ПАРАМЕТРИЧНО ЛИНЕЙНО ОПТИМИРАНЕ

Параметричното линейно оптимиране е метод за изследване на промените в оптималното решение на задачата на линейното оптимиране, които са предизвикани от предварително зададени непрекъснати изменения в изходните данни на линейния модел. Методите на параметричното оптимиране и методите на следоптималния анализ имат еднаква теоретична основа. Главното различие на тези методи се заключава в това, че при параметричния анализ се разглеждат не дискретни, а непрекъснати изменения на данните на линейната задача. Да отбележим, че функциите, с помощта на които се дава изменението на данните на модела, не е задължително да бъдат линейни. Преимуществото на използването на линейни функции се състои само в това, че пресмятанията са по-малко трудоемки. Затова и ние ще се задоволим само с параметричен анализ, в който функциите са линейни.

Както и при следоптималния анализ, ще разгледаме промени

- във вектора с коефициентите на целевата функция $\mathbf{c}$;
- във вектора с десните страни на ограниченията $\mathbf{b}$;
- в матрицата $\mathbf{A}$;
- едновременно във векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$.

Нека t е параметър, в зависимост от който се изменят различните данни на задачата. При параметричния анализ най-напред се определя оптималното решение при някаква начална стойност на параметъра. Това обикновено е $t = 0$. След това с помощта на условията за оптималност и допустимост, използвани от СМ, се намира интервал $(0, t_1)$ за t, в който намереното при $t = 0$ решение остава оптимално. Това означава, че при $t > t_1$ намереното решение ще бъде или недопустимо, или неоптимално[1]. Така за $t = t_1$ тряб-

[1] Случаят, когато при $t > t_1$ намереното решение е и недопустимо, и неоптимално, няма да бъде разглеждан.

ва да се намери ново решение, което да остава оптимално и допустимо за $t \in (t_1, t_2)$, $t_2 > t_1$. След това процесът се повтаря. В края на краищата се намира точка t_i, такава че за всички стойности $t > t_i$ или намереното за $t = t_i$ оптимално решение остава такова (т. е. $t_2 = +\infty$), или задачата няма решение (било поради неограничена целева функция или поради несъвместимост на ограниченията). С това параметричният анализ завършва. Числата t_i се наричат *критични стойности* на параметъра t.

Случаят $t < 0$ лесно се свежда до случая $t > 0$ чрез елементарната смяна на променливите $\tau = -t$, $\tau > 0$.

1. Параметрично изменение на вектора с коефициенти на целевата функция

Нека $\mathbf{c}(t)$ е векторът с коефициенти на целевата функция, който зависи от параметър t. Нека $\mathbf{B}_i$ е матрицата на базиса на оптималното решение, съответстваща на критичната стойност t_i на параметъра. Ще покажем как се определя критичната стойност t_{i+1} и съответният нов оптимален базис. За начална стойност на t избираме $t_0 = 0$ с матрица на базиса на оптималното решение $\mathbf{B}_0$.

Известно е, че изменението на вектора $\mathbf{c}$ може да повлияе само оптималността на текущото решение. Затова решението $\mathbf{x}_B^{(i)} = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{b}$ ще бъде оптимално за всички стойности на $t \geq t_i$, за които

$$\overline{c}_j(t) = c_j(t) - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{A}_j \geq 0$$

за всяко небазисно j. Нека тази система от неравенства е изпълнена за $t \in (t_i, t_{i+1})$, където t_{i+1} е най-малката стойност на t, при надхвърлянето на която поне едно от неравенствата вече не е вярно. Да отбележим, че тези неравенства не изискват $\mathbf{c}(t)$ да се изменя линейно по t, т. е. допустима е функционална зависимост от произволен вид.

Пример 1. За $t \geq 0$ да се изследва изменението на оптималните решения на задачата

$$\min z = (6t-3)x_1 + (2t-2)x_2 - (5t+5)x_3,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40, \\ 3x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 &\leq 60, \\ x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &\leq 30, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Тук $\mathbf{c}(t) = (6t - 3, 2t - 2, -5t - 5)^{\mathrm{T}}$. Параметричният анализ започва от $t = t_0 = 0$. СТ с оптималното решение, съответстваща на тази стойност на параметъра, е показана на табл. 1. В нея фигурират и въведените

Таблица 1. Оптимално решение на задачата от пример 1 за $t = 0$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	-5	0	0	0	0
x_2	-2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	5
x_3	-5	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	30
x_6	0	2	0	0	-2	1	1	10
$\overline{\mathbf{c}}$		4	0	0	1	2	0	160

в съответните ограничения допълнителни променливи x_4, x_5, x_6. Сега да въведем параметъра t в коефициентите на x_1, x_2, x_3 и в стълба $\mathbf{c}_B$, след което да пресметнем отново относителните оценки на небазисните променливи. Така получаваме табл. 2.

Таблица 2. Оптимално решение на задачата от пример 1 за $t = 0$. Коефициентите и относителните оценки вече зависят от t

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		$6t - 3$	$2t - 2$	$-5t - 5$	0	0	0	0
x_2	$2t - 2$	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	5
x_3	$-5t - 5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	30
x_6	0	2	0	0	-2	1	1	10
$\overline{\mathbf{c}}$		$14t + 4$	0	0	$1 - t$	$3t + 2$	0	$160 + 140t$

Определяме първата критична стойност на $t = t_1$. За тази цел решаваме системата неравенства за неотрицателност на относителните оценки на небазисните променливи

$$14t + 4 \geq 0, \qquad 1 - t \geq 0, \qquad 3t + 2 \geq 0.$$

За $t \geq 0$ първото и третото неравенство винаги са изпълнени, а второто е вярно за $t \leq 1$. Това означава, че $t_1 = 1$ е критична стойност за параметъра t и $\mathbf{x}_B^{(0)} = \overline{\mathbf{x}}_B$ остава оптимален в интервала $(t_0, t_1) = (0, 1)$.

Да отбележим, че $\overline{c}_4(t) = 0$ при $t = 1$ и $\overline{c}_4(t) < 0$ при $t > 1$. Това означава, че при $t > 1$ променливата x_4 влиза в базиса, а променливата x_2 излиза от базиса. При $t = 1$ получаваме ново оптимално бдр (вж. табл. 3). Това решение остава оптимално за $t \in (t_1, t_2)$, където t_2 е следващата критична стойност на параметъра t.

Таблица 3. Оптимално решение на задачата от пример 1.
Определяне на втората критична стойност на параметъра t

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	0
x_4	0	$-1/2$	2	0	1	$-1/2$	0	10
x_3	$-5t-5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	30
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\overline{\mathbf{c}}$		$27t/2+9/2$	$2t-2$	0	0	$5t/2+5/2$	0	$150+150t$

Отново решаваме системата неравенства за неотрицателност на относителните оценки на небазисните променливи (първото и третото неравенство са умножени по 2, а второто е разделено на 2):

$$27t + 9 \geq 0, \qquad t - 1 \geq 0, \qquad 5t + 5 \geq 0.$$

Лесно се убеждаваме, че горната система е съвместима за всички стойности на параметъра $t > 1$. Следователно $t_2 = +\infty$. Оптималните решения на изходната задача като функция на параметъра t са следните:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 1$	0	5	30	$-160 - 140t$
$t \geq 1$	0	0	30	$-150 - 150t$

При получаването на оптималното решение за началната стойност на параметъра пресмятанията могат да бъдат направени, като параметърът t присъства в коефициентите на целевата функция, но до получаването на оптималното решение в относителните оценки винаги считаме, че $t = 0$. Този подход за пример 1 е демонстриран в табл. 4. Така третата СТ отговаря на оптималното решение при $t = 0$. Оттам е определена и първата критична точка $t_1 = 1$. След това се вижда, че новият оптимален базис (при $t \geq 1$) вече се намира във втората СТ и без повече СТ се прави съответният параметричен анализ.

Таблица 4. Симплексни таблици за задачата от пример 1

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	0
x_4	0	1	2	1	1	0	0	40
x_5	0	3	0	$\boxed{2}$	0	1	0	60
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\overline{\mathbf{c}}$		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	0
x_4	0	$-1/2$	$\boxed{2}$	0	1	$-1/2$	0	10
x_3	$-5t-5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	30
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\overline{\mathbf{c}}$		$27t/2+9/2$	$2t-2$	0	0	$5t/2+5/2$	0	$150+150t$
x_2	$2t-2$	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	5
x_3	$-5t-5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	30
x_6	0	2	0	0	-2	1	1	10
$\overline{\mathbf{c}}$		$14t+4$	0	0	$1-t$	$3t+2$	0	$160+140t$

2. Параметрично изменение на десните страни на ограниченията

Нека $\mathbf{b}(t)$ е векторът с десните страни на ограниченията. Оптималното решение $\mathbf{x}_B^{(i)}$ остава допустимо, докато е изпълнено условието

$$\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Пример 2. За $t \geq 0$ да се изследва изменението на оптималните решения на задачата

$$\min z = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 - t, \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 &\leq 60 + 2t, \\ x_1 + 4x_2 \qquad &\leq 30 - 7t, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Решение. При $t = t_0 = 0$ задачата е същата както в пример 1. Затова можем да използваме табл. 1. Въвеждаме параметъра t в стълба $\overline{\mathbf{x}}_B$, като пресмятаме новите базисни координати по формула (1):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 - t \\ 60 + 2t \\ 30 - 7t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Първата критична стойност t_1 намираме, като решим системата неравенства за неотрицателност на базисните координати

$$5 - t \geq 0, \qquad 30 + t \geq 0, \qquad 10 - 3t \geq 0.$$

Неравенствата са изпълнени при $t \leq \frac{10}{3}$. Тогава $t_1 = \frac{10}{3}$ и базисът, съответстващ на $\mathbf{B}_0$, се запазва в интервала $\left(0, \frac{10}{3}\right)$.

Въпреки че при $0 \leq t \leq \frac{10}{3}$ базисът $\mathbf{B}_0$ остава същият, стойностите на базисните променливи x_2, x_3, x_6 се изменят по формулите (2). Стойността на целевата функция е

$$z = -2(5 - t) - 5(30 + t) = -160 - 3t, \qquad t \in \left[0, \tfrac{10}{3}\right].$$

В точката $t = t_1 = \frac{10}{3}$ променливата x_6 е 0. Ако t расте, x_6 става отрицателна. Затова в критичната точка $t = t_1 = \frac{10}{3}$ с помощта на двойствения симплекс метод можем да определим алтернативен базис $\mathbf{B}_1$, като x_6 излиза от базиса (вж. табл. 5). Единственото отрицателно число в реда на x_6 в първата СТ е -2 и това е ключовото число (водещият елемент). Следователно x_4 влиза в базиса. След една итерация с ДСМ получаваме втората СТ на табл. 5.

Таблица 5. Решение на задачата от пример 2

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-2	-5	0	0	0	0
x_2	-2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	$5 - t$
x_3	-5	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	$30 + t$
x_6	0	2	0	0	$\boxed{-2}$	1	1	$10 - 3t$
$\overline{\mathbf{c}}$		4	0	0	1	2	0	$160 + 3t$
x_2	-2	$1/4$	1	0	0	0	$1/4$	$(30 - 7t)/4$
x_3	-5	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	$30 + t$
x_4	0	-1	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$(-10 + 3t)/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		5	0	0	0	$5/2$	$1/2$	$165 + 3t/2$

Следващата критична точка t_2 на параметъра определяме от системата неравенства (първото е умножено с 4, а второто — с 2)

$$30 - 7t \geq 0, \qquad 30 + t \geq 0, \qquad -10 + 3t \geq 0.$$

Базисът остава допустим при $\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$.

В точката $t = t_2 = \frac{30}{7}$ с помощта на ДСМ се опитваме да намерим алтернативен базис, от който x_2 е изключена. Тъй като всички числа в реда на x_2 във втората СТ на табл. 5 са положителни, то при $t > \frac{30}{7}$ задачата няма допустими точки и параметричният анализ завършва.

Оптималните решения за разглежданата област на изменение на параметъра t са показани в следната таблица:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq \frac{10}{3}$	0	$5 - t$	$30 + t$	$-160 - 3t$
$\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$	0	$\frac{30-7t}{4}$	$30 + t$	$-165 - \frac{3}{2}t$
$t > \frac{30}{7}$	Допустимото множество е празно.			

3. Параметрично изменение на стълб на матрицата A

Нека векторът $\mathbf{A}_j$ е небазисен в оптималното решение на задачата при $t = 0$. Ако $\mathbf{A}_j$ е базисен, то това оказва влияние на матрицата $\mathbf{B}_0^{-1}$ и параметричният анализ в този случай не работи.

Както вече видяхме, промяната в небазисен стълб $\mathbf{A}_j(t)$ води единствено до евентуалната необходимост от включването му в базиса. Векторът $\mathbf{A}_j$ влиза в базиса, ако относителната му оценка $\overline{c}_j(t)$ стане отрицателна (при критерий минимум). Текущият базис $\mathbf{B}_i$ се запазва, докато

$$\overline{c}_j(t) = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_j(t) \geq 0.$$

Това неравенство може да се използва за определяне на следващата критична стойност на параметъра t_{i+1}.

Да отбележим, че включването в базиса на $\mathbf{A}_j$ за $t = t_{i+1}$ води до алтернативен оптимален базис $\mathbf{B}_{i+1}$. При $t > t_{i+1}$ стълбът $\mathbf{A}_j$ влиза в базиса. По-нататъшното продължаване на параметричния анализ съществено се затруднява, тъй като използваният метод вече е непригоден. Затова ще се ограничим само с една критична стойност t_{i+1} при известна в точката $t = t_i$ матрица $\mathbf{B}_i$.

Пример 3. В пример 1 променливата x_1 в точката $t = 0$ се оказва небазисна. Нека $\mathbf{A}_1(t) = (1 + t, 3 - 2t, 1 + 3t)^{\mathrm{T}}$ е единственият стълб на матрицата $\mathbf{A}$, който зависи от параметъра t. От решението на задачата в пример 1 следва, че

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix}.$$

Следователно

$$\overline{c}_1(t) = -3 - (-2, -5, 0) \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \ \ t \\ 3 - 2t \\ 1 + 3t \end{bmatrix} = 4 - 3t.$$

Матрицата $\mathbf{B}_0$ остава базисна, докато $\mathbf{A}_1$ е небазисен вектор, т. е. $4 - 3t \geq 0$. Затова критичната стойност е $t_1 = \frac{4}{3}$.

Като включим $\mathbf{A}_1$ в базиса и изключим $\mathbf{A}_6$, за $t = t_1$ получаваме алтернативно решение. След въвеждането на $\mathbf{A}_1$ в базиса по-нататъшният параметричен анализ е невъзможен.

4. Едновременно параметрично изменение на векторите c и b

В този случай при известен оптимален базис поотделно се проверяват условията за оптималност и допустимост. Нека t' и t'' са следващите критични стойности на параметъра t, получени съответно от условията за оптималност и допустимост. Възможни са три случая:

а) Ако $t' < t''$, то първо се нарушават условията за оптималност. В този случай в точката $t_{i+1} = t'$ с помощта на правия СМ определяме новия оптимален базис $\mathbf{B}_{i+1}$.

б) Ако $t' > t''$, то първо се нарушават условията за допустимост. В този случай новият базис $\mathbf{B}_{i+1}$ в точката $t_{i+1} = t''$ се определя с помощта на ДСМ.

в) Ако $t' = t''$, то условията за оптималност и условията за допустимост се нарушават едновременно в точката $t_{i+1} = t' = t''$. В този случай за намирането на новия оптимален базис следва да се използва прав-двойствен СМ. На този случай няма да се спираме.

Пример 4. За $t \geq 0$ да се изследва изменението на оптималните решения на задачата

$$\min z = (6t - 3)x_1 + (2t - 2)x_2 - (5t + 5)x_3,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 - t, \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 + 2t, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 - 7t, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ &x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Този пример е комбинация от примери 1 и 2. Въпреки това получените за него критични стойности на t не са суперпозиция на съответните критични стойности за примери 1 и 2.

В табл. 6 е дадено решението на задачата от пример 4 с помощта на симплекс таблици. Чрез три итерации с ПСМ получаваме оптималното решение за $t = 0$, като в сметките включваме и параметъра t, но не забравяме, че той е равен на нула. Там $-\bar{c}_0^{(1)} = 150 + 155t + 5t^2$ и $-\bar{c}_0^{(2)} = 160 + 143t + 7t^2$.

1. Определяне на първата критична стойност за параметъра t (тъй като пресмятанията вече са направени при решаването на примери 1 и 2, повечето от тях са пропуснати).

Таблица 6. Решение на задачата от пример 4

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	0
x_4	0	1	2	1	1	0	0	$40-t$
x_5	0	3	0	$\boxed{2}$	0	1	0	$60+2t$
x_6	0	1	4	0	0	0	1	$30-7t$
$\bar{\mathbf{c}}$		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	0
x_4	0	$-1/2$	$\boxed{2}$	0	1	$-1/2$	0	$10-2t$
x_3	$-5t-5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	$30+t$
x_6	0	1	4	0	0	0	1	$30-7t$
$\bar{\mathbf{c}}$		$27t/2+9/2$	$2t-2$	0	0	$5t/2+5/2$	0	$-\bar{c}_0^{(1)}$
x_2	$2t-2$	$-1/4$	1	0	$\boxed{1/2}$	$-1/4$	0	$5-t$
x_3	$-5t-5$	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	$30+t$
x_6	0	2	0	0	-2	1	1	$10-3t$
$\bar{\mathbf{c}}$		$14t+4$	0	0	$1-t$	$3t+2$	0	$-\bar{c}_0^{(2)}$

Оптималност. Намереният базис остава оптимален, докато относителните оценки са неотрицателни, т. е.

$$\bar{c}_{1,4,5}(t) = (14t + 4, 1 - t, 3t + 2)^{\mathrm{T}} \geq 0,$$

откъдето намираме $t' = 1$.

Допустимост. Намереният оптимален базис остава допустим, докато

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{bmatrix} \geq 0,$$

т. е. $t'' = \frac{10}{3}$.

Оптималност и допустимост. $t_1 = \min\{t', t''\} = t' = 1$. Това означава, че първо се нарушава критерият за оптималност. Затова алтернативният базис в точката $t_1 = 1$ се определя с помощта на правия СМ.

2. Алтернативен базис в точката $t = t_1 = 1$. В базиса влиза x_4. За определяне на променливата, която излиза от базиса, постъпваме по правилата на ПСМ, като при определяне на водещия елемент държим сметка за стойността на параметъра t. В стълба на x_4 обаче има единствена положителна координата, което означава, че x_2 излиза от базиса независимо от стойността на t. Необходимият ни нов базис вече се намира във СТ за втората итерация при намирането на оптималното решение за $t = 0$. Така че нови пресмятания не са необходими (това, разбира се, е случайно). Вече можем да се заемем с определянето на новата критична стойност на параметъра t (т. е. t_2).

Оптималност.

$$\bar{c}_{j=1,2,5}(t) = \left(\frac{9 + 27t}{2}, 2t - 2, \frac{5 + 5t}{2}\right)^{\mathrm{T}} \geq 0.$$

Базисът остава оптимален за всяко $t \geq 1$, т. е. $t' = \infty$.

Допустимост.

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 10 - 2t \\ 30 + t \\ 30 - 7t \end{bmatrix} \geq 0.$$

Базисът остава допустим при $t \leq \frac{30}{7}$, т. е. $t'' = \frac{30}{7}$.

Оптималност и допустимост. $t_2 = \min\{t', t''\} = t'' = \frac{30}{7}$, т. е. първо се нарушават условията за допустимост.

3. Алтернативен базис при $t = t_2 = \frac{30}{7}$. Алтернативният базис се определя с помощта на ДСМ, като променливата, която излиза от базиса, е x_6.

В реда на x_6 няма отрицателно число. Така при $t > \frac{30}{7}$ допустими решения няма и параметричният анализ завършва.

Оптималните решения като функция на параметъра t са показани в следната таблица:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \le t \le 1$	0	$5 - t$	$30 + t$	$-7t^2 - 143t - 160$
$1 \le t \le \frac{30}{7}$	0	0	$30 + t$	$-5t^2 - 155t - 150$
$t > \frac{30}{7}$	Допустимото множество е празно.			

Пример 5. За $t \ge 0$ да се изследва изменението на оптималните решения на задачата

$$\begin{aligned} &\min z = (1 + 3t)x_1 + 3x_2 + (5 - t)x_3,\\ &2x_1 + x_2 + x_3 \le t - 3,\\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2 + 3t,\\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Тъй като при $t = 0$ дясната страна на първото ограничение е отрицателна, най-напред умножаваме това ограничение с -1, след което стигаме до следната M-задача

$$\begin{aligned} &\min z = (1 + 3t)x_1 + 3x_2 + (5 - t)x_3 + Mx_6,\\ &-2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 3 - t,\\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 + 3t,\\ &x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Оптималното решение на тази задача при $t = 0$ е показано в табл. 7. Изкуствената променлива x_6 е базисна със стойност 3. Следователно при

Таблица 7. Решение на M-задачата от пример 5

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		$3t + 1$	3	$5 - t$	0	0	M	0
x_6	M	-2	-1	-1	$\boxed{-1}$	0	1	$3 - t$
x_5	0	3	1	2	0	1	0	$3t + 2$
$\bar{\mathbf{c}}$		$3t + 1 + 2M$	$3 + M$	$5 - t + M$	M	0	0	$(t - 3)M$

$t = 0$ каноничната задача, а оттам и дадената задача, има празно допустимо множество. Този факт ще бъде налице, докато $x_6 > 0$. Така получаваме неравенството $3 - t > 0$, откъдето $0 \le t < 3$. Когато $t = 3$, $x_6 = 0$, а за стойности на t, по-големи от 3, $x_6 < 0$ и трябва да напусне базиса. Прилагаме ДСМ. Това е възможно, тъй като в реда на x_6 има отрицателни коефициенти. Тъй като те са четири, търсим (при $t = 3$)

$$\min\left\{\frac{-1-3\cdot 3}{-2}, \frac{-3-M}{-1}, \frac{-5+3-M}{-1}, \frac{-M}{-1}\right\} = \min\{M+5, M+3, M+2, M\} = M.$$

Така от базиса излиза x_4. След елементарно преобразование на СТ с ключово число -1 получаваме СТ, показана в първата част на табл. 8 (изкуствената променлива вече не е необходима и е извадена от СТ).

Таблица 8. СТ за пример 5 при $3 \le t \le 5$ и при $t \ge 5$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		$3t+1$	3	$5-t$	0	0	0
x_4	0	2	1	$\boxed{1}$	1	0	$t-3$
x_5	0	3	1	2	0	1	$3t+2$
$\overline{\mathbf{c}}$		$3t+1$	3	$5-t$	0	0	0
x_3	$5-t$	2	1	1	1	0	$t-3$
x_5	0	-1	-1	0	-2	1	$t+8$
$\overline{\mathbf{c}}$		$5t-9$	$t-2$	0	$t-5$	0	$t^2-8t+15$

Условията за оптималност са $3t + 1 \ge 0$, $5 - t \ge 0$ и $t \ge 3$, откъдето $3 \le t \le 5$. Така определяме $t' = 5$.

Условията за допустимост са $t - 3 \ge 0$, $3t + 2 \ge 0$ и те са изпълнени за всички стойности на $t \ge 3$. Така $t'' = \infty$. Следователно критичната стойност на параметъра t е $t_1 = \min\{t', t''\} = 5$. При $t = 5$ относителната оценка на x_3 е равна на нула, а при $t > 5$ тя става отрицателна. Прилагаме ПСМ. Това е възможно, защото в стълба на x_3 има положително число. За избор на ключово число определяме при $t = 5$

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{17}{2}\right\} = 2.$$

След елементарно преобразование с ключово число 1 получаваме втората част на табл. 8. За да е изпълнен критерият за оптималност, относителните оценки на небазисните променливи $\overline{c}_1(t) = 5t - 9$, $\overline{c}_2(t) = t - 2$ и $\overline{c}_4(t) = t - 5$ трябва да бъдат неотрицателни. Това е изпълнено за произволно $t \geq 5$. Същото важи и за базисните координати $\overline{\mathbf{x}}_B = (t-3, t+8)^{\mathrm{T}}$. Следователно последната СТ съдържа бдр, което е оптимално и допустимо за всяко $t \geq 5$.

Оптималните решения като функция на параметъра t са показани в следната таблица:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t < 3$	Допустимото множество е празно.			
$3 \leq t \leq 5$	0	0	0	0
$t \geq 5$	0	0	$t-3$	$-t^2 + 8t - 15$

Задачи

1. Дадена е задачата

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 - x_3,\\
2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 + 3t,\\
-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq -6 + t,\\
-x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 - t,\\
x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \geq 0$.

2. Дадена е задачата

$$
\begin{aligned}
\min z = (3+t)x_1 + (4-4t)x_2 + 2x_3 + (1+t)x_4&,\\
-x_2 + x_3 &\leq 10 - t,\\
-x_1 - x_2 + x_3 &= 1 - 2t,\\
x_3 + x_4 &= 10 - t,\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4&.
\end{aligned}
$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \geq 0$.

3. Дадена е задачата

$$\begin{aligned} \min z = (1+t)x_1 + (2-2t)x_2 + (1+t)x_3,& \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &\le 2 + 5t, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge -1 - 5t, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 + 3t, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.& \end{aligned}$$

а) Да се намерят всички оптимални решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \ge 0$;

б) С методите на следоптималния анализ да се отговори поотделно на следните два въпроса:

(i) В какъв интервал трябва да се изменя коефициентът пред x_2 в първото ограничение, за да има дадената задача оптимално решение при $t \ge 5$?

(ii) Как се изменя оптималното решение на дадената задача, ако коефициентът пред x_2 в целевата функция е $2 - t$?

в) При $t = 5/2$ съществува ли оптимално решение на дадената задача с допълнително ограничение x_1 да бъде цяло число? Отговорът да се обоснове. Ако той е положителен, да се намерят всички такива оптимални решения.

4. Дадена е задачата

$$\begin{aligned} \min z = (4+t)x_1 + (2-4t)x_2 + (2+t)x_3 + (1+t)x_4,& \\ x_1 - 3x_2 &\le 5 + t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 - t, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 + t, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4.& \end{aligned}$$

а) Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \ge 0$;

б) Като се използват методите на следоптималния анализ, да се посочи как се изменя оптималното решение на дадената задача при $t = 0$ след добавянето на ново ограничение $x_3 \ge 5$.

5. Дадена е задачата

$$\begin{aligned} \max z = (2t+1)x_1 - tx_2 + (2t-1)x_3 + (3t-5)x_4,& \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \le -5t + 6,& \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 6t + 1,& \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 4.& \end{aligned}$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \ge 0$.

При $t = 1$:

а) да се намерят всички оптимални решения на задачата;

б) да се реши задачата, ако е добавено ново ограничение $2x_1 + 2x_3 \le 5$.

6. Дадена е задачата

$$\begin{aligned} \max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3,& \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5 - t,& \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 + t,& \\ x_3 \le 2 + 2t,& \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.& \end{aligned}$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \in [0, 1]$.

7. Дадена е задачата

$$\begin{aligned} \min z = (1+2t)x_1 + (2+t)x_2 - (1-3t)x_3 - (8+t)x_4,& \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1 + 4t,& \\ 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge -5 + 2t,& \\ - x_3 - 3x_4 \ge 1 - 3t,& \\ x_j \ge 0,\ j = 2, 3, 4.& \end{aligned}$$

а) Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \ge 0$;

б) Като се използват методите на следоптималния анализ, да се посочи как се изменя оптималното решение на дадената задача при $t \ge 0$ след добавянето на ново ограничение $x_1 \le 1$.

8. Дадена е задачата

$$\begin{aligned}
\min z = (t+2)x_1 + (3t+2)x_2 + (t+7)x_3 + (2t+5)x_4 - (t+1)x_5,&\\
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad = t + 5,&\\
-x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = -t + 1,&\\
2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 2t + 7,&\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5.&
\end{aligned}$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \geq 0$.

За $t = 0$:

а) да се намери интервал на устойчивост за коефициента пред x_2 във второто ограничение;

б) нека дясната страна е $\mathbf{b} = (2, -1, 2)^{\mathrm{T}}$. С методите на следоптималния анализ да се намери оптимално решение.

9. Дадена е задачата

$$\begin{aligned}
\min z = (t+2)x_1 - (t-3)x_2 + (3t-1)x_3 + 2tx_4 + (2t+1)x_5,&\\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = t + 1,&\\
2x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 \qquad = -t + 3,&\\
-2x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 2t - 1,&\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5.&
\end{aligned}$$

Да се изследва изменението на оптималните решения на дадената задача в зависимост от стойностите на параметъра $t \geq 1$.

За $t = 1$:

а) да се намери интервал на устойчивост за коефициента пред x_1 в първото ограничение;

б) нека векторът на целевата функция е $\mathbf{c} = (4, 2, 2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. С методите на следоптималния анализ да се намери оптимално решение.

Отговори и решения

1. Описание на оптималните решения на дадената задача:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \le t \le 4$	0	0	$2 - \frac{t}{2}$	$\frac{t}{2} - 2$
$4 \le t \le \frac{24}{5}$	0	$\frac{t}{2} - 2$	0	$\frac{3}{2}t - 6$
$t > \frac{24}{5}$	Допустимото множество е празно.			

2. Описание на оптималните решения на дадената задача:

t	x_1	x_2	x_3	x_4	z
$0 \le t \le \frac{1}{2}$	0	0	$1 - 2t$	$9 + t$	$11 + 6t + t^2$
$\frac{1}{2} \le t \le 1$	0	$2t - 1$	0	$10 - t$	$6 + 21t - 9t^2$
$1 \le t \le 10$	0	$9 + t$	$10 - t$	0	$56 - 34t - 4t^2$
$t > 10$	Допустимото множество е празно.				

3. Ще дадем изцяло решението на тази задача.

а) Най-напред в табл. 9 е дадено решението на M-задачата, получена от изходната.

Описание на оптималните решения:

1. При $0 \le t < \frac{3}{2}$ дадената задача няма решение поради празно допустимо множество. Това се вижда от втората СТ на табл. 9, където M-задачата има оптимално решение, но изкуствената променлива x_6 е в базиса с положителна стойност.

2. При $t > 3$ дадената задачата няма оптимално решение поради неограничена целева функция по неограничен ръб на допустимото множество, колинеарен с вектора $\mathbf{d} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

3. При $\frac{3}{2} \le t \le 3$ задачата има две оптимални бдр $\mathbf{x}^* = (5 + 3t, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{**} = \left(6 + \frac{7}{3}t, 0, \frac{2}{3}t - 1\right)^{\mathrm{T}}$.

4. При $t = 3$ всички оптимални решения на дадената задача са $(13+\lambda+\mu, \mu, 1 - \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \ge 0$.

б) (i) За да има задачата оптимално решение при $t = 5$, стълбът $\mathbf{w}_2$ трябва да има поне една положителна координата, за да може да се премине към

Таблица 9. Симплексни таблици за задача 3

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		$t+1$	$-2t+2$	$t+1$	0	0	M	0
x_4	0	$\boxed{1}$	-1	4	1	0	0	$5t+2$
x_5	0	-1	-1	-1	0	1	0	$5t+1$
x_6	M	1	-1	1	0	0	1	$3t+5$
$\overline{\mathbf{c}}$		$t+1-M$	$2-2t+M$	$t+1-M$	0	0	0	$-(3t+5)M$
x_1	$t+1$	1	-1	4	1	0	0	$5t+2$
x_5	0	0	-2	3	1	1	0	$10t+3$
x_6	M	0	0	-3	$\boxed{-1}$	0	1	$-2t+3$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$3-t$	$-3t-3+3M$	$-t-1+M$	0	0	
x_1	$t+1$	1	-1	1	0	0	1	$3t+5$
x_5	0	0	-2	0	0	1	1	$8t+6$
x_4	0	0	0	$\boxed{3}$	1	0	-1	$2t-3$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$3-t$	0	0	0	$-t-1+M$	$-5-8t-3t^2$
x_1	$t+1$	1	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}t+6$
x_5	0	0	-2	0	0	1	1	$8t+6$
x_3	$t+1$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}t-1$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$3-t$	0	0	0	$-t-1+M$	$-5-8t-3t^2$

друг връх, който ще бъде оптимален за тази стойност на параметъра. Нека търсеният коефициент означим с a. От третата СТ пресмятаме

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}^{-1}(a,-1,-1)^{\mathrm{T}} = (-1,-2,a+1)^{\mathrm{T}}.$$

Оттук получаваме $a > -1$. От четвъртата СТ $\mathbf{w}_2 = \left(-\frac{1}{3}a-\frac{4}{3},-2,\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. За неотрицателност на третата координата отново $a > -1$, но тук може и първата координата да бъде неотрицателна, което дава $a < -4$. Окончателно $a \notin [-4,-1]$.

(ii) $\overline{c}_2^{\text{нов}} = c_2^{\text{нов}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 = (c_2+t) - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 = \overline{c}_2 + t = 3$. Така в т. 3 на а) интервалът е $\frac{3}{2} \le t < \infty$ и т. 2 и 4 отпадат.

в) За $t = \frac{5}{2}$ всички оптимални решения на дадената задача са

$$\lambda\left(\frac{25}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}} + (1-\lambda)\left(\frac{71}{6},0,\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Вижда се, че за $\lambda = 0$ е изпълнено $x_1 = \frac{71}{6}$, докато за $\lambda = 1$ съответно $x_1 = \frac{25}{2}$. Единственото цяло число, което се намира в интервала $\left[\frac{71}{6}, \frac{25}{2}\right]$, е 12. Така единственото оптимално решение на дадената задача с допълнителното ограничение x_1 да бъде цяло число, е векторът $\left(12, 0, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ (получава се за $\lambda = 1/4$).

4. а) Описание на оптималните решения на дадената задача ($\lambda \in [0, 1]$):

t	x_1	x_2	x_3	x_4	z
$0 \le t \le \frac{1}{2}$	0	0	$1 - 2t$	$7 + 3t$	$9 + 7t + t^2$
$\frac{1}{2} \le t \le 5$	$2t - 1$	0	0	$9 - t$	$5 + 15t + t^2$
$t = 5$	$9 + 2\lambda$	λ	0	4	105
$t > 5$	Целевата функция е неограничена.				

б) Новото ограничение е несъвместимо с останалите.

5. Описание на оптималните решения:

1. За $t \in \left[0, \frac{3}{23}\right]$ имаме $\mathbf{x}^* = (6t + 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z = 12t^2 + 8t + 1$.
2. За $t \in \left[\frac{3}{23}, 1\right]$ имаме $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{7t+8}{5}, \frac{23t-3}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $z = \frac{-9t^2+26t+8}{5}$.
3. За $t \in (1, \infty)$ имаме неограничена целева функция по крайната посока $\mathbf{d} = (1, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

а) За $t = 1$ задачата има две бдр $\mathbf{x}_1 = (3, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$ и две оптимални крайни посоки $\mathbf{d}_1 = (1, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_2 = (1, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. Тогава всички оптимални решения на задачата се получават по формулата

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\text{опт}} &= \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 + \mu_1\mathbf{d}_1 + \mu_2\mathbf{d}_2\\ &= (1 + 2\lambda + \mu_1 + \mu_2, 4\lambda + \mu_1, 2 - 2\lambda + \mu_2, \mu_1 + 2\mu_2)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

където $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$.

б) След добавянето на ново ограничение получаваме оптимално решение $\mathbf{x}' = \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ със стойност на целевата функция $\frac{17}{4}$. Ако се стартира от другото бдр, може да се получи алтернативното оптимално решение $\mathbf{x}'' = \left(\frac{7}{8}, 0, \frac{13}{8}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

6. Описание на оптималните решения на дадената задача:

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \le t \le \frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{2} - \frac{5}{2}t$	$2t + 2$	$t + 9$
	0	$\frac{9}{2} + \frac{t}{2}$	0	
	0	$6 - 4t$	$3t - 1$	
$\frac{1}{3} \le t \le \frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{2} - \frac{5}{2}t$	$2t + 2$	$t + 9$
	0	$6 - 4t$	$3t - 1$	
$\frac{3}{5} \le t \le \frac{3}{2}$	0	0	$3 + \frac{t}{3}$	$t + 9$
	0	$6 - 4t$	$3t - 1$	
$t \ge \frac{3}{2}$	0	0	$5 - t$	$15 - 3t$

7. а) Описание на оптималните решения на дадената задача:

1. При $t < \frac{1}{3}$ задачата няма решение поради празно допустимо множество (виж последното ограничение).

2. При $t > 1$ задачата няма решение поради неограничена целева функция по крайната посока $\mathbf{d} = (-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

3. При $\frac{1}{3} \le t \le 1$ задачата има две оптимални бдр $\mathbf{x}^* = (3 - 2t, 0, 3t - 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{4}{3} + 3t, 0, 0, t - \frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

б) Оптималното решение на задачата с добавено ограничение $x_1 \le 1$ е $\widetilde{\mathbf{x}} = (1, 2 - 2t, 3t - 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

8. Описание на оптималните решения на дадената задача ($\lambda \in [0, 1]$):

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$t = 0$	0	$\frac{1}{2}(1 - \lambda)$	$\frac{1}{2}(11 - \lambda)$	λ	$\frac{1}{2}(13 + \lambda)$	33
$0 \le t \le 1$	0	0	$t + 5$	$1 - t$	$2t + 7$	$33 - 3t^2$
$t \ge 1$	$t - 1$	0	6	0	9	$31 - 2t + t^2$

а) $a_{22} \in (-\infty, 2]$; б) $(1, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

9. Описание на оптималните решения на дадената задача:

t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$1 \le t \le \frac{8}{7}$	0	$t - \frac{1}{2}$	$2 - t$	$2t + \frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}(27t - 7)$
$\frac{8}{7} \le t \le 2$	$\frac{2-t}{3}$	$\frac{4t+1}{6}$	0	$\frac{10t+13}{6}$	0	$\frac{1}{6}(14t^2 + 37t + 11)$
$t \ge 2$	0	$\frac{t+1}{2}$	0	$\frac{t+9}{2}$	$t - 2$	$\frac{1}{2}(5t^2 + 14t - 1)$

а) $a_{11} \le \frac{3}{2}$; б) $(0, 0, 2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.