СЛЕДОПТИМАЛЕН АНАЛИЗ
В ЛИНЕЙНОТО ОПТИМИРАНЕ

Съдържание

I Основни понятия

1. Увод

В решените досега линейни оптимизационни задачи *данните* (векторите **c** и **b** и матрицата **A**) бяха постоянни (непроменящи се). Основната задача на *следоптималния анализ* (известен още като *анализ на чувствителността*) в линейното оптимиране е проследяване на изменението на оптималното решение на дадена линейна оптимизационна задача, ако след намирането му се налагат промени в данните.

За илюстриране на методите на следоптималния анализ най-напред ще разгледаме една примерна задача, която е частен случай на *задачата за максимална печалба при ограничени ресурси*.

2. Примерна задача

Малка фабрика произвежда два вида бои — за външно (E) и за вътрешно (I) боядисване. Периодите на производство и реализация на продукцията съвпадат. За производството на боите се използват два вида суровини — A и B. Разходите на суровините A и B за 1 t от всеки вид боя и максималните запаси от тях са дадени в таблица I.1.

Таблица I.1. Данни за задачата за боите

Суровина	Разход на суровините за 1 t боя [t]		Максимален запас [t]
	боя E	боя I	
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучаването на търсенето е показало, че продажбата на боя I никога не превишава продажбата на боя E с повече от 1 t. Освен това е установено, че продажбата на боя I никога не е повече от 2 t. Цената на 1 t боя E е 3000 лв., а на 1 t боя I — 2000 лв. Какво количество боя от всеки вид трябва да се произвежда, така че доходът от реализацията на продукцията да бъде максимален?

Математически модел. Нека фабриката произвежда x_E t боя E и x_I t боя I. Тогава получаваме следната линейна оптимизационна задача:

$$
\max z = 1000(3x_E + 2x_I),
$$

$$
\begin{aligned}
x_E + 2x_I &\le 6,\\
2x_E + x_I &\le 8,\\
-x_E + x_I &\le 1,\\
x_I &\le 2,\\
x_E \ge 0,\ x_I &\ge 0.
\end{aligned}
\tag{I.1}
$$

Каноничната задача, съответна на (I.1), която ще решаваме, е

$$
\min -z = -3x_E - 2x_I,
$$

$$
\begin{aligned}
x_E + 2x_I + s_1 \qquad\qquad &= 6,\\
2x_E + x_I \quad + s_2 \qquad &= 8,\\
-x_E + x_I \qquad + s_3 \quad &= 1,\\
x_I \qquad\qquad + s_4 &= 2,\\
x_E \ge 0,\ x_I \ge 0,\ s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0,\ s_3 \ge 0,\ s_4 &\ge 0.
\end{aligned}
\tag{I.2}
$$

В табл. I.2 са показани последователните итерации на симплекс метода (СМ), които водят до намиране на оптималното решение на задача (I.2). От последната итерация заключаваме, че оптималното решение на дадената задача е векторът $\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ и максималната печалба е $\frac{38}{3}$ хил. лв.

Двойствената на изходната задача (I.1) е

$$
\min v = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4,
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 - y_3 \qquad &\ge 3,\\
2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\ge 2,\\
y_{1,2,3,4} &\ge 0.
\end{aligned}
\tag{I.3}
$$

Двойствената на каноничната задача (I.2) е

$$
\max w = 6\pi_1 + 8\pi_2 + \pi_3 + 2\pi_4,
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_1 + 2\pi_2 - \pi_3 \qquad &\le -3,\\
2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &\le -2,\\
\pi_{1,2,3,4} &\le 0.
\end{aligned}
\tag{I.4}
$$

Връзката между задачите (I.3) и (I.4) и оптималните им решенията е

$$
\mathbf{y}^* = -\boldsymbol{\pi}^*, \quad \boldsymbol{\pi}^* = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{y}^* = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}.
$$

Таблица I.2. Решение на примерната задача

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	$\boxed{2}$	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	0	$\boxed{3/2}$	1	$-1/2$	0	0	2
x_E	-3	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12
x_I	-2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_E	-3	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$

3. Теоретични бележки

За конкретна итерация на симплекс метода всички данни в симплексната таблицата (СТ) се получават от изходните данни $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ и обратната матрица на текущия базис $\mathbf{B}^{-1}$, а именно:

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j, \quad \overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \overline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \quad z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Като положим $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$, виждаме, че $\overline{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j$, т. е. относителната оценка на променливата x_j на всяка итерация на СМ е равна на разликата между дясната и лявата страна на съответното ограничение на двойствената задача.

Ако началният базис е само от допълнителни променливи, то след получаване на оптималното решение относителните оценки дават оптималните стойности на двойствените променливи, защото

$$\overline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I} = -\boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{y}^* = \overline{\mathbf{c}}.$$

4. Основни задачи на следоптималния анализ

4.1. С колко да се съкратят или увеличат запасите от ресурси?

След намиране на оптималното решение напълно логично е да се изясни как ще му се отрази евентуално изменение на запасите от ресурси. Особено важни са следните два въпроса:

- С колко може да се увеличи запасът на някой ресурс като се подобри стойността на целевата функция?
- С колко може да се намали запасът на някой ресурс като се запази стойността на целевата функция?

Отговор на горните два въпроса дава *следоптималният анализ на дясната страна на ограниченията*.

Определение I.1. Едно ограничение ще наричаме *активно* (*пасивно*), ако в оптималното решение то се изпълнява като равенство (строго неравенство). *Дефицитен* се нарича този ресурс, на който отговаря *активно* ограничение. В противен случай той се нарича *недефицитен*.

При следоптималния анализ на дясната страна се изяснява:

- пределно допустимото увеличаване на запаса от дефицитен ресурс, позволяващо да се подобри намереното оптимално решение;
- пределно допустимото намаляване на запаса от недефицитен ресурс, запазващо намерената оптимална стойност на целевата функция.

Очевидно е, че увеличаването на недефицитен ресурс не променя оптималното решение и стойността на целевата функция. Съкращаването на дефицитен ресурс *никога* не подобрява стойността на целевата функция.

4.2. Увеличаването на кой от ресурсите е най-изгодно?

Отговор на този въпрос дават *двойствените цени* на отделните ресурси.

4.3. В какви граници е допустимо изменение на коефициентите на целевата функция?

С този въпрос се занимава *следоптималният анализ на коефициентите на целевата функция*. Изследват се следните въпроси:

- Какъв е интервалът на изменение на даден коефициент на целевата функция, при който оптималното решение не се променя?

- Как трябва да се измени даден коефициент на целевата функция, така че някой недефицитен ресурс (с базисна допълнителна променлива) да стане дефицитен (с небазисна допълнителна променлива) и обратното — дефицитен ресурс да стане недефицитен?

II Интервали на устойчивост

Интервалите на устойчивост ни позволяват да определим в какви граници може да се изменя *един елемент от данните на задачата* (един коефициент в целевата функция, дясната страна на едно ограничение или един елемент на матрицата **A**), като останалите данни не се променят, така че да се запази намереният оптимален базис.

1. Изменения в коефициентите на целевата функция

1.1. Небазисна променлива

Изменението в коефициент на целевата функция пред небазисна променлива влияе *само* на относителната оценка на тази променлива. Нека коефициентът пред небазисната променлива x_j се изменя от c_j на $c_j + \delta$. Тогава

$$\overline{c}_j^{\text{нов}} = (c_j + \delta) - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = \overline{c}_j + \delta,$$

откъдето $\overline{c}_j^{\text{нов}} \geq 0$ дава

$$-\overline{c}_j \leq \delta < +\infty.$$

Ако в *примерната задача* (която е за максимум) коефициентът пред s_1 може да се изменя от 0 до δ_1, тогава в задача (I.2) (която е за минимум) съответният коефициент ще се изменя от 0 до $-\delta_1$ и следователно $-\frac{1}{3} \leq -\delta_1$, откъдето $\delta_1 \leq \frac{1}{3}$.

1.2. Базисна променлива

Изменението на коефициент в целевата функция пред базисна променлива влияе на относителните оценки на всички небазисни променливи. Нека коефициентът пред i-тата базисна променлива се увеличи с δ. Тогава векторът $\mathbf{c}_B$ се променя на $\mathbf{c}_B + \delta\mathbf{e}_i$ (с $\mathbf{e}_i$ означаваме i-тия единичен вектор). Относителната оценка на j-тата небазисна променлива е равна на

$$\overline{c}_j^{\text{нов}} = c_j - (\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} + \delta\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j - \delta\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = \overline{c}_j - \delta w_{ij},$$

където $w_{ij} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j)_i$. За да остава решението оптимално, трябва да е изпълнен критерият за оптималност

$$\overline{c}_j^{\text{нов}} = \overline{c}_j - \delta w_{ij} \geq 0, \text{ т. е. } \delta w_{ij} \leq \overline{c}_j.$$

Ако $w_{ij} > 0$, то $\delta \leq \dfrac{\overline{c}_j}{w_{ij}}$ или $\delta \leq \min\limits_{j:w_{ij}>0} \dfrac{\overline{c}_j}{w_{ij}}$.

Ако $w_{ij} < 0$, то $\delta \geq \dfrac{\overline{c}_j}{w_{ij}}$ или $\delta \geq \max\limits_{j:w_{ij}<0} \dfrac{\overline{c}_j}{w_{ij}}$.

Ако липсват числа $w_{ij} > 0$, то $\delta < +\infty$. Аналогично, ако няма $w_{ij} < 0$, то $\delta > -\infty$.

Нека в *примерната задача* печалбата от продажбата на 1 t боя E се е променила от 3 на $3 + \delta_E$ хил. лв. Тогава целевата функция в задача (I.1) има вида $(3 + \delta_E)x_E + 2x_I$, докато в задача (I.2) е $-(3 + \delta_E)x_E - 2x_I$. За определяне на интервала на устойчивост забелязваме, че задачата има две небазисни променливи и в оптималното решение това са s_1 и s_2 (табл. I.2 на стр. 5). В реда на x_E съответните коефициенти са $-\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Тогава

$$\frac{1/3}{-1/3} = -1 \leq -\delta_E \leq \frac{4/3}{2/3} = 2, \text{ или } -2 \leq \delta_E \leq 1.$$

Следователно коефициентът пред x_E може да приема стойности от 1 до 4 и полученото решение да остава оптимално. Стойността на целевата функция се променя на $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_B + \delta\overline{\mathbf{x}}_{B_i}$.

2. Изменения в дясната страна на ограниченията

Да разгледаме влиянието на изменението $b_i^\delta = b_i + \delta$ за някое $1 \leq i \leq m$. Обикновено се разглежда случаят, когато b_i е дясна страна на ограничение неравенство, в което е въведена допълнителна променлива. Искаме да определим такъв интервал на изменение на b_i, в който текущото решение остава оптимално. В случай на ограничение равенство бихме могли да разгледаме съответната изкуствена променлива като неотрицателна допълнителна променлива, която трябва да бъде небазисна в допустимо решение.

2.1. Базисна допълнителна променлива

Ако допълнителната променлива на i-тото ограничение е базисна в оптималното решение, то това ограничение е пасивно в решението. Тук анализът е прост — стойността на допълнителната базисна променлива дава интервала на изменение, в който съответната променлива намалява (или се увеличава, ако ограничението е $\geq$).

Решението остава допустимо и оптимално в интервала $b_i + \delta$, където

$$-x_s^{\text{опт}} \le \delta < \infty \text{ за ограничение от тип } \le,$$

$$-\infty < \delta \le x_s^{\text{опт}} \text{ за ограничение от тип } \ge.$$

Тук $x_s^{\text{опт}}$ е стойността на съответната допълнителна променлива в оптималното решение.

В *примерната задача* базисни са допълнителните променливи s_3 и s_4. Интервалите им на устойчивост са

$$-3 \le \delta_3 < \infty \text{ (за } s_3), \quad -\tfrac{2}{3} \le \delta_4 < \infty \text{ (за } s_4).$$

2.2. Небазисна допълнителна променлива

Ако допълнителната променлива е небазисна и следователно е нула, изходното ограничение е активно в оптималното решение. На пръв поглед ни се струва, че, тъй като ограничението е активно, няма възможност за изменение на стойността на дясната страна на такова ограничение, в частност няма възможност b_i да намалее (за ограничение $\le$). Оказва се обаче, че променяйки вектора $\mathbf{b}$, ние изменяме и вектора $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ и тъй като съществува интервал на изменение, в който $\overline{\mathbf{x}}_B \ge 0$, то решението остава оптимално в смисъл, че базисът не се променя. Да отбележим, че в този случай $\overline{\mathbf{x}}_B$ и $z = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_B$ се променят.

Да разгледаме ограничението

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + x_s = b_k,$$

където x_s е допълнителна променлива. Ако дясната страна стане $b_k+\delta$, тогава векторът от десните страни е

$$\mathbf{b}_\delta = \mathbf{b} + \delta\mathbf{e}_k.$$

Новият вектор $\overline{\mathbf{x}}_B$ след направените промени означаваме с $\overline{\mathbf{x}}_B^\delta$. Следователно

$$\overline{\mathbf{x}}_B^\delta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_\delta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \delta\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k = \overline{\mathbf{x}}_B + \delta\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k.$$

Но $\mathbf{w}_s = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k$ за ограничение $\le$ и $\mathbf{w}_s = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k$ за ограничение $\ge$. Тогава

$$\overline{\mathbf{x}}_B + \delta\mathbf{w}_s \ge \mathbf{0} \text{ за ограничение от тип } \le,$$

$$\overline{\mathbf{x}}_B - \delta\mathbf{w}_s \ge \mathbf{0} \text{ за ограничение от тип } \ge.$$

В първия случай получаваме

$$\max_{i:w_{is}>0} \frac{-\overline{x}_{B_i}}{w_{is}} \le \delta \le \min_{i:w_{is}<0} \frac{-\overline{x}_{B_i}}{w_{is}}.$$

Ако няма $w_{is} > 0$, то $\delta > -\infty$, а ако няма $w_{is} < 0$, то $\delta < \infty$.

Нека в *примерната задача* $\mathbf{b}_\delta = (6+\delta, 8, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. Тогава

$$\overline{\mathbf{x}}_B^\delta = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_\delta = \left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}\delta, \tfrac{10}{3} - \tfrac{1}{3}\delta, 3 - \delta, \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\delta\right)^{\mathrm{T}},$$

откъдето

$$-2 \le \delta \le \min(10, 3, 1) \text{ или } -2 \le \delta \le 1.$$

Координатите на вектора $\overline{\mathbf{x}}_B^\delta$ се определят от СТ с оптималното решение (третата итерация на табл. I.2 на стр. 5) като сбор от стълба $\overline{\mathbf{x}}_B$ и стълба пред s_1 (равен на $\mathbf{e}_1$ при първата итерация), умножен с δ. Следователно базисът на оптималното решение се запазва, ако количеството на суровината А се изменя от 4 до 7 t. Изменението на целевата функция е $\frac{1}{3}\delta$ хил. лв.

3. Изменения в матрицата на ограниченията

По правило коефициентите a_{ij} са известни с по-голяма достоверност, отколкото координатите на векторите на целевата функция или на дясната страна, тъй като те обикновено задават технологични връзки и не са свързани така силно с пазарните промени, както цените или ресурсите.

Ще разгледаме изменения на елементи на матрицата $\mathbf{A}$, отговарящи само на небазисни променливи. Промените в стойностите на елементи на матрицата на ограниченията, съответстващи на базисни променливи, водят до промени в матрицата на базиса $\mathbf{B}$ и да се анализира това е доста сложно. В този случай най-добре е пресмятанията да бъдат извършени отново с новите стойности.

Да разгледаме j-тата небазисна променлива и съответния ѝ стълб $\mathbf{A}_j$. Ако i-тата координата на този вектор се измени с δ, то това изменение влияе само на нейната относителна оценка $\overline{c}_j$ по следния начин. Ако

$$\mathbf{A}_j^\delta = \mathbf{A}_j + \delta\mathbf{e}_i,$$

то

$$\overline{c}_j^{\text{нов}} = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}_j + \delta\mathbf{e}_i) = \overline{c}_j - \delta\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i = \overline{c}_j - \delta\pi_i,$$

където $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$ е векторът с двойствените променливи. Следователно решението остава оптимално ($\overline{c}_j^{\text{нов}} \ge 0$), ако

$$\delta \le \frac{\overline{c}_j}{\pi_i} \text{ при } \pi_i > 0, \qquad \delta \ge \frac{\overline{c}_j}{\pi_i} \text{ при } \pi_i < 0.$$

III Дискретни изменения в данните на задачата

След получаването на оптимално решение за зададените изходни данни ръководството на фабриката за бои може да прояви интерес към изследване на следните ситуации:

1. Производственият отдел смята за необходимо да промени плана за производство през следващата седмица, тъй като е необходимо преразпределяне на суровината B по такъв начин, че разходът ѝ за производство на бои да бъде намален с 2 t. При това количеството на суровината A се увеличава с 3 t.

2. Търговският отдел предполага, че промените на пазара през следващото полугодие ще позволят да се продават не 2, а $3\frac{1}{2}$ t боя I.

3. Отделът за изследвания и разработки предлага да се внедри нов технологичен процес, който позволява да се намали консумацията на суровините A и B при производството на 1 t боя E от 1 и 2 t съответно до 0,8 и 1,7 t.

4. Финансовият отдел предполага, че изострянето на конкуренцията на пазара ще доведе до намаляване на цената на боите E и I съответно до 2,5 и 1,5 хил. лв. за тон.

5. Един от членовете на групата по изследване на операциите, анализирайки данните по реализацията на продукцията за миналата година, е стигнал до извода, че търсенето на боя E никога не е било по-голямо от 3 t. Той препоръчва производството на боя E да не надхвърля тази величина.

6. Търговският отдел се отнася скептично към идеята за продажба на по-евтин вид боя E в някои райони.

Това са типични ситуации, които могат да бъдат изследвани с помощта на методите на следоптималния анализ. Те могат да се разглеждат поотделно или в различни комбинации. Крайният резултат на изследването трябва да даде отговор на следния въпрос: Ще се измени ли полученото оптимално решение и ако да, то кое е новото оптимално решение?

На въпроса по какъв начин всяка от горните ситуации може да промени намереното вече оптимално решение може да се даде следният отговор:

1. решението може да стане недопустимо;

2. решението може да стане неоптимално;

3. и едното, и другото (когато се измени матрицата $\mathbf{B}^{-1}$).

Като разгледаме внимателно как се променят елементите на СТ, виждаме, че:

1. До недопустимост на текущото оптимално решение може да се стигне само при промяна на запасите от ресурси (дясната страна на ограниченията) и/или добавяне на нови ограничения (вж. 1, 2, 5).

2. До неоптималност на текущото оптимално решение може да се стигне само при промяна в коефициентите на целевата функция и/или промяна в определени елементи на матрицата $\mathbf{A}$ (вж. 3, 4). Това може да се случи и при включването в модела на нов вид производство (вж. 6).

Като изхождаме от гореизложеното, следоптималният анализ на модела може да се представи по следния начин:

Стъпка 1. Решаваме изходната задача на линейното оптимиране и получаваме СТ за оптималното решение. Към Стъпка 2.

Стъпка 2. След внасяне на необходимите корекции в модела намираме новите стойности на елементите в СТ, съответстваща на решението от Стъпка 1 (при стария оптимален базис). Към Стъпка 3.

Стъпка 3. Ако решението в новата СТ (от Стъпка 2) е неоптимално, към Стъпка 4. Ако решението е недопустимо, към Стъпка 5. Ако решението е оптимално и допустимо, `Край`.

Стъпка 4. С помощта на правия СМ намираме ново оптимално решение или показваме, че целевата функция е неограничена върху допустимото множество. `Край`.

Стъпка 5. С помощта на двойствения СМ (ДСМ) получаваме допустимо решение или показваме, че допустимото множество на задачата е празно. `Край`.

1. Изменения в условията на задачата, влияещи върху допустимостта на решението

1.1. Изменения в дясната страна на ограниченията

В този случай

$$\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}} = \mathbf{B}^{-1}_{\text{опт}}\mathbf{b}_{\text{нов}}.$$

а) Ако $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}} \geq \mathbf{0}$ (допустим), то новото оптимално решение има същия базис, базисните му координати са $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}}$ и стойността на целевата функция е $z_{\text{нов}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}}$.

Нека в *примерната задача* запасът от суровината А е увеличен от 6 t на 7 t. Как ще се отрази това на оптималното решение? Тук $\mathbf{b}_{\text{нов}} = (7, 8, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, откъдето $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}} = (2, 3, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. Последният вектор е допустим и следователно съдържа базисните координати на новото оптимално решение. Новата оптимална стойност на целевата функция е $z_{\text{нов}} = 13$ (хил. лв).

б) Ако $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}} \ngeq \mathbf{0}$ (недопустим), търсим ново допустимо решение с помощта на ДСМ.

Нека запасите от суровините А и В не са 6 t и 8 t, а съответно 7 t и 4 t. Тогава $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}} = \mathbf{B}^{-1}(7, 4, 1, 2)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, -2, -\frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. Текущото решение е недопустимо. В табл. I.2 заместваме информацията в стълба $\bar{\mathbf{x}}_B$ с току-що получените стойности за $\bar{\mathbf{x}}_{B_{\text{нов}}}$ и прилагаме двойствения симплекс-метод. Полученото оптимално решение ($x_E = 1$ t, $x_I = 2$ t, $z^* = 7$ хил. лв) е показано в табл. III.1. Виждаме, че недефицитният ресурс, отговарящ на допълнителната променлива s_3, става дефицитен, докато дефицитният ресурс А (допълнителна променлива s_1) вече е недефицитен.

1.2. Добавяне на ново ограничение

Тук имаме следните две възможности:

а) Ако новото ограничение се удовлетворява от текущото оптимално решение, то е или пасивно, или излишно, и затова неговото добавяне не променя полученото оптимално решение.

б) Новото ограничение не се удовлетворява от текущото оптимално решение. Тогава ограничението е активно и с помощта на ДСМ намираме ново допустимо (и оптимално) решение.

Таблица III.1. Оптимално решение на примерната задача с нова дясна страна

B	$\mathbf{c}_B$	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	0	0	0	0	0
x_I	-2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$10/3$
x_E	-3	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$1/3$
s_3	0	0	0	$\boxed{-1}$	1	1	0	-2
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$-4/3$
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$23/3$
x_I	-2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	2
x_E	-3	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	1
s_1	0	0	0	1	-1	-1	0	2
s_4	0	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	0
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	$5/3$	$1/3$	0	7

Да разгледаме тези два случая с конкретни примери. Нека максималната продажба на боя E не е повече от 4 t. Тогава трябва да въведем ограничението $x_E \le 4$. Тъй като при полученото оптимално решение това ограничение очевидно е удовлетворено, то го отнасяме към пасивните. Следователно оптималното решение не се променя.

Нека сега максималната продажба на боя E не е повече от 3 t. Новото ограничение в текущото оптимално решение не е удовлетворено. Затова е необходимо да намерим допустимо решение. Най-напред въвеждаме ново ограничение от каноничен вид, като добавяме нова допълнителна променлива s_5:

$$x_E + s_5 = 3, \quad s_5 \ge 0.$$

Изразяваме базисните променливи, участващи в това ограничение, чрез небазисните и ги заместваме в него. Понеже x_E е базисна променлива в текущото оптимално решение, изразяваме я от нейното уравнение в СТ (вж. втори ред на третата итерация в табл. I.2)

$$x_E - \tfrac{1}{3}s_1 + \tfrac{2}{3}s_2 = \tfrac{10}{3}$$

чрез небазисните променливи s_1 и s_2:

$$x_E = \tfrac{10}{3} + \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{2}{3}s_2.$$

Заместваме x_E в новото ограничение

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 + s_5 = 3.$$

Окончателно

$$\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2 + s_5 = -\frac{1}{3}.$$

Въвеждаме нов ред (с модифицираното ново ограничение) и нов стълб (с новата допълнителна променлива s_5 като базисна) в СТ и използваме ДСМ за намиране на допустимо решение (вж. табл. III.2), което е новото оптимално решение $x_E^* = 3\,\mathrm{t}$, $x_I^* = \frac{3}{2}\,\mathrm{t}$, $z^* = 12$ хил. лв. Новата стойност на целевата функция е по-лоша, тъй като добавянето на активно ограничение не може да подобри стойността на целевата функция.

Таблица III.2. Оптимално решение на примерната задача с ново ограничение

B	$\mathbf{c}_B$	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		−3	−2	0	0	0	0	0	0
x_I	−2	0	1	2/3	−1/3	0	0	0	4/3
x_E	−3	1	0	−1/3	2/3	0	0	0	10/3
s_3	0	0	0	−1	1	1	0	0	3
s_4	0	0	0	−2/3	1/3	0	1	0	2/3
s_5	0	0	0	1/3	$\boxed{-2/3}$	0	0	1	−1/3
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3
x_I	−2	0	1	1/2	0	0	0	−1/2	3/2
x_E	−3	1	0	0	0	0	0	1	3
s_3	0	0	0	−1/2	0	1	0	3/2	5/2
s_4	0	0	0	−1/2	0	0	1	1/2	1/2
s_2	0	0	0	−1/2	1	0	0	−3/2	1/2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	1	0	0	0	2	12

2. Изменения в условията на задачата, влияещи върху оптималността на решението

Текущото решение престава да бъде оптимално само ако относителните оценки на небазисните променливи не удовлетворяват критерия за оптималност. От формулата $\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ се вижда, че относителните оценки са равни на разликата между десните и левите страни на ограниченията на двойствената задача. Следователно върху оптималността на текущото решение могат да повлияят промени в стълбовете на матрицата **A** и/или в коефициентите на целевата функция. Отначало ще разгледаме отделно тези два случая. Случаят, когато имаме и едното, и другото, ще разгледаме чрез включване на ново производство. Във всички случаи имаме една единствена работа — проверка на критерия за оптималност за новите относителни оценки.

2.1. Изменения в коефициентите на целевата функция

Да припомним, че при определяне на двойствените оценки се използват коефициентите на целевата функция пред базисните променливи. След това тези двойствени оценки се заместват в ограниченията на двойствената задача и така се пресмятат относителните оценки. Възможни са два варианта:

а) При изменения в коефициентите на текущите базисни променливи трябва отново да се пресметнат двойствените оценки и след това да се използват за получаването на относителните оценки.

б) Ако промените са само в коефициенти на небазисни променливи, използват се текущите двойствени цени (получени непосредствено от СТ) и се пресмятат относителните оценки само на съответните небазисни променливи (чиито коефициенти в целевата функция са променени). СТ не претърпява никакви други изменения.

Нека в *примерната задача* целевата функция е $5x_E + 4x_I$. Променени са коефициентите пред базисните променливи. Тогава

$$\boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}} = (-4, -5, 0, 0)\mathbf{B}^{-1} = (-1, -2, 0, 0),$$

откъдето

$$\bar{c}_1 = -\pi_1^* = 1, \quad \bar{c}_2 = -\pi_2^* = 2.$$

В този случай оптималното решение не се променя. Променя се само стойността на целевата функция — тя става равна на 22 (хил. лв).

Да разгледаме друг пример. Нека целевата функция е $4x_E + x_I$. Тогава

$$\boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}} = (-1, -4, 0, 0)\mathbf{B}^{-1} = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{7}{3}, 0, 0\right).$$

Относителната оценка на s_1 е $-\frac{2}{3}$ и следователно критерият за оптималност не е изпълнен. Въвеждаме s_1 в базиса и намираме ново оптимално решение $x_E^* = 4\,\mathrm{t}$, $x_I^* = 0\,\mathrm{t}$, $z^* = 16$ (хил. лв) с помощта на правия СМ (вж. табл. III.3).

Таблица III.3. Оптимално решение на примерната задача с нова целева функция

B	$\mathbf{c}_B$	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-4	-1	0	0	0	0	0
x_I	-1	0	1	$\boxed{2/3}$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_E	-4	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	$-2/3$	$7/3$	0	0	$44/3$
s_1	0	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_E	-4	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	0	2	0	0	16

2.2. Изменения в елементи на матрицата A

Промяната в коефициент, който характеризира разхода на ресурс за единица продукция на някое производство, може да повлияе само на оптималността на решението, тъй като това изменение е свързано с лявата страна на съответното двойствено ограничение. Отново ще разгледаме само промени на елементи пред небазисна променлива.

Нека в *примерната задача* целевата функция е $4x_E + x_I$. Оптималното решение в този случай е представено в табл. III.3. Променливата x_I е небазисна и можем да направим анализ на последствията, до които ще доведе изменението на коефициент пред тази променлива в някое ограничение. Да предположим, че разходите на суровините A и B за производството на 1 t боя I са равни на 4 t и 3 t вместо съответно 2 t и 1 t. Тогава съответното двойствено ограничение има вида

$$4\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \leq -1.$$

Тъй като целевата функция не се променя, двойствените оценки ще бъдат същите както в табл. III.3. Тогава

$$\overline{c}_I = -1 - (4.0 + 3.(-2) + 1.0 + 1.0) = 5 > 0.$$

Следователно оптималното решение остава такова при посочените промени.

Вместо да разгледаме как се получава ново оптимално решение в случая, когато новата относителна оценка не удовлетворява критерия за оптималност, ще разгледаме по-общия случай.

2.3. Добавяне на ново производство

Новият вид производство може да се разглежда като наличието на такава небазисна променлива, която има нулеви коефициенти в целевата функция и във всички ограничения (съответният коефициент $c_j = 0$, стълбът $\mathbf{A}_j = \mathbf{0}$ и $\bar{c}_j = 0$). Стойностите на съответните коефициенти на новото производство ще представляват промени относно нулевото ниво.

В *примерната задача* се интересуваме от производството на по-евтина боя за външно боядисване, изискваща по $\frac{3}{4}$ t от суровините A и B за 1 t краен продукт. Съотношението между обемите на производство на бои за външно и вътрешно боядисване, даващо третото ограничение, остава в сила. В новата формулировка на това ограничение трябва да се вземат предвид двата вида боя за външно боядисване. Печалбата от 1 t от новата боя е $\frac{3}{2}$ хил. лв.

Нека производството на новата боя е x_7 t. Тогава задачата е

$$\max z = 3x_E + 2x_I + \tfrac{3}{2}x_7$$

при ограничения

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I + \tfrac{3}{4}x_7 &\le 6,\\ 2x_E + x_I + \tfrac{3}{4}x_7 &\le 8,\\ -x_E + x_I - x_7 &\le 1,\\ x_I &\le 2,\\ x_E \ge 0,\ x_I \ge 0,\ x_7 &\ge 0. \end{aligned}$$

Първият етап е свързан с анализ на съответното ограничение на двойствената задача

$$\tfrac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{3}{4}\pi_2 - \pi_3 \le -\tfrac{3}{2}.$$

В изходната таблица x_7 се разглежда като небазисна променлива, затова двойствените оценки не се променят. Тогава в таблицата, съответна на оптималното решение, относителната оценка на x_7, пресметната чрез съответното ограничение на двойствената задача, е

$$\bar{c}_7 = -\tfrac{3}{2} - \left(\tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{4}{3}\right) - 1.0\right) = -\tfrac{1}{4} < 0.$$

Следователно, ако променливата x_7 стане положителна (т. е. x_7 влезе в базиса), стойността на целевата функция ще се подобри.

СТ, съответна на текущото оптимално решение, се модифицира по следния начин: въвежда се нов стълб за x_7 с относителна оценка $-\frac{1}{4}$. Съответните коефициенти в стълба на x_7 се пресмятат по формулата $\mathbf{w}_7 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_7 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$. Вкарваме x_7 в базиса и получаваме търсеното оптимално решение $x_E^* = 2\,\mathrm{t}$, $x_I^* = 0\,\mathrm{t}$, $x_7^* = \frac{16}{3}\,\mathrm{t}$, $z^* = 14$ хил. лв (табл. III.4). Вижда се, че новото производство не може да участва в оптималното решение, ако не подобрява стойността на целевата функция. Този резултат е противоположен на получения при анализа на включване на ново ограничение: новото ограничение никога не подобрява стойността на целевата функция. Действително, ако новото ограничение е активно, то трябва само да влоши оптималната стойност на целевата функция.

Таблица III.4. Добавяне на ново производство

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_E	x_I	s_1	s_2	s_3	s_4	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	0	0	0	0	$-3/2$	0
x_I	-2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$\boxed{1/4}$	$4/3$
x_E	-3	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$1/4$	$10/3$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	-1	3
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$-1/4$	$2/3$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$-1/4$	$38/3$
x_7	$-3/2$	0	4	$8/3$	$-4/3$	0	0	1	$16/3$
x_E	-3	1	-1	-1	1	0	0	0	2
s_3	0	0	4	$5/3$	$-1/3$	1	0	0	$25/3$
s_4	0	0	1	0	0	0	1	0	2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	1	1	0	0	0	14

Задачи

1. Дадена е задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 \qquad - 2x_3 &\geq 3, \\ x_1 \qquad - \ x_3 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Оптималните решения на съответните канонична и M-задача са дадени в табл. IV.1.

Таблица IV.1

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	4	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	1	1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	-1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	$M-1$	4

Как ще се промени намереното оптимално решение, ако в условието на задачата бъдат извършени поотделно следните промени:

1) Векторът с десните страни на ограниченията е променен на:
а) $\mathbf{b}_{\text{нов}} = (2, 3, 1)^{\mathrm{T}}$, б) $\mathbf{b}_{\text{нов}} = (2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, в) $\mathbf{b}_{\text{нов}} = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

2) Добавено е ново ограничение:
а) $2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$, б) $x_1 \leq \frac{1}{2}$.

3) Променена е целевата функция:

   а) $z_{\text{нов}} = 3x_1 - x_2 + 2x_3$,

   б) $z_{\text{нов}} = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$,

   в) след решаването на подточка 1) в) $z_{\text{нов}} = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$.

4) Добавена е нова променлива $x_7 \geq 0$, за която:
а) $c_7 = 1$, $A_7 = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$; б) $c_7 = 10$, $A_7 = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

5) След решаването на подточка 3) в) е променен стълбът A_1, като $A_1^{\text{нов}} = (2, 3, 1)^{\mathrm{T}}$.

Отговори и решения

1. От табл. IV.1 се вижда, че задачата има оптимално решение $\mathbf{x}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$.

1) Тъй като първоначалният базис е бил $[x_2, x_6, x_5]$, то

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Стълбът на изкуствената променлива x_6 служи само за намирането на $\mathbf{B}^{-1}$.

а) $\bar{\mathbf{x}}_B^{\text{нов}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_{\text{нов}} = (9, 2, -1)^{\mathrm{T}}$. Променливата x_1 трябва да бъде изключена от базиса, но това не може да стане, тъй като в реда ѝ няма положително число. Следователно в този случай допустимото множество на задачата е празно.

б) $\bar{\mathbf{x}}_B^{\text{нов}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_{\text{нов}} = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Следователно $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и $z_{\max} = 4$.

в) $\bar{\mathbf{x}}_B^{\text{нов}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_{\text{нов}} = (-5, -1, 3)^{\mathrm{T}}$. Намирането на новото оптимално решение е показано в табл. IV.2. Следователно $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \left(\frac{7}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$ и $z_{\max} = \frac{19}{4}$.

Таблица IV.2

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		−3	−1	−2	2	0	0	0
x_2	−1	0	1	0	0	$\boxed{-4}$	−5	−5
x_3^-	2	0	0	−1	1	−1	−1	−1
x_1	−3	1	0	0	0	1	2	3
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	6
x_4	0	0	−1/4	0	0	1	5/4	5/4
x_3^-	2	0	−1/4	−1	1	0	1/4	1/4
x_1	−3	1	1/4	0	0	0	3/4	7/4
$\bar{\mathbf{c}}$		0	1/4	0	0	0	7/4	19/4

2) а) Векторът $\mathbf{x}^*$ удовлетворява новото ограничение и следователно $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \mathbf{x}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$.

б) Векторът $\mathbf{x}^*$ не удовлетворява новото ограничение. Свеждаме го до ограничение в каноничен вид $x_1 + x_7 = \frac{1}{2}$, $x_7 \geq 0$, след което изключваме от него базисните променливи (x_1) и го въвеждаме в СТ

$$x_1 = 1 - x_4 - 2x_5 \Rightarrow -x_4 - 2x_5 + x_7 = -\tfrac{1}{2},$$

след което търсим допустимо базисно решение. Резултатите са отразени в табл. IV.3. Оттам намираме търсеното оптимално бдр $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \left(\frac{1}{2}, 5, -\frac{3}{2}\right)$ $z_{\max} = \frac{7}{2}$.

Таблица IV.3

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	0	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	0	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	0	1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	0	1
x_7	0	0	0	0	0	$\boxed{-1}$	-2	1	$-1/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	0	4
x_2	-1	0	1	0	0	0	3	-4	5
x_3^-	2	0	0	-1	1	0	1	-1	$3/2$
x_1	-3	1	0	0	0	0	0	1	$1/2$
x_4	0	0	0	0	0	1	2	-1	$1/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	0	1	1	$7/2$

3) а) В този случай е променен векторът $\mathbf{c}_B$ и $\mathbf{c}_B^{\text{нов}} = (1, 2, -3)^{\mathrm{T}}$. Пресмятаме относителните оценки на всички небазисни променливи

$$\begin{aligned}
\overline{c}_3^{+\text{нов}} &= 0,\\
\overline{c}_4^{\text{нов}} &= 0 - \mathbf{c}_B^{\text{нов}\,\mathrm{T}}(-4, -1, 1)^{\mathrm{T}} = 9 > 0,\\
\overline{c}_5^{\text{нов}} &= 0 - \mathbf{c}_B^{\text{нов}\,\mathrm{T}}(-5, -1, 2)^{\mathrm{T}} = 13 > 0
\end{aligned}$$

и следователно $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \mathbf{x}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$, $z_{\max} = -2$.

б) В този случай е променен векторът $\mathbf{c}_B$ и $\mathbf{c}_B^{\text{нов}} = (-2, 2, -3)^{\mathrm{T}}$. Пресмятаме относителните оценки на всички небазисни променливи

$$\begin{aligned}
\overline{c}_3^{+\text{нов}} &= 0,\\
\overline{c}_4^{\text{нов}} &= 0 - \mathbf{c}_B^{\text{нов}\mathrm{T}}(-4, -1, 1)^{\mathrm{T}} = -3 < 0,\\
\overline{c}_5^{\text{нов}} &= 0 - \mathbf{c}_B^{\text{нов}\mathrm{T}}(-5, -1, 2)^{\mathrm{T}} = -2 < 0
\end{aligned}$$

и следователно критерият за оптималност не е изпълнен. С помощта на правия симплекс метод търсим и намираме ново оптимално решение $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = (0, 7, -2)^{\mathrm{T}}$, $z_{\max} = 10$ (табл. IV.4, като стълбът на изкуствената променлива x_6 е необходим за едно от следващите подусловия на задачата).

Таблица IV.4

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	-2	2	0	0	M	0
x_2	-2	0	1	0	0	-4	-5	4	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	1	1
x_1	-3	1	0	0	0	$\boxed{1}$	2	-1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	-3	-2	$M-1$	7
x_2	-2	4	1	0	0	0	3	0	7
x_3^-	2	1	0	-1	1	0	1	0	2
x_4	0	1	0	0	0	1	2	-1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		3	0	0	0	0	4	M	10

в) Променен е само коефициентът в целевата функция пред небазисната променливата x_2. Пресмятаме само относителната оценка

$$\overline{\mathbf{c}}_2^{\text{нов}} = -2 - (0, 2, -3)\left(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}} = -\tfrac{3}{4} < 0.$$

Критерият за оптималност не е изпълнен. С помощта на правия симплекс метод търсим и намираме ново оптимално решение $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = (0, 7, -2)^{\mathrm{T}}$, $z_{\max} = 10$ (табл. IV.5).

4) а) В този случай

$$\mathbf{w}_7 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-1\\3\end{bmatrix},$$

Таблица IV.5

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	0
x_4	0	0	$-1/4$	0	0	1	$5/4$	$5/4$
x_3^-	2	0	$-1/4$	-1	1	0	$1/4$	$1/4$
x_1	-3	1	$\boxed{1/4}$	0	0	0	$3/4$	$7/4$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$-3/4$	0	0	0	$7/4$	$19/4$
x_4	0	1	0	0	0	1	2	3
x_3^-	2	1	0	-1	1	0	1	2
x_2	-2	4	1	0	0	0	3	7
$\overline{\mathbf{c}}$		3	0	0	0	0	4	10

откъдето $\overline{c}_7 = -1 - (-1, 2, -3)\mathbf{w}_7 = 5 > 0$ и следователно $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = (1, 3, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

б) Сега $\overline{c}_7 = -10 - (-1, 2, -3)\mathbf{w}_7 = -4 < 0$. Следователно търсим ново оптимално решение с правия симплекс метод (табл. IV.6). Накрая получаваме $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \left(0, \frac{14}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ и $z_{\max} = \frac{16}{3}$.

Таблица IV.6

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	-10	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	-5	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	-1	1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	$\boxed{3}$	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	-4	4
x_2	-1	$5/3$	1	0	0	$-7/3$	$-5/3$	0	$14/3$
x_3^-	2	$1/3$	0	-1	1	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$
x_7	-10	$1/3$	0	0	0	$1/3$	$2/3$	1	$1/3$
$\overline{\mathbf{c}}$		$4/3$	0	0	0	$7/3$	$17/3$	0	$16/3$

5) В този случай

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

откъдето $\mathbf{w}_1^{\text{нов}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1^{\text{нов}} = (5, 1, -1)^{\mathrm{T}}$. Така

$$\overline{c}_1^{\text{нов}} = -3 - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_1^{\text{нов}} = -3 - (-2, 2, 0)(5, 1, -1)^{\mathrm{T}} = 5 > 0.$$

Следователно оптималното решение се запазва $\mathbf{x}^*_{\text{нов}} = \mathbf{x}^* = (0, 7, -2)^{\mathrm{T}}$.