :

$$\|u_n - u\|_L = \sqrt{(L(u_n - u), (u_n - u))} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$H_L = \left\{ u(x_1, x_2) : u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L_2(G), u|_r = 0 \right\}.$$

- Търсим минимума на $I(u)$ в крайномерното подпространство

$$H_n = \left\{ u_n(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_1, x_2) \right\}, \text{ където } \{\varphi_i(x_1, x_2)\}_{i=1}^\infty \text{ е пълна система}$$

линейно независими функции в H_L .

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \iint_G \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right)^2 + q \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right)^2 \right) dx_1 dx_2 - 2 \iint_G f \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Условията за минимум на $I(u_n)$ дават системата на Ритц относно неизвестните коефициенти a_i , $i = \overline{1, n}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

или

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n a_j \iint_G \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + q \varphi_i \varphi_j \right) dx_1 dx_2 = \iint_G f \varphi_i dx_1 dx_2,$$

$$(6) \quad \sum_{j=1}^n k_{ij} a_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad Ka = F,$$

където $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$,

Векторът-ред $P(x_1, x_2)H$ се означава с $\psi_e = (\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_p)$. Функциите $\psi_i(x_1, x_2)$ се наричат **функции на формата на елемента**.

Функционалът на Ритц за $v^h \in S^h$ е

$$I(v^h) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial v^h}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^h}{\partial x_2} \right)^2 + q(v^h)^2 \right] dx_1 dx_2 - 2 \iint_G f v^h dx_1 dx_2.$$

Представяме интегралите по областта като сума на интеграли по елементите

$$I(v^h) = \sum_e \iint_e \left[\left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_2} \right)^2 + q(v_e^h)^2 \right] dx_1 dx_2 - 2 \sum_e \iint_e f v_e^h dx_1 dx_2.$$

Дефинираме матрица B и вектор ε по следния начин:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & x_2 & 2x_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 & 2x_2 & \dots \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_e^h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_e^h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} H q_e \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} H q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} \end{pmatrix} H q_e = B H q_e.$$

Тогава

$$\left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_2} \right)^2 = \varepsilon^T \varepsilon = q_e^T H^T B^T B H q_e = q_e^T C^T C q_e, \quad C = B H,$$

$$\iint_e \left[\left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_e^h}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 = q_e^T k_e^{(1)} q_e, \quad k_e^{(1)} = H^T \iint_e B^T B dx_1 dx_2 \cdot H = \iint_e C^T C dx_1 dx_2.$$

Матрицата $k_e^{(1)}$ е **елементната матрица на коравина**.

Преработваме аналогично следващия интеграл и получаваме

$$\begin{aligned} \iint_e q(v_e^h)^2 dx_1 dx_2 &= \iint_e q(v_e^h)^T (v_e^h) dx_1 dx_2 = q_e^T k_e^{(0)} q_e, \\ k_e^{(0)} &= H^T \iint_e q P^T P dx_1 dx_2 \cdot H = \iint_e q \psi_e^T \psi_e dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

където матрицата $k_e^{(0)}$ е **елементната матрица на маса**.

Преобразуваме и интеграла, съдържащ дясната част f :

$$\iint_e f v_e^h dx_1 dx_2 = \iint_e f P dx_1 dx_2 \cdot H q_e = f_e^T q_e, \quad \text{където } f_e^T = \iint_e f P dx_1 dx_2 \cdot H.$$

Така за функционала на Ритц получаваме

$$I(v^h) = \sum_e q_e (k_e^{(1)} + k_e^{(0)}) q_e - 2 \sum_e f_e^T q_e.$$

Въвеждаме следните означения:

- $Q = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_N)^T$ – глобален вектор на неизвестните;
- $K^{(0)}$ – глобална матрица на маса;
- $K^{(1)}$ – глобална матрица на коравина;
- $F = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N)^T$ – глобален вектор на десните части.

Тогава

$$I(v^h) = Q^T (K^{(1)} + K^{(0)}) Q - 2F^T Q.$$

Разглеждаме функционала $I(v^h)$ като функция на $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$. Условието за минимум на $I(v^h)$ е

$$\frac{\partial I(v^h)}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

От това условие получаваме следната линейна система уравнения:

$$(K^{(1)} + K^{(0)}) Q = F.$$

2.2. Пример: линейни триъгълни крайни елементи

Нека $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$ са върховете на триъгълния елемент. Решаваме интерполационната задача

$$\begin{cases} q_e^{(1)} = a_0 + a_1 x_1^{(1)} + a_2 x_2^{(1)} \\ q_e^{(2)} = a_0 + a_1 x_1^{(2)} + a_2 x_2^{(2)} \\ q_e^{(3)} = a_0 + a_1 x_1^{(3)} + a_2 x_2^{(3)} \end{cases} \Rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Нека S е лието на триъгълника с върхове $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$. Тогава детерминантата на матрицата H^{-1} е

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = 2S.$$

За матрицата H получаваме

$$H = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix},$$

където

$$\begin{aligned} A_1 &= x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)} & B_1 &= x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & C_1 &= x_1^{(3)} - x_1^{(2)} \\ A_2 &= x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)} & B_2 &= x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & C_2 &= x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \\ A_3 &= x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)} & B_3 &= x_2^{(1)} - x_2^{(2)} & C_3 &= x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{aligned}$$

От равенството $\psi_e = P(x_1, x_2)H$ за функциите на формата на линейния триъгълен краен елемент получаваме

$$\psi_i = \frac{1}{2S} (A_i + B_i x_1 + C_i x_2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Оттук по описания по-горе начин може да се пресметнат елементните матрици на коравина и маса.

Глава 4. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

§ 17. АПРОКСИМАЦИЯ, УСТОЙЧИВОСТ И СХОДИМОСТ НА ЛИНЕЙНИТЕ ДИФЕРЕНЧНИ СХЕМИ. ТЕОРЕМА НА ЛАКС

Нека

$$\begin{aligned} (1) \quad & Lu = f \quad \text{в } \Omega, \\ (2) \quad & lu = \varphi \quad \text{върху } \Gamma = \partial \Omega, \end{aligned}$$

е линейна диференциална задача. Условието (2) могат да бъдат гранични и (или) начални от I, II, или III-род.

Нека $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ е мрежа в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ и нека

$$\begin{aligned} (3) \quad & L_h y_h = f_h \quad \text{в } \omega, \\ (4) \quad & l_h y_h = \varphi_h \quad \text{върху } \gamma, \end{aligned}$$

е линейна диференчна схема, апроксимираща задачата (1), (2).

Нека u_h е мрежовата функция, дефинирана чрез стойностите на решението u на задачата (1), (2) във възлите на мрежата $\bar{\omega}$. Нека в пространството на мрежовите функции, дефинирани в $\bar{\omega}$, е въведена норма $\|\bullet\|_h$, например

$$(5) \quad \|y_h\|_{C(\bar{\omega})} = \max_{x \in \bar{\omega}} |y_h(x)|.$$

Нека

$$(6) \quad \psi_h = L_h u_h - f_h, \quad \|\psi_h\|_h = O(h^{m_1}),$$

$$(7) \quad \theta_h = l_h u_h - \varphi_h, \quad \|\theta_h\|_h = O(h^{m_2}).$$

са съответно *грешките на апроксимация* на диференциалното уравнение (1) и на условията (2) за *решението u* на задачата (1), (2).

Казва се, че диференчната задача (3), (4) е *коректно поставена*, ако:

- има и то единствено решение;
- съществува априорна оценка за решението y_h чрез десните части f_h и φ_h на диференчната задача:

$$(8) \quad \|y_h\|_h \leq C_1 \|\varphi_h\|_h + C_2 \|f_h\|_h,$$

където C_1 и C_2 са константи, независещи от h .

Наличието на априорна оценка (8) осигурява *устойчивост* на (решението на) диференчната задача по гранични и (или) начални условия и по дясна част.

Действително, нека наред със задачата (3), (4), да разгледаме диференчната задача

$$(9) \quad L_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h \quad \text{в } \omega,$$

$$(10) \quad l_h \tilde{y}_h = \tilde{\varphi}_h \quad \text{върху } \gamma,$$

за която

$$(11) \quad \|f_h - \tilde{f}_h\| \leq \varepsilon_1, \quad \|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\| \leq \varepsilon_2.$$

За разликата $y_h - \tilde{y}_h$ получаваме диференчната задача (използваме линейността на L_h и l_h)

$$\begin{aligned} L_h(y_h - \tilde{y}_h) &= f_h - \tilde{f}_h, \\ l_h(y_h - \tilde{y}_h) &= \varphi_h - \tilde{\varphi}_h \end{aligned}$$

със същите оператори L_h и l_h в левите части. Следователно за нея е в сила априорната оценка (8)

$$(12) \quad \|y_h - \tilde{y}_h\|_h \leq C_1 \|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|_h + C_2 \|f_h - \tilde{f}_h\|_h \leq C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 = \delta,$$

която означава, че на малки изменения на входните данни φ_h и f_h ще съответстват малки изменения на решението y_h , т.е. имаме устойчивост по гранични и (или) начални условия и по дясна част.

При диференциалните задачи, в които една от променливите, t , има смисъл на „време“, по-съществено значение има устойчивостта по начални данни. В този случай условията (2) се разделят естествено на:

- начални: $l_1 u = \varphi_1$,
- гранични: $l_2 u = \varphi_2$.
-

Казва се, че задачата (3), (4) е устойчива по начални данни, ако при $f_h \equiv 0$ и $\varphi_{2,h} \equiv 0$ е в сила априорната оценка

$$(13) \quad \|y_h\|_h \leq C \|\varphi_{1,h}\|_h,$$

където $C = \text{const}$ не зависи от h .

Аналогично се дефинират устойчивост по гранични условия (при $\varphi_{1,h} \equiv 0$, $f_h \equiv 0$) и по дясна част ($\varphi_{1,h} \equiv 0$, $\varphi_{2,h} \equiv 0$).

Ще формулираме теоремата за връзка между *апроксимация*, *устойчивост* и *сходимость* на диференчната задача (3), (4).

Теорема на Лакс. Нека диференчната задача (3), (4) е *коректно поставена* и апроксимира диференциалната задача (1), (2). Тогава има *сходимость* на приближеното решение y_h към точното u_h :

$$\|u_h - y_h\|_h \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

При това, ако редът на апроксимация е m ,

$$(14) \quad \|\psi_h\|_h = O(h^m), \quad \|\theta_h\|_h = O(h^m),$$

то и редът на сходимост е m :

$$(15) \quad \|u_h - y_h\|_h = O(h^m).$$

Доказателство. За грешката

$$z_h = u_h - y_h$$

пресмятаме

$$L_h z_h = L_h u_h - L_h y_h = L_h u_h - f_h = \psi_h,$$

$$l_h z_h = l_h u_h - l_h y_h = l_h u_h - \varphi_h = \theta_h.$$

Следователно, мрежовата функция z_h е решение на диференчната задача

$$(16) \quad L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega,$$

$$(17) \quad l_h z_h = \theta_h, \quad x \in \gamma,$$

със същите оператори L_h и l_h , както в (3), (4), но с десни части - съответно грешките на апроксимация. Като приложим априорната оценка (8) за решението z_h на задача (16), (17), получаваме

$$\|z_h\|_h = \|u_h - y_h\|_h \leq C_1 \|\psi_h\|_h + C_2 \|\theta_h\|_h = O(h^m),$$

с което теоремата е доказана.

При конструиране и изследване на диференчни схеми съществено значение има въпросът за сходимост на приближеното решение към точното. Теоремата на Лакс дава алгоритъм, по който да се отговори на този въпрос:

- да се изследва реда на апроксимация;
- да се докаже съществуване и единственост на решението на диференчната задача;
- да се изследва устойчивостта (да се намерят априорни оценки от вида (8) или (13)).

§ 18. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ПОАСОН. КАНОНИЧЕН ВИД, УСТОЙЧИВОСТ И СХОДИМОСТ

Постановка на диференциалната задача

Търси се функция $u = u(x_1, x_2) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad Lu = -\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \bar{\Omega} = \{0 \leq x_i \leq l_i, \quad i = 1, 2\}$$

и граничното условие

$$(2) \quad u(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Ако $f(x_1, x_2) \equiv 0$, за решението $u(x_1, x_2)$ на задачата (1),(2) е в сила *принципът на максимума*:

Теорема. Непрекъснатото и различно от константа в $\bar{\Omega}$ решение $u(x_1, x_2)$ на задача (1), (2) при $f(x_1, x_2) \equiv 0$ не може да приема максималната си по модул стойност вътре в Ω :

$$\max_{(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}} |u(x_1, x_2)| \leq \max_{(x_1, x_2) \in \Gamma} |\mu(x_1, x_2)|.$$

При конструирането на диференчни схеми е естествено да се иска същото свойство да имат и техните решения.

Диференчна схема

В правоъгълника $\bar{\Omega} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ въвеждаме равномерна във всяко от направленията мрежа от точки x_{ij} (възли (i, j)):

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x_{ij} = (x_1^i, x_2^j), \quad i = 0, 1, \dots, n_1, \quad j = 0, 1, \dots, n_2\}, \\ x_1^i &= i h_1, \quad h_1 = \frac{l_1}{n_1}, \quad x_2^j = j h_2, \quad h_2 = \frac{l_2}{n_2}, \quad h = (h_1, h_2). \end{aligned}$$

Означаваме с ω_h множеството от вътрешните точки на мрежата $\bar{\omega}_h$, а с γ_h множеството от граничните точки, така че $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. При предположение, че $u(x_1, x_2) \in C^4(\Omega)$, за апроксимация на производните по x_i , $i = 1, 2$, в точките на ω_h използваме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1^i, x_2^j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} - \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\xi, x_2^j) = u_{\bar{x}_1 x_1, i, j} + O(h_1^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1^i, x_2^j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1^i, \eta) = u_{\bar{x}_2 x_2, i, j} + O(h_2^2).$$

Така получаваме диференчната схема

$$(3) \quad L_h y_h \equiv -\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} - \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{i,j}, \quad i=1, 2, \dots, n_1-1, \\ j=1, 2, \dots, n_2-1.$$

$$(4) \quad y_{0,j} = \mu(0, x_2^j), \quad y_{n_1,j} = \mu(l_1, x_2^j), \quad j=0, 1, \dots, n_2, \\ y_{i,0} = \mu(x_1^i, 0), \quad y_{i,n_2} = \mu(x_1^i, l_2), \quad i=1, 2, \dots, n_1-1.$$

Тя представлява система линейни алгебрични уравнения от ред $(n_1+1)(n_2+1)$. Ако в уравненията (3) заместим известните стойности (4), можем да понижим реда на системата до $(n_1-1)(n_2-1)$, но за удобство и общност няма да го правим.

Диференчното уравнение (3), написано за възела (i, j) , съдържа стойностите на търсеното решение във възлите $(i \pm 1, j)$, (i, j) , $(i, j \pm 1)$. Казваме, че уравнението (1) е апроксимирано върху 5-точков шаблон „кръст”. Да означим с $\mathcal{H}(x_{ij})$ множеството от тези 5 точки:

$$\mathcal{H}(x_{ij}) = \{x_{i \pm 1, j}, x_{i, j}, x_{i, j \pm 1}\}.$$

Определение. Околност на точката x_{ij} наричаме множеството

$$\mathcal{H}'(x_{ij}) = \{x_{i \pm 1, j}, x_{i, j \pm 1}\} = \mathcal{H}(x_{ij}) \setminus \{x_{ij}\}.$$

Ако $x_{ij} \in \gamma_h$, считаме, че $\mathcal{H}'(x_{ij}) = \emptyset$, $\mathcal{H}(x_{ij}) = \{x_{ij}\}$. Нататък за удобство понякога ще изпускаме индексите i, j, h и ще пишем например

$$(5) \quad \mathcal{H}'(x) = \mathcal{H}(x) \setminus \{x\}, \quad x \in \omega,$$

$$(6) \quad \mathcal{H}'(x) = \emptyset, \quad x \in \gamma.$$

Каноничен вид на диференчната схема

Да решим уравнението (3) относно търсената стойност y_{ij} в центъра на шаблона $\mathcal{H}(x_{ij})$. Получаваме

$$(7) \quad \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{ij} = \frac{1}{h_1^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j}) + \frac{1}{h_2^2} (y_{i,j+1} + y_{i,j-1}) + f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega.$$

Означаваме

$$y_{ij} = y(x), \quad A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, \quad B(x, \xi) = \left\{ \frac{1}{h_1^2}, \frac{1}{h_1^2}, \frac{1}{h_2^2}, \frac{1}{h_2^2} \right\}, \quad \xi \in \mathcal{H}'(x).$$

Тогава диференчното уравнение (7) приема вида

$$(8) \quad A(x) y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{H}'(x)} B(x, \xi) y(\xi) + f(x), \quad x \in \omega.$$

Записваме граничните условия (4) във вида

$$(9) \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma.$$

Когато една диференчна схема е записана във вида (8), (9) , казваме, че тя е в *каноничен вид*.

Като имаме предвид уговорката (6), можем да запишем (8), (9) като едно уравнение

$$(10) \quad A(x) y(x) = \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi) y(\xi) + F(x), \quad x \in \bar{\omega} = \omega \cup \gamma,$$

като:

$$A(x) = 1, \quad F(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma; \quad F(x) = f(x), \quad x \in \omega.$$

Въвеждаме диференчния оператор L_h ,

$$(11) \quad L_h y(x) \equiv A(x) y(x) - \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi) y(\xi).$$

Записваме го в следната еквивалентна форма

$$(12) \quad L_h y(x) \equiv D(x) y(x) + \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi) (y(x) - y(\xi)), \quad x \in \omega,$$

където

$$(13) \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi).$$

Така диференчната схема се записва във вида

$$(14) \quad L_h y(x) = F(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

където $L_h y(x)$ се дава от (11) или (12).

Казваме, че за диференчната схема (14) (за диференчния оператор (11),(12)) са изпълнени *условията за положителност на коефициентите*, ако

$$(15) \quad A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0 \quad \text{за} \quad \xi \in III'(x), \quad D(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}.$$

По-нататък ще ни трябва още едно условие за коефициентите на оператора L_h :

$$(16) \quad \exists x_0 \in \bar{\omega} : D(x_0) > 0.$$

Например, за диференчната схема (7),(4) имаме

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \xi \in III'(x) \neq \emptyset, \quad D(x) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$D(x) = A(x) = 1, \quad x \in \gamma.$$

Следователно условията (15),(16) са изпълнени.

Принцип на максимума за диференчните схеми

Преди да формулираме принципа на максимума, ще дефинираме едно свойство на мрежата $\bar{\omega}$.

Определение. Казваме, че мрежата $\bar{\omega}$ е *свързана*, ако за всеки два нейни възела x_0, x'_0 , поне единият от които е с непразна околност, например x_0 , съществуват възли $x_i, i = 1, 2, \dots, m$, такива, че $x_1 \in III'(x_0), \quad x_2 \in III'(x_1), \dots,$

$$x'_0 \in III'(x_m).$$

Теорема 1. (Принцип на максимума (минимума)) Нека $\bar{\omega}$ е свързана мрежа. Нека в ω са изпълнени условията за положителност на коефициентите (15) на диференчния оператор L_h от (11). Ако мрежовата функция $y(x)$, дефинирана в $\bar{\omega}$, не е константа, и

$$(17) \quad L_h y(x) \leq 0 \quad (L_h y(x) \geq 0), \quad \forall x \in \omega,$$

то $y(x)$ не може да приема най-голямата си положителна (най-малката си отрицателна) стойност в ω .

Доказателство. Ще докажем принципа на максимума. Нека първото от условията (17) е изпълнено и да допуснем противното: съществува точка $x_0 \in \omega$, за която

$$(18) \quad y(x_0) = \max_{x \in \omega} y(x) > 0, \quad x_0 \in \omega.$$

Тогава

$$(19) \quad L_h y(x_0) = D(x_0) y(x_0) + \sum_{\xi \in III'(x_0)} B(x_0, \xi) (y(x_0) - y(\xi)) \geq 0,$$

понеже $D(x_0) \geq 0$, $B(x_0, \xi) > 0$, $\xi \in III'(x_0)$. От (19) и (17) получаваме

$$L_h y(x_0) = 0, \quad D(x_0) y(x_0) = 0, \quad B(x_0, \xi) (y(x_0) - y(\xi)) = 0, \quad \forall \xi \in III'(x_0).$$

Следователно

$$(20) \quad y(\xi) = y(x_0), \quad \forall \xi \in III'(x_0).$$

Понеже $y(x) \neq \text{const}$ в $\bar{\omega}$, то съществува точка $x'_0 \in \bar{\omega}$ такава, че

$$(21) \quad y(x'_0) < y(x_0).$$

Следователно съществуват точки $x_1, x_2, \dots, x_m$ такива, че $x_1 \in III'(x_0), \dots, x'_0 \in III'(x_m)$, $x_m \in \omega$. От (18) и (20) тогава следва, че $y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_m) = y(x_0)$. Да пресметнем и оценим $L_h y(x_m)$, като използваме (21)

$$L_h y(x_m) = D(x_m) y(x_m) + \sum_{\xi \in III'(x_m)} B(x_m, \xi) (y(x_m) - y(\xi)) \geq B(x_m, x'_0) (y(x_0) - y(x'_0)) > 0, \quad x_m \in \omega.$$

Полученото противоречие на предположението (17), следователно теоремата е доказана.

Следствие 1. Ако при всяко $x \in \bar{\omega}$ са изпълнени условията за положителност на коефициентите (15) и $L_h y(x) \leq 0$ ($L_h y(x) \geq 0$), и ако е изпълнено условието (16), то $y(x) \leq 0$ ($y(x) \geq 0$) за всяко $x \in \bar{\omega}$.

Доказателство.

а) Нека $y(x) \neq \text{const}$ в $\bar{\omega}$ и са изпълнени формулираните предположения. Да допуснем противното: съществува точка $x^* \in \bar{\omega}$ в която $y(x^*) > 0$ и нека x^* е точката, в която $y(x^*) = \max_{x \in \bar{\omega}} y(x) > 0$.

а₁) ако $x^* \in \omega$, получаваме противоречие с теорема 1;

а₂) ако $x^* \in \gamma$, получаваме

$$L_h y(x^*) = A(x^*) y(x^*) > 0,$$

което противоречи на предположението $L_h y(x) \leq 0$.

б) Нека $y(x) \equiv \text{const}$ в $\overline{\omega}$. Нека x_0 е възелът, в който $D(x_0) > 0$. Тогава съгласно предположението

$$L_h y(x_0) = D(x_0) y(x_0) \leq 0,$$

и понеже $D(x_0) > 0$, то следва твърдението.

Определение. Диференчен оператор, за който от $L_h y(x) \leq 0$ ($L_h y(x) \geq 0$) за $\forall x \in \overline{\omega}$ следва $y(x) \leq 0$ ($y(x) \geq 0$) за $\forall x \in \overline{\omega}$, се нарича *монотонен*, а съответната диференчна схема – *монотонна*.

Следствие 2. (Съществуване и единственост на решението на диференчната задача (14)). Нека при всяко $x \in \overline{\omega}$ са изпълнени условията (15) за положителност на коефициентите на оператора L_h и нека е изпълнено условието (16). Тогава диференчната задача (14) има и то единствено решение.

Доказателство. Записваме хомогенната система $L_h y(x) = 0$, $x \in \overline{\omega}$, по следните два начина:

$$L_h y(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\omega},$$

$$L_h y(x) \leq 0, \quad x \in \overline{\omega}.$$

От Следствие 1 и първата система неравенства следва $y(x) \geq 0$ за $\forall x \in \overline{\omega}$, от втората следва $y(x) \leq 0$ за $\forall x \in \overline{\omega}$. Следователно $y(x) = 0$ за $\forall x \in \overline{\omega}$, т.е. хомогенната система (14) има само тривиалното решение. От това следва, че нехомогенната система (14) има и то единствено решение.

Освен съществуване и единственост на решението на диференчната задача, от принципа на максимума следва и възможност за сравняване решенията на диференчни задачи с един и същи оператор, но различни десни части. В сила е следната

Теорема 2. (Теорема за сравняване). Дадени са диференчните задачи

$$L_h y(x) = F(x), \quad x \in \overline{\omega},$$

$$L_h Y(x) = \overline{F}(x), \quad x \in \overline{\omega},$$

като за оператора L_h са изпълнени условията (15) за $\forall x \in \overline{\omega}$ и условието (16). Ако

$$(22) \quad |F(x)| \leq \overline{F}(x), \quad \forall x \in \overline{\omega},$$

то

$$|y(x)| \leq Y(x), \quad \forall x \in \overline{\omega}.$$

Доказателство. Дефинираме помощните функции

$$v(x) = Y(x) + y(x), \quad w(x) = Y(x) - y(x).$$

Като използваме линейността на оператора L_h и условието (22) получаваме

$$L_h v(x) = L_h Y(x) + L_h y(x) = \overline{F}(x) + F(x) \geq 0,$$

$$L_h w(x) = L_h Y(x) - L_h y(x) = \overline{F}(x) - F(x) \geq 0.$$

Следователно

$$v(x) \geq 0, \quad w(x) \geq 0, \quad -Y(x) \leq y(x) \leq Y(x),$$

от което следва твърдението.

Функцията $Y(x)$ се нарича *мажоранта* за решението на задачата (14).

Ще преформулираме Теорема 2 за случая на първа гранична задача (8), (9).

Теорема 2*. Дадени са диференчните задачи

$$L_h y(x) = f(x), \quad x \in \omega \qquad L_h Y(x) = \bar{f}(x), \quad x \in \omega$$

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma, \qquad Y(x) = \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma.$$

Ако при $x \in \omega$ са изпълнени условията (15) за положителност на коефициентите на оператора L_h и

$$|f(x)| \leq \bar{f}(x), \quad x \in \omega, \qquad |\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma,$$

то

$$|y(x)| \leq Y(x), \quad x \in \bar{\omega}.$$

Устойчивост и сходимост на диференчната схема за уравнението на Поасон

За да изследваме сходимостта на диференчната схема (7), (4), ще използваме Теоремата на Лакс. За целта трябва да получим априорна оценка от вида (17.8) за решението y , т.е. да докажем устойчивост по гранични условия и по дясна част.

Ще се възползваме от линейността на задачата (7), (4) и ще представим решението $y(x)$ като сума от решенията на следните две задачи:

$$(23) \quad L_h \tilde{y}(x) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$(24) \quad \tilde{y}(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma,$$

и

$$(25) \quad L_h \bar{y}(x) = f(x), \quad x \in \omega,$$

$$(26) \quad \bar{y}(x) = 0, \quad x \in \gamma.$$

т. е.,

$$(27) \quad y(x) = \tilde{y}(x) + \bar{y}(x).$$

1. Устойчивост по гранични условия

За решението на задача (23), (24) ще докажем следната

Теорема 3. Ако при $x \in \omega$ са изпълнени условията (15) за положителност на коефициентите и условие (16), за решението $\tilde{y}(x)$ на задачата (23), (24) е изпълнено

$$(28) \quad \max_{x \in \bar{\omega}} |\tilde{y}(x)| \leq \max_{x \in \gamma} |\mu(x)|,$$

т. е. то е устойчиво по гранични условия.

Доказателство. Разглеждаме спомагателната задача

$$L_h Y(x) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$Y(x) = \alpha, \quad x \in \gamma, \quad \alpha = \max_{x \in \gamma} |\mu(x)|.$$

От Теорема 2* тогава следва, че

$$(29) \quad |\tilde{y}(x)| \leq Y(x), \quad \forall x \in \bar{\omega}.$$

Дефинираме спомагателната функция

$$v(x) = \alpha - Y(x).$$

За нея имаме

$$L_h v(x) = L_h \alpha - L_h Y(x) = L_h \alpha = D(x)\alpha \geq 0,$$

следователно по Следствие 1 $v(x) \geq 0$, т.е. $Y(x) \leq \alpha$. От тук и от (29) получаваме (28).

Да обърнем внимание на това, че Теорема 3 ни гарантира устойчивост по гранични условия за решението на всяка диференчна задача от вида (23), (24), за чийто оператор L_h са изпълнени условията (15) и (16).

2. Устойчивост по дясна част и сходимост

За да докажем устойчивост по дясна част за решението $\bar{y}$ на задачата (25), (26), ще потърсим подходяща мажоранта $Y(x)$ и после ще приложим Теорема 2*. Да обърнем внимание, че тази мажоранта трябва да се избира в зависимост от конкретната диференчна задача. И така, ние ще я търсим за задачата (7),(4).

Да разгледаме функцията

$$Y(x) = K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad K = \text{const} > 0.$$

Ясно е, че $Y(x) \geq 0$ за $\forall x \in \bar{\Omega} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$. Имаме ($Y(x)$ е полином от втора степен!)

$$L_h Y(x) = -Y_{\bar{x}_1 x_1} - Y_{\bar{x}_2 x_2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} = 4K.$$

Образуваме диференчната задача

$$L_h Y(x) = 4K, \quad x \in \omega,$$

$$Y(x) = \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma,$$

където $\bar{\mu}(x)$ се определя от стойностите на $Y(x)$ в точките от γ , следователно $\bar{\mu}(x) \geq 0$, $x \in \gamma$.

Да изберем $K = \frac{1}{4} \|f\|_{C(\omega)}$. По Теорема 2*, приложена към задачите (25), (26) и

$$L_h Y(x) = \|f\|_{C(\omega)}, \quad x \in \omega,$$

$$Y(x) = \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma,$$

получаваме

$$\|\bar{y}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \max_{x \in \bar{\omega}} Y(x) \leq K(l_1^2 + l_2^2) = \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|f\|_{C(\omega)}.$$

Тогава от (27) и неравенството на триъгълника получаваме

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq \|\tilde{y}\|_{C(\bar{\omega})} + \|\bar{y}\|_{C(\bar{\omega})} \leq \|\mu\|_{C(\gamma)} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|f\|_{C(\omega)},$$

което означава устойчивост на решението $y(x)$ на задачата (7),(4) по гранични условия и по дясна част. Следователно задачата (7),(4) е коректна. Тъй като тя апроксимира диференциалната задача (1),(2) с грешка на апроксимация от ред 2 по h_1 и h_2 :

$$\|\psi\|_{C(\omega)} \leq \frac{M_4}{12} (h_1^2 + h_2^2), \quad M_4 = \max_{x \in \Omega} \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right| \right),$$

то по **Теоремата на Лакс**

$$\|u(x) - y(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_{C(\omega)} \leq \frac{M_4 (l_1^2 + l_2^2)}{48} (h_1^2 + h_2^2) = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Следователно имаме сходимост от втори ред на приближеното решение $y(x)$ към точното $u(x)$ в мрежова норма $C(\bar{\omega})$.

Забележка. Ако областта $\bar{\Omega}$ не е правоъгълник, а е област с криволинейна граница, то независимо от това, че въвеждаме равномерна правоъгълна мрежа, в близост до границата мрежата няма да бъде равномерна. Тогава за най-близките до границата възли (т. нар. пригранични възли), ако не може да се приложи изложената вече апроксимация върху равномерна мрежа, може да се приложи апроксимация по шаблона „кръст“ от неравномерна мрежа. Това обаче излиза извън рамките на настоящия курс и затова ще разгледаме две други възможности:

1) „Прост пренос“ на граничното условие – ако P е най-близката до разглеждания приграничен възел x_{ij} точка от границата, която лежи и върху права от мрежата, то можем да положим

$$y_{ij} = u(P).$$

Тази апроксимация има локална грешка $O(h_i)$, $i = 1$ или $i = 2$.

2) Апроксимация по метода на Колац:

$$y_{ij} = \frac{hy(P) + \delta y(Q)}{h + \delta},$$

където P е точката, за която вече стана дума в 1), а Q е най-близкият възел до възела x_{ij} , лежащ върху правата от мрежата, на която е и P , но вътре в областта.

Всъщност става въпрос за линейна апроксимация по точките $(P, y(P))$ и $(Q, y(Q))$.

Апроксимацията на Колац има локална грешка $O(h^2)$.

§ 19. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА

Постановка на диференциалната задача

Търси се функция $u = u(x, t)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad , \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

началното условие

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq l,$$

граничните условия

$$(3) \quad u(0, t) = \mu_1(t) \quad , \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T,$$

и условията за съгласуваност:

$$(4) \quad \varphi(0) = \mu_1(0) \quad , \quad \varphi(l) = \mu_2(0) \quad .$$

Ако

$f(x, t) \in C[\bar{Q}_T]$, $\bar{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$, $\varphi(x) \in C[0, l]$, $\mu_i(t) \in C[0, T]$, $i = 1, 2$, то решението $u(x, t)$ е непрекъсната функция в $\bar{Q}_T$: $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, като освен това $u(x, t) \in C^2(0, l) \times C^1(0, T]$. Ако условията за съгласуваност (4) не са изпълнени, решението $u(x, t)$ ще има особеност около точките $(0, 0)$ и $(l, 0)$.

Уравнението (1) описва процеса на разпространение на топлината в тънка пръчка с дължина l при зададено начално разпределение $\varphi(x)$ на температурата на пръчката и зададени закони $\mu_i(t)$ на изменение на температурата в двата и края. Променивата x е пространствена променлива, а променливата t има смисъл на „време“.

Диференчна схема

В областта $\bar{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$ въвеждаме мрежа $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$,

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, h = \frac{l}{n}, i = 0, 1, \dots, n\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{m}, j = 0, 1, \dots, m\}.$$

В задачите, зависещи от времето t , е възприето индекса по променливата t да се пише като горен индекс: $u(x_i, t_j) = u_i^j$ и да се говори за j -ти слой по времето. При тези означения за апроксимация на производната по t използваме:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta) = u_{t,i}^j + O(\tau), \quad t_j \leq \eta \leq t_{j+1},$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\tau} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \eta) = u_{t,i}^j + O(\tau^2), \quad t_j \leq \eta \leq t_{j+1},$$

а за апроксимация на производната по x :

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t_j) = u_{xx,i}^j + O(h^2), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}.$$

Използвайки (5) и (7), конструираме двуслойна схема с тегло σ , $0 \leq \sigma \leq 1$:

$$(8) \quad L_{h\tau} y_{h\tau} \equiv y_{t,i}^j - \sigma y_{\bar{x},i}^{j+1} - (1-\sigma) y_{\bar{x},i}^j = f_{h\tau,i}^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$(9) \quad y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$(10) \quad y_0^j = \mu_1^j, \quad y_n^j = \mu_2^j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При $\sigma = 0$ схемата е явна, при $\sigma > 0$ – неявна. Неявната схема със $\sigma = 1/2$ носи името *схема на Кранк-Никълсън*, а тази със $\sigma = 1$ – *чисто неявна схема*.

Като вземем предвид (5) и (7), за грешката на апроксимация $\psi_{h\tau}$ на уравнението (1) с диференчното уравнение (8) получаваме:

$$\psi_{h\tau} = L_{h\tau} u_{h\tau} - f_{h\tau} = O(\tau + h^2), \quad u \in C^4(0, l) \times C^2(0, T).$$

При специален избор на отношението

$$(11) \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

и подходяща апроксимация $f_{h\tau}$ на дясната част $f(x, t)$ можем да получим схеми с повишен ред на апроксимация.

Например, при

$$\sigma = 0, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}, \quad f_{h\tau,i}^j = f_i^j + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right), \quad u \in C^6(0, l) \times C^3(0, T),$$

получаваме

$$\psi_{h\tau}(x_i, t_j) = O(h^4).$$

Наистина, от (5) и (7) при $\gamma = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$ имаме:

$$\begin{aligned} \psi_{h\tau}(x_i, t_j) &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - f_{h\tau}|_i^j = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^j + \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^j + O(h^4) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^j - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i^j + O(h^4) - f_{h\tau}|_i^j = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^j - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^j \right) + \frac{h^2}{2} \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^j - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i^j \right) + O(h^4) - f_{h\tau}|_i^j = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_i^j - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^j \right) + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^j - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i^j \right) + O(h^4) - f_{h\tau}|_i^j. \end{aligned}$$

От уравнение (1) след диференциране получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Ще отбележим, че тъй като областта $\bar{Q}_T$ е правоъгълник, при предположение за непрекъснатост на производните можем да сменим реда на диференцирането. Тогава

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^j - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i^j = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^j$$

и при

$$f_{h\tau}|_i^j = f|_i^j + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^j \right)$$

получаваме $\psi_{h\tau}(x_i, t_j) = O(h^4)$.

При

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad f_{h\tau,i}^j = f_i^{j+\frac{1}{2}} = f(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}), \quad u \in C^4(0, l) \times C^3(0, T)$$

получаваме

$$\psi_{h\tau}\left(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}\right) = O(\tau^2 + h^2).$$

Наистина,

$$\begin{aligned} \psi_{h\tau}\left(x_i, t_j + \frac{\tau}{2}\right) &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - f_{h\tau,i}^{j+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^j + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{j+1} \right) + O(h^2) - f_{h\tau,i}^{j+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_i^{j+\frac{1}{2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i^{j+\frac{1}{2}} - f_{h\tau,i}^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Като използваме (6) и (7), получаваме *явна трислойна схема*:

$$(12) \quad L_{h\tau} y_{h\tau} \equiv y_{t,i}^j - y_{\bar{x},i}^j = f_i^j, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

която освен с началните и граничните условия (9) и (10) съответно, трябва да бъде допълнена и с диференчно уравнение за пресмятане на стойностите y_i^1 на първия слой по времето. Грешката на апроксимация $\psi_{h\tau}$ на уравнението (12) очевидно е

$$\psi_{h\tau,i}^j = L_{h\tau} u_{h\tau,i}^j - f_i^j = O(\tau^2 + h^2), \quad u \in C^4(0, l) \times C^3(0, T).$$

Каноничен вид на схемата с тегло

Във всеки възел $x = (x_i, t_j)$ шаблонът $Ш(x)$ се състои от 6 точки, а околността $Ш'(x)$ на този възел съдържа петте точки $(x_{i\pm 1}, t_{j+1})$, (x_i, t_j) , $(x_{i\pm 1}, t_j)$.

Да решим уравнението (8) относно y_i^{j+1} . Получаваме:

$$(13) \quad (1 + 2\sigma\gamma)y_i^{j+1} = (1 - 2(1 - \sigma)\gamma)y_i^j + \sigma\gamma(y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) + (1 - \sigma)\gamma(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) + \tau f_{h\tau,i}^j.$$

Условията за положителност на коефициентите са:

$$0 < \sigma < 1, \quad \sigma > 1 - \frac{1}{2\gamma}.$$

За да включим и граничните случаи $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$, можем да заменим горните неравенства с нестроги:

$$(14) \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{2\gamma}.$$

Това няма да наруши монотонността на схемата – достатъчно е да изключим от шаблона възлите с нулеви коефициенти пред съответните неизвестни. Началните и гранични условия (9) и (10) осигуряват изпълнението на условието $D(x) > 0$.

И така достатъчни условия за монотонност са:

- явна схема ($\sigma = 0$): $\gamma = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ (може да се докаже, че то е и необходимо!);
- чисто неявна схема ($\sigma = 1$): безусловно монотонна;

- схема на Кранк-Никълсън ($\sigma = 1/2$): $\gamma = \frac{\tau}{h^2} \leq 1$.

Следователно диференчната задача (8), (9), (10) има и то единствено решение, което е устойчиво по начални и гранични условия в мрежова норма $C(\bar{\omega}_{h\tau})$. От тук за граничната задача с $f \equiv 0$ следва сходимост на решението $y_{h\tau}$ към $u_{h\tau}$ в същата норма съответно със скорост:

- $O(h^2 + \tau)$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$;
- $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$.

За явната схема ($\sigma = 0$) при $\gamma \leq \frac{1}{2}$ може да се докаже и устойчивост по дясна част в мрежова норма $C(\bar{\omega}_{h\tau})$. От (13) при $\sigma = 0$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} |y_i^{j+1}| &\leq (1 - 2\gamma)|y_i^j| + \gamma(|y_{i+1}^j| + |y_{i-1}^j|) + \tau|f_i^j| \leq (1 - 2\gamma + 2\gamma) \max_{0 \leq i \leq n} |y_i^j| + \tau \max_{0 \leq i \leq n} |f_i^j| = \\ &= \|y^j\| + \tau \|f^j\|, \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} \|y^{j_0+1}\| &\leq \|y^{j_0}\| + \tau \|f^{j_0}\| \leq \|y^{j_0-1}\| + \tau \|f^{j_0-1}\| + \tau \|f^{j_0}\| \leq \dots \leq \|y^0\| + j_0 \tau \max_{0 \leq j \leq j_0} \|f^j\| \leq \\ &\leq \|\varphi\| + T \max_{0 \leq j \leq j_0} \|f^j\|, \end{aligned}$$

което означава устойчивост по начални данни и по дясна част. От тук следва и сходимост на решението на нехомогенната задача ($f_{h\tau,i}^j \neq 0$) със скорост $O(\tau + h^2)$.

Метод на хармониките (на фон Нойман) за изследване на устойчивостта

Този метод, макар и необоснован строго, дава възможност да се намерят условия за *устойчивост по начални данни* за хомогенните линейни диференчни схеми с постоянни коефициенти.

Нека търсим частни решения на хомогенната диференчна схема във вида

$$(15) \quad y_k^j(\theta) = q^j(\theta) e^{i k h \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

където i е имагинерната единица, а θ е произволно реално число. При $j = 0$ получаваме

$$y_k^0(\theta) = e^{i k h \theta},$$

следователно $y_k^0(\theta)$ е ограничено при всяко θ за $k = 0, 1, \dots, n$. Тогава за да бъдат решенията от вида (15) устойчиви по начални данни:

$$|y_k^j(\theta)| \leq |y_k^0(\theta)|, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

е достатъчно

$$|q(\theta)| \leq 1 \quad \text{при } \forall \theta.$$

Да приложим метода на хармониките към схемата с тегло. Заместваме y_k^j от (15) в (8) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{\tau} &= \frac{q\sigma}{h^2} (2 \cosh \theta - 2) + \frac{(1-\sigma)}{h^2} (2 \cosh \theta - 2), \\ q + 2q\sigma\gamma(1 - \cosh \theta) &= 1 - 2(1-\sigma)\gamma(1 - \cosh \theta), \end{aligned}$$

$$q \left(1 + 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} \right) = 1 - 4(1-\sigma)\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2},$$

$$q = \frac{1 - 4(1-\sigma)\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}}{1 + 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}}.$$

Следователно $|q| \leq 1$ при всяко θ , ако

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1 - 4(1-\sigma)\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}}{1 + 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}} \leq 1, & -1 - 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} &\leq 1 - 4(1-\sigma)\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}, \\ -1 - 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} &\leq 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} + 4\sigma\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}, \\ 4\gamma(1-2\sigma) \sin^2 \frac{h\theta}{2} &\leq 2, & \gamma(1-2\sigma) &\leq \frac{1}{2}, & 1-2\sigma &\leq \frac{1}{2\gamma}, \\ (16) \quad \sigma &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \end{aligned}$$

Следователно всички схеми със $\sigma \geq \frac{1}{2}$ са *абсолютно устойчиви* по начални данни. Да обърнем внимание на това, че схемата на Кранк-Никълсън е абсолютно устойчива, но е условно монотонна (при $\tau \leq h^2$).

При $\sigma = 0$ от (16) получаваме:

$$(17) \quad \gamma \leq \frac{1}{2}, \quad \tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Следователно явната двуслойна схема е *условно устойчива* – устойчива е при изпълнение на условието (17).

Задачи

1 зад. Да се построят явна и чисто неявна схеми, които да апроксимират с грешка $O(\tau + h^2)$ задачата

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= \beta_2 u(l, t) - \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \beta_1 &\geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0. \end{aligned}$$

Решение. Ще изложим апроксимирането само на двете гранични условия, които са от трети род, тъй като за уравнението и началното условие това е направено по-горе.

1. Явна схема

При явната схема апроксимацията на граничните условия се прави на j -тия слой по времето.

За апроксимиране на производната по x при $x=0$ можем да използваме разлика напред, като тази апроксимация ще бъде с грешка $O(h)$. След като видим кое точно прави апроксимацията с грешка от първи ред относно h , ще я коригираме така, че коригираната апроксимация да има грешка $O(h^2)$.

Имаме

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} = \beta_1 y_0^j - \mu_1^j.$$

За локалната грешка на апроксимация, след развиване по формулата на Тейлор и използване на граничното условие при $x=0$, получаваме

$$\psi_{h\tau,0}^j = \frac{u_1^j - u_0^j}{h} - \beta_1 u_0^j + \mu_1^j = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^j + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^j - \beta_1 u_0^j + \mu_1^j + O(h^2) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^j + O(h^2).$$

При предположение, че диференциалното уравнение се удовлетворява и при $x=0$, от него можем да изразим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^j$ и да заместим в израза за грешката. Получаваме последователно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^j &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \Big|_0^j; \\ \psi_{h\tau,0}^j &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^j + O(h^2) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \Big|_0^j = \frac{h}{2} \left(\frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau} + O(\tau) - f_0^j \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

От последното равенство виждаме, че ако апроксимираме граничното условие при $x=0$ с диференчното уравнение

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} - f_0^j \right) = \beta_1 y_0^j - \mu_1^j,$$

локалната грешка на апроксимация ще бъде $O(\tau h + h^2)$. Тъй като от условието за устойчивост $\tau \sim h^2$, то можем да считаме, че $\psi_{h\tau,0}^j = O(h^2)$.

За апроксимиране на производната по x при $x=l$ постъпваме по аналогичен начин, но тук можем да започнем с разлика назад.

Имаме

$$-\frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = \beta_2 y_n^j - \mu_2^j.$$

За локалната грешка на апроксимация получаваме

$$\psi_{h\tau,n}^j = -\frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h} - \beta_2 u_n^j + \mu_2^j = -\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n^j + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n^j - \beta_2 u_n^j + \mu_2^j + O(h^2) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n^j + O(h^2).$$

При предположение, че диференциалното уравнение се удовлетворява и при $x=l$ получаваме

$$\psi_{h\tau,n}^j = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n^j + O(h^2) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \Big|_n^j = \frac{h}{2} \left(\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + O(\tau) - f_n^j \right) + O(h^2).$$

Следователно, ако апроксимираме граничното условие при $x=l$ с диференчното уравнение

$$\frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - f_n^j \right) = \beta_2 y_n^j - \mu_n^j,$$

локалната грешка на апроксимация ще бъде $O(h^2)$.

2. Чисто неявна схема

При чисто неявната схема апроксимацията на граничните условия се прави на $(j+1)$ -вия слой по времето.

За граничното условие $x=0$ в този случай правим апроксимацията

$$\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = \beta_1 y_0^{j+1} - \mu_1^{j+1}.$$

За локалната грешка на апроксимация получаваме

$$\begin{aligned} \psi_{h\tau,0}^{j+1} &= \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} - \beta_1 u_0^{j+1} + \mu_1^{j+1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{j+1} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^{j+1} - \beta_1 u_0^{j+1} + \mu_1^{j+1} + O(h^2) = \\ &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^{j+1} + O(h^2) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \Big|_0^{j+1} = \frac{h}{2} \left(\frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau} + O(\tau) - f_0^{j+1} \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Следователно диференчното уравнение

$$\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} - f_0^{j+1} \right) = \beta_1 y_0^{j+1} - \mu_1^{j+1},$$

апроксимира граничното условие при $x=0$ за чисто неявната схема с локалната грешка на апроксимация $O(\tau h + h^2)$.

За граничното условие при $x=l$ правим апроксимацията

$$-\frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = \beta_2 y_n^{j+1} - \mu_2^{j+1}.$$

За локалната грешка на апроксимация имаме

$$\begin{aligned} \psi_{h\tau,n}^{j+1} &= -\frac{u_n^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}}{h} - \beta_2 u_n^{j+1} + \mu_2^{j+1} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n^{j+1} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n^{j+1} - \beta_2 u_n^{j+1} + \mu_2^{j+1} + O(h^2) = \\ &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_n^{j+1} + O(h^2) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) \Big|_n^{j+1} = \frac{h}{2} \left(\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + O(\tau) - f_n^{j+1} \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Следователно диференчното уравнение

$$\frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - f_n^{j+1} \right) = \beta_2 y_n^{j+1} - \mu_n^{j+1}$$

апроксимира граничното условие при $x=l$ за чисто неявната схема с локалната грешка на апроксимация $O(\tau h + h^2)$.

§ 20. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА ПРЕНОСА

Постановка на диференциалната задача. Точни решения

Линейното диференциално уравнение на преноса има вида

$$(1) \quad Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad , \quad c = \text{const}, \quad c > 0.$$

То моделира разпространението на частици във вещество, ако дължината на свободния пробег на частиците е значително по-голяма от размерите им (например: неутронните потоци в ядрените реактори; топлопроводността в газове, обусловена от дифузията на атоми и електрони, и т. н.). В (1) $u(x, t)$ е функцията на разпределение на частиците във веществото, c е скоростта им.

Да разгледаме хомогенното уравнение (1)

$$(1^*) \quad Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

То означава, че $u(x, t)$ е постоянна върху всяка от правите (характеристики)

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad x - ct = \text{const}.$$

Действително, ако $u(x, t)$ е решение на (1*), то производната $\frac{du}{dt}$ по една права от семейството $x - ct = \text{const}$ е

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Това означава, че $u(x, t)$ зависи от x и t чрез комбинацията $x - ct$, следователно

$$(2) \quad u(x, t) = v(x - ct).$$

Тази формула дефинира *общото решение на хомогенното уравнение (1*)*. В тези случаи разумни са следните задачи:

а) *задача на Коши:*

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty.$$

Точното решение на задачата (1*), (3) съгласно (2) е

$$u(x, t) = \varphi(x - ct).$$

Следователно, ако функцията $\varphi(x)$ е монотонна, то решението $u(x, t)$ ще бъде монотонна функция при всяко $t > 0$.

б) *гранична задача*

$$(4) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(5) \quad u(0, t) = \mu(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ако са изпълнени условията за съгласуваност

$$\frac{d^q \mu(0)}{dt^q} = (-c)^q \frac{d^q \varphi(0)}{dx^q} \quad , \quad 0 \leq q \leq p \text{ и } \varphi(x), \mu(t) \in C^p,$$

то

$$u(x, t) \in C^p(\Omega), \quad \overline{\Omega} = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T\}.$$

Точното решение на задачата (1*), (4), (5) при условие за съгласуваност $\varphi(0) = \mu(0)$ е

$$(6) \quad u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - ct), & t \leq \frac{x}{c} \\ \mu\left(t - \frac{x}{c}\right), & t \geq \frac{x}{c} \end{cases}.$$

Ако функциите $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ са монотонни функции, то и $u(x, t)$ е монотонна функция.

При $f(x, t) \neq 0$ се поставят същите задачи, но за да имаме $u(x, t) \in C^p(\Omega)$, трябва $f(x, t) \in C^{p-1}(\Omega)$ и условията за съгласуваност са по-сложни.

И така, ще разглеждаме задачата

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$(8) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad \varphi(x) \in C^1[0, a],$$

$$(9) \quad u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mu(t) \in C^1[0, T].$$

Диференчни схеми

В областта $\overline{\Omega}$ въвеждаме мрежа $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{a}{n}, t_j = j\tau, j = \overline{0, m}, \tau = \frac{T}{m}\}$$

1. Схема с тегло и разлики назад

Най-напред ще изследваме следното семейство диференчни схеми за хомогенното уравнение (7):

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + c\sigma \hat{y}_{\bar{x},k} + c(1 - \sigma)y_{\bar{x},k} = 0$$

или

$$(10) \quad \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + c\sigma \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{h} + c(1 - \sigma) \frac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h} = 0, \quad \gamma = \frac{c\tau}{h}.$$

Да представим схемата в каноничен вид:

$$(11) \quad (1 + \sigma\gamma) y_k^{j+1} = (1 - (1 - \sigma)\gamma) y_k^j + \sigma\gamma y_{k-1}^{j+1} + (1 - \sigma)\gamma y_{k-1}^j.$$

Условията за положителност на коефициентите са:

$$0 < \sigma < 1, \quad \gamma < \frac{1}{1 - \sigma}.$$

Отново (както при уравнението на топлопроводността) заместваем строгите

неравенства с нестроги, за да включим случаите $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ (при това изключваме съответните възли от шаблона $III(x_k, t_{j+1})$):

$$(12) \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \gamma \leq \frac{1}{1-\sigma} \left(\sigma \geq 1 - \frac{1}{\gamma} \right).$$

Следователно:

- при $\sigma = 0$ схемата (10) е монотонна при $\tau \leq \frac{h}{c}$;
- при $\sigma = 1$ схемата (10) е монотонна при произволни τ и h ;
- при $\sigma = \frac{1}{2}$ схемата (10) е монотонна при $\tau \leq \frac{2h}{c}$.

От монотонността (условна или абсолютна) следва устойчивост (условна или абсолютна) в мрежова норма $C(\bar{\omega}_{h\tau})$ по начални и гранични условия на хомогенната диференчна схема (10), а от там и сходимост на приближеното решение към точното от ред, равен на реда на апроксимацията:

$$\|u_{h\tau} - y_{h\tau}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = O(h + \tau) \quad \text{при} \quad \sigma \neq \frac{1}{2}, \quad \gamma \leq \frac{1}{1-\sigma},$$

$$\|u_{h\tau} - y_{h\tau}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = O(h + \tau^2) \quad \text{при} \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \gamma \leq 2.$$

Да отбележим, че схемата (10) при $\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$ има локална грешка на

апроксимация $O(h^2 + \tau^2)$, но както следва от условието (12), тя е немонотонна. Интересен е следният резултат (няма да го доказваме):

Теорема. Двуслойната линейна монотонна схема за уравнението $u_t + cu_x = 0$ не може да има втори или по-висок ред на апроксимация.

При $\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$ схемата (10) носи името схема на Вендроф (Wendroff)

и се записва в следния по симетричен вид

$$(13) \quad \frac{1}{2}(y_{t,k} + y_{t,k-1}) + \frac{1}{2}c(\hat{y}_{\bar{x},k} + y_{\bar{x},k}) = 0.$$

Може да се докаже, че ако $\sigma \geq \sigma_0$, схемата (10) (или (11)) е устойчива по начални данни, но в друга мрежова норма.

За нехомогенните монотонни схеми (т.е. тези, за които е изпълнен принципът на максимума) може да се докаже и устойчивост по дясна част. Например за нехомогенната схема

$$(14) \quad (1 + \sigma\gamma)y_k^{j+1} = (1 - (1 - \sigma)\gamma)y_k^j + \sigma\gamma y_{k-1}^{j+1} + (1 - \sigma)\gamma y_{k-1}^j + \tau f_k^j$$

при $\sigma = 0$ и при $\gamma \leq 1$ имаме:

$$\begin{aligned} |y_k^{j+1}| &\leq (1 - \gamma)|y_k^j| + \gamma|y_{k-1}^j| + \tau|f_k^j| \leq (1 - \gamma + \gamma) \max_{0 \leq k \leq n} |y_k^j| + \tau \max_{0 \leq k \leq n} |f_k^j| = \\ &= \|y^j\|_{C(\bar{\omega}_h)} + \tau \|f^j\|_{C(\bar{\omega}_h)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Следователно при всяко фиксирано $0 \leq j_0 \leq m - 1$ ще имаме

$$\begin{aligned} \|y^{j_0+1}\|_{C(\bar{\omega}_h)} &\leq \|y^{j_0}\|_{C(\bar{\omega}_h)} + \tau \|f^{j_0}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \|y^{j_0-1}\|_{C(\bar{\omega}_h)} + \tau \|f^{j_0-1}\|_{C(\bar{\omega}_h)} + \tau \|f^{j_0}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \\ &\leq \dots \leq \|y^0\|_{C(\bar{\omega}_h)} + (j_0+1)\tau \max_{0 \leq j \leq j_0} \|f^j\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \|\varphi\|_{C(\bar{\omega}_h)} + T \max_{0 \leq j \leq j_0} \|f^j\|_{C(\bar{\omega}_h)}, \end{aligned}$$

което означава устойчивост по начални данни и по дясна част в мрежовата норма $C(\bar{\omega}_{h\tau})$ на нехомогенната диференчна схема (14).

За нехомогенната диференчна схема (14) при $\sigma = 1$ получаваме:

$$\begin{aligned} (1+\gamma)y_k^{j+1} &= y_k^j + \gamma y_{k-1}^{j+1} + \tau f_k^j \\ y_k^{j+1} &= \frac{1}{1+\gamma} y_k^j + \frac{\gamma}{1+\gamma} y_{k-1}^{j+1} + \frac{\tau}{1+\gamma} f_k^j = \frac{1}{1+\gamma} y_k^j + \left(1 - \frac{1}{1+\gamma}\right) y_{k-1}^{j+1} + \frac{\tau}{1+\gamma} f_k^j \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\| &\leq \frac{1}{1+\gamma} \|y^j\| + \left(1 - \frac{1}{1+\gamma}\right) \|y^{j+1}\| + \frac{\tau}{1+\gamma} \|f^j\|, \\ \frac{1}{1+\gamma} \|y^{j+1}\| &\leq \frac{1}{1+\gamma} \|y^j\| + \frac{\tau}{1+\gamma} \|f^j\|, \\ \|y^{j_0+1}\| &\leq \|y^{j_0}\| + \tau \|f^{j_0}\| \leq \dots \leq \|y^0\| + T \max_{0 \leq j \leq j_0} \|f^j\|, \end{aligned}$$

което отново означава устойчивост по начални данни и дясна част в $C(\bar{\omega}_{h\tau})$, а от там и сходимост от ред $O(\tau + h)$.

2. Двуслойни схеми с разлика напред и централна разлика

Да изследваме двуслойната схема с разлика напред на долния слой:

$$\begin{aligned} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + c \frac{y_{k+1}^j - y_k^j}{h} &= 0, \quad c > 0, \quad y_t + cy_x = 0, \\ y_k^0 &= \varphi(x_k), \quad y_0^j = \mu(t_j), \end{aligned}$$

която има грешка на апроксимация $O(h + \tau)$. Нейният каноничен вид е

$$y_k^{j+1} = (1+\gamma)y_k^j - \gamma y_{k+1}^j, \quad \gamma = \frac{c\tau}{h}$$

Следователно тя е *абсолютно немонотонна*. Ще изследваме устойчивостта ѝ по метода на хармониките. Заместваме $y_k^j = q^j e^{ikh\theta}$, $\theta \neq 0$.

$$\begin{aligned} q^{j+1} e^{ikh\theta} &= (1+\gamma)q^j e^{ikh\theta} - \gamma q^j e^{i(k+1)h\theta} \\ q &= 1 + \gamma - \gamma(\cos h\theta + i \sin h\theta) = 1 + \gamma(1 - \cos h\theta) - i\gamma \sin h\theta, \\ |q|^2 &= (1 + \gamma(1 - \cos h\theta))^2 + \gamma^2 \sin^2 h\theta = (1 + 2\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2})^2 + \gamma^2 \sin^2 h\theta > 1. \end{aligned}$$

Следователно $|q| > 1$ при всяко фиксирано γ , ако $\sin \frac{h\theta}{2} \neq 0$ и схемата е *абсолютно неустойчива*.

Да изследваме двуслойната схема с разлика напред на горния слой:

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + c \frac{y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}}{h} = 0,$$

$$y_k^0 = \varphi(x_0) \quad , \quad y_0^j = \mu(t_j),$$

която също има грешка на апроксимация $O(h + \tau)$. Нейният *каноничен вид* е

$$(1 - \gamma)y_k^{j+1} = y_k^j - \gamma y_{k+1}^{j+1}, \quad \gamma = \frac{c\tau}{h}$$

и следователно схемата е *абсолютно немонотонна*.

Ще изследваме устойчивостта ѝ по метода на хармониките. Заместваме $y_k^j = q^j e^{ikh\theta}$, $\theta \neq 0$ и получаваме

$$(1 - \gamma)q^{j+1} e^{ikh\theta} = q^j e^{ikh\theta} - \gamma q^{j+1} e^{i(k+1)h\theta},$$

$$(1 - \gamma)q = 1 - \gamma q e^{ih\theta},$$

откъдето за q имаме

$$q = \frac{1}{1 - \gamma + \gamma e^{ih\theta}}.$$

Търсим условието, при което $|q| \leq 1$, т. е. $|z| = |1 - \gamma + \gamma e^{ih\theta}| \geq 1$. За z получаваме последователно

$$\begin{aligned} z &= 1 - \gamma + \gamma e^{ih\theta} = 1 - \gamma + \gamma \cos h\theta + i\gamma \sin h\theta = 1 - \gamma(1 - \cos h\theta) + i\gamma \sin h\theta = \\ &= 1 - 2\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} + 2\gamma \sin \frac{h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2} i. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \left(1 - 2\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2}\right)^2 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \cos^2 \frac{h\theta}{2} = \\ &= 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} + 4\gamma^2 \sin^4 \frac{h\theta}{2} + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \cos^2 \frac{h\theta}{2} = \\ &= 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\theta}{2} + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{h\theta}{2} + \cos^2 \frac{h\theta}{2}\right) = \\ &= 1 + 4\gamma(\gamma - 1) \sin^2 \frac{h\theta}{2}. \end{aligned}$$

Условието

$$1 + 4\gamma(\gamma - 1) \sin^2 \frac{h\theta}{2} \geq 1$$

ще бъде изпълнено при $\gamma \geq 1$, т. е. схемата е условно устойчива.

Двуслойната схема с централна разлика по x е

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + c \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0, \quad c > 0, \quad y_t + cy_0 = 0.$$

Каноничният ѝ вид е :

$$y_k^{j+1} = y_k^j - \frac{\gamma}{2} y_{k+1}^j + \frac{\gamma}{2} y_{k-1}^j$$

и следователно тя е *абсолютно немонотонна*.

По метода на хармониките получаваме:

$$q^{j+1} e^{ikh\theta} = q^j e^{ikh\theta} - \frac{\gamma}{2} q^j e^{i(k+1)h\theta} + \frac{\gamma}{2} q^j e^{i(k-1)h\theta},$$

$$q = 1 - \frac{\gamma}{2} (\cos h\theta + i \sin h\theta - \cos h\theta + i \sin h\theta) = 1 - i\gamma \sin h\theta,$$

$$|q|^2 = 1 + \gamma^2 \sin^2 h\theta > 1$$

при $\sin h\theta \neq 0$. Следователно и тази схема е *абсолютно неустойчива*.

Върху същия шаблон е конструирана схема (схема на Лакс-Вендроф) с грешка на апроксимация $O(\tau^2 + h^2)$:

$$y_k^{j+1} = (1 - \gamma^2) y_k^j - \frac{1}{2} (1 - \gamma) \gamma y_{k+1}^j + \frac{1}{2} (1 + \gamma) \gamma y_{k-1}^j, \quad \gamma = \frac{c\tau}{h},$$

която е немонотонна, но е условно устойчива при $\gamma \leq 1$. Действително по метода на хармониките получаваме:

$$q^{j+1} e^{ik h \theta} = (1 - \gamma^2) q^j e^{ik h \theta} - \frac{1}{2} (1 - \gamma) \gamma q^j e^{i(k+1)h\theta} + \frac{1}{2} (1 + \gamma) \gamma q^j e^{i(k-1)h\theta},$$

$$q = 1 - \gamma^2 - \frac{1}{2} (1 - \gamma) \gamma (\cos h\theta + i \sin h\theta) + \frac{1}{2} (1 + \gamma) \gamma (\cos h\theta + i \sin h\theta) =$$

$$= 1 - \gamma^2 + \gamma^2 \cos h\theta - i \gamma \sin h\theta = 1 - \gamma^2 (1 - \cos h\theta) - i \gamma \sin h\theta,$$

$$|q|^2 = (1 - \gamma^2 (1 - \cos h\theta))^2 + \gamma^2 \sin^2 h\theta = \dots = 1 + \gamma^2 (\gamma^2 - 1) (1 - \cos h\theta)^2.$$

Следователно $\gamma > 1$ е *достатъчно условие за неустойчивост*, а $\gamma \leq 1$ - *необходимо условие за устойчивост*, ако γ е фиксирано.

Да разгледаме най-накрая и модификация на схемата с централна разлика по x ,

която има вида

$$\frac{y_k^{j+1} - \frac{1}{2} (y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)}{\tau} + c \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0.$$

Каноничният вид на тази схема е

$$y_k^{j+1} = \frac{1}{2} (1 - \gamma) y_{k+1}^j + \frac{1}{2} (1 + \gamma) y_{k-1}^j$$

и следователно тя е *условно монотонна* при $\gamma \leq 1$.

§ 21. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА СТРУНАТА

Постановка на диференциалната задача

Търси се функция $u = u(x, t)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

началните условия

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(2^*) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

граничните условия

$$(3) \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и условията за съгласуваност:

$$(4) \quad \varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0), \quad \phi(0) = \mu_1'(0), \quad \phi(l) = \mu_2'(0).$$

При $f(x, t) \equiv 0$ уравнението (1) описва свободните трептения на еластична струна с дължина l , при $f(x, t) \neq 0$ - принудените трептения на струната; $u(x, t)$ е напречното преместване на струната, c е скоростта на разпространението на трептенията; $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ задават съответно началното отклонение и началната скорост на струната. Граничните условия (3) задават законите за движение на краищата на струната ($\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0$ означава неподвижни краища).

Задачата (1), (2), (2*), (3) се нарича *смесена (начално-гранична) задача*, а задачата (1), (2), (2*) при $-\infty < x < \infty$ - *задача на Коши*. Вместо условията (3) могат да се поставят и по-обща

$$(3^*) \quad \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \beta_1 u(0, t) &= \mu_1(t), \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \\ \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta_2 u(l, t) &= \mu_2(t), \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Правите с уравнения

$$(5) \quad x \pm ct = \text{const}$$

се наричат *характеристики*. През всяка точка (x, t) минават по две характеристики от семейството (5).

Да разгледаме *задачата на Коши* за уравнението (1) при $f(x, t) \equiv 0$:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и да потърсим решение от вида

$$u(x, t) = v_1(x - ct) + v_2(x + ct).$$

От началните условия (2) и (2*) получаваме

$$(7) \quad u(x, 0) = v_1(x) + v_2(x) = \varphi(x),$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c v_1'(x) + c v_2'(x) = \phi(x).$$

Интегрираме (8) в граници от x_0 до x :

$$-c(v_1(x) - v_1(x_0)) + c(v_2(x) - v_2(x_0)) = \int_{x_0}^x \phi(s) ds$$

или

$$(9) \quad -cv_1(x) + cv_2(x) = C + \int_{x_0}^x \phi(s) ds, \quad C = v_2(x_0) - v_1(x_0)$$

От (7) и (9) получаваме

$$v_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \phi(s) ds + \frac{C}{2c},$$

$$v_1(x) = \varphi(x) - v_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{C}{2c} - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \phi(s) ds.$$

Тогава

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v_1(x - ct) + v_2(x + ct) = \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \phi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} \phi(s) ds, \\ (10) \quad u(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s) ds. \end{aligned}$$

Това е известната *формула на Даламбер* за решението на задачата на Коши (6),(2), (2*). Тя показва, че решението в точката (x_0, t_0) се определя от началните данни в интервала $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Триъгълникът, определен от характеристиките през точката (x_0, t_0) и абсцисната ос, се нарича *триъгълник на определеност на диференциалната задача* (6), (2), (2*) както и на (1), (2), (2*) или (1), (2), (2*), (3).

Диференчна схема

В областта $\overline{\Omega} = [0, l] \times [0, T]$ въвеждаме мрежа $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$,

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, h = \frac{l}{n}, i = 0, 1, \dots, n\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{m}, j = 0, 1, \dots, m\}.$$

За апроксимация на вторите производни по t и по x използваме съответно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(i,j)} &= \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(i,j)} &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t_j), \end{aligned}$$

ако $u(x, t) \in C^4(\Omega)$. Така за апроксимиране на уравнението (1) във вътрешните възли на мрежата използваме диференчните уравнения

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

чиято локална грешка на апроксимация е $O(h^2 + \tau^2)$.

За апроксимиране на началното условие (2*) с локална грешка на апроксимация $O(\tau^2)$ използваме познатия начин за повишаване реда на апроксимация:

$$\begin{aligned}\theta_i &= \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} - \phi_i = \frac{1}{\tau} \left(u_i^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\tau^3) - u_i^0 \right) - \phi_i = \\ &= \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\tau^2) = \frac{\tau}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) + f_i^0 \right) + O(\tau^2) = \\ &= \frac{\tau}{2} \left(c^2 \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} + O(h^2) + f_i^0 \right) + O(\tau^2).\end{aligned}$$

Следователно диференчното уравнение

$$\frac{y_i^1 - \phi_i}{\tau} - \frac{\tau}{2} \left(c^2 \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + f_i^0 \right) = \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

апроксимира началното условие (2*) с грешка $O(\tau^2 + \tau h^2)$.

И така диференчната схема е :

$$(11) \quad \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

$$(12) \quad y_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$(13) \quad y_i^1 = \phi_i + \frac{\tau^2 c^2}{2h^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0 + \tau \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(13) \quad y_0^j = \mu_1^j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad y_n^j = \mu_2^j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Това е явна трислойна схема по шаблона „кръст“.

Да запишем уравненията (11) и (13) в каноничен вид:

$$(15) \quad y_i^{j+1} = 2(1 - \gamma^2) y_i^j + \gamma^2 (y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) - y_i^{j-1} + \tau^2 f_i^j,$$

$$(16) \quad y_i^1 = (1 - \gamma^2) \phi_i + \frac{\gamma^2}{2} (\phi_{i+1} + \phi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0 + \tau \phi_i, \quad \gamma = \frac{\tau c}{h}.$$

Както се вижда, за уравнението (15) условието за положителност на коефициентите не е изпълнено заради $B(x, x_{i,j-1}) = -1$. За положителност на коефициентите пред y_i^j и ϕ_i трябва да имаме

$$(17) \quad \gamma = \frac{c\tau}{h} \leq 1.$$

Следователно за схемата (11)-(14) принципът за максимума не е в сила и не можем да го използваме, за да докажем устойчивост в мрежова норма $C(\overline{\omega}_{h\tau})$. Също така схемата не е монотонна. Все пак условието $\tau \leq h/c$, както ще видим, се получава и по метода на хармониките за изследване на устойчивостта на хомогенното диференчно уравнение (11).

Преди това да обърнем внимание на следното. При пресмятане на $y_{h\tau}$ в точка (x_i, t_j) участват стойностите на $\phi(x)$ в интервала $I_1 = [x_i - jh, x_i + jh]$. Триъгълникът, определен от точките (x_i, t_j) , $(x_i - jh, 0)$, $(x_i + jh, 0)$, се нарича *триъгълник на определеност на диференчната задача*. Характеристиките пресичат

абсцисната ос в точките $x_i - ct_j = x_i - cj\tau = x_i - \gamma jh$ и $x_i + ct_j = x_i + cj\tau = x_i + \gamma jh$. Ясно е, че ако $\gamma > 1$, то $I_1 = [x_i - jh, x_i + jh] \subset I_2 = [x_i - \gamma jh, x_i + \gamma jh]$ и следователно триъгълникът на определеност на диференциалната задача ще съдържа триъгълника на определеност на диференциалната задача. В този случай приближеното решение в точка (x_i, t_j) няма да използва всички начални данни, които определят точното решение, и сходимост на приближеното решение към точното не може да се очаква. От тези съображения мрежата трябва да се избира така, че $\tau \leq h/c$.

Изследване на устойчивостта по метода на хармониките

Нека $y_k^j = q^j e^{ikh\theta}$ и да го заместим в хомогенното уравнение (11). Последователно получаваме

$$\begin{aligned} & \frac{q^{j+1} - 2q^j + q^{j-1}}{\tau^2} e^{ikh\theta} - c^2 q^j \frac{e^{i(k+1)h\theta} - 2e^{ikh\theta} + e^{i(k-1)h\theta}}{h^2} = 0, \\ & q^2 - 2q + 1 - \gamma^2 q (2 \cos h\theta - 2) = 0, \\ & q^2 - 2q + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} q + 1 = 0, \\ (18) \quad & q^2 - 2 \left(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \right) q + 1 = 0. \end{aligned}$$

За да бъдат корените q_1 и q_2 на квадратното уравнение $aq^2 + bq + c = 0$ по модул по-малки или равни на 1, е необходимо и достатъчно

$$c \leq a,$$

$$|b| \leq a + c.$$

За уравнението (18) имаме $c = a = 1$, а второто неравенство дава

$$2 \left| 1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \right| \leq 2,$$

$$-1 \leq 1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \leq 1.$$

Дясното неравенство е изпълнено при всяко γ , а лявото става

$$2\gamma^2 \sin^2 \frac{h\theta}{2} \leq 2,$$

което е изпълнено при $\gamma \leq 1$.

Може да се докаже, че условието $\gamma \leq 1$ е достатъчно за устойчивост по начални данни в специална (енергетична) норма.

Задачи

1. зад. Да се реши задачата на Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

в областта, определена от характеристиките, построени в точката $M(1, 3)$ и оста Ox , като се използва квадратна мрежа със стъпки $h = \tau = 1$.

Решение. Характеристиките през точката $M(1,3)$ са с уравнения $h_1 : x = t - 2$ и $h_2 : x = -t + 4$. Тогава областта, в която се търси решението, е характеристичният триъгълник с върхове $M(1,3)$, $A(-2,0)$ и $B(4,0)$.

От първото начално условие имаме $y_{-2}^0 = y_{-1}^0 = y_0^0 = y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0$.

За апроксимиране на второто начално условие ще въведем фиктивен ред с номер (-1). Тогава правим апроксимация на диференциалното уравнение на нулевия слой по времето и на производната във второто начално условие с централна разлика и от получените две апроксимации изключваме стойностите на приближеното решение на фиктивния слой. Имаме

$$\frac{y_i^1 - 2y_i^0 + y_i^{-1}}{1^2} = \frac{y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0}{1^2} + 12x_i,$$

$$\frac{y_i^1 - y_i^{-1}}{2.1} = 0,$$

и следователно

$$y_i^1 = 6x_i.$$

Тогава за стойностите на приближеното решение в точките от първия слой на мрежата получаваме $y_{-1}^1 = -6$, $y_0^1 = 0$, $y_1^1 = 6$, $y_2^1 = 12$, $y_3^1 = 18$.

От апроксимацията на уравнението при $j \geq 1$ имаме

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{1^2} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{1^2} + 12x_i,$$

и следователно

$$y_i^{j+1} = y_{i-1}^j + y_{i+1}^j - y_i^{j-1} + 12x_i.$$

При $j = 1$ получаваме $y_0^2 = 0$, $y_1^2 = 24$, $y_2^2 = 48$, а при $j = 2$ имаме $y_1^3 = 54$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения. Унив. изд „Св. Кл. Охридски”, 1991.**
2. **Х. Щетер, Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Мир, Москва, 1978.**
3. **E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations. Springer Verlag, 1987.**
4. **А. А. Самарский, А. В. Гулин, Численные методы. М., Наука, 1989.**
5. **Б. Сендов, В. Попов, Числени методи. Част 1, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски”, 1996.**
6. **Б. Сендов, В. Попов, Числени методи. Част 2, София, Наука и изкуство, 1978.**
7. **Б. Боянов, Лекции по числени методи. Дарба, София, 1998.**